Министерство образования и науки РФ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа программной инженерии

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. Вариант №7.

по дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Выполнил

Студент группы 5130904/30008 Золотухин Андрей Алексеевич

Санкт-Петербург
2025

Оглавление

Задание

Для функции $f(x)$=1−exp(−x) по узлам $x_k = 0.3k(k = 0, 1, \ldots, 10)$ построить полином Лагранжа $L(x)$ 10-й степени и сплайн-функцию $S(x)$. Затем сравнить значения трёх интегралов:

$$\int_0^3 f(x)dx \qquad \int_0^3 S(x)dx \qquad \int_0^3 L(x)dx$$

Первый интеграл вычислить аналитически, а для вычисления последнего использовать численные методы.

Ход решения

1. Функция и узлы:
   - Задана функция $f(x)$=1−exp(−x).
   - Узлы x_k=0.3k для k=0,1,…,10.
2. Полином Лагранжа:
   - Полином Лагранжа $L(x)$ 10-й степени построен вручную с использованием базисных полиномов Лагранжа.
3. Сплайн-функция:
   - Сплайн-функция $S(x)$ построена с использованием кубического сплайна из библиотеки scipy.interpolate.CubicSpline.
4. Вычисление интегралов:
   - Интеграл $\int_0^3 f(x)dx$ вычислен аналитически.
   - Интегралы $\int_0^3 L(x)dx$ и $\int_0^3 S(x)dx$ вычислены численно с использованием quad_vec.
5. Сравнение результатов:
   - Результаты интегралов и значения функции в точках сравнены с помощью таблиц и графиков.

Код программы

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline
from scipy.integrate import quad_vec
import matplotlib.pyplot as plt
from tabulate import tabulate

def original_function(t):
    return 1 - np.exp(-t)

node_indices = np.arange(0, 11)
node_x = 0.3 * node_indices
node_y = original_function(node_x)

def lagrange_interpolation(t, x_points, y_points):
    num_points = len(x_points)
    interpolation_result = 0.0
    for i in range(num_points):
        term = y_points[i]
        mask = np.arange(num_points) != i  # Маска для исключения i-го элемента
        term *= np.prod((t - x_points[mask]) / (x_points[i] - x_points[mask]))
        interpolation_result += term
    return interpolation_result

cubic_spline = CubicSpline(node_x, node_y)

integral_original = 2.049787

integral_cubic_spline, _ = quad_vec(cubic_spline, 0, 3)

def lagrange_integrand(t):
    return lagrange_interpolation(t, node_x, node_y)

integral_lagrange, _ = quad_vec(lagrange_integrand, 0, 3)

integral_comparison = [
    ["Функция", "Значение интеграла"],
    ["original_function(t)", integral_original],
    ["Сплайн", integral_cubic_spline],
    ["Интерполяция Лагранжа", integral_lagrange]
]

print("Сравнение значений интегралов:")
print(tabulate(integral_comparison, headers="firstrow", tablefmt="grid",
floatfmt=".10f"))

evaluation_points = np.arange(1.6, 2.7, 0.2)
point_comparison = []
for point in evaluation_points:
    original_value = original_function(point)
    spline_value = cubic_spline(point)
    lagrange_value = lagrange_interpolation(point, node_x, node_y)
    spline_diff = abs(original_value - spline_value)
    lagrange_diff = abs(original_value - lagrange_value)
```

```
    point_comparison.append([point, original_value, spline_value, lagrange_value,
spline_diff, lagrange_diff])

print("\nСравнение значений в точках и расхождения:")
print(tabulate(point_comparison, headers=["Точка", "original_function(t) (точное)",
"Сплайн", "Лагранж", "Расх. сплайна", "Расх. Лагранжа"], tablefmt="grid",
floatfmt=".10f"))

max_spline_diff = max([row[4] for row in point_comparison])
max_lagrange_diff = max([row[5] for row in point_comparison])

print(f"\nМаксимальная погрешность сплайна: {max_spline_diff:.10f}")
print(f"Максимальная погрешность интерполяции Лагранжа: {max_lagrange_diff:.10f}")

plot_points = np.linspace(0, 3, 500)  # Точки для построения графиков
original_values = original_function(plot_points)
spline_values = cubic_spline(plot_points)
lagrange_values = np.array([lagrange_interpolation(t, node_x, node_y) for t in
plot_points])

plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(plot_points, original_values, label="original_function(t) (точное)",
linewidth=2, color="blue")
plt.plot(plot_points, spline_values, label="Сплайн", linestyle="--", color="green")
plt.plot(plot_points, lagrange_values, label="Интерполяция Лагранжа", linestyle="-.",
color="orange")

plt.scatter(node_x, node_y, color="red", label="Узлы интерполяции (точные значения)",
zorder=5)

for i, (x, y) in enumerate(zip(node_x, node_y)):
    plt.annotate(f'({x:.1f}, {y:.2f})', (x, y), textcoords="offset points",
xytext=(0,10), ha='center')

plt.title("Сравнение original_function(t), сплайна и интерполяции Лагранжа",
fontsize=16)
plt.xlabel("t", fontsize=14)
plt.ylabel("y", fontsize=14)
plt.legend(fontsize=12, loc="upper left")
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.6)
plt.tight_layout()
plt.show()

print("\nСравнение интегралов:")
print(f"Интеграл original_function(t): {integral_original:.10f}")
print(f"Интеграл сплайна: {integral_cubic_spline:.10f} (разница:
{abs(integral_original - integral_cubic_spline):.10f})")
print(f"Интеграл интерполяции Лагранжа: {integral_lagrange:.10f} (разница:
{abs(integral_original - integral_lagrange):.10f})")
```

Аналитическое вычисление интеграла

Записываем интеграл:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (1 - e^{-x})dx$$

Разделяем интеграл на два

$$\int_0^3 (1 - e^{-x})dx = \int_0^3 1\,dx \; - \int_0^3 e^{-x}\,dx$$

Вычисляем первый интеграл

$$\int_0^3 1\,dx \; = [x]_0^3 = 3 - 0 = 3$$

Вычисляем второй интеграл

$\int_0^3 e^{-x}\,dx$ - интеграл от e^{-x} равен e^{-x}, поэтому:

$$\int_0^3 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^3 = -e^{-3} - (e^0) = -e^{-3} + 1 = 1 - e^{-3}$$

Складываем результаты

$$\int_0^3 (1 - e^{-x})dx = 3 - (1 - e^{-3}) = 3 - 1 + e^{-3} = 2 + e^{-3}$$

Подставляем численное значение

$$e^{-3} \approx 0.049787$$

Тогда: $\int_0^3 (1 - e^{-x})dx \approx 2 + 0.049787 = 2.049787$

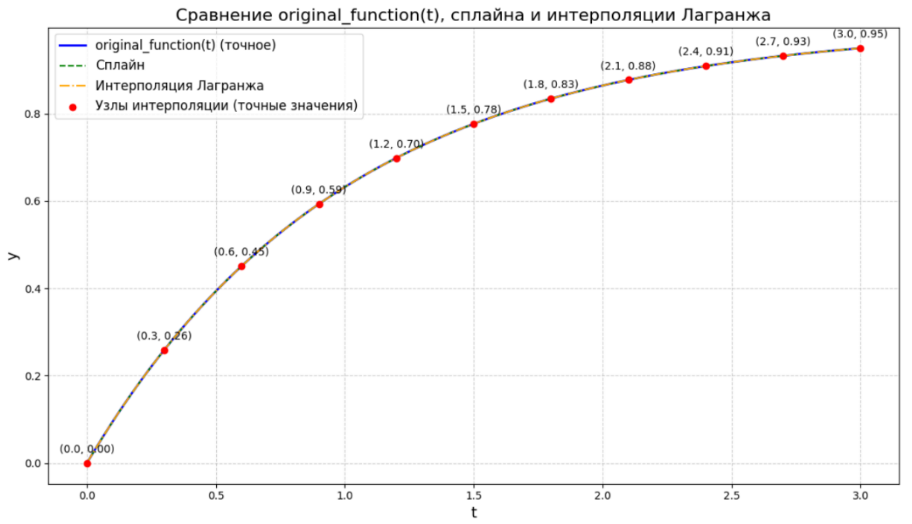
Результаты выполнения кода

```
Сравнение значений интегралов:
+----------------------+---------------------+
| Функция              |   Значение интеграла |
+======================+=====================+
| original_function(t)  |        2.0497870000 |
+----------------------+---------------------+
| Сплайн               |        2.0497680393 |
+----------------------+---------------------+
| Интерполяция Лагранжа |        2.0497870682 |
+----------------------+---------------------+

Сравнение значений в точках и расхождения:
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
|       Точка |   original_function(t) (точное) |      Сплайн |      Лагранж |   Расх. сплайна |   Расх. Лагранжа |
+=============+==============================+=============+=============+================+================+
| 1.6000000000 |                 0.7981034820 | 0.7981066347 | 0.7981034820 |    0.0000031527 |     0.0000000000 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
| 1.8000000000 |                 0.8347011118 | 0.8347011118 | 0.8347011118 |    0.0000000000 |     0.0000000000 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
| 2.0000000000 |                 0.8646647168 | 0.8646674172 | 0.8646647167 |    0.0000027005 |     0.0000000001 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
| 2.2000000000 |                 0.8891968416 | 0.8891976859 | 0.8891968417 |    0.0000008442 |     0.0000000001 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
| 2.4000000000 |                 0.9092820467 | 0.9092820467 | 0.9092820467 |    0.0000000000 |     0.0000000000 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
| 2.6000000000 |                 0.9257264218 | 0.9257321508 | 0.9257264213 |    0.0000057290 |     0.0000000005 |
+-------------+------------------------------+-------------+-------------+----------------+----------------+
```

```
Максимальная погрешность сплайна: 0.0000057290
Максимальная погрешность интерполяции Лагранжа: 0.0000000005

Сравнение интегралов:
Интеграл original_function(t): 2.0497870000
Интеграл сплайна: 2.0497680393 (разница: 0.0000189607)
Интеграл интерполяции Лагранжа: 2.0497870682 (разница: 0.0000000682)
```



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была реализована программа для приближённого вычисления интеграла функции f(x)=1−exp(−x). С использованием численных методов были построены сплайн-функция $S(x)$ и полином Лагранжа $L(x)$ 10-й степени. Для оценки точности интерполяции значения функций были рассчитаны в точках x_k= [1.6, 2.6] и сравнены с точными значениями функции $f(x)$.

Результаты сравнения показали, что и сплайн-функция, и полином Лагранжа хорошо приближают исходную функцию $f(x)$. В большинстве точек расхождения между точными значениями и значениями, полученными с помощью сплайна и полинома Лагранжа, крайне малы. Однако в некоторых точках полином Лагранжа демонстрирует немного меньшую погрешность, чем сплайн, что может быть связано с особенностями поведения полинома высокой степени на заданном интервале. В целом, оба метода показали высокую точность интерполяции.

Все три интеграла ($\int_0^3 f(x)dx$, $\int_0^3 S(x)dx$ и $\int_0^3 L(x)dx$) совпали с высокой точностью, что подтверждает корректность выполненных вычислений