Финансовая математика

Временная стоимость денег

к.ф.-м.н. Пепа Р.Ю.

Время в финансовых расчетах.

Необходимость учёта времени, определяется принципом неравноценности денег, относящийся к различным моментом времени (по умолчанию подразумевается год):

- **Деньги могут принести доход при инвестировании на определенный срок**
- **Покупательная способность денег снижается со временем в следствии инфляции.**

- **Датированная сумма** — неравноценность денег во времени выражается в том, что каждая денежная сумма в финансовом анализе представляет собой датированную сумму, т.е. сумму, отнесенную к определений дате.
- **Текущая(приведенная) стоимость** — это сумма денег, отнесенная на начало финансовой операции
- **Итоговая (будущая) стоимость** — это сумма, отнесенная, к концу финансовой операции.

Пример 1.1. В депозитной операции текущая стоимость — это сумма денег, помещаемая на депозитный счёт, итоговая стоимость — это сумма денег, которая накопится на депозитном счете за определенный период времени.

Пример 1.2. В кредитной операции текущая стоимость — это величина выдаваемой сегодня ссуды, итоговая сумма — это сумма денег, которую следует вернуть через определенный промежуток времени.

Наращение и дисконтирование

В зависимости от того, какая из указанных сумм дана и какую нужно найти, выделяют два направления финансовых расчетов: наращение и дисконтирование.

- **Наращение** — определение величины итоговой стоимости по заданной текущей стоимости.
- **Дисконтирование** — определение текущей стоимости по ожидаемой итоговой сумме в будущем.
- **Коэффициент наращение**:

$$B = \frac{S}{P},$$

где S — итоговая стоимость, P — текущая стоимость.

- **Коэффициент дисконтирования**:

$$v = \frac{P}{S}.$$

Процент и дисконт

Результат финансовой операции в абсолютном выражении определяются в виде процента или дисконта с учетом заданного промежутка времени.

- **Процент** — это абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции за определенный промежуток при наращении.
- **Дисконт** — это абсолютная величина убытка, получаемая в результате финансовой за определенный промежуток период при дисконтировании.
- Процентная ставка

$$i = \frac{\Delta F}{F} \cdot 100,$$

F— денежная сумма, ΔF— изменение денежной суммы.

- При **декурсивном** способе проценты начисляются по ставке i в конце периода начисления, базой служит текущая стоимость P
- При **антисипативном** способе проценты начисляются при ставке процента i в начале периода начисления, базой начисления служит итоговая стоимость S.
- В зависимости от способа начисления(декурсивного или антисипативного), процент $I = \frac{Pi}{100}, I = \frac{Si}{100}$

Пример

Пример 1.3 Определить начисленный процент и итоговую сумму депозита — это декурсивный способ начисления. Дано: $P = 80, i = 12\,\%$, найти: I, S.

$$I = \frac{80 \cdot 12}{100} = 9{,}6;$$

$$S = P + I = 80 + 9{,}6 = 89{,}6$$

Пример 1.4. Определить доход банка и величину выданной ссуды, выданной под процент — это антисипативный способ начисления.

Дано: $P = 80, i = 12\,\%$, найти: I, S.

$$I = \frac{80 \cdot 12}{100} = 9{,}6;$$

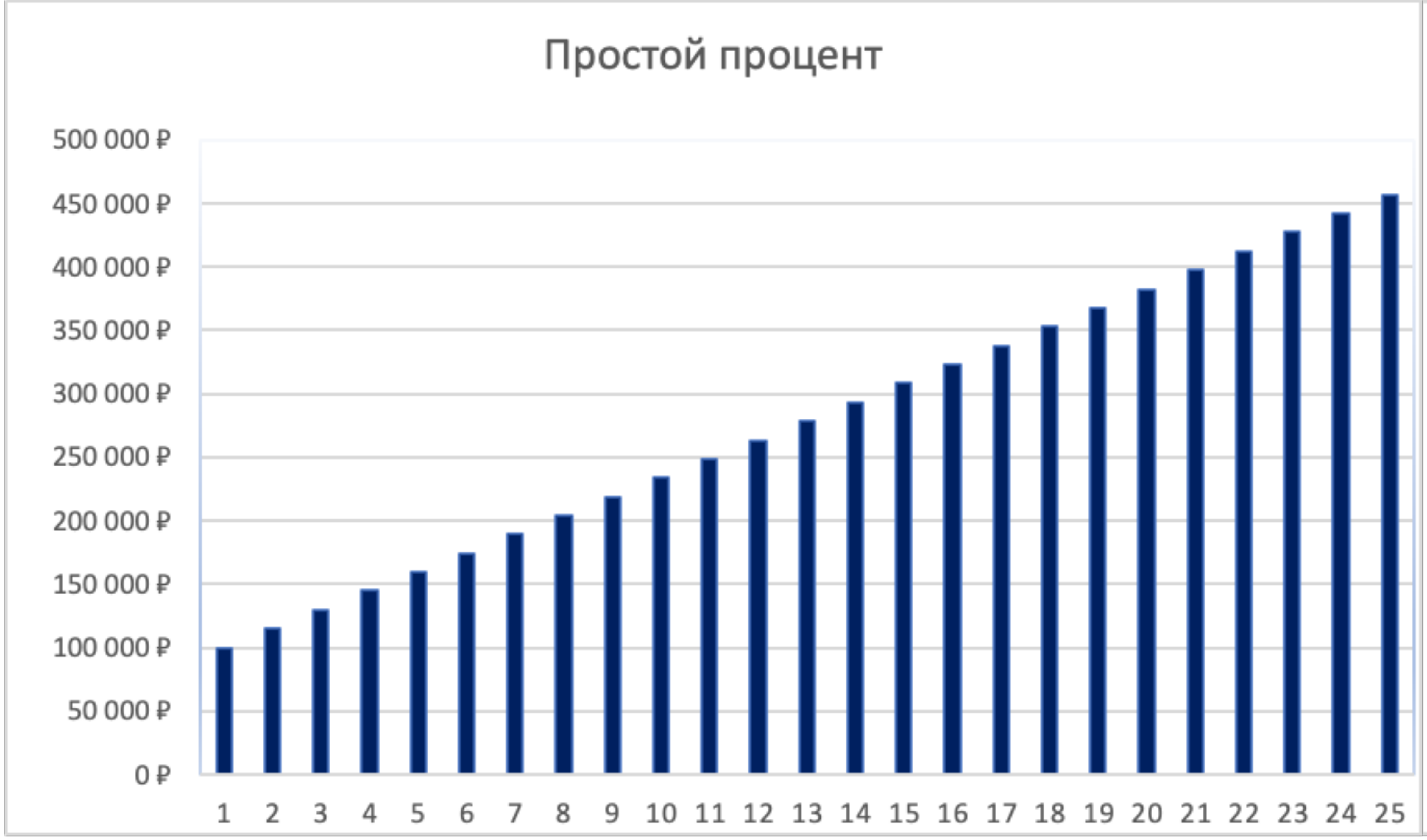
$$S = P - I = 80 - 9{,}6 = 70{,}4$$

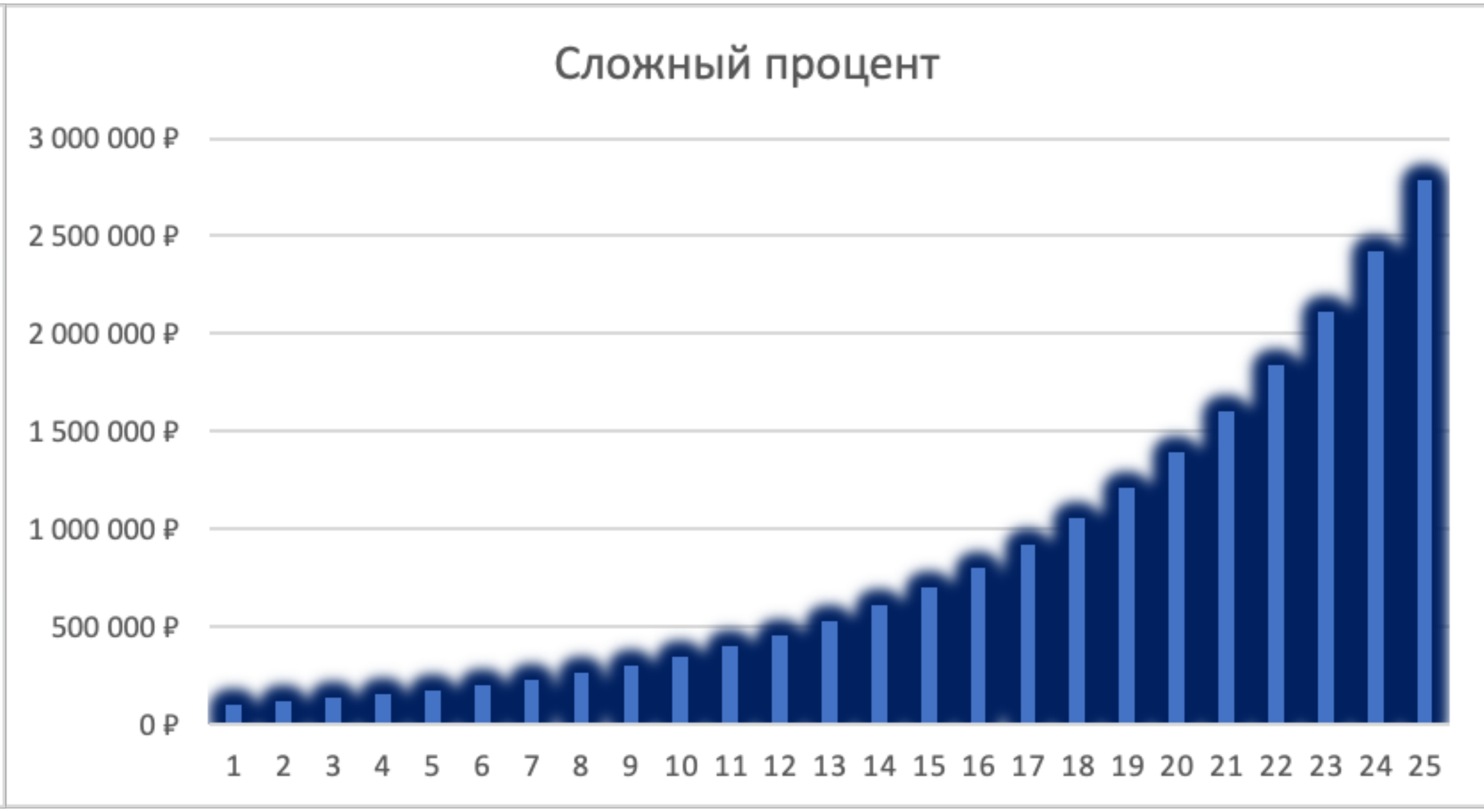
Классификация ставок

Ставки классифицируются в зависимости от способа начисления: декурсивного или антисипативного.

- Процентная ставка $i = \frac{I}{P} \cdot 100$
- Простая ставка — это процент, полученный при использовании простой ставки за определенный период.
- Сложная ставка — это ставка при последовательно начислении процентов за несколько периодов, в каждом из которых — на итоговую стоимость предыдущего периода

Проценты


Простой процент
500 000 ₽
450 000 ₽
400 000 ₽
350 000 ₽
300 000 ₽
250 000 ₽
200 000 ₽
150 000 ₽
100 000 ₽
50 000 ₽
0 ₽
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25


Сложный процент
3 000 000 ₽
2 500 000 ₽
2 000 000 ₽
1 500 000 ₽
1 000 000 ₽
500 000 ₽
0 ₽
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Модель наращения по простой ставке наращения

Дано:

- P **— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- r **— простоя ставка наращения за год (доли)**
- t **— время (в годах)**

Требуется определить I **— процент, начисление за** t **лет, и** S **— итоговую сумму.**

Проценты, полученные в конце каждого года

$I_1 = Pr, I_2 = Pr, I_3 = Pr, \ldots, I_t = Pr$. Суммарный процент $I = \sum_{k=1}^{t} I_k$ или

$I = Prt$. Итоговая сумма S, полученная в результате начисления процентов по простой ставке наращения r pf t лет: $S = P + I = P + Prt$ или

$$S = P(1 + rt)\,.$$

Модель дисконтирования при простой ставке наращения

Дано:

- S**— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- r **— простоя ставка наращения за год (доли)**
- t **— время (в годах)**

Требуется определить D **— дисконт, начисленный за** t **лет, и** P **— текущую стоимость.**

Текущая стоимость P определяется из основной модели простого процента: $P = \dfrac{S}{1 + rt}$. Множитель v дисконтирования определяется по формуле $v = \dfrac{1}{1 + rt}$. Дисконт D определяется в этом случае, как $D = S - P$.

Модель дисконтирования при простой ставке наращения

Дано:

- S**— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- r **— простоя ставка наращения за год (доли)**
- t **— время (в годах)**

Требуется определить D — дисконт, начисленный за t лет, и P — текущую стоимость.

Текущая стоимость P определяется из основной модели простого процента: $P = \dfrac{S}{1+rt}$. Множитель v дисконтирования определяется по формуле $v = \dfrac{1}{1+rt}$. Дисконт D определяется в этом случае, как $D = S - P$.

Модель дисконтирования по простой дискретной ставке

Дано:

- S **— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- d **— простоя ставка наращения за год (доли)**
- t **— время (в годах)**

Требуется определить D **— дисконт, начисленный за** t **лет, и** P **— текущую стоимость.**

Дисконты, полученные в начале каждого года:
$D_1 = Sd, D_2 = Sd, \ldots, D_t = Sd$. Дисконт, полученный за t лет, определяется их суммой: $D = \sum_{k=1}^{t} D_k$, или $D = Sdt$. Текущая стоимость с учетом дисконта: $P = S - D = S - Sdt = S(1 - dt)$

Начисление процентов по простой переменной ставке

Дано: P **— текущая стоимость (постоянная база начисления);** $r_1, r_2, \ldots r_k$ **— последовательность значений, применяемой переменной ставки соотвественно при начислении процентно за** $t_1, t_2, \ldots, t_k$ **лет,** $t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_k$. **Требуется определить простой процент** $I_\sum$**, начисленный за** t **лет, и итоговую сумму** $S_\sum$

Проценты, полученные в конце каждого периода:

$I_1 = Pr_1t_1, I_2 = Pr_2t_2, \ldots, I_k = Pr_kt_k$. Итоговая сумма:

$$S = P + I = P(1 + \sum_{s=1}^{k} r_st_s)$$

Начисление процентов по сложной ставке

Дано:

- P **— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- r **— процентная ставка наращения за период начисления процентов**
- n **— число периодов начислений**

Требуется определить I **— сложный процент и** S **— итоговую сумму.**

Последовательность итоговых стоимостей за n периодов начисления процентов: $S_1 = P + Pi = P(1 + i)$;
$S_2 = S_1 + S_1 i = S_1(1 + i) = P(1 + i)^2$;
$S_3 = S_2 + S_2 i = S_2(1 + i) = P(1 + i)^3$; ….. $S_n = P(1 + i)^n$

$$S = P(1 + i)^n$$

Модель дисконтирования по сложной процентной ставке

Дано:

- S **— текущая стоимость (постоянная база начисления)**
- d **— процентная ставка наращения за период начисления процентов**
- n **— число периодов начислений**

Требуется определить P **— текущую стоимость и** D **— дисконт.**

Последовательность итоговых стоимостей за n периодов начисления процентов: $P_1 = S - Sd = S(1-d)$;
$P_2 = P_1 - P_1 d = P_1(1-d) = S(1-d)^2$;
$P_3 = P_2 - P_2 i = P_2(1-i) = S(1-d)^4$; ….. $P_n = S(1-d)^n$

$$P = S(1-d)^n$$

Финансовая математика

Потоки платежей

к.ф.-м.н. Пепа Р.Ю.

Принцип финансовой эквивалентности

Равенство финансовых обязательств участников операции

- *Платежи* представляют собой датированную денежную сумму, подлежащую уплате.
- *Поток платежей* — это последовательность платежей, распределенных во времени.
- *Эквивалентными платежами* считаются такие платежи, которые обеспечивают равенство финансовых обязательстве участников операции.
- Сумма кредита эквивалентна сумме выплат его погашения, так что второй платеж равен первому с начисленным на него процентами.

Аннуитет

Классификация аннуитетов

- Определенный аннуитет
- Случайный аннуитет
- Дискретный аннуитет
- Непрерывный аннуитет
- Обыкновенный аннуитет
- Полагающийся аннуитет
- Простой аннуитет
- Общий аннуитет
- Потерянный аннуитет
- Переменный аннуитет
- Срочный аннуитет
- Бессрочный аннуитет
- Немедленный аннуитет
- Отсроченный аннуитет

Аннуитет

Классификация аннуитетов

- Определенный аннуитет
- Случайный аннуитет
- Дискретный аннуитет
- Непрерывный аннуитет
- Обыкновенный аннуитет
- ***Полагающийся аннуитет***
- ***Простой аннуитет***
- ***Общий аннуитет***
- Потерянный аннуитет
- Переменный аннуитет
- Срочный аннуитет
- ***Бессрочный аннуитет***
- Немедленный аннуитет
- ***Отсроченный аннуитет***

Простейший аннуитет

Определенный дискретный, срочный постоянный, немедленный, простой, обыкновенный аннуитет.

***Дано*: R — размер платежа; n — число платежей; i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа. *Требуется найти* S — итоговую сумму и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.**

0	1	2	…	n-2	n-1	n
	R	R	…	R	R	R
						S
A						

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 \ldots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

$S = Rs(n,i)$, где $s(n,i) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ — функция наращения(см. таблицу)

$A = S(1+i)^{-n} = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra(n,i),\ a(n,i) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ — функция дисконтирования.

Полагающий аннуитет

Платежи относятся к начальным моментам интервалов платежа.

Дано: R **— размер платежа;** n **— число платежей;** i **— сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.** ***Требуется найти*** S **— итоговую сумму и настоящую стоимость** A **простейшего аннуитета.**

0	1	2	…	n-2	n-1	n
R	R	R	…	R	R	
						S
A						

Представим полагающий аннуитет в виде обыкновенного с итоговой суммой $S_{(-1)}$, который начинается на один период времени раньше. $S = S_{(-1)}(1+i), S_{(-1)} = Rs(n,i)$.

$$S = Rs(n,i)(1+i).$$

$$A = R + A^{(n-1)}, A^{(n-1)} = Ra(n-1,i) = R + Ra(n-1,i)$$

Полагающий аннуитет

Платежи относятся к начальным моментам интервалов платежа.

***Дано*: R — размер платежа; n — число платежей; i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа. *Требуется найти* S — итоговую сумму и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.**

-1	0	1	2	…	n-2	n-1	n
	R	R	R	…	R	R	
						$S_{(-1)}$	
							S

Представим полагающий аннуитет в виде обыкновенного с итоговой суммой $S_{(-1)}$, который начинается на один период времени раньше.

Полагающий аннуитет

Платежи относятся к начальным моментам интервалов платежа.

***Дано*: R — размер платежа; n — число платежей; i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа. *Требуется найти* S — итоговую сумму и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.**

0	1	2	…	n-2	n-1	n
R	R	R	…	R	R	
$R + A^{(n-1)}$						S
A						

Настоящая стоимость стоимость аннуитета — это совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета

$$A = R + A^{(n-1)}, A^{(n-1)} = Ra(n-1,i) = R + Ra(n-1,i)$$

Общий аннуитет

Платежи относятся к начальным моментам интервалов платежа.

***Дано*: R — размер платежа; n — число платежей; i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа. *Требуется найти* S — итоговую сумму и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.**

0	1	2	…	n-2	n-1	n
R	R	R	…	R	R	
$R + A^{(n-1)}$						S
A						

Настоящая стоимость стоимость аннуитета — это совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета

$$A = R + A^{(n-1)}, A^{(n-1)} = Ra(n-1,i) = R + Ra(n-1,i)$$

Общий аннуитет

0	1	2	…	p-2	p-1	P
	R_p	R_p	…	R_p	R_p	R_p
						S_p

0	1	2	…	m-2	m-1	M
	R_m	R_m	…	R_m	R_m	R_m
						S_m
A						

Условие:$S_p = S_m$. Так как $S_m = R_m \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m}$, $S_p = R_p \frac{(1+i_p)^p - 1}{i_p}$, то имеем систему:

$$\begin{cases} (1+i_p)^p = (1+i_m)^m \\ R_m \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} = R_p \frac{(1+i_p)^p - 1}{i_p} \end{cases}$$

Тогда: $R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{m/p} - 1}$ — модель перехода от общего обыкновенного аннуитета к эквивалентному ему простому обыкновенному аннуитет.