Gegenüberstellung von linearen Regressionsverfahren beim Methodenvergleich

Steffen Martens, Katy Klauenberg
und Clemens Elster

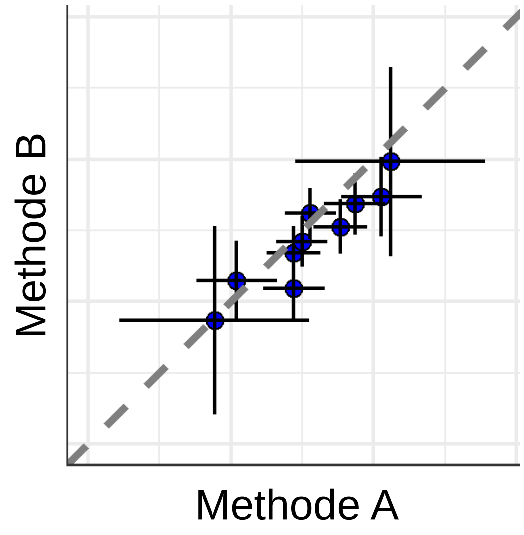
AG 8.42 Datenanalyse und Messunsicherheit

9. VDI-Fachtagung Messunsicherheit 2019
Erfurt, 13.11.19

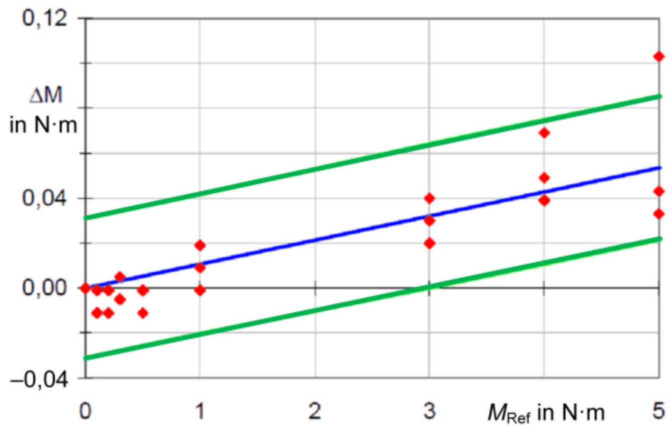
Lineare Regressionsverfahren bei Errors-in-Variables (EIV) Modellen

Regression von lineare Zusammenhängen ist ein häufig auftretendes Problem in der Metrologie, z.B.

- Methodenvergleich gegenüber Goldstandard
- Kalibrierung

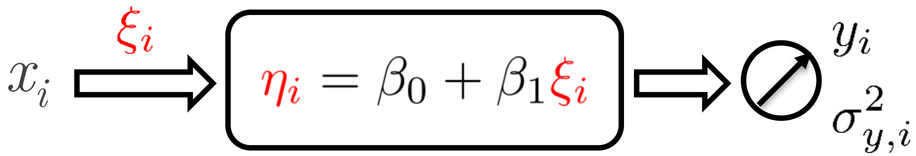


Abhängige **und** unabhängige Größen sind mit Unsicherheiten behaftet



Quelle: Bild B10 VDI/VDE 2600 Blatt 2
Kalibrierung eines Dehnungsmessstreifens

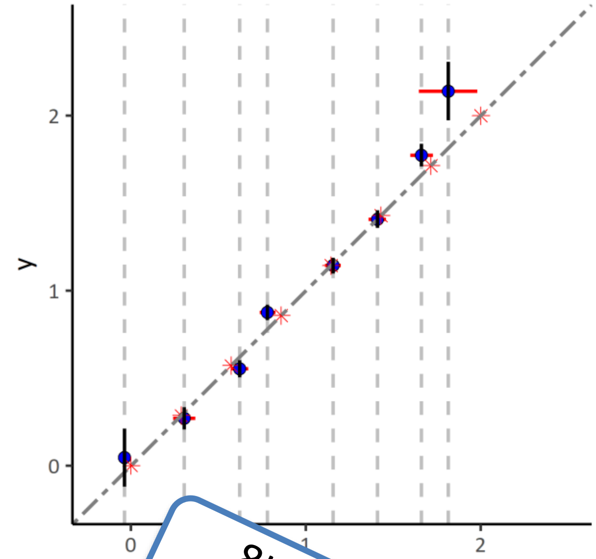
EIV bei Kalibrierung



- N Paare $(x_i\ ,y_i)^{\mathrm{T}}$ mit unabhängiger x_i und abhängiger Eingangsgröße y_i

$$(1a)\quad \xi_i = x_i + \epsilon_{x,i}$$

$$(1b)\quad y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \epsilon_{y,i}$$



8ter Fall in ISO/TS 28037

- <u>Annahmen:</u>
  1) wahre Response η_i hängt linear von ξ_i ab
  2) Störterme der i-ten Messung beschrieben durch multivariate, normal verteilte Zufallszahlen mit Mittelwert 0 und i-ten Kovarianz $\boldsymbol{\Sigma}_i$
  3) Kovarianzen $\boldsymbol{\Sigma}_i$ sind bekannt

ISO/TS 28037:2010(E), *Determination and use of straight-line calibration functions.*

Zielstellung und offene Fragen

- **Ziel**: Bestimmung der Schätzwerte und deren Unsicherheiten

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\xi}_i\,, u_{\hat{\beta}_0}, u_{\hat{\beta}_1}, u_{\hat{\xi}_i}$$

- zahlreiche Methoden existieren

➢ Methode der kleinsten Quadrate (LS)[1,2]
  - gewichtetes TLS (WTLS)
    - Deming Regression[3]
    - gewöhnliches LS (OLS)

➢ Bayes'sche Regression[4,5]

➢ Maximum likelihood Schätzer [4]

➢ Instrumentale Variablen[6]

➢ Momenten-Methode[7]

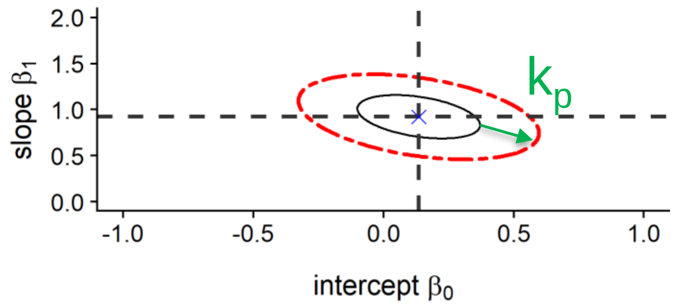
und viele mehr

[1] Adcock *The Analyst* **4**, 183 (1877); **5**, 53 (1878), [2] Pearson *Philos Mag.* **2**, 559 (1901)
[3] W. E. Deming „Statistical adjustment of data" (1943), [4] Zellner „An Introduction to Bayesian Inference Econometrics" (1971)
[5] Carroll et al. „Measurement errors in Nonlinear models" (2006), [6] 9 M. Y: Wong *Biometrika* **76**, 141 (1989),
[7] Pal *J. Econometrics* **14**, 349 (1980)

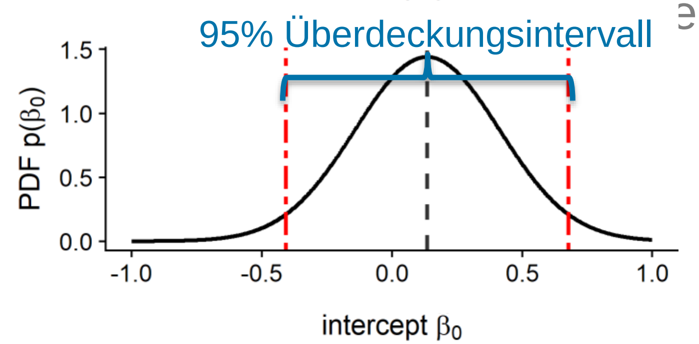
Zielstellung und offene Fragen

- **Ziel**: Bestimmung der Schätzwerte und deren Unsicherheiten

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\xi}_i, u_{\hat{\beta}_0}, u_{\hat{\beta}_1}, u$$



- zahlreiche Methoden existieren
  - ➢ Methode der kleinsten Quadrate (LS)
    - gewichtetes TLS (WTLS)
      - o Deming Regression
      - o gewöhnliches LS (OLS)
  - ➢ Bayes'sche Regression



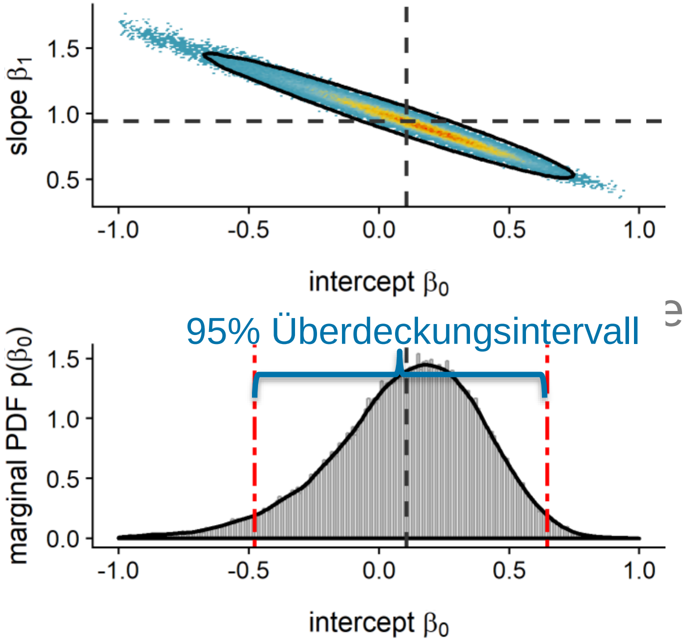
- GUM Dokumente erlauben Unsicherheitsbestimmung nach
  1) Fortpflanzung der Unsicherheiten (**GUM**[1], GUM-S2[2])

[1] JCGM 100:2008, [2] JCGM 102:2011, [3] JCGM 101:2008

Zielstellung und offene Fragen

- **Ziel**: Bestimmung der Schätzwerte und deren Unsicherheiten

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\xi}_i, u_{\hat{\beta}_0}, u_{\hat{\beta}_1}, u$$



- zahlreiche Methoden existieren
  - ➢ Methode der kleinsten Quadrate (LS)
    - gewichtetes TLS (WTLS)
      - ○ Deming Regression
      - ○ gewöhnliches LS (OLS)
  - ➢ Bayes'sche Regression

- GUM Dokumente erlauben Unsicherheitsbestimmung nach
  1) Fortpflanzung der Unsicherheiten (**GUM**[1], GUM-S2[2])
  2) Fortpflanzung von Verteilungen (**GUM-S1**[3], GUM-S2[2])

- GUM Dok. geben **keine** direkte Hilfestellung für Regressionsprobleme

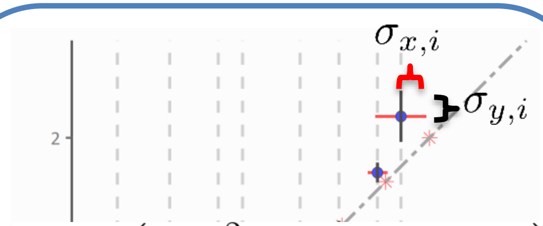
[1] JCGM 100:2008, [2] JCGM 102:2011, [3] JCGM 101:2008

Normen zur Regression von EIV Modellen

- z.B. ISO/TS 28037:2010 & DIN EN ISO 6143:2004 empfehlen WTLS

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{\xi}}\end{pmatrix} = \underset{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{v}_i \quad \text{with}\, \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} x_i - \xi_i \\ y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

  - im Allgemeinen, <u>nichtlineares</u> Funktional nur numerisch minimierbar[1,2]
    → Algorithmen sind kostenlos erhältlich
    → Unsicherheiten der Schätzwerte[2,3]
  - Liefert eine Unsicherheitsbestimmung nach
    die gleichen Ergebnisse für die Schätzwert



$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{x,i}^2 & \rho_i \sigma_{x,i}\sigma_{y,i} \\ \rho_i \sigma_{x,i}\sigma_{y,i} & \sigma_{y,i}^2 \end{pmatrix}$$

- stand. Messunsicherheit $\sigma_{x,i}$
- stand. Messunsicherheit $\sigma_{y,i}$
- Korrelation zwischen beiden ρ_i

- **oft**: bekannte Unsicherheiten der Referenzr
  werden <u>ignoriert</u> („$\sigma_{x,i}$ ist klein im Verhältn

gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate (OLS)

[1] C. A. Cantrell, *Atmos. Chem. Phys*. **8**, 5477 (2008); [2] ISO/TS 28037:2010
[3] M. Krystek and M. Anton, *Meas. Sci. Technol*. **22**, 035101 (2011); [4] T. Isobe et al. *Astrophys. Journal*, **364**, 104 (1990)
[5] ISO 11095:1996

Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

- z.B. ISO/TS 28037:2010 & DIN EN ISO 6143:2004 empfehlen WTLS

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{\xi}}\end{pmatrix} = \underset{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{v}_i \quad \text{with } \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} x_i - \xi_i \\ y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

  - im Allgemeinen, <u>nichtlineares</u> Funktional nur numerisch minimierbar[1,2]
    $\rightarrow$ Algorithmen sind kostenlos erhältlich
    $\rightarrow$ Unsicherheiten der Schätzwerte[2,3]

  - Liefert eine Unsicherheitsbestimmung nach GUM und GUM-S1 die gleichen Ergebnisse für die Schätzwerte?

- **oft**: bekannte Unsicherheiten der Referenzmethode oder des –signals werden <u>ignoriert</u> („$\sigma_{x,i}$ ist klein im Verhältnis zu $\sigma_{y,i}$“[5])

gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate (OLS)

[1] C. A. Cantrell, *Atmos. Chem. Phys*. **8**, 5477 (2008); [2] ISO/TS 28037:2010
[3] M. Krystek and M. Anton, *Meas. Sci. Technol*. **22**, 035101 (2011); [4] T. Isobe et al. *Astrophys. Journal*, **364**, 104 (1990)
[5] ISO 11095:1996

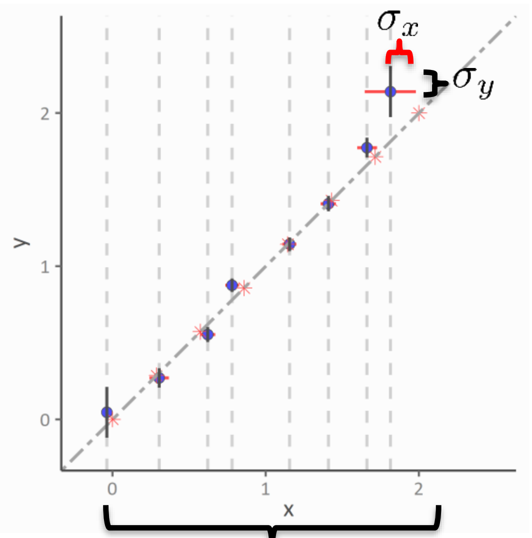
Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

- OLS Punktschätzer sind *nicht erwartungstreu* und *inkonsistent*
- bei konstanter Messunsicherheit ($\sigma_x = \sigma_{x,i}$, $\sigma_y = \sigma_{y,i}$, $\rho = \rho_i$), Punktschätzer ist *asymp. normal verteilt*[1]

$$E\left(\hat{\beta}_1^{\text{OLS,EIV}}\right) = \beta_1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}\,\frac{\rho\sigma_y/\sigma_x - \beta_1}{1 + \sigma_x^2/\sigma_\xi^2},$$

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\beta}_1^{\text{OLS,EIV}}\right) = \frac{\sigma_y^2}{N\sigma_\xi^2}\left[1 - 2\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}E\left(\hat{\beta}_1^{\text{OLS,EIV}}\right) + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}E\left(\hat{\beta}_1^{\text{OLS,EIV}}\right)\right)^2\right]$$

- bester linearer erwartungstreuer Schätzer (BLUE) aber nur, wenn $\sigma_x/\sigma_y \to 0, \sigma_x/\sigma_\xi \to 0$ und $\varepsilon_{y,i}$ unkorreliert sind



$$\sigma_\xi^2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i - \bar{\xi}\right)^2$$

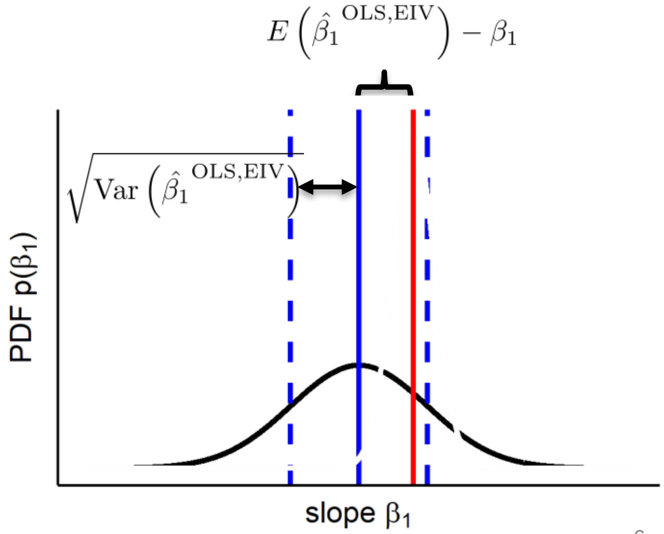
[1] Gleser et al., *Ann. Stat.* **15**, 220-233 (1987)

Kann man OLS trotzdem anwenden?

Bedingungen für die Nutzung von OLS:

1. Abweichung vom wahren Wert muss mit der Unsicherheit des Schätzers verträglich sein.

$$(2\mathrm{a}) \qquad \mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1^{\,\mathrm{OLS,EIV}}\right) \gg \left(E\left(\hat{\beta}_1^{\,\mathrm{OLS,EIV}}\right) - \beta_1\right)^2$$



Kann man OLS trotzdem anwenden?

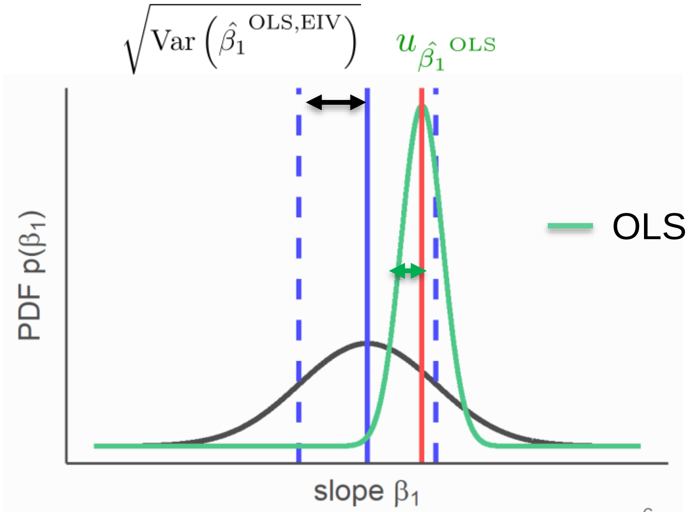
Bedingungen für die Nutzung von OLS:

1. Abweichung vom wahren Wert muss mit der Unsicherheit des Schätzers verträglich sein.

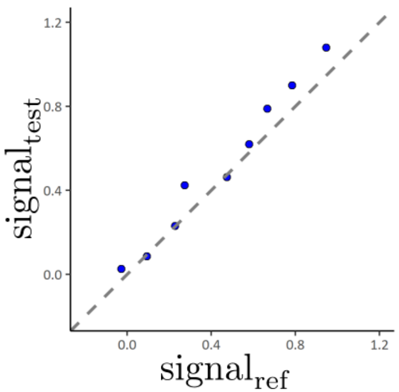
$$\text{(2a)} \quad \mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1{}^{\mathrm{OLS,EIV}}\right) \gg \left(E\left(\hat{\beta}_1{}^{\mathrm{OLS,EIV}}\right) - \beta_1\right)^2$$

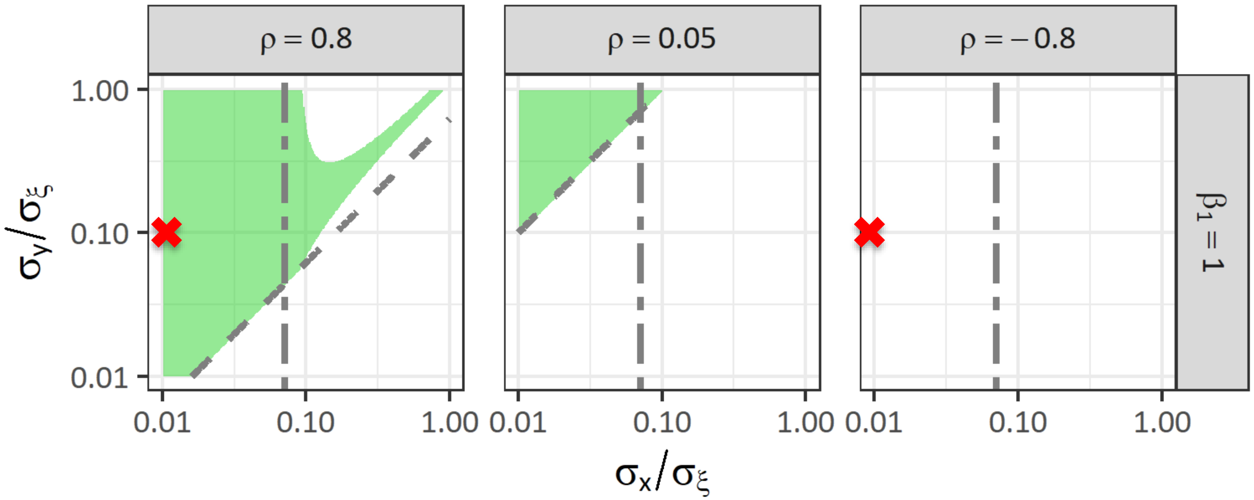
2. Die Unsicherheit des Schätzers darf nicht unterschätzt werden.

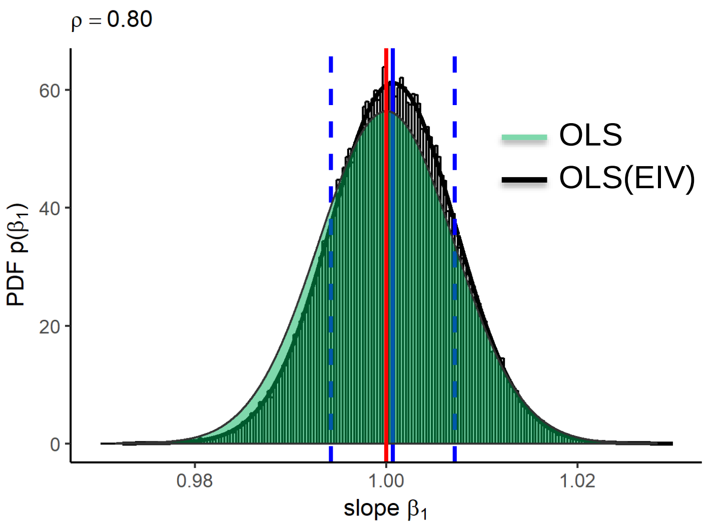
$$\text{(2b)} \quad \sqrt{\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1{}^{\mathrm{OLS,EIV}}\right)} \leq u_{\hat{\beta}_1{}^{\mathrm{OLS}}}$$

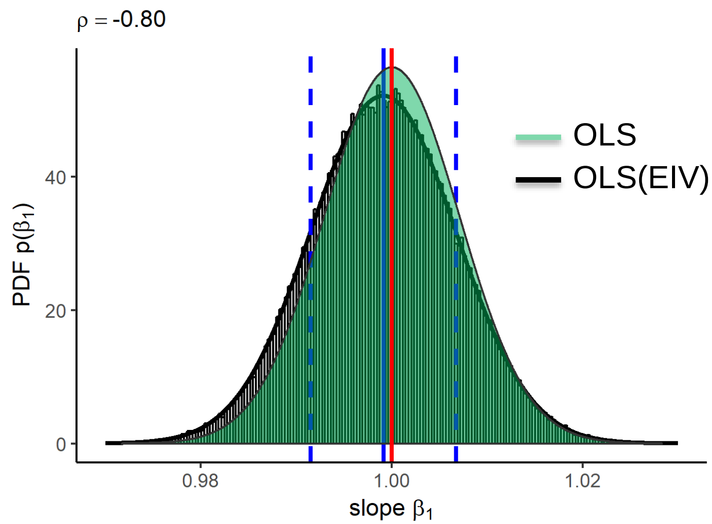


Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

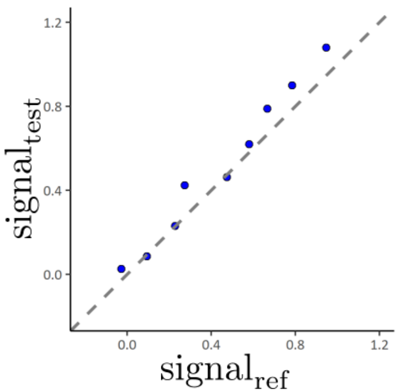


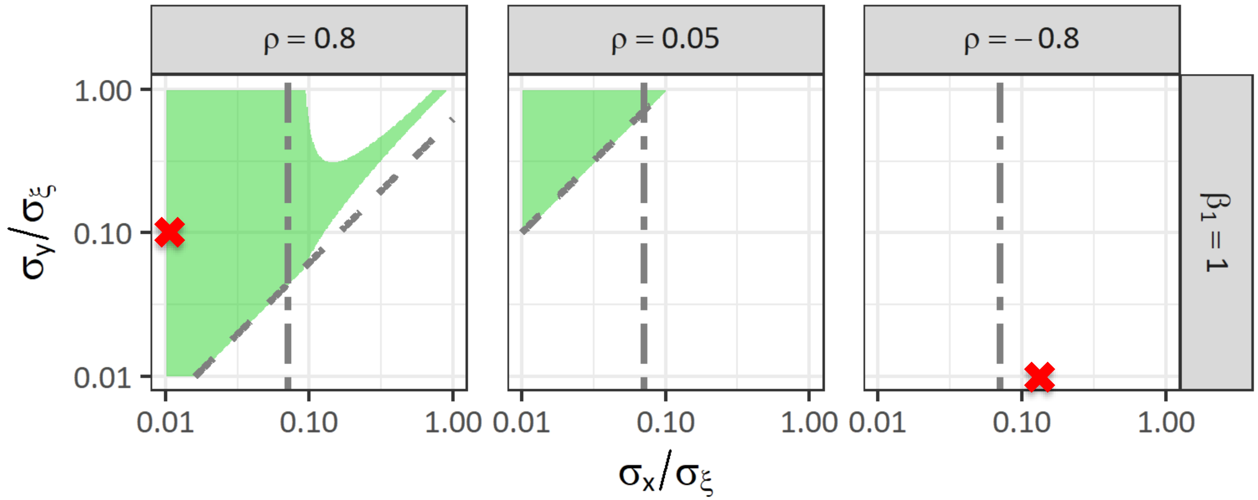


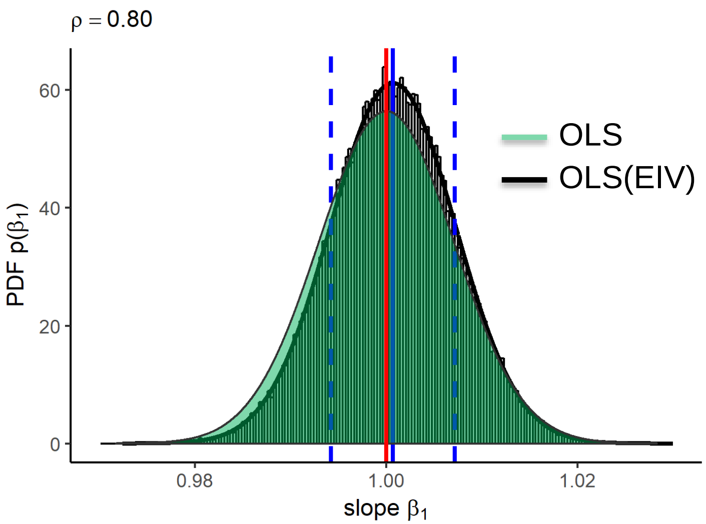


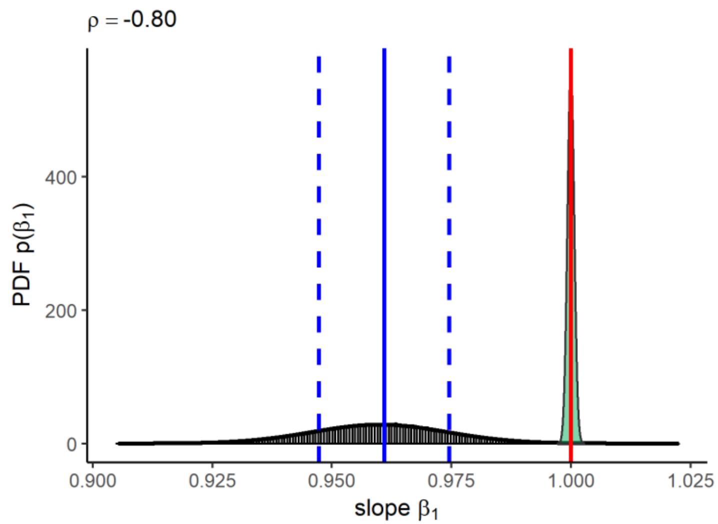


Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

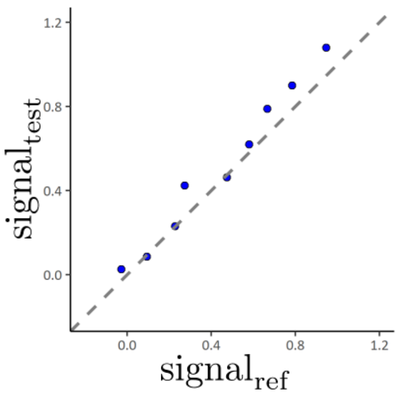


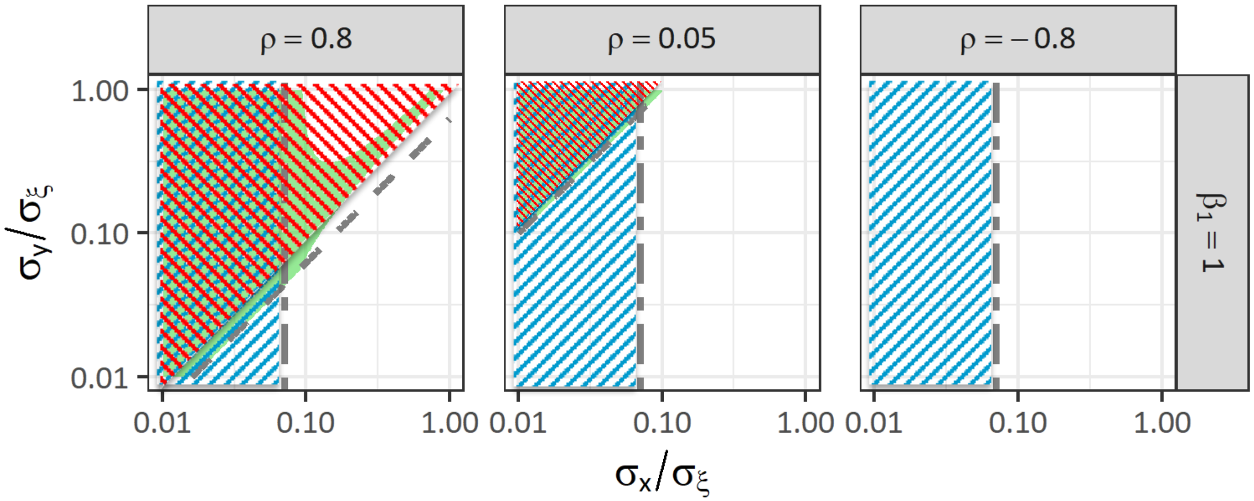






Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

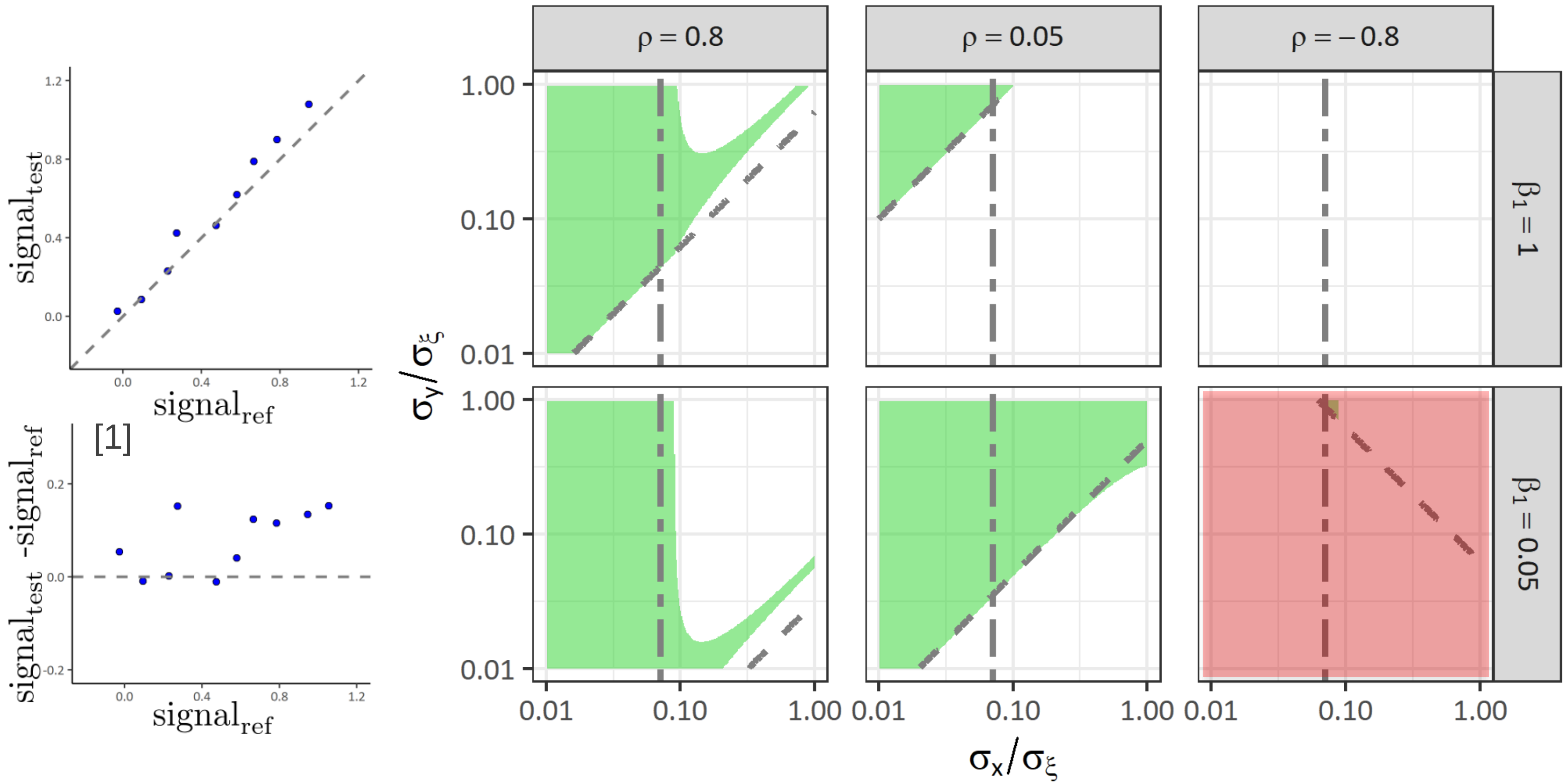





Abweichungsbedingung $(2a)$ erfüllt


Varianzbedingung $(2b)$ erfüllt

Gültigkeit von OLS in EIV Modellen



- „$\sigma_{x,i}$ ist klein im Vergleich zu $\sigma_{y,i}$“ ist nicht ausreichend
- OLS kann für EIV Modelle **nicht** empfohlen werden im Besonderen, wenn $\mathrm{sgn}\,(\rho\beta_1) = -1$

[1] Bsp. H.3 in JCGM 100:2008; OIML R 111-1 e04; Bsp. 2 in VDI 2600 Blatt 2 (2019)

Gültigkeit von OLS in EIV Modellen

- z.B. ISO/TS 28037:2010 & DIN EN ISO 6143:2004 empfehlen WTLS

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{\xi}}\end{pmatrix} = \underset{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{v}_i \quad \text{with } \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} x_i - \xi_i \\ y_i - \beta_0 - \beta_1 \xi_i \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

  - im Allgemeinen, <u>nichtlineares</u> Funktional nur numerisch minimierbar[1,2]
    $\rightarrow$ Algorithmen sind kostenlos erhältlich
    $\rightarrow$ Unsicherheiten der Schätzwerte[2,3]

  - Liefert eine Unsicherheitsbestimmung nach GUM und GUM-S1
    die gleichen Ergebnisse für die Schätzwerte?

- **oft**: bekannte Unsicherheiten der Referenzmethode oder des –signals werden <u>ignoriert</u> („$\sigma_{x,i}$ ist klein im Verhältnis zu $\sigma_{y,i}$“[5])

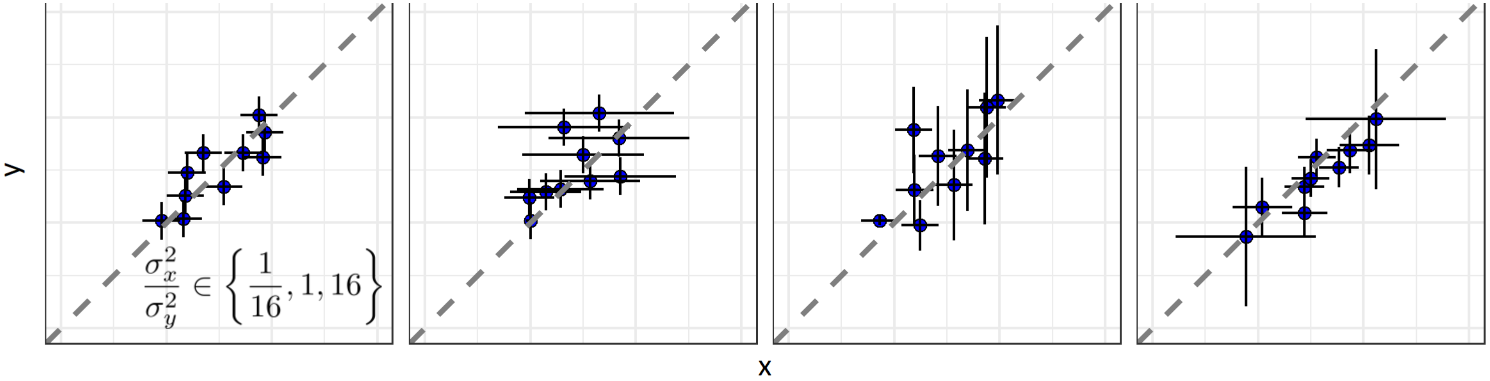
gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate (OLS)

[1] C. A. Cantrell, *Atmos. Chem. Phys*. **8**, 5477 (2008); [2] ISO/TS 28037:2010
[3] M. Krystek and M. Anton, *Meas. Sci. Technol*. **22**, 035101 (2011); [4] T. Isobe et al. *Astrophys. Journal*, **364**, 104 (1990)
[5] ISO 11095:1996

Vergleich GUM von GUM-S1 für WTLS

- umfangreiche numerische Untersuchungen durchgeführt
- „synthetische Daten“ gemäß statist. Model $(1a)$ - $(1b)$ erzeugt

N	ρ_i	$\sigma_0{}^2/\sigma_\xi{}^2$	MU Designs
$\{10,\ 100\}$	$\{-0.8, 0, 0.8\}$	$\{1.2\%,\ 4.6\%,\ 9.4\%\}$	6



- für jede Parameterkombination:
  $N_{rep} = 1000$ Datensätze + $N_{S1} = 5\ 10^4$ S1 sub-samples (Monte-Carlo)

Vergleich GUM von GUM-S1 für WTLS

- ISO[1] Implementierung wendet LPU auf linearisiertes Problem an

1) <u>Überdeckungsintervalle und –wahrscheinlichkeit</u>

   - 95% Überdeckungsintervall nach GUM liefert
     95% frequentistische Überdeckungswk.
   - GUM-S1 führt zu etwas längeren Intervallen
     - Effekt wird für große Messunsicherheiten ($\sigma_{x,i}, \sigma_{y,i}$) verstärkt

2) <u>Schätzwerte:</u>

   - GUM: Punktschätzer ist erwartungstreu
   - GUM-S1 schätzt Anstieg β_1 etwas größer und β_0 etwas kleiner
     - Unterschied zwischen GUM und GUM-S1 nimmt mit N ab

[1] ISO/TS 28037:2010 (E), *Determination and use of straight-line calibration functions.*

Vergleich GUM von GUM-S1 für WTLS

- ISO[1] Implementierung wendet LPU auf linearisiertes Problem an

1) <u>Überdeckungsintervalle und –wahrscheinlichkeit</u>

- 95% Überdeckungsintervall nach GUM liefert
  95% frequentistische Überdeckungswk.

> ➢ befürworten die Nutzung der ISO 28037:2010 WTLS-Implementierung
>
> ➢ empfehlen die einfachere Unsicherheitsbestimmung nach Fortpflanzung der Unsicherheiten (**GUM**)

2)

- GUM-S1 schätzt Anstieg β_1 etwas größer und β_0 etwas kleiner
  - Unterschied zwischen GUM und GUM-S1 nimmt mit N ab

[1] ISO/TS 28037:2010 (E), *Determination and use of straight-line calibration functions.*

Bayes‘sche Regression

- GUM und GUM-S1 ermöglichen **nicht** die Berücksichtigung von Vorwissen

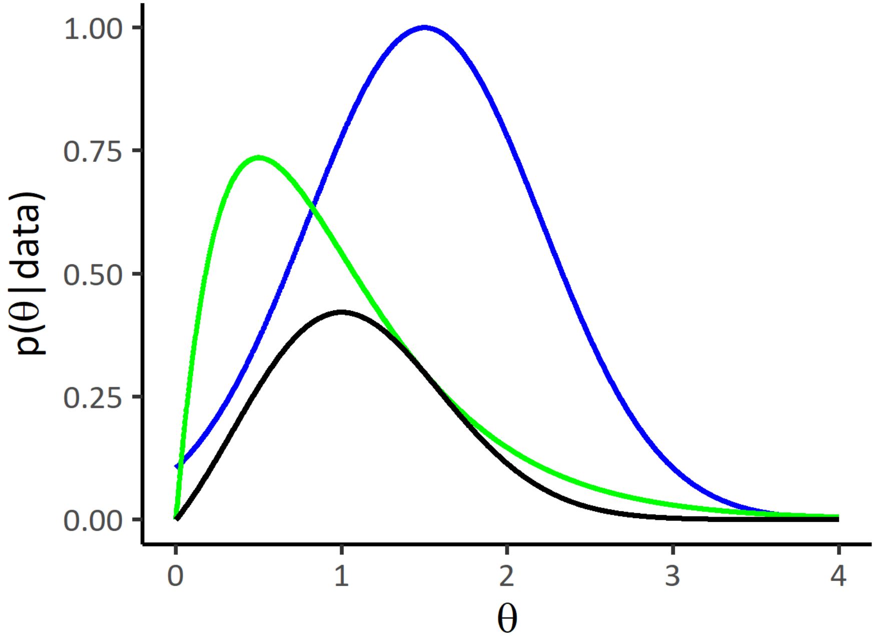
- Bayes‘sche Regression ist allgemein anwendbar und flexibler

- nach Bayes Theorem, Posterior für Messgrößen $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \boldsymbol{\xi}^\top)$

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathrm{data}) \propto \pi_0(\boldsymbol{\theta})\, \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathrm{data})$$

mit Prior $\pi_0(\boldsymbol{\theta})$ und

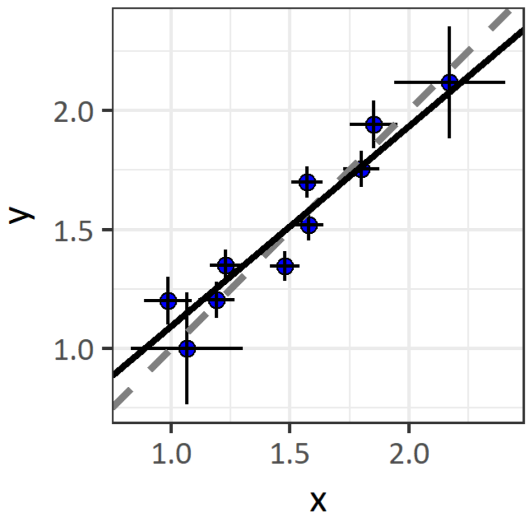
likelihood $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathrm{data})$

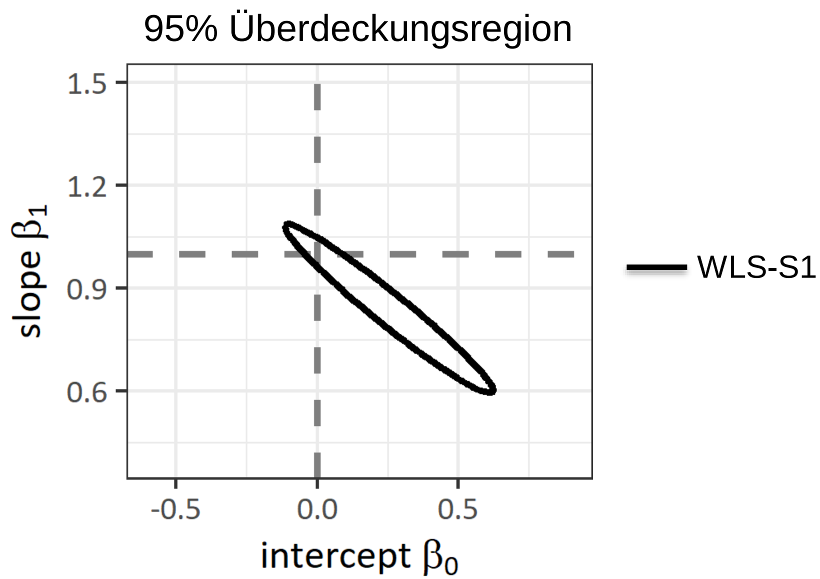


- ❑ Wann und ob überhaupt hat Bayes’sche Regression mit Prior-Wissen Vorteile im Vergleich mit GUM-S1?

Bayes‘sche Regression

- wählen nicht informativen Prior für ξ und bivariat normal verteilten Prior für β mit $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^\top = (0,1)^\top$ und $(\sigma^2_{\beta_0}, \sigma^2_{\beta_1})^\top = q\,(u^2_{\hat{\beta}_0\,\mathrm{WLS}}, u^2_{\hat{\beta}_1\,\mathrm{WLS}})^\top$

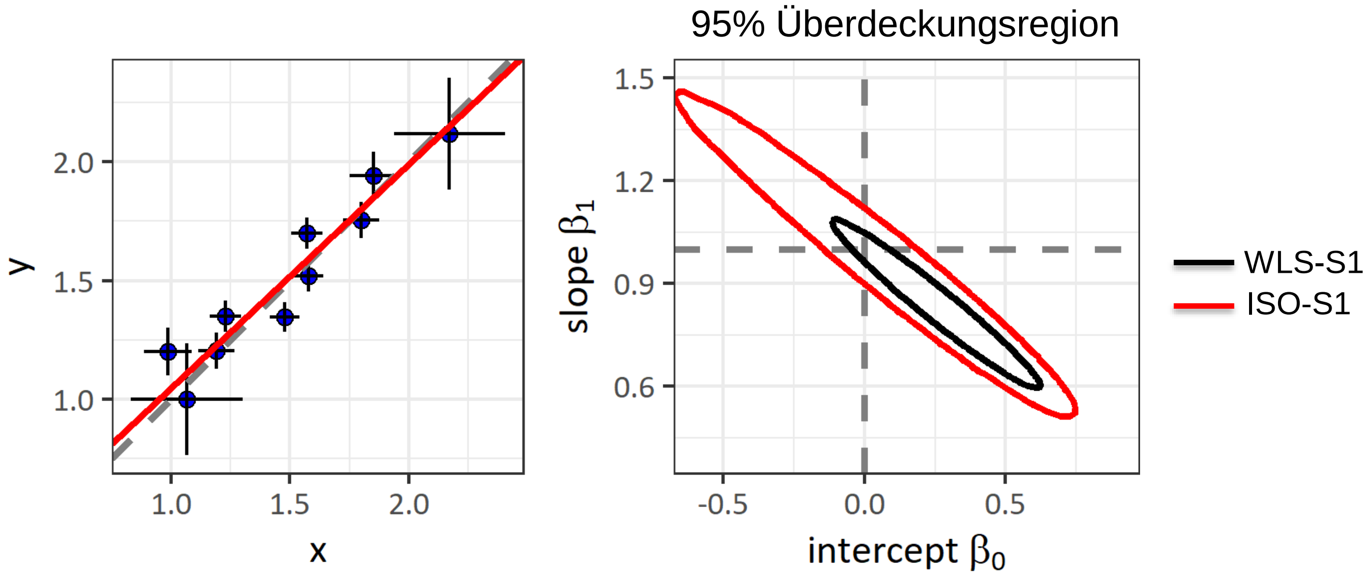




95% CI	least squares Schätzer		Bayes’sche Regression mit Normal Prior		
	WLS – S1				
β_0	(-0.03,0.55)				
β_1	(0.64,1.03)				

Bayes‘sche Regression

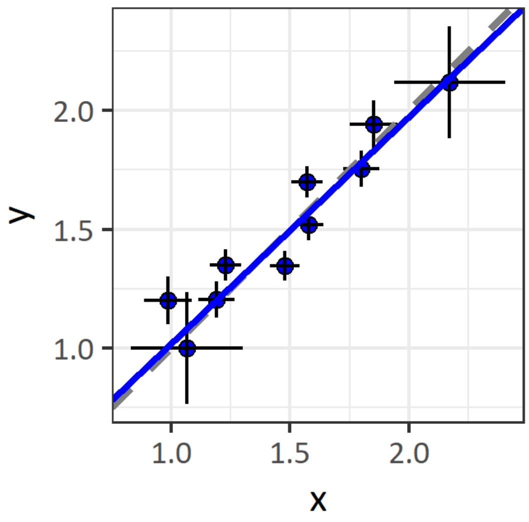
- wählen nicht informativen Prior für ξ und bivariat normal verteilten Prior für β mit $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^\top = (0,1)^\top$ und $(\sigma^2_{\beta_0}, \sigma^2_{\beta_1})^\top = q\,(u^2_{\hat{\beta}_0\,\mathrm{WLS}}, u^2_{\hat{\beta}_1\,\mathrm{WLS}})^\top$

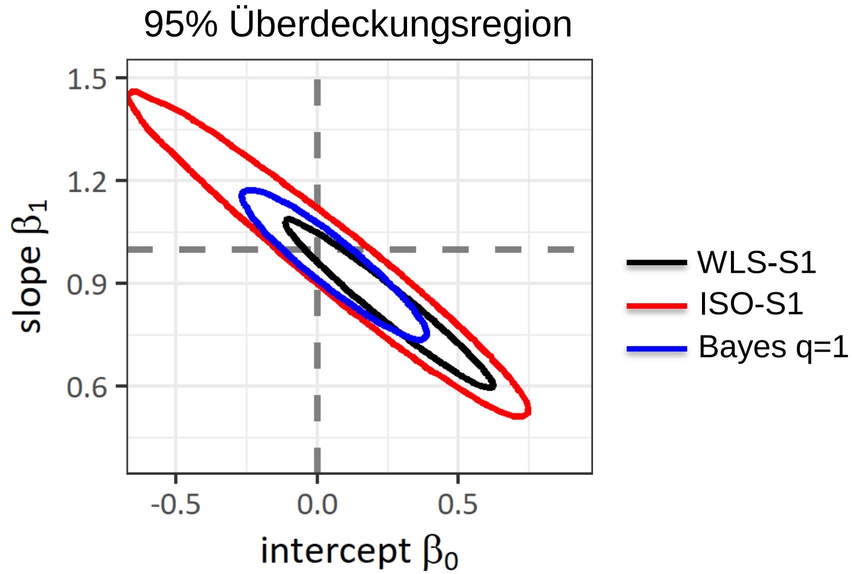


95% CI	least squares Schätzer		Bayes’sche Regression mit Normal Prior		
	WLS – S1	ISO – S1			
β_0	(-0.03,0.55)	(-0.48,0.64)			
β_1	(0.64,1.03)	(0.58,1.34)			

Bayes‘sche Regression

- wählen nicht informativen Prior für ξ und bivariat normal verteilten Prior für β mit $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^\top = (0,1)^\top$ und $(\sigma^2_{\beta_0}, \sigma^2_{\beta_1})^\top = q\,(u^2_{\hat{\beta}_0\,\mathrm{WLS}}, u^2_{\hat{\beta}_1\,\mathrm{WLS}})^\top$

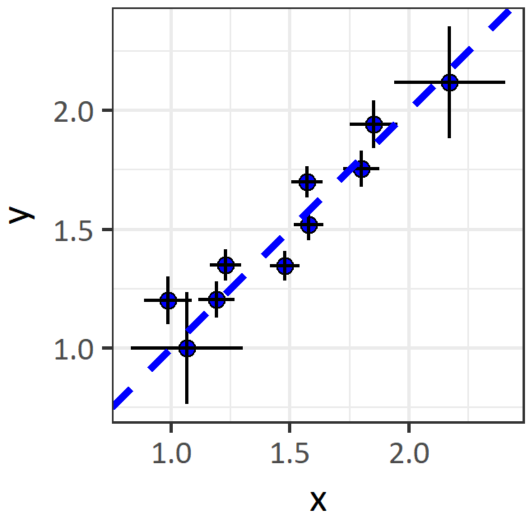


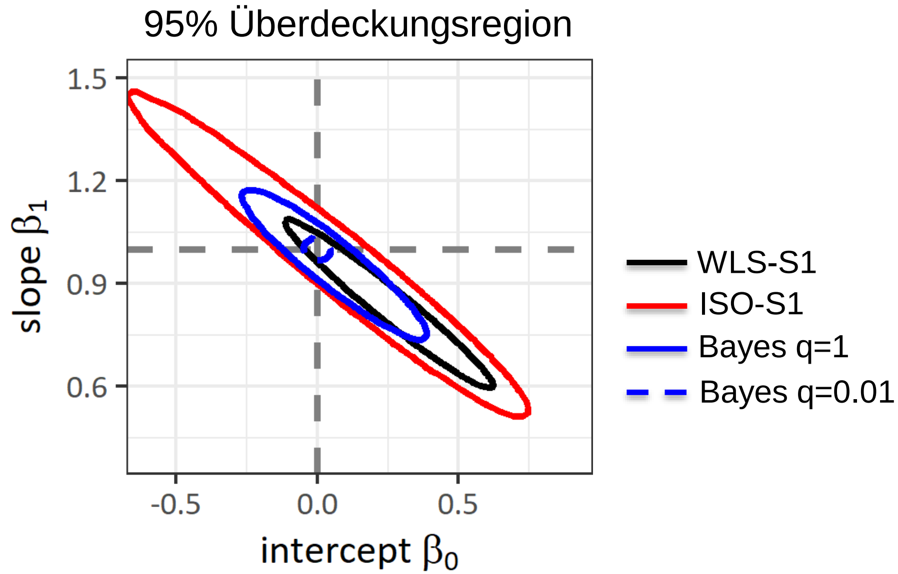


95% CI	least squares Schätzer		Bayes’sche Regression mit Normal Prior		
	WLS – S1	ISO – S1		q=1	
β_0	(-0.03,0.55)	(-0.48,0.64)		(-0.19,0.33)	
β_1	(0.64,1.03)	(0.58,1.34)		(0.85,1.13)	

Bayes‘sche Regression

- wählen nicht informativen Prior für ξ und bivariat normal verteilten Prior für β mit $(\mu_{\beta_0},\mu_{\beta_1})^\top = (0,1)^\top$ und $(\sigma^2_{\beta_0},\sigma^2_{\beta_1})^\top = q\,(u^2_{\hat{\beta}_0\,\mathrm{WLS}},u^2_{\hat{\beta}_1\,\mathrm{WLS}})^\top$



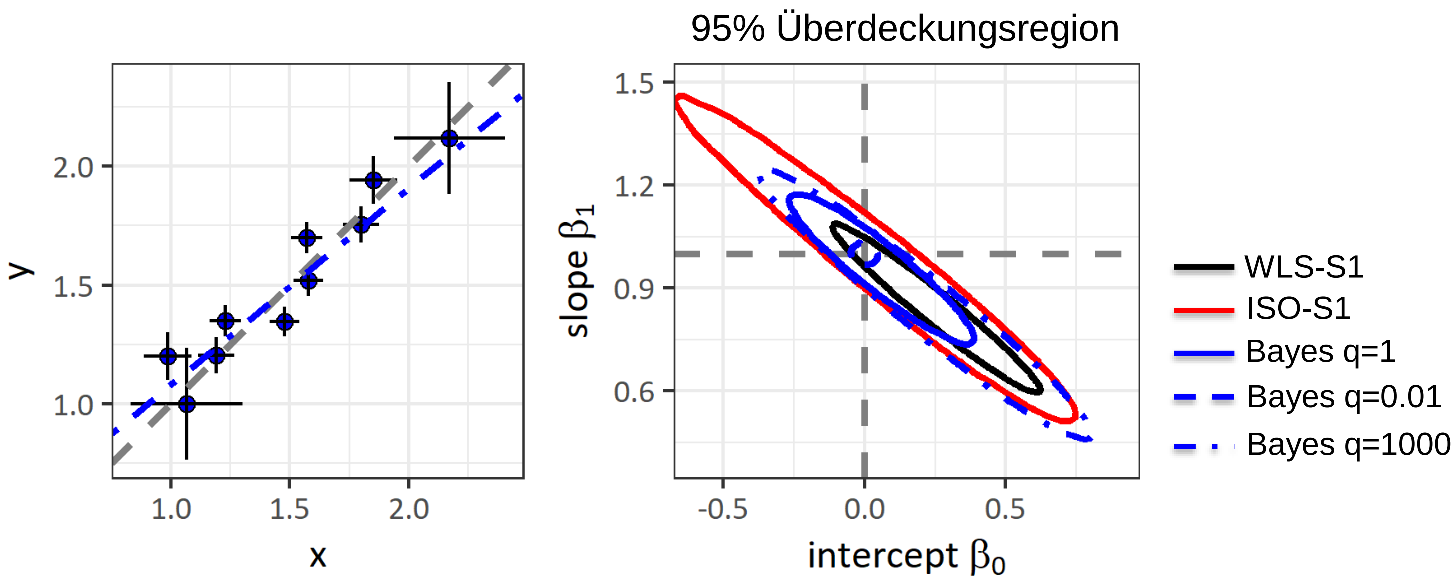


95% CI	least squares Schätzer		Bayes’sche Regression mit Normal Prior		
	WLS – S1	ISO – S1	q=0.01	q=1	
β_0	(-0.03,0.55)	(-0.48,0.64)	(-0.03,0.04)	(-0.19,0.33)	
β_1	(0.64,1.03)	(0.58,1.34)	(0.98,1.03)	(0.85,1.13)	

Bayes‘sche Regression

- wählen nicht informativen Prior für ξ und bivariat normal verteilten

  Prior für β mit $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^\top = (0,1)^\top$ und $(\sigma^2_{\beta_0}, \sigma^2_{\beta_1})^\top = q\,(u^2_{\hat{\beta}_0\,\mathrm{WLS}}, u^2_{\hat{\beta}_1\,\mathrm{WLS}})^\top$



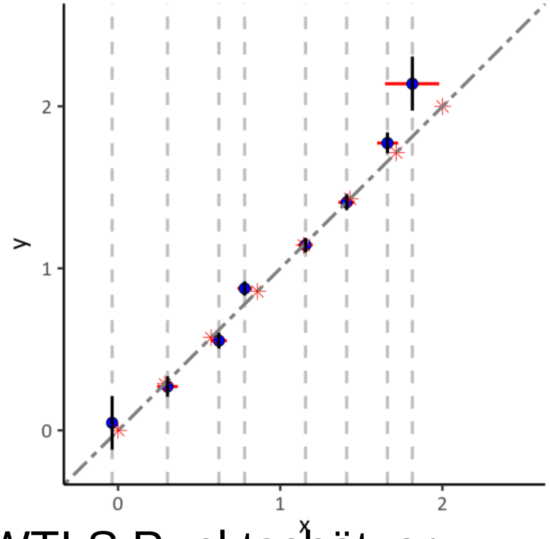
95% CI	least squares Schätzer		Bayes’sche Regression mit Normal Prior		
	WLS – S1	ISO – S1	q=0.01	q=1	q=1000
β_0	(-0.03,0.55)	(-0.48,0.64)	(-0.03,0.04)	(-0.19,0.33)	(-0.24,0.71)
β_1	(0.64,1.03)	(0.58,1.34)	(0.98,1.03)	(0.85,1.13)	(0.51,1.14)

Zusammenfassung

☑ untersuchten lineare Regressionsverfahren bei Errors-in-Variables (EIV) Modellen

☑ Gültigkeit des OLS Punktschätzers

- „$\sigma_{x,i}$ ist klein im Vergleich zu $\sigma_{y,i}$“ ist nicht ausreichend
- OLS kann für EIV Modelle **nicht** empfohlen werden im Besonderen $\mathrm{sgn}(\rho\beta_1) = -1$



☑ Unsicherheitsbestimmung nach GUM oder GUM-S1 für WTLS Punktschätzer

- empfehlen die einfachere Unsicherheitsbestimmung nach GUM
- Nutzung der ISO 28037:2010 WTLS-Implementierung

☑ Bayes‘sche Regression mit informativen Prioren

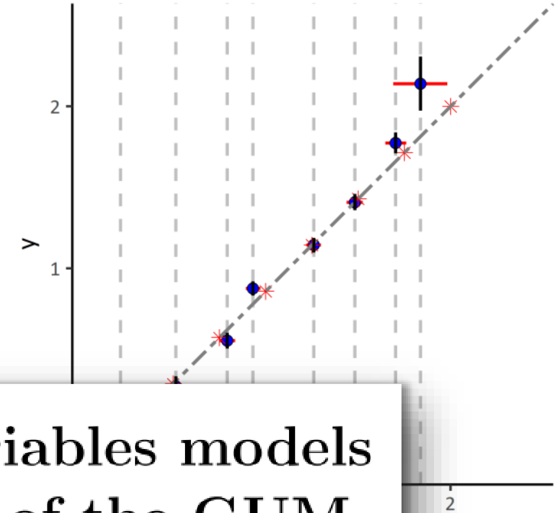
- bevorzugen, wenn ausreichende Vorkenntnisse vorhanden sind

Zusammenfassung

☑ untersuchten lineare Regressionsverfahren bei Errors-in-Variables (EIV) Modellen

☑ Gültigkeit des OLS Punktschätzers

- „$\sigma_{x,i}$ ist klein im Vergleich zu $\sigma_{y,i}$“ ist nicht ausreichend
- OLS kann für EIV Modelle **nicht** empfohlen werden
  ir



☑ Uns … er

-

-

☑ Bay

- bevorzugen, wenn ausreichende Vorkenntnisse vorhanden sind

Straight line regression in errors-in-variables models – Comparison between the application of the GUM with its supplements and Bayesian analyses

Steffen Martens[1], Katy Klauenberg[1], Maurice G. Cox[2], Alen Bošnjaković[3], John Greenwood[4], Adriaan M. H. van der Veen[5], and Clemens Elster[1]

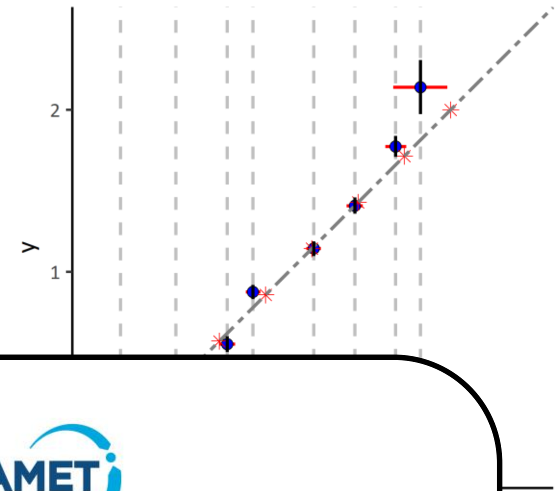
submitted to Metrologia

Zusammenfassung

☑ untersuchten lineare Regressionsverfahren bei Errors-in-Variables (EIV) Modellen

☑ Gültigkeit des OLS Punktschätzers

- „$\sigma_{x,i}$ ist klein im Vergleich zu $\sigma_{y,i}$“ ist nicht ausreichend



EMPIR

EURAMET

The EMPIR initiative is co-funded by the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme and the EMPIR Participating States

Arbeit ist Teil des **E**xamples of **M**easurement **U**ncertainty **E**valuation Projekts und hat Mittel aus dem von den Teilnehmerstaaten kofinanzierten EMPIR-Programm und aus dem Forschungs- und Innovationsprogramm der Europäischen Union Horizon 2020 erhalten

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Dr. Steffen Martens

Physikalisch-Technische Bundesantalt
Braunschweig und Berlin
AG 8.42 Datenanalyse und Messunsicherheit

Abbestraße 2-12
10587 Berlin

✉ steffen.martens@ptb.de