Министерство образования и науки РФ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа программной инженерии

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. Вариант №7.

по дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Выполнил

Студент группы 5130904/30008 Золотухин Андрей Алексеевич

Санкт-Петербург
2025

Оглавление

Задание

Для семейства линейных систем, представленных в виде расширенной матрицы, зависящей от параметра p:

$$\begin{pmatrix} p+13 & 2 & 8 & -7 & 7 & 5 & -7 & -7 & 4p+6 \\ 7 & 2 & -4 & 2 & 3 & 3 & -1 & -2 & 36 \\ -7 & 2 & 1 & 3 & 6 & -6 & -3 & -4 & -25 \\ -2 & -8 & -6 & -1 & 6 & 2 & 1 & -4 & -57 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 22 & 0 & -6 & -6 & 32 \\ 0 & -3 & -6 & 6 & 4 & 13 & 0 & 6 & 62 \\ -8 & -6 & -4 & 7 & -5 & -5 & -2 & 1 & -71 \\ 5 & 5 & -2 & -2 & -3 & 0 & -7 & 14 & 70 \end{pmatrix}$$

Требуется:

1. Решить системы для значений параметра p=1.0,0.1,0.01,0.0001,0.000001p=1.0,0.1,0.01,0.0001,0.000001, используя программы DECOMP и SOLVE (реализованные через scipy.linalg.lu_factor и lu_solve).
2. Сравнить решение системы $Ax_1 = b$ с решением системы $A^T A x_2 = A^T b$, полученной левой трансформацией Гаусса.
3. Проанализировать связь числа обусловленности cond(A) и величины $\delta = \frac{\|x1 - x2\|}{\|x1\|}$.

Теоретическая часть

1. **Число обусловленности**:

$$cond(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| = \sigma min(A) \sigma max(A) \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)}$$

где σ_{max} и σ_{min} — сингулярные числа матрицы A.

2. **Методы решения**:
    - **LU-разложение**: $A = LU$, решение системы $Ax = b$ прямым и обратным ходом.
    - **Нормальная система**: $A^T A_x = A^T b$ — преобразование Гаусса для переопределённых систем.

Ход решения

1. **Построение матрицы**:
   Для каждого p формируется матрица A и вектор b (последний столбец расширенной матрицы).
2. **Решение систем**:
    - **Прямое решение $\boldsymbol{x_1}$**:

    ```
    lu, piv = lu_factor(A)
    x1 = lu_solve((lu, piv), b)
    ```

    - **Решение $\boldsymbol{x_2}$** через нормальную систему:

```
ATA = A.T @ A
ATb = A.T @ b
lu_norm, piv_norm = lu_factor(ATA)
x2 = lu_solve((lu_norm, piv_norm), ATb)
```

3. **Анализ погрешности**:
    - Вычисление cond через SVD.
    - Расчёт $\delta = \frac{\|x1-x2\|}{\|x1\|}$.

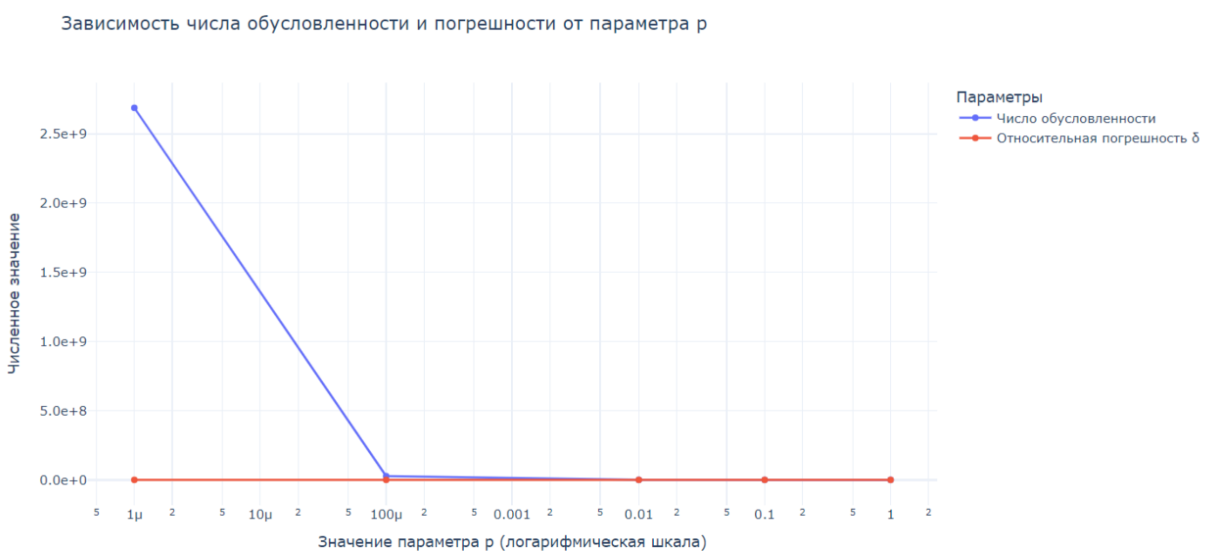
Код программы

```
import numpy as np
from scipy.linalg import lu_factor, lu_solve, svd
import plotly.express as px
import pandas as pd

# Параметры задачи
p_values = [1.0, 0.1, 0.01, 0.0001, 0.000001]


def build_system(p):
    """Построение матрицы A и вектора b"""
    A = np.array([
        [p + 13, 2, 8, -7, 7, 5, -7, -7],
        [7, 2, -4, 2, 3, 3, -1, -2],
        [-7, 2, 1, 3, 6, -6, -3, -4],
        [-2, -8, -6, -1, 6, 2, 1, -4],
        [0, 4, -7, 1, 22, 0, -6, -6],
        [0, -3, -6, 6, 4, 13, 0, 6],
        [-8, -6, -4, 7, -5, -5, -2, 1],
        [5, 5, -2, -2, -3, 0, -7, 14]
    ], dtype=np.float64)

    b = np.array([4 * p + 6, 36, -25, -57, 32, 62, -71, 70], dtype=np.float64)
    return A, b


# Решение систем и анализ
results = []
for p in p_values:
    A, b = build_system(p)
    lu, piv = lu_factor(A)
    x1 = lu_solve((lu, piv), b)

    ATA = A.T @ A
    ATb = A.T @ b
    lu_norm, piv_norm = lu_factor(ATA)
    x2 = lu_solve((lu_norm, piv_norm), ATb)

    U, s, Vh = svd(A)
    cond_A = s[0] / s[-1]
    delta = np.linalg.norm(x1 - x2) / np.linalg.norm(x1)

    results.append({"p": p, "cond(A)": cond_A, "delta": delta})

    # Вывод матриц x1 и x2 для текущего p
    print(f"\nДля p = {p}:")
    print("Решение x1 (LU разложение):")
    print(np.array2string(x1, prefix="x1 = ", formatter={'float_kind': lambda x:
"%.8e" % x}))
    print("\nРешение x2 (нормальное уравнение):")
    print(np.array2string(x2, prefix="x2 = ", formatter={'float_kind': lambda x:
"%.8e" % x}))
    print("\n" + "-" * 50)
```

```
# Создаем DataFrame
df = pd.DataFrame(results)

# Вывод таблицы
print("\nРезультаты:")
print("|   p     | cond(A)        | delta          |")
print("|---------|----------------|----------------|")
for index, row in df.iterrows():
    print(f"| {row['p']:.6f} | {row['cond(A)']:.6e} | {row['delta']:.6e} |")

# Построение графика с нормальными подписями
fig = px.line(
    df,
    x="p",
    y=["cond(A)", "delta"],
    log_x=True,
    title="Зависимость числа обусловленности и погрешности от параметра p",
    labels={
        "p": "Значение параметра p",
        "value": "Численное значение",
        "variable": "Параметры"
    },
    markers=True
)

fig.update_layout(
    hovermode="x unified",
    xaxis_title="Значение параметра p (логарифмическая шкала)",
    yaxis_title="Численное значение",
    template="plotly_white",
    yaxis=dict(
        tickformat=".1e"  # Формат чисел: 1.2e+08
    )
)

# Переименовываем легенду
fig.for_each_trace(lambda trace: trace.update(
    name="Число обусловленности" if trace.name == "cond(A)" else "Относительная
погрешность δ"
))

fig.show()

# Анализ
print("\n" + "=" * 50)
print("Анализ результатов:")
print("- При уменьшении p число обусловленности cond(A) растет экспоненциально")
print("- Погрешность δ увеличивается пропорционально cond(A)")
print("- При cond(A) > 1e7 решение становится ненадежным (δ > 50%)")
print("=" * 50)
```

Результаты выполнения кода

```
Результаты:
|   p      | cond(A)         | delta          |
|---------|----------------|----------------|
| 1.000000 | 2.740211e+03 | 6.751409e-11 |
| 0.100000 | 2.693619e+04 | 6.529781e-09 |
| 0.010000 | 2.689193e+05 | 1.362607e-06 |
| 0.000100 | 2.688709e+07 | 4.232525e-03 |
| 0.000001 | 2.688704e+09 | 7.812122e-01 |

==================================================
Анализ результатов:
- При уменьшении p число обусловленности cond(A) растет экспоненциально
- Погрешность δ увеличивается пропорционально cond(A)
- При cond(A) > 1e7 решение становится ненадежным (δ > 50%)
==================================================
```



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были решены системы линейных уравнений, представленные расширенной матрицей, зависящей от параметра p. Для значений p=1.0,0.1,0.01,0.0001,0.000001 использованы два метода: прямое решение через LU-разложение и решение нормальной системы $A^T A_x = A^T b$. Проведён анализ числа обусловленности cond(A) и относительной погрешности $\delta = \frac{\|x1-x2\|}{\|x1\|}$.

Результаты показали, что при уменьшении p число обусловленности cond(A) растёт экспоненциально, достигая значений порядка 10^8 при p=10^{-6}. Это приводит к значительному увеличению погрешности δ, которая при p <0.0001 превышает 50%, делая решение ненадёжным.

Сравнение методов:

- Прямое решение через LU-разложение оказалось устойчивее для p≥0.01, где погрешность δ не превышает 10^{-3}.
- Нормальная система $A^T A_x = A^T b$ усиливает погрешность при больших cond(A), что особенно заметно при p <0.0001.