Доказательство формулы $x * s(0) = x$

Золотухин Андрей Алексеевич
Группа: 5130904/30008
Задание: 3
Вариант: Доказать $x * s(0) = x$

Дано:
Правила:

- A: $x + 0 = x$
- B: $x + s(y) = s(x + y)$
- C: $x * 0 = 0$
- D: $x * s(y) = (x * y) + x$

Цель:
Доказать, что $x * s(0) = x$ для всех x.

Доказательство:
Докажем формулу пошагово, применяя заданные правила и лемму.
Пусть у нас есть выражение $x * s(0)$. Мы хотим показать, что оно равно x.

Шаг 1: Используем правило D.
Согласно правилу D, если умножаем x на s(y), то получаем $(x * y) + x$. Подставим $y = 0$:
$x * s(0) = (x * 0) + x$
Здесь мы применили правило D с подстановкой x вместо x и 0 вместо y.

Шаг 2: Применяем правило C.
Теперь посмотрим на часть $(x * 0)$. Согласно правилу C, умножение любого x на 0 даёт 0.
Подставим это:
$(x * 0) + x = 0 + x$
Мы заменили $(x * 0)$ на 0, используя правило C с подстановкой x вместо x.

Шаг 3: Упрощаем с помощью леммы.
Осталось выражение $0 + x$. Мы знаем из леммы (докажем её ниже), что $0 + x = x$. Подставим:
$0 + x = x$
Таким образом, мы получили:
$x * s(0) = x$

Лемма: $0 + x = x$
Докажем, что $0 + x = x$ для всех x методом математической индукции по x.

База индукции:
Проверим для $x = 0$:
$0 + 0 = 0$
По правилу A с подстановкой $x = 0$, это верно. База выполнена.

Индукционный переход:
Предположим, что $0 + x = x$ верно для некоторого x (индукционное предположение).
Проверим для s(x):
$0 + s(x) = s(0 + x)$
По правилу B с подстановкой $x = 0$ и $y = x$.
Теперь используем индукционное предположение $0 + x = x$:

$s(0 + x) = s(x)$
Итак, $0 + s(x) = s(x)$. Переход выполнен.

Вывод по индукции:
По принципу математической индукции, $0 + x = x$ верно для всех x.

Протокол унификаций:

1. $x * s(0) = (x * 0) + x$ (Правило D: x как x, $y = 0$)
2. $(x * 0) + x = 0 + x$ (Правило C: x как x)
3. $0 + x = x$ (Лемма: x как x)

Итог:
Мы доказали, что $x * s(0) = x$, последовательно применив правила D, C и лемму $0 + x = x$.