

Erklärung Strukturelle Induktion

Mitschrift aus dem Tutorium von Jens Kosiol

1. November 2013

Beispiel: Induktion in \mathbb{N} :

Wir haben einen „Anfang“ 1

Wir haben eine Regel, aus Zahlen neue Zahlen zu berechnen: $n + 1$

Strukturelle Induktion:

Wir haben „Anfänge“ A_1, A_2, \dots , die atomaren Formeln.

Wir haben drei Regeln, um aus Formeln neue Formeln zu bilden.

Idee: Zeige für eine Aussage P dass P für alle atomaren Formeln gilt.

Zeige, dass P beim bilden neuer Formeln durch die drei Regeln erhalten bleibt:

Also: Wenn P für b_1, b_2 gilt, dann auch für

$\neg G_1$

$(G_1 \wedge G_2)$

$(G_1 \vee G_2)$

Beispiel:

Blatt 1, 4a (Hier kommen alle drei Fälle vor)

P : „In jeder semantischen Klasse liegt Formel G , die nur \wedge und \neg benutzt.“

I.A.: P gilt für alle atomaren Formeln.

Sei A_i beliebige atomare Formel.

Dann $A_i \equiv A_i$ und A_i verwendet \wedge und \neg

I.V.: Seien G_1 und G_2 Formeln, für die es semantisch äquivalente Formeln $G'_1 \equiv G_1$ und $G'_2 \equiv G_2$ gibt, die nur \wedge und \neg benutzen.

I.S.: Wir müssen zeigen: Die Eigenschaft P bleibt beim Bilden neuer Formeln erhalten.

1. Fall: $G = \neg G_1$
(G'_x vorausgesetzt) Nach I.V. existiert $G'_1 \equiv G_1 \Rightarrow \neg G'_1 \equiv G$
und $\neg G'_1$ verwendet nur \wedge und \neg . ✓
2. Fall: $G = (G_1 \vee G_2)$
nach I.V. existiert $G_1 \equiv G'_1$ und $G_2 \equiv G'_2$
für die gilt: G'_1 und G'_2 verwenden nur \wedge und \neg
 $\Rightarrow G = (G'_1 \vee G'_2) \equiv \neg \neg (G'_1 \vee G'_2)$
 $\equiv \neg (\neg G'_1 \wedge \neg G'_2)$
und $\neg (\neg G'_1 \wedge \neg G'_2)$ verwendet nur \wedge und \neg
3. Fall: $G = (G_1 \wedge G_2)$
Nach I.V. existiert $G'_1 \equiv G_1$ und $G'_2 \equiv G_2$,
die nur \wedge und \neg verwenden

Damit $G \equiv (G'_1 \wedge G'_2)$ und $G'_1 \wedge G'_2$ verwendet nur \wedge und \neg