

Philipps



Universität
Marburg

inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

24. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:

http://www.mathematik.uni-marburg.de/~welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:

beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:

„Schöning, Logik für Informatiker“

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik
---	---------------

3

1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, \dots\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
 - jede atomare Formel ist Formel
 - sind G und H Formel, so auch
 - $(G \wedge H)$ „ G und H “
 - $(G \vee H)$ „ G oder H “
 - $\neg G$ „nicht G “

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
 $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik

$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als

$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel

$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$

$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$

$T(G) = T((A_{17} \vee A_2)) \cup T(\neg(A_3 \wedge A_4)) \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H “
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H “
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G “.

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik

- $(G \rightarrow H)$ aus G folgt H , für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H ; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H , für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^n G_i)$ für $(\dots (G_1 \vee G_2) \vee G_3) \dots \vee G_n$ mit G_1, \dots, G_n Formeln
- $(\bigwedge_{i=1}^n G_i)$ für $(\dots (G_1 \wedge G_2) \wedge G_3) \dots \wedge G_n$ mit G_1, \dots, G_n Formeln

Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch) heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \rightarrow \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G , falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.

$$f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W & \text{falls } f(G_1) = f(G_2) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W & \text{sonst} \\ F & \text{falls } f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W & \text{falls } f(G_1) = F \\ F & \text{falls } f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma 1.1: Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
 \rightarrow Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
 $\Rightarrow \# \text{ Interpretationen} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_n = 2^n \quad \square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
 seien f_1, \dots, f_{2^n} die 2^n Interpretationen von A'

Dann heißt das Schema

A_1	\dots	A_n	G
$f_1(A_1)$	\dots	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
\vdots		\vdots	
$f_{2^n}(A_1)$	\dots	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'

Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H , falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \rightarrow \{W, F\}$

Wir schreiben $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

Def.: Sei F_n die Menge aller Formeln über $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K$ $H \in F_n \setminus K$

Bsp.: $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \dots\}$

A_1	A_1	A_1	$\neg A_1$	A_1	$A_1 \vee A_1$	A_1	$A_1 \vee \neg A_1$	A_1	A
F	F	F	W	F	F	F	W	F	F
W	W	W	F	W	W	W	F	W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:

$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$

$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$

$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$

$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

Bem.: „ \equiv “ ist Äquivalenzrelation auf F_n und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „ \equiv “

Bem.:

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
($G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots$)

Def.:

- Eine Formel G heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation f
- Eine Formel G heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel G heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen f

Bsp.:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \vee \neg A_1 \text{ gültig} \\ A_1 \\ \neg A_1 \\ A_1 \wedge \neg A_1 \text{ unerfüllbar} \end{array} \right\} \text{erfüllbar}$$

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel G entscheiden, da diese erfüllbar ist.

Bem.:

- i) G gültig $\Rightarrow G$ ist er erfüllbar
- ii) G ist unerfüllbar $\Leftrightarrow \neg G$ gültig
- iii) G, H gültig $\Rightarrow G \equiv H$
- iv) G, H nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:

Gegeben eine Wahrheitstabelle

z. B.

A_1	A_2	A_3	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel G mit dieser Wahrheitstabelle?

Lemma 1.2: Über eine Menge von n atomaren Formeln gibt es 2^{2^n} semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

Bew.: → Zeige: Es gibt 2^{2^n} Wahrheitstabellen über n atomare Formeln. Die 2^n Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest. Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n} \text{ Möglichkeiten}$$

→ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

A_1		A_n	
$f_1 F$	\dots	F	W_1
\vdots		\vdots	\vdots
$f_n W$	\dots	W	W_{2^n}

$W_1, \dots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien i_1, \dots, i_l die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$$G_k = \bigwedge_{m=1}^n H_{k,m}, H_{k,m} = \begin{cases} A_m \text{ falls } f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \text{ falls } f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^l G_k$

Sei f Interpretation

$$\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \text{ fr } m = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W \text{ fr } W \text{ mit } f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W \text{ fr } W \text{ mit } f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

Bsp.:

		A_1	A_2	
\rightarrow	f_1	F	F	\mathbb{W}
\rightarrow	f_2	W	F	\mathbb{W}
	f_3	F	W	F
	f_4	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten W sind)

$$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$$

$$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$$

$$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$$

$$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

Satz 1.3: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\text{Idempotenz} \quad &(G \wedge G) \equiv G \\
&(G \vee H) \equiv (H \vee G)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Assoziativität} \quad &((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I)) \\
&((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Distributivität} \quad &(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I)) \\
&(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))
\end{aligned}$$

Absorption $(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$
 $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$

Doppelnegation $\neg\neg G \equiv G$

deMorgan Regel $\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$
 $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$

Bew.: Beispielhaft Absorption

G	H	$G \wedge (G \vee H)$	G
F	F	F	F
F	W	F	F
W	F	W	W
W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

Lemma 1.4: G, H, G', H' Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

\Rightarrow
 $(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
 $(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
 $\neg G \equiv \neg G'$

Bew.:

G	H	G'	H'	$G \wedge H$	$G' \wedge H'$
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

Satz 1.5: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und G ist Teilformel von I .
Sei I' eine Formel, die aus I entsteht indem man ein Vorkommen von G durch H ersetzt
Dann $I \equiv I'$

Vorlesung vom 21.10.2013

Satz 1.5: $G \equiv H$

I mit G Teilformel

I' ersetze ein Vorkommen von G in I durch H

$\Rightarrow I \equiv I'$

Bsp.:

$$\left. \begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array} \right\} G \equiv H$$

$$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$$

$$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$$

Bew.: Induktion über die Länge $l = \#$ Zeichen von I

I.A.: $l =$ Länge von G

$\Rightarrow I = G$ und $I' = H$

$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge $\leq l$

I.S.: Sei I Formel der Länge $l + 1$, die G als Teilformel enthält

1. Fall

$I = (I_1 \wedge I_2)$ mit Formeln I_1 und I_2 der Länge $\leq l$

i) $I' = (I'_1 \wedge I_2)$

I'_1 entsteht aus I_1 durch Ersetzen der Teilformel G in I_1 durch H

Sei Länge von $H_1 \leq l$ folgt nach I.V

$$I_1 \equiv I'_1$$

Also

$$\left. \begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2), I' = (I'_1 \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I'_1 \\ I_2 = I_2 \end{array} \right\} I' \equiv I$$

ii) $I' = I_1 \wedge I'_2$

I'_2 entsteht aus I_2 durch Ersetzen der Teilformel G in I_2 durch H

weiter analog zu (i)

2. Fall

$$I = (I_1 \vee I_2)$$

analog zu 1. Fall

3. Fall

$I_1 = \neg I_1$ ist Formel I_1 der Länge $\leq l$

$\rightarrow I' = \neg I'_1$ und I'_1 entsteht aus I_1 durch Ersetzen der Teilformel G durch H

Nach I.V. $I_1 \equiv I'_1$

\Rightarrow Lemma 1.4 (iii) $I = \neg I_1 \equiv \neg I'_1 = I' \square$

\rightarrow Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau“

(„Strukturelle Induktion“)

Beh.: „Aussage über Formeln“

Bew.: Induktion über Formelaufbau

I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel

I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten

für $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $\neg G$

falls die Aussage für G und H gilt.

Def.: Sei Σ eine Menge von Formeln

Σ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W \ \forall G \in \Sigma$

so ein f heißt Modell Σ

Σ heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$ für alle $G \in \Sigma$

Bsp.

$\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \dots\}$

$= \{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \mid n = 1\}$

erfüllbar $f(A_i) = W$ für $i = 1$ ist einziges Modell

$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$ nicht erfüllbar

Bew.:

i) G erfüllbar $\Leftrightarrow \{G\}$ erfüllbar

ii) Σ erfüllbar $\Rightarrow G$ erfüllbar für alle $G \in \Sigma$

iii) G erfüllbar für alle $G \in \Sigma \not\Leftrightarrow \Sigma$ erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$ unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$ erfüllbar wenn $A_1 = W$ bzw. F

Lemma 1.6: Sei $\Sigma = \{G_1, G_n\}$ endlich, dann folgt

Σ erfüllbar $\Leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar

Bew.: Σ erfüllbar \Leftrightarrow Es gibt Interpretation f mit $f(G_i) = W, i = 1, \dots, n$

\Leftrightarrow Es gibt Interpretation f mit $f(G_1 \wedge \dots \wedge G_n) = W$

$\Leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar \square

Def.: Eine Formelmeng Σ impliziert semantisch eine Formel H , falls für jedes Modell f von Σ gilt $f(H) = W$; d.h. f ist auch Modell von $\{H\}$. Wir schreiben $\Sigma \models H$. Ist $\Sigma = \{G\}$ so schreiben wir auch $G \models H$ für G impliziert semantisch H .

Bsp.: $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$

$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$

$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$

$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für $f(A_1) = W, f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \vee A_2) = W$

aber $f(A_1 \wedge A_2) = F$

falls $G \models H$ und $f(G) = F$ muss nicht $f(H) = f$ gelten.

$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$

für $f(A_1) = W, f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \wedge A_2) = F$

aber $f(A_1 \vee A_2) = W$

Bem.: G, H Formeln

$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H) \text{ und } (H \models G)$

Bew.: $G \equiv H$, für jede Interpretation f gilt $f(H) = f(G)$

\Leftrightarrow für jede Interpretation f gilt

$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$

$\Leftrightarrow G \models H \text{ und } H \models G \quad \square$

Bsp.: Es gibt Formel G, H mit $G \not\models H, H \not\models G$

$G = A_1, H = \neg A_1$

Satz 1.7: Gaig'scher Interpolationssatz

Seien G und H Formel mit $G \models H$

Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i) H ist gültig

ii) G ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel I mit $G \models I, I \models H$

und jede atomare Teilformel von I ist atomare Teilformel von G und H .

Bsp.: $G = (A_1 \wedge A_2), H = (A_2 \vee A_3)$

$G \models I \quad I \models H \quad \text{für } I = A_2$

$(A_1 \wedge A_2) \models A_2 \quad A_2 \models (A_2 \vee A_3)$

Bew.: Es genügt zu Zeigen

$G \models H$ und H nicht gültig mit G erfüllbar \Rightarrow (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G , die nicht in H vorkommen.

I.A: $n = 0$ Können $I = G$ wählen

$$G \models I = G \qquad G = I \models H$$