

Практикум 3.ОММ, ОМП, ОМС.

1.1. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Beta}(a, b)$. Построить график функции правдоподобия при разных n , найти на нем ОМП, сравнить с истинным значением параметров.

1.2. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Beta}(a, b)$. Сравнить ОММ, построенные по $\mathbf{E}X^k$ для параметра a (параметр b известен): найти выборочные дисперсии этих оценок, построить гистограммы.

1.3. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Beta}(a, b)$, $\hat{\theta}_1 = (\hat{a}_1, \hat{b}_1)$ – ОМП, $\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2, \hat{b}_2$ – ОМС .

1) Построить по выборке оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ (найти численно).

2) Сравнить, какая из оценок $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ чаще оказывается ближе к θ при разных n (отдельно по каждой координате и смысле расстояния на плоскости), смоделировав для этого по 1000 реализаций (для каждого n).

3) Построить гистограммы для $\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta)$ на одном графике, сравнить разбросы.

1.3*. X_1, \dots, X_n – выборка из распределения, являющегося смесью $\mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-4}))$ и $\text{Beta}(2, 5)$ с весами 1/2, 1/2. Построить график функции правдоподобия.

Замечание. 1) X_i генерируется следующим образом: сначала генерируем с.в. $\text{Bern}(1/2)$, если она равна 0, то генерируем $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-2}))$, если 1, то $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2) Плотность распределения X_i равна взвешенной сумме плотностей $\mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-4}))$ и $\text{Beta}(2, 5)$ с весами 1/2, 1/2.

2.1. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(a, b)$. Построить график функции правдоподобия при разных n , найти на нем ОМП, сравнить с истинным значением параметров.

2. 2. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(a, b)$. Сравнить ОММ для параметра масштаба, построенные по $\mathbf{E}X^k$: найти выборочные дисперсии этих оценок, построить гистограммы.

2. 3. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(a, b)$, $\hat{\theta}_1 = (\hat{a}_1, \hat{b}_1)$ – ОМП, $\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2, \hat{b}_2$ – ОМС .

1) Построить по выборке оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ (найти численно).

2) Сравнить, какая из оценок $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ чаще оказывается ближе к θ при разных n (отдельно по каждой координате и смысле расстояния на плоскости), смоделировав для этого по 1000 реализаций (для каждого n).

3) Построить гистограммы для $\hat{\theta}_i$, сравнить с нормальной плотностью.

4) Построить гистограммы для $\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta)$ на одном графике, сравнить разбросы.

2.4*. X_1, \dots, X_n – выборка из распределения, являющегося смесью $\mathcal{N}(\theta, \exp(e^{-\theta}))$ и $\text{Gamma}(5, 5)$ с весами 1/2, 1/2. Построить график функции правдоподобия.

Замечание. 1) X_i генерируется следующим образом: сначала генерируем с.в. $\text{Bern}(1/2)$, если она равна 0, то генерируем $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-2}))$, если 1, то $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2) Плотность распределения X_i равна взвешенной сумме плотностей $\mathcal{N}(\theta, \exp(e^{-\theta}))$ и $\text{Gamma}(5, 5)$ с весами 1/2, 1/2.

3.1. $X_1, \dots, X_n \sim f_{\theta}(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x - \theta)^2)}$. Построить график функции правдоподобия при разных n , найти на нем ОМП, сравнить с истинным значением параметров.

3.2. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{R}[0, \theta]$. Сравнить ОММ, построенные по $\mathbf{E}X^k$: найти выборочные дисперсии этих оценок, построить гистограммы.

3.3. $X_1, \dots, X_n \sim f_{\theta}(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x - b)^2)}$, $\hat{\theta}_1 = (\hat{a}_1, \hat{b}_1)$ – ОМП, $\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2, \hat{b}_2$ – ОМС .

1) Построить по выборке $\hat{\theta}_i$ (где нужно, найти численно).

2) Сравнить, какая из оценок $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ чаще оказывается ближе к θ при разных n (отдельно по каждой координате и смысле расстояния на плоскости), смоделировав для этого по 1000 реализаций (для каждого n). Для параметра b добавить к сравнению оценку MED.

3) Построить гистограммы для $\hat{\theta}_i$, сравнить с нормальной плотностью.

4) Построить гистограммы для $\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta)$ на одном графике, сравнить разбросы.

3.4*. X_1, \dots, X_n – выборка из распределения, являющегося смесью $\mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-2}))$ и $\mathcal{N}(0, 1)$ с весами 1/2, 1/2. Построить график функции правдоподобия.

Замечание: X_i генерируется следующим образом: сначала генерируем с.в. $\text{Bern}(1/2)$, если она равна 0, то генерируем $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \exp(\theta^{-2}))$, если 1, то $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.