Physikalisch-Technische Bundesanstalt
Braunschweig and Berlin
National Metrology Institute

Kalibrierung eines Drehmomentmesssystems

Bestimmung der Unsicherheit für
die kleinste Quadrate Methode nach GUM vs. Bayes'sche Regression

S. Martens, K. Klauenberg und C. Elster
AG 8.42 Datenanalyse und Messunsicherheit

VDI/VDE-GMA FA 1.20
„Messunsicherheit“

VDI/VDE-GMA FA 1.21
„Eignungsnachweis von Mess- und Prüfprozessen“

24. Juni 2020

EMUE Projekt

EMUE
Examples of Measurement Uncertainty Evaluation

gefördertes EMPIR (**E**uropean **M**etrology **P**rogramme for **I**nnovation and **R**esearch) Projekt von 2018-2021

- 16 internationale Partner
- 30 Problemstellungen aus diversen Bereichen

Ziele des EMUE Projektes

a) Harmonisierung der Bestimmung von Messunsicherheiten (MU)

b) „Lernen anhand von Beispielen“

- behandelt werden traditionelle Bereiche der Metrologie wie z.B. Kalibrierung (***geradlinige Regression***), Konformitätsbewertung…
- praktische „Musterlösungen“ die leicht adaptierbar sind
  - ➢ Vergleich von Methoden zur Bewertung von Unsicherheiten (GUM, Monte Carlo Methode nach GUM-S1 und S2 oder Bayes‘sche Inferenz)
  - ➢ Veranschaulichung der Prinzipien der Messunsicherheits-bewertung

Ziele des EMUE Projektes

c) Breitenwirkung

- Projektwebseite

EMUE

Home | Work packages | Partners | News and events

http://empir.npl.co.uk/emue/

- Informationen zu organisierten Workshops und Trainingskursen

Training course on measurement uncertainty evaluation

February 28, 2020

verschoben aufs Frühjahr 2021

IMBiH, Sarajevo, 12, 13 October 2020 IMBiH w… evaluation in Sarajevo, Bosnia and Herzegovin… institutes, national accreditation bodies, technical auditors and industry stakeholders. The expertise level required by course delegates is medium and the expected outcome is the gaining of knowledge of… Read More

Workshop EMUE

February 28, 2020

LNE, 21 and 22 January 2020 LNE hosted a workshop in Paris on 21 and 22 January 2020. The

- Dokumente (PDFs) und open-source Programme zu den Musterlösungen

zenodo | Martens | Upload | Communities

Examples of Measurement Uncertainty Evaluation (EMUE)

All versions

Access Right

Open (1)

File Type

Zip (1)

Found 1 result.

< 1 >

May 26, 2020 (1.0) | Dataset | Open Access

EMUE-D6-2-CalibrationUncertaintyGUMvsBayesian

Steffen Martens; Katy Klauenberg; Clemens Elster;

Calibration of a torque measuring system – GUM uncertainty evaluation for least-squares versus Bayesia addresses the straight-line calibration of a torque measuring sensor against a reference system using me different torque values. For each torque v

Uploaded on May 26, 2020

https://zenodo.org/communities/emue/

Ziele des EMUE Projektes

c) Breitenwirkung

- via Stakeholder (VDI/VDE FA 1.20, ISO/REMCO, …), Normen & abgeleitete Richtlinien in versch. Disziplinen

- Input für den GUM (zukünftig Bsp. Dokument JCGM 110)

- Kompendium (Projektwebpage)

  - ➢ einleitende Tutorials zur Monte Carlo Methode, zur Bayes‘schen Inferenz, zur Bestimmung von Kovarianzen und zum Berichten von Messunsicherheiten

  - ➢ einheitlich strukturierte „Beispiellösungen“ (6-10 Seiten)

Kalibrierung eines Drehmomentmesssystems

[1]

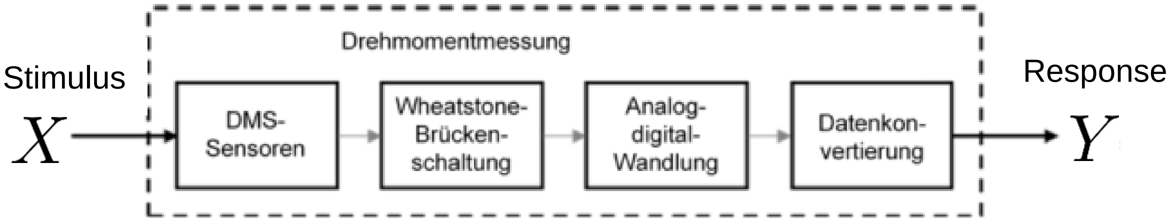


Abbildung nach Bild B7 in VDI/VDE 2600 Teil 2[2]

<u>Ziel:</u> Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs zwischen X und Y

$\rightarrow$ Schätzung der Parameter der Kalibrierkurve und deren Unsicherheiten

[1] https://primosensor.de/produkt/ind4r13-digitalanzeige/

Kalibrierung eines Drehmomentmesssystems

[1]

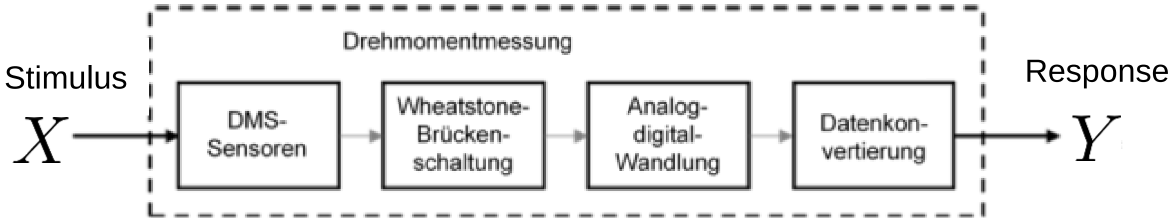


Abbildung nach Bild B7 in VDI/VDE 2600 Teil 2[2]

<u>Ziel:</u> Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs zwischen X und Y
→ Schätzung der Parameter der Kalibrierkurve und deren Unsicherheiten

<u>Daten aus VDI/VDE 2600 Teil 2</u>[2]:

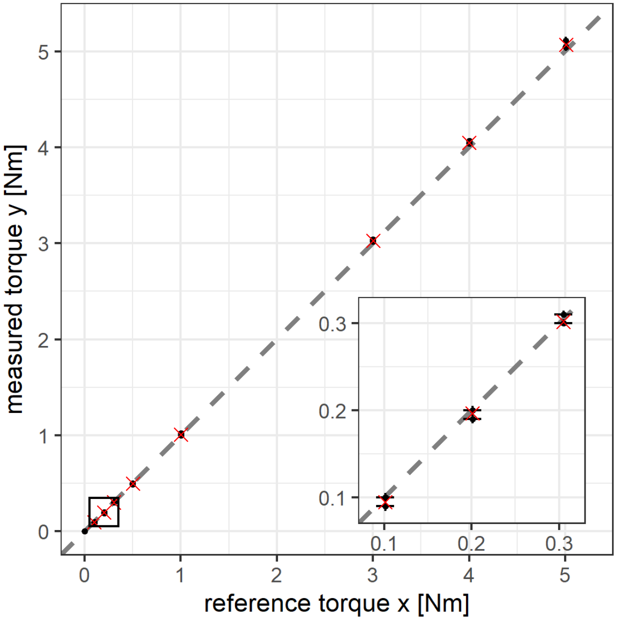
- 8 Referenzdrehmomente x_i
- Mittelwert y_i aus Wiederholungsmessungen mit Standardabweichung S_i

i	x_i N m	Mean y_i N m	SD S_i N m	n_i
1	0.101	0.0950	0.0055	6
2	0.201	0.1966	0.0052	6
3	0.305	0.3016	0.0041	6
4	0.501	0.4983	0.0041	6
5	1.001	1.0083	0.0098	6
6	3.000	3.0266	0.0082	6
7	4.001	4.0466	0.0121	6
8	5.007	5.0666	0.0379	3

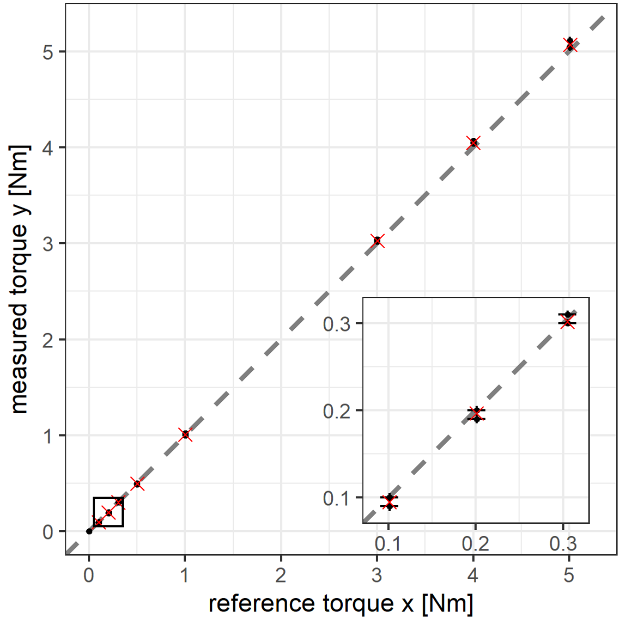
$$y_i = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$
$$S_i = \left((n_i - 1)^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

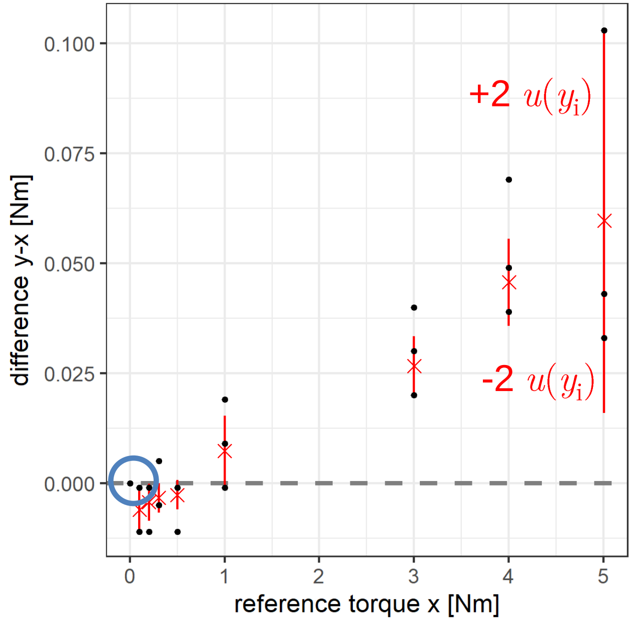
[1] https://primosensor.de/produkt/ind4r13-digitalanzeige/
[2] VDI-Richtlinie VDI/VDE 2600 Part 2
“Prüfprozessmanagement – Ermittlung der Messunsicherheit komplexer Prüfprozesse”,
Verband Deutscher Ingeneure, Verband der Elektrotechnik, Elektronik und Informationstechnik,
Beuth-Verlag, Berlin, Germany, 2019.

Geradlinige Kalibrierfunktion



Geradlinige Kalibrierfunktion



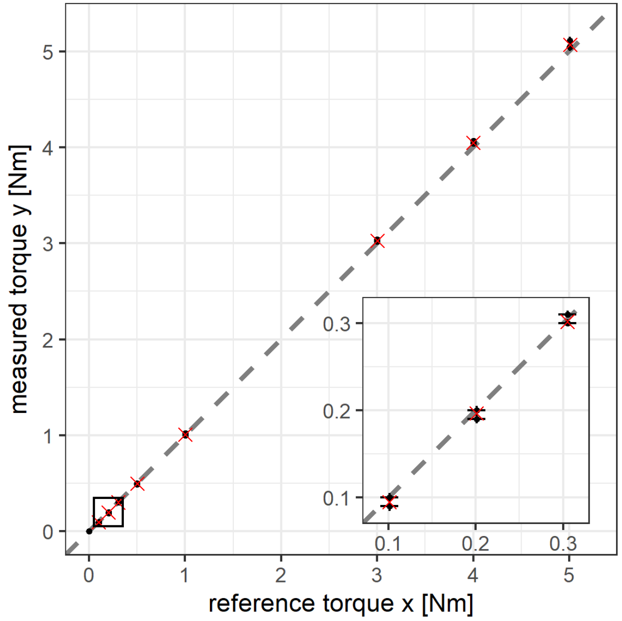


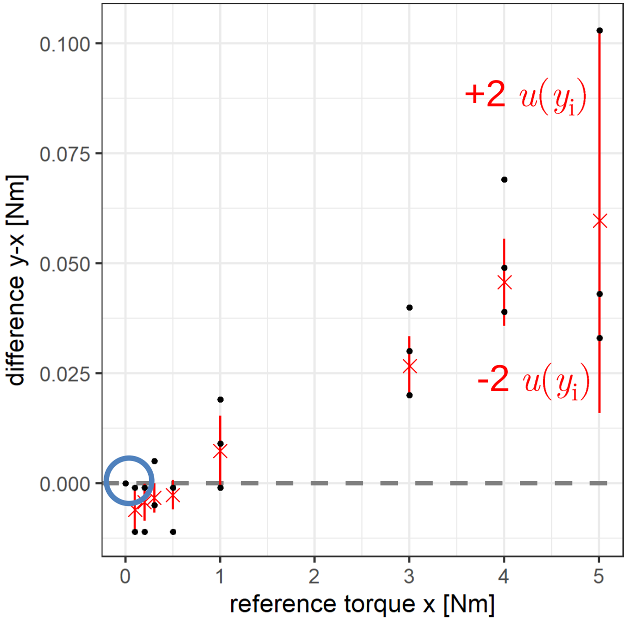
i. bei Laststufe 0 wird kein Drehmoment gemessen

ii. direkte Proportionalität zwischen X und Y

$$Y = \beta X$$ mit Messgröße β

Geradlinige Kalibrierfunktion





i. bei Laststufe 0 wird kein Drehmoment gemessen

ii. direkte Proportionalität zwischen X und Y

$$Y = \beta X$$ mit <u>Messgröße</u> β

iii. Standardabweichungen S_i nehmen mit der Laststufe zu
$\rightarrow$ bestimmt anhand weniger Wiederholungsmessungen !!

Schätzwert und Unsicherheit von β

Schätzwert und Unsicherheit von β

GUM

i. Aufstellen eines <u>Messmodells</u> für Messgröße β als Funktion der Eingangsgröße $\boldsymbol{Y}$

$$\beta = f(Y_1, \ldots, Y_p)$$

Schätzwert und Unsicherheit von β

GUM

i. Aufstellen eines <u>Messmodells</u> für Messgröße β als Funktion der Eingangsgröße $\boldsymbol{Y}$

$$\beta = f(Y_1, \ldots, Y_p)$$

ii. Auswertung des Messmodells bei den Schätzwerten von $\boldsymbol{Y}$

$$\widehat{\beta} = f(y_1, \ldots, y_p)$$

$$u^2\left(\widehat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \beta}{\partial Y_i}\bigg|_{Y_i = y_i} \right)^2 u^2(y_i)$$

LPU

Schätzwert und Unsicherheit von β

GUM

i. Aufstellen eines <u>Messmodells</u> für Messgröße β als Funktion der Eingangsgröße $\boldsymbol{Y}$

$$\beta = f(Y_1, \ldots, Y_p)$$

ii. Auswertung des Messmodells bei den Schätzwerten von $\boldsymbol{Y}$

$$\widehat{\beta} = f(y_1, \ldots, y_p)$$

$$u^2\left(\widehat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\left.\frac{\partial \beta}{\partial Y_i}\right|_{Y_i = y_i} \right)^2 u^2(y_i)$$

LPU

Bayes'scher Ansatz

i. Bestimmung eines <u>statistischen Modells</u> für gemessene Daten mit Messgröße β als Parameter

Schätzwert und Unsicherheit von β

GUM

i. Aufstellen eines Messmodells für Messgröße β als Funktion der Eingangsgröße $\boldsymbol{Y}$

$$\beta = f(Y_1, \ldots, Y_p)$$

ii. Auswertung des Messmodells bei den Schätzwerten von $\boldsymbol{Y}$

$$\widehat{\beta} = f(y_1, \ldots, y_p)$$

$$u^2\left(\widehat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\left.\frac{\partial \beta}{\partial Y_i}\right|_{Y_i = y_i} \right)^2 u^2(y_i)$$

LPU

Bayes'scher Ansatz

i. Bestimmung eines statistischen Modells für gemessene Daten mit Messgröße β als Parameter

ii. Anwendung des Bayes Theorems & Bestimmung der Posterior-Verteilungsfunktion für β

Schätzwert und Unsicherheit von β

GUM

i. Aufstellen eines <u>Messmodells</u> für Messgröße β als Funktion der Eingangsgröße $\boldsymbol{Y}$

$$\beta = f(Y_1, \dots, Y_p)$$

ii. Auswertung des Messmodells bei den Schätzwerten von $\boldsymbol{Y}$

$$\widehat{\beta} = f(y_1, \dots, y_p)$$

$$u^2\left(\widehat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \beta}{\partial Y_i}\bigg|_{Y_i = y_i} \right)^2 u^2(y_i)$$

LPU

Bayes’scher Ansatz

i. Bestimmung eines <u>statistischen Modells</u> für gemessene Daten mit Messgröße β als Parameter

ii. Anwendung des Bayes Theorems & Bestimmung der Posterior-Verteilungsfunktion für β

iii. Berechnung des Mittelwertes, der Varianz, credible Interval,…

GUM Messmodell (i)

- Minimierung der Summe der gewichteten, kleinsten Quadrate

$$Q = \sum_{i=1}^{p} W_i \{ n_i \left(y_i - \beta x_i \right)^2 \}$$

führt zu Messmodell für Messgröße β

$$\beta = \left(\sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i Y_i$$

GUM Messmodell (i)

- Minimierung der Summe der gewichteten, kleinsten Quadrate

$$Q = \sum_{i=1}^{p} W_i \{ n_i \left(y_i - \beta x_i \right)^2 \}$$

führt zu Messmodell für Messgröße β

$$\beta = \left(\sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i Y_i$$

gewöhnlicher kQ Schätzer
(OLS) für Gewichte $W_i = 1$

GUM Messmodell (i)

- Minimierung der Summe der gewichteten, kleinsten Quadrate

$$Q = \sum_{i=1}^{p} W_i \{ n_i \, (y_i - \beta x_i)^2 \}$$

führt zu Messmodell für Messgröße β

$$\beta = \left(\sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{p} n_i W_i x_i Y_i$$

gewöhnlicher kQ Schätzer (OLS) für Gewichte $W_i = 1$

gewichteter kQ Schätzer (WLS) für $n_i W_i = u(y_i)^{-2}$

GUM Messmodell (ii)

- Auswertung des Messmodells an den Schätzwerten y_i für die Eingangsgröße Y_i

Method	$\widehat{\beta}$ a.u.	$u(\widehat{\beta})$ a.u.	95% coverage / credible interval a.u.
OLS-GUM	1.010 7	0.001 5	[1.007 7,1.013 6]
WLS-GUM	1.008 5	0.000 8	[1.007 0,1.010 0]

➢ OLS und WLS liefern unterschiedliche Ergebnisse

- OLS berücksichtigt nicht, dass die Unsicherheiten zu y_i unterschiedlich sind
- WLS berücksichtigt $u^2(y_i)$ als “korrekt” geschätzte Varianzen $\rightarrow$ einzelne Punkte können über- bzw. unterbewertet sein

Bayes’sche Regression

- GUM und GUM-S1 ermöglichen **nicht** die Berücksichtigung von Vorwissen für Messgröße

- Bayes‘sche Regression ist allgemein anwendbar und flexibler

Bayes'sche Regression

- GUM und GUM-S1 ermöglichen **nicht** die Berücksichtigung von Vorwissen für Messgröße

- Bayes'sche Regression ist allgemein anwendbar und flexibler

i. statistisches Modell für gemessene Daten

$$Y_{ij}|\beta, \sigma_i^2 \sim N\left(\beta\, x_i, \sigma_i^2\right)$$

Bayes’sche Regression

- GUM und GUM-S1 ermöglichen **nicht** die Berücksichtigung von Vorwissen für Messgröße

- Bayes‘sche Regression ist allgemein anwendbar und flexibler

i. <u>statistisches Modell</u> für gemessene Daten

$$Y_{ij}|\beta, \sigma_i^2 \sim N\left(\beta\, x_i, \sigma_i^2\right)$$

!! Varianzen sind unbekannt und werden geschätzt !!

Bayes’sche Regression

- GUM und GUM-S1 ermöglichen **nicht** die Berücksichtigung von Vorwissen für Messgröße
- Bayes‘sche Regression ist allgemein anwendbar und flexibler

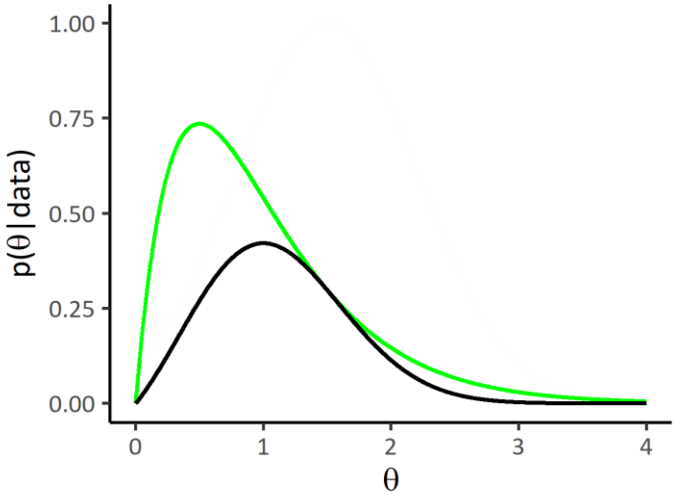
i. statistisches Modell für gemessene Daten

$$Y_{ij} | \beta, \sigma_i^2 \sim N\left(\beta\, x_i, \sigma_i^2\right)$$

!! Varianzen sind unbekannt und werden geschätzt !!

ii. Bayes Theorem:

Posterior ∝ Prior × likelihood



Bayes'sche Regression (ii + iii)

- Bayes Theorem

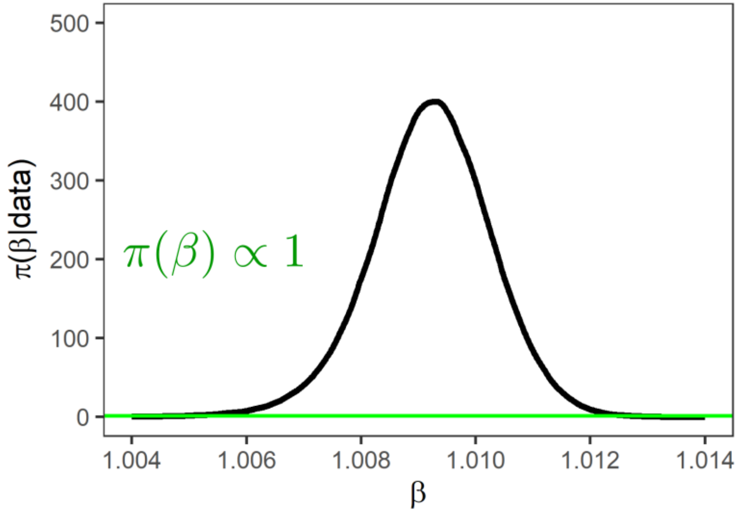
$$\text{Posterior} \propto \text{Prior} \times \text{likelihood}$$

Bayes'sche Regression (ii + iii)

- Bayes Theorem

Posterior ∝ Prior × likelihood

nicht-informativer Prior

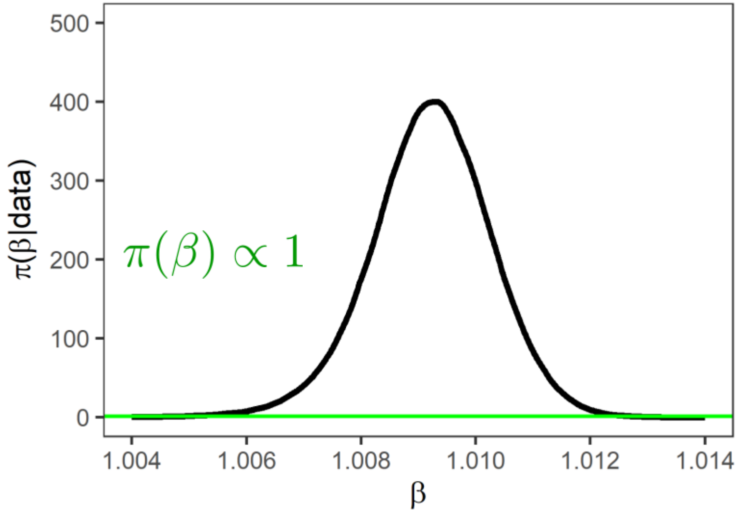


Bayes'sche Regression (ii + iii)

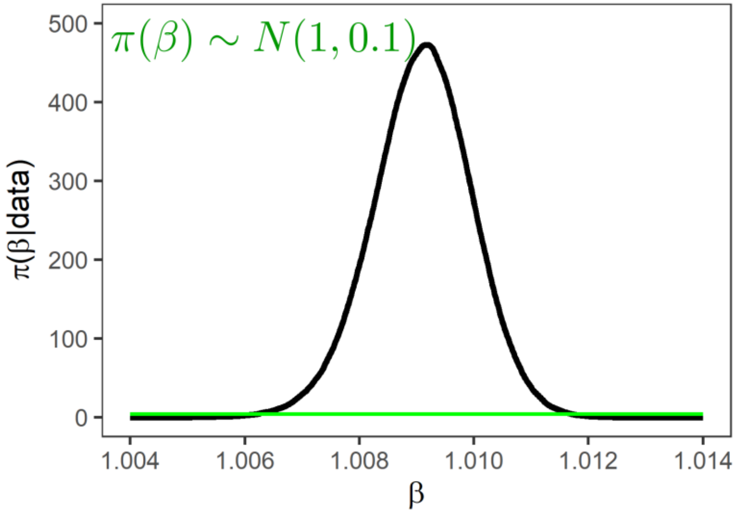
- Bayes Theorem

Posterior ∝ Prior × likelihood

nicht-informativer Prior



informativer Prior

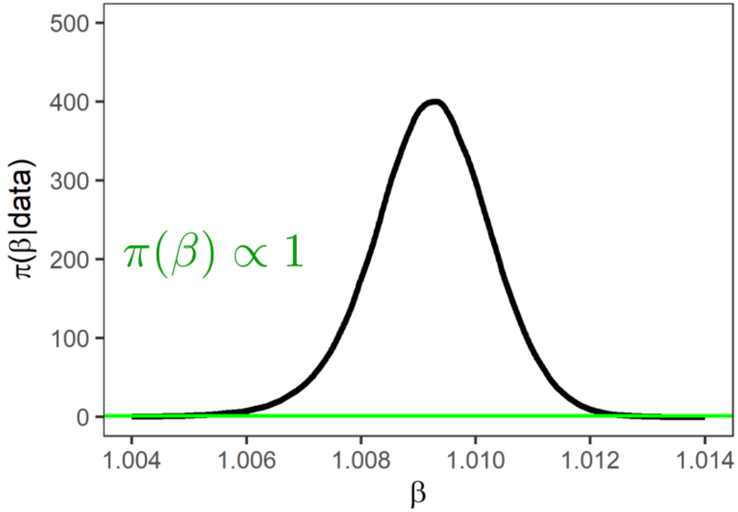


Bayes'sche Regression (ii + iii)

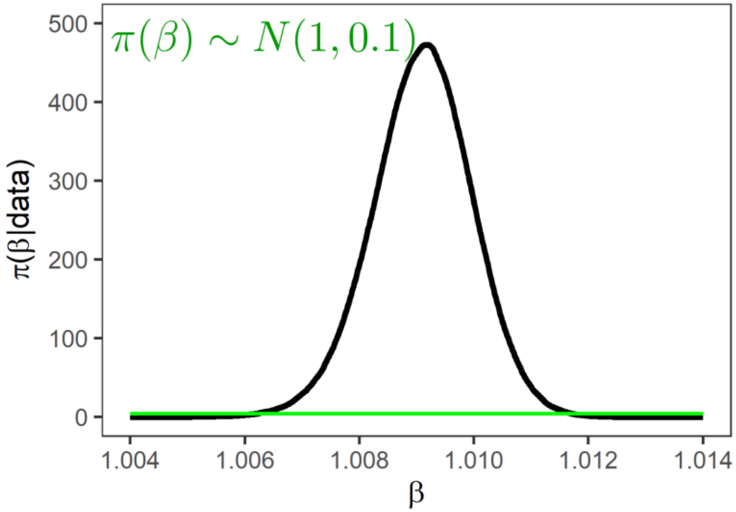
- Bayes Theorem

$$\text{Posterior} \propto \text{Prior} \times \text{likelihood}$$

nicht-informativer Prior



informativer Prior

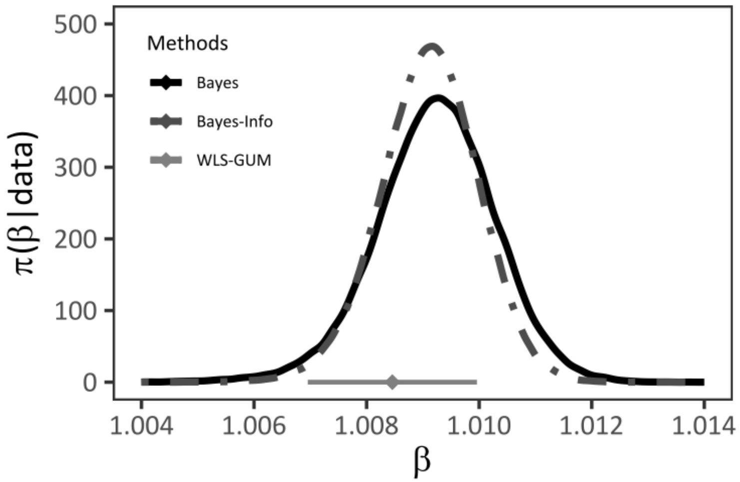


ii. für beide Prioren kann die marginale Posterior-Verteilung für β analytisch berechnet werden

iii. open-source R-Code mit Implementierung der Posterior-Verteilung und zur Berechnung derer Momente ist erhältlich

Vergleich der Ergebnisse

Method	$\widehat{\beta}$ a.u.	$u(\widehat{\beta})$ a.u.	95% coverage / credible interval a.u.
OLS-GUM	1.010 7	0.001 5	[1.007 7,1.013 6]
WLS-GUM	1.008 5	0.000 8	[1.007 0,1.010 0]
Bayes	1.009 2	0.001 1	[1.007 0,1.011 2]
Bayes-Info	1.009 1	0.000 9	[1.007 3,1.010 8]



- Bayes'sche Regression schätzt Varianzen mit
  - nicht-informativer und gewählter informativer Prioren liefern ähnliche Ergebnisse
  - Schätzwert für β liegt zwischen dem OLS und WLS Ergebnis

Diskussion/Ausblick

- Type B Unsicherheiten der Schätzwerte von $\boldsymbol{X}$ können im Messmodell nicht berücksichtigt werden, da keine Informationen zur Korrelation zwischen den Schätzwerten vorhanden sind
  - daher hier $X_i = x_i$ und $u(x_i)=0$
- Type B Unsicherheiten können bei weitergehenden Berechnungen berücksichtigt werden

Diskussion/Ausblick

- Type B Unsicherheiten der Schätzwerte von $\boldsymbol{X}$ können im Messmodell nicht berücksichtigt werden, da keine Informationen zur Korrelation zwischen den Schätzwerten vorhanden sind

    - daher hier $X_i = x_i$ und $u(x_i)=0$

- Type B Unsicherheiten können bei weitergehenden Berechnungen berücksichtigt werden

- falls Korrelationen bekannt sind, ist weighted total least-squares (WTLS) die empfohlenden Regressionsmethode(ISO 28037 und ISO 28038)

    - Kalibrierung einer kritischen Düse zur Gasflussmessung
    - Vergleich von zwei Methoden zur Bestimmung der totalen Hämoglobinkonzentration

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Beispiel Dokument und R Implementierung

S. Martens, K. Klauenberg und C. Elster
EMUE-D6-2-CalibrationUncertaintyGUMvsBayesian
Zenodo (Version 1.0) http://doi.org/10.5281/zenodo.3858121

Dr. Steffen Martens

Physikalisch-Technische Bundesantalt
Braunschweig und Berlin
AG 8.42 Datenanalyse und Messunsicherheit

Abbestraße 2-12
10587 Berlin

✉ steffen.martens@ptb.de