Практикум 6. Критерии.

Первый вариант

$X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{R}[\theta, \theta+2]$. Гипотеза $H_0 : \theta = 0$, альтернатива $H_1 : \theta = \theta_1$. Рассмотрим критические множества вида $\{X_{(1)} < C\}$, $\{X_{(n)} > C\}$.

1.1. Построить графики зависимости ошибки первого рода и второго рода $\alpha_i(C)$ (для $\theta_1 = 1$ и $\theta_1 = -1$). Можно ли одновременно минимизировать обе ошибки?

1.2. Для каждого множества найти C такое, что $\alpha_1(C) = 0.05$ и зафиксировать его. Построить теперь графики мощности $\beta(\theta_1)$, $\theta_1 \in [-5, 5]$, для разных n. Найдется ли такое n, что $\inf \beta(\theta_1) > 0.95$?

1.3. Нарисовать графики p-value при нулевой гипотезе и альтернативе.
График p-value.
1) Генерируем выборку, находим значение статистики критерия T ($T = X_{(1)}$ или $T = X_{(n)}$). Находим функцию распределения $F_T(x)$ нашей статистики.Вычисляем $p - value = 1 - F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T > C\}$, $p - value = F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T < C\}$. Повторяем $m \geq 100$ раз. Получился массив $p_1, \dots, p_m$, упорядочиваем его по возрастанию.
2) Строим график: по оси Ox – значения $p_1, \dots, p_m$, по оси Oy – числа $1/m, 2/m, \dots, 1$.
3) Построить графики p-value для гипотезы и альтернативы на одном графике для критериев вида $\{X_{(1)} > C\}, \{X_{(n)} > C\}$.

Мы знаем, что если $F(x)$ непрерывна, то $F_T(T) \sim R[0, 1]$. Значит, при гипотезе точки должны быть близки к прямой $y = x$. При альтернативе мы ожидаем увидеть отклонение от этой прямой. В какую сторону отклоняется график для альтернатив $H_1 : \theta = 1$, $H_2 : \theta = -1$?
Построить графики p-value для разных критериев на одном графике (для нулевой гипотезы и одной альтернативы). Для какого критического множества p-value при альтернативе сильнее отклоняется от $y = x$?

1.4. $X_1, \dots, X_n \sim Bern(\theta)$, $H_0 : \theta = 1/2$, $H_1 : \theta = 1/3$. При каких n можно построить критическое множество вида $\{\overline{X} < C\}$ так, чтобы ошибки первого и второго рода не превышали 0.05? Пострить графики ошибок первого и второго рода (как функции от C) для разных n.

Второй вариант

$X_1, \dots, X_n \sim \exp(\theta)$. Гипотеза $H_0 : \theta = 2$, альтернатива $H_1 : \theta = \theta_1$. Рассмотрим критические множества вида $\{\overline{X} > C\}$, $\{X_{(1)} < C\}$.

2.1. Построить графики ошибки первого рода и второго рода $\alpha_i(C)$ (для $\theta_1 = 5$ и $\theta_1 = 1$). Можно ли одновременно минимизировать обе ошибки?

2.2. Для каждого множества найти C такое, что $\alpha_1(C) = 0.05$ и зафиксировать его. Построить теперь графики мощности $\beta(\theta_1)$, $\theta_1 \in (0, 5]$, для разных n. Найдется ли такое n, что $\inf \beta(\theta_1) > 0.95$?

2.3. Нарисовать графики p-value при нулевой гипотезе и альтернативе.
График p-value.
1) Генерируем выборку, находим значение статистики критерия T. Находим функцию распределения $F(x)$ нашей статистики. Вычисляем $p - value = 1 - F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T > C\}$, $p - value = F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T < C\}$. Повторяем $m \geq 100$ раз. Получился массив $p_1, \dots, p_m$, упорядочиваем его по возрастанию.
2) Строим график: по оси Ox – значения $p_1, \dots, p_m$, по оси Oy – числа $1/m, 2/m, \dots, 1$.
3) Построить графики p-value для гипотезы и альтернативы на одном графике для каждого критерия.

Мы знаем, что если $F(x)$ непрерывна, то $F(T) \sim R[0, 1]$. Значит, при гипотезе точки должны быть близки к прямой $y = x$. При альтернативе мы ожидаем увидеть отклонение от этой прямой. В какую сторону отклоняется график для альтернатив $H_1 : \theta = 5$, $H_2 : \theta = 1$?
Построить графики p-value для разных критериев на одном графике (для нулевой гипотезы и одной альтернативы). Для какого критического множества p-value при альтернативе сильнее отклоняется от $y = x$?

2.4. $X_1, \dots, X_n \sim Geom(\theta)$, $H_0 : \theta = 1/2$, $H_1 : \theta = 2/3$. При каких n можно построить критическое множество вида $\{\overline{X} < C\}$ так, чтобы ошибки первого и второго рода не превышали 0.05? Пострить графики ошибок первого и второго рода (как функции от C) для разных n.

Третий вариант

$X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{R}[0, \theta]$. Гипотеза $H_0 : \theta = 1$, альтернатива $H_1 : \theta = \theta_1$. Рассмотрим критические множества вида $\{X_{(n)} > C\}, \{X_{(1)} < C\}$.

3.1. Построить графики ошибки первого рода и второго рода $\alpha_i(C)$ (для $\theta_1 = 5$ и $\theta_1 = 1/2$). Можно ли одновременно минимизировать обе ошибки?

3.2. Для каждого множества найти C такое, что $\alpha_1(C) = 0.05$ и зафиксировать его. Построить теперь графики мощности $\beta(\theta_1)$, $\theta_1 \in [0.1, 5]$, для разных n. Найдется ли такое n, что $\inf \beta(\theta_1) > 0.95$?

3.3. Нарисовать графики p-value при нулевой гипотезе и альтернативе.
График p-value.
1) Генерируем выборку, находим значение статистики критерия T. Находим функцию распределения $F_T(x)$ нашей статистики. Вычисляем $p - value = 1 - F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T > C\}$, $p - value = F_T(T)$, для критических множеств вида $\{T < C\}$. Повторяем $m \geq 100$ раз. Получился массив $p_1, \dots, p_m$, упорядочиваем его по возрастанию.
2) Строим график: по оси Ox – значения $p_1, \dots, p_m$, по оси Oy – числа $1/m, 2/m, \dots, 1$.
3) Построить графики p-value для гипотезы и альтернативы на одном графике для каждого критерия. Мы знаем, что если $F(x)$ непрерывна, то $F(T) \sim R[0, 1]$. Значит, при гипотезе точки должны быть близки к прямой $y = x$. При альтернативе мы ожидаем увидеть отклонение от этой прямой. В какую сторону отклоняется график для альтернатив $H_1 : \theta = 5$, $H_2 : \theta = 1$?
Построить графики p-value для разных критериев на одном графике (для нулевой гипотезы и одной альтернативы). Для какого критического множества p-value при альтернативе сильнее отклоняется от $y = x$?

3.4. $X_1, \dots, X_n \sim Poiss(\theta)$, $H_0 : \theta = 1$, $H_1 : \theta = 3$. При каких n можно построить критическое множество вида $\{\overline{X} > C\}$ так, чтобы ошибки первого и второго рода не превышали 0.05? Пострить графики ошибок первого и второго рода (как функции от C) для разных n.