Philipps Universität Marburg

# inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

31. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Aussagenlogik

*Vorlesung vom 14.10.2013*

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

### Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind $G$ und $H$ Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „$G$ und $H$“
    $(G \vee H)$ „$G$ oder $H$“
    $\neg G$ „nicht $G$“

**Bem.:** Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (, )\}$

**Bsp.:**

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

**Bew.:** Sei $G$ eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von $G$ induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls $G$ atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

**Bsp.:** $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

**Bem.:** $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von $G$ auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von $G$ und $H$"
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von $G$ und $H$"
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G".

Abkürzende Schreibweisen:

$G, H$ Formeln der Aussagenlogik

- $(G \to H)$ aus $G$ folgt $H$, für $(\neg G \wedge H)$; $G$ impliziert $H$; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ $G$ äquivalent zu $H$, für $(G \to H) \wedge (H \to G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

## Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \to \{W, F\}$ (wahr, falsch) heißt Interpretation von $A'$
- Eine Formel $G$ heißt Formel über $A'$ falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \to \{W, F\}$ heißt passend zu Formel $G$, falls $G$ Formel über $A'$ ist.
- Sei $f : A' \to \{W, F\}$ eine zur Formel $G$ passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W \ sonst \\ F \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = F \\ F \ falls \ f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

**Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen**

| $G$ | $H$ | $(G \to H)$ | $(G \leftrightarrow H)$ |
|---|---|---|---|
| F | F | W | W |
| F | W | W | F |
| W | F | F | F |
| W | W | W | W |

**Lemma 1.1:** Sei $A'$ eine Menge von $n$ atomaren Formeln. Dann gibt es $2^n$ Interpretationen von $A'$

**Bew.:** Für jede atomare Formel mit $A'$ gibt es $2$ Möglichkeiten für das Bild unter $f$
$\to$ Die atomaren Formeln $A'$ können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow \#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

**Def.:** Sei $G$ eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
seien $f_1, \dots, f_{2^n}$ die $2^n$ Interpretationen von $A'$
Dann heißt das Schema

| $A_1$ | $\dots$ | $A_n$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| $f_1(A_1)$ | $\dots$ | $f_1(A_n)$ | $f_1(G)$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $f_{2^n}(A_1)$ | $\dots$ | $f_{2^n}(A_n)$ | $f_{2^n}(G)$ |

Wahrheitstabelle von $G$

**Bsp.:** $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | F | W | F |
| F | W | F | W |
| W | F | F | W |
| F | W | W | F |
| W | F | W | W |
| W | W | F | W |
| W | W | W | W |

**Def.:** Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über $A'$
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir $G$ ist semantisch äquivalent zu $H$, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

*Vorlesung vom 17.10.2013*

**Def.:** Sei $F_n$ die Menge aller Formeln über $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \qquad H \in F_n \backslash K$

**Bsp.:** $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \dots\}$

| $A_1$ | $A_1$ |
|---|---|
| F | F |
| W | W |

| $A_1$ | $\neg A_1$ |
|---|---|
| F | W |
| W | F |

| $A_1$ | $A_1 \vee A_1$ |
|---|---|
| F | F |
| W | W |

| $A_1$ | $A_1 \vee \neg A_1$ |
|---|---|
| F | W |
| W | F |

| $A_1$ | $A$ |
|---|---|
| F | F |
| W | F |

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

**Bem.:** „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation auf $F_n$ und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$“

**Bem.:**

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
  $(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

**Def.:**

- Eine Formel $G$ heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation $f$
- Eine Formel $G$ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation $f$ gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel $G$ heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen $f$

**Bsp.:**

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee \neg A_1 \; gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \wedge \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel $G$ entscheiden, da diese erfüllbar ist.

**Bem.:**

i) $G$ gültig $\Rightarrow$ $G$ ist er erfüllbar

ii) $G$ ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) $G, H$ gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) $G, H$ nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | ? |
|---|---|---|---|
| F | F | F | W |
| F | F | W | F |
| F | W | F | F |
| W | F | F | W |
| F | W | W | F |
| W | F | W | F |
| W | W | F | W |
| W | W | W | F |

Gibt es Formel $G$ mit dieser Wahrheitstabelle?

**Lemma 1.2:** Über eine Menge von $n$ atomaren Formeln gibt es $2^{2^n}$ semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

**Bew.:** $\rightarrow$ Zeige: Es gibt $2^{2^n}$ Wahrheitstabellen über $n$ atomare Formeln. Die $2^n$ Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

| $A_1$ | | $A_n$ | |
|---|---|---|---|
| $f_1 F$ | $\ldots$ | $F$ | $W_1$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f_n W$ | $\ldots$ | $W$ | $W_{2^n}$ |

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei $f$ Interpretation

$$
\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \ f\ddot{u}r\ m = 1, \ldots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W \ f\ddot{u}r\ W\ mit\ f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W \ f\ddot{u}r\ W\ mit\ f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

**Bsp.:**

| | | $A_1$ | $A_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | $f_1$ | F | F | W |
| $\rightarrow$ | $f_2$ | W | F | W |
| | $f_3$ | F | W | F |
| | $f_4$ | W | W | F |

(suche Zeilen, die hinten $W$ sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

**Satz 1.3:** Seien $G, H, I$ Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

| | |
|---|---|
| Idempotenz | $(G \wedge G) \equiv G$ |
| | $(G \vee H) \equiv (H \vee G)$ |
| Assoziativität | $((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$ |
| | $((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))$ |
| Distributivität | $(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I))$ |
| | $(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))$ |

| | |
|---|---|
| Absorption | $(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$<br>$(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$ |
| Doppelnegation | $\neg\neg G \equiv G$ |
| deMorgan Regel | $\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$<br>$\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$ |

**Bew.:** Beispielhaft Absorption

| $G$ | $H$ | $G \wedge (G \vee H)$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | W | F | F |
| W | F | W | W |
| W | W | W | W |

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

**Lemma 1.4:** $G, H, G', H'$ Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

$\Rightarrow$
$(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
$(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
$\neg G \equiv \neg G'$

**Bew.:**

| $G$ | $H$ | $G'$ | $H'$ | $G \wedge H$ | $G' \wedge H'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F | F |
| F | W | F | W | F | F |
| W | F | W | F | F | F |
| W | W | W | W | W | W |

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

**Satz 1.5:** Seien $G, H, I$ Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und $G$ ist Teilformel von $I$.
Sei $I'$ eine Formel, die aus $I$ entsteht indem man ein Vorkommen von $G$ durch $H$ ersetzt
Dann $I \equiv I'$

*Vorlesung vom 21.10.2013*

**Satz 1.5:** $G \equiv H$
$I$ mit $G$ Teilformel
$I'$ ersetze ein Vorkommen von $G$ in $I$ durch $H$
$\Rightarrow I \equiv I'$

**Bsp.:**

$$\left.\begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array}\right\} G \equiv H$$

$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$
$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$

**Bew.:** Induktion über die Länge $l = \#$ zeichen von $I$
I.A.: $l$ = Länge von $G$
$\Rightarrow I = G$ und $I' = H$
$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge $\leq l$
I.S.: Sei $I$ Formel der Länge $l+1$, die $G$ als Teilformel enthält

<u>1. Fall</u>
$I = (I_1 \wedge I_2)$ mit Formeln $I_1$ und $I_2$ der Länge $\leq l$

i) $I' = (I_1' \wedge I_2)$
$I_1'$ entsteht aus $I_1$ durch ersetzen der Teilformel $G$ in $I$, durch $H$
Sei Länge von $H_1 \leq l$ folgt nach I.V
$I_1 == I_1'$
Also

$$\left.\begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2),\, I' = (I_1' \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I_1' \\ I_2 = I_2 \end{array}\right\} I' \equiv I$$

ii) $I' = I_1 \wedge I_2'$
$I_2'$ entsteht aus $I_2$ durch ersetzen der Teilformel $G$ in $I_2$ durch $H$
weiter analog zu (i)

<u>2. Fall</u>
$I = (I_1 \vee I_2)$
analog zu 1. Fall

<u>3. Fall</u>
$I_1 = \neg I_1$ ist Formel $I_1$ der länge $\leq l$
$\rightarrow I' = \neg I_1'$ und $I_1'$ entsteht aus $I_1$ durch ersetzen der Teilformel $G$ durch $H$

Nach I.V. $\quad I_1 \equiv I_1'$
$\Rightarrow^{Lemma\ 1.4}$ (iii) $I = \neg I_1 \equiv \neg I_1' = I'$ $\Box$
$\rightarrow$ Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau“
(„Strukturelle Induktion“)

**Beh.: „Aussage über Formeln“**

**Bew.:** Induktion über Formelaufbau
I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel
I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten
für $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $\neg G$
falls die Aussage für $G$ und $H$ gilt.

**Def.:** Sei $\Sigma$ eine Menge von Formeln
$\Sigma$ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation $f$ gibt mit $f(G) = W \; \forall \; G \in \Sigma$
so ein $f$ heißt Modell $\Sigma$
$\Sigma$ heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es eine Interpretation $f$ gibt mit $f(G) = W$
für alle $G \in \Sigma$

**Bsp.:** $\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \dots\}$
$= \{A_1 \wedge \dots \wedge A \mid n = 1\}$

erfüllbar $f(A_i) = W$ für $i = 1$ ist einziges Modell
$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$ nicht erfüllbar

**Bew.:**

i) $G$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\{G\}$ erfüllbar

ii) $\Sigma$ erfüllbar $\Rightarrow$ $G$ erfüllbar für alle $G \in \Sigma$

iii) $G$ erfüllbar für alle $G \in \Sigma \not\Rightarrow \Sigma$ erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$ unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$ erfüllbar wenn $A_1 = W$ bzw. $F$

**Lemma 1.6:** Sei $\Sigma = \{G_1, G_n\}$ endlich, dann folgt
$\Sigma$ erfüllbar $\leftrightarrow$ $(G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar

**Bew.:** $\Sigma$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation $f$ mit $f(G_1) = W$, $i = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation $f$ mit $f(G_1 \wedge \dots \wedge G_n) = W$
$\Leftrightarrow$ $(G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar $\Box$

**Def.:** Eine Formelmenge $\Sigma$ impliziert semantisch eine Formel $H$, falls für jedes Modell $f$ von $\Sigma$ gilt $f(H) = W$; d.h. $f$ ist auch Modell von $\{H\}$. Wir schreiben $\Sigma \models H$. Ist $\Sigma = \{G\}$ so schreiben wir auch $G \models H$ für $G$ impliziert semantisch $H$.

**Bsp.:** $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$
$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$
$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$
$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \vee A_2) = W$
aber $f(A_1 \wedge A_2) = F$
falls $G \models H$ und $f(G) = F$ muss nicht $f(H) = f$ gelten.
$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$
für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \wedge A_2) = F$
aber $f(A_1 \vee A_2) = W$

**Bem.:** $G, H$ Formeln
$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H)$ und $(H \models G)$

**Bew.:** $G \equiv H$, für jede Interpretation $f$ gilt $f(H) = f(G)$
$\Leftrightarrow$ für jede Interpretation $f$ gilt
$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$
$\Leftrightarrow G \models H$ und $H \models G$ $\square$

**Bsp.:** Es gibt Formel $G, H$ mit $G \not\models H, H \not\models G$
$G = A_1, H = \neg A_1$

**Satz 1.7: Gaig'scher Interpolationssatz**
Seien $G$ und $H$ Formel mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i) $H$ ist gültig

ii) $G$ ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel $I$ mit $G \models I$, $I \models H$

und jede atomare Teilformel von $I$ ist atomare Teilformel von $G$ und $H$.

**Bsp.:** $G = (A_1 \wedge A_2)$, $H = (A_2 \vee A_3)$
$G \models I$ $\quad$ $I \models H$ $\quad$ für $I = A_2$
$(A_1 \wedge A_2) \models A_2$ $\quad$ $A_2 \models (A - 2 \vee A_3)$

**Bew.:** Es genügt zu Zeigen
$G \models H$ und $H$ nicht gültig mit $G$ erfüllbar $\Rightarrow$ (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von $G$, die nicht in $H$ vorkommen.
I.A: $n = 0$ $\quad$ Können $I = G$ wählen

$G \models I = G \qquad G = I \models H$

*Vorlesung vom 24.10.2013*

**Satz 1.7: (**Graig'scher Interpolationssatz)
Seien $G, H$ Formeln mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgeden Aussagen:

i) $H$ gültig

ii) $G$ unerfüllbar

iii) Es gibt eie Formel $I$ mit den Eigenschaften $G \models I$, $I \models H$
und jede atomare Teilformel von $I$ ist Teilformel von $G$ und $H$.

**Bew.:** Es genügt zu zeigen:

- $H$ nicht gültig
- $G$ erfüllbar
- $G \models H$

$\Rightarrow$ iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von $G$, die nicht in $H$ enthalten sind.

I.A.: Sei $n = 0$. Dann ist jede atomare Teilformel von $G$ in $H$ enthalten.
Wähle $I = G$, dann enthält $I$ nur atomare Teilformeln, die in $G$ und $H$ enthalten sind und $G \models I$ und $I \models H$.

I.V.:

- $G \models H$
- $H$ nicht gültig
- $G$ erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Teilformeln von $G$, die nicht in $H$ enthalten sind, ist $n$.

$\Rightarrow$ iii)

I.S.: $(n \rightarrow n + 1)$

- $G \models H$
- $H$ nicht gültig
- $G$ erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Formeln von $G$, die nicht in $H$ enthalten sind, ist $n+1$

Sei $A_i$ eine atomare Formel, die in $G$ aber nicht in $H$ enthalten ist.
Sei $G_W$/$G_F$ die Formel, die aus $G$ entsteht, wenn jedes Vorkommen von $A_i$ ersetzt wird durch eine gültige/ungültige Formel, die nur atomare Formeln von $G$ und $H$ verwendet.

Setze $G' := (G_W \vee G_F)$

1) Es gibt eine atomare Formel, die in $G$ und in $H$ enthalten ist.
   (d.h. $G'$ ist wohldefiniert)
   Beweis: Angenommen $G$ und $H$ besitzen keine gemeinsame atomare Formel.
   Da $G$ erfüllbar ist, gibt es eine Interpretation $f_G$ der atomaren Teilformeln von $G$ mit $f_G(G) = W$
   Da $H$ nicht gültig ist, gibt es eine Interpretation $f_H$ der atomaren Teilformeln von $H$ mit $f_H(H) = F$
   Da die Menge der atomaren Teilformeln von $G$ disjunkt zur Menge der atomaren Teilformeln von $H$ ist, gibt es eine gemeinsame Erweiterung $f$ von $f_G$ und $f_H$
   Damit ist $f$ eine Interpretation der atomaren Teilformeln von $G$ und $H$ mit:
   - $f(G) = f_G(G) = W$
   - $f(H) = f_H(H) = F$
     Widerspruch zu $G \models H$

   $\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ Beh.

2) Beh: $G' \models H$
   Beweis: Es genügt zu zeigen:
   a) $G_W \models H$
   b) $G_F \models H$

   zu a)
   Sei $f$ eine Interpretation der atomaren Teilformeln $G_W$ und $H$ mit $f(G_W) = W$.
   Erweitere $f$ zu einer Interpretation $f'$ der atomaren Formeln von $G$ und $H$ durch
   $f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ W,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$
   $\Rightarrow f'(G) = f(G_W) = W$
   $\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$
   $\Rightarrow G_W \models H$

   zu b)
   Sei $f$ eine Interpretation von $G_F$ und $H$ mit $f(G_F) = W$.

Erweitere $f$ zu einer Interpretation $f'$ von $G$ und $H$ durch

$f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ F,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$

$\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$

$\Rightarrow G_F \models H$

3) Beh: Die Anzahl der atomaren Formeln in $G'$, die nicht in $H$ enthalten sind ist $n$.
Beweis: klar

4) Beh: $G'$ ist erfüllbar.
Beweis:
Sei $f$ eine Interpretation der atomaren Formeln in $G$ mit $f(G) = W$.
($G$ erfüllbar)
Entweder $f(A_i) = W$, d.h. $f(G_W) = W$
oder $f(A_i) = F$, d.h. $f(G_F) = W$
Somit ist $f(G') = f(G_W \vee G_F) = W$

5) Beh: Es gibt ein $I$, wie in der Beh. des Satzes.
Beweis: Nach I.V. gibt es eine Formel $I$, welche nur die atomare Formeln von $G'$ und $H$ verwendet mit $G' \models I$ und $I \models H$.

- $I$ verwendet nur die atomaren Formeln von $G$ und $H$
- $I \models H$
- zz: $G \models I$
  Sei $f$ eine Interpretation der atomaren Aussagen von $G$ und $H$ mit $f(G) = W$
  Dann gilt entweder
  $f(A_i) = W$ und $f(G_W) = W$
  oder
  $f(A_i) = F$ und $f(G_F) = W$
  Somit folgt $f(G_W \vee G_F) = W$
  $\Rightarrow^{(G' \models H)} f(I) = W$
  $\Rightarrow G \models H$ $\square$

## 2 Normalformen

**Bsp.:** $\rightarrow (A_1 \vee \neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge \neg\neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge A_2)$

**Def.:** Ein Literal ist eine atomare Formel oder deren Negation.

Sprechweisen:
$A_i \rightarrow$ atomare Formel $\rightarrow$ positives Literal

$\neg A_i \rightarrow$ Negation einer atomaren Formel $\rightarrow$ negatives Literal

**Def.:** Sei $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von atomaren Formeln

Ein Minterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Konkunktion
$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases}, 1 \leq i \leq n$
Ein Maxterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Disjunktion
$L_1 \vee \ldots \vee L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases}, 1 \leq i \leq n$

**Bsp.:**
Sei $\{A_1\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: $A_1$, $\neg A_1$
Maxterme: $A_1$, $\neg A_1$

Sei $\{A_1, A_2\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \wedge \neg A_2)$, $(\neg A_1 \wedge A_2)$, $\neg(A_1 \wedge \neg A_2)$
Maxterme: analog $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$

**Lemma 2.1:** Über $\{A_1, \ldots, A_2\}$ gibt es
genau $2^n$ Minterme und
genau $2^n$ Maxterme.

**Bew.:** Für jedes Literal $L_i$ gibt es (siehe Def.) 2 Möglichkeiten.
Also insgesamt $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-mal} = 2^n$ Möglichkeiten

**Bem.:** Da $2^n < 2^{2^n}$ für $n \geq 1$ gibt es nicht in jeder semantischen Klasse einen Minterm bzw. Maxterm

Literale $A_i, \neg A_i$
Minterme $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$
Maxterme $L_1 \vee \ldots \vee L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$

$2^n$ Minterme, $2^n$ Maxterme über $A_1, \ldots, A_n$
$2^n < 2^{2^n} = \#semantische\ Klassen$

Trotzdem wollen wir die semantischen Klassen charakterisieren, in denen MInterme Maxterme liegen.

### Lemma 2.2:

Sei $L_1, \ldots, L_n$ Literale mit $L_i = A_i$ oder $L_i = \neg A_i$
für $1 \leq i \leq n$ und $f : \{A_1, \ldots, A_n\} \rightarrow \{W, F\}$ eine Interpretation.
Dann gilt

$$f(L_1 \wedge \ldots \wedge L_n) = W \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} W\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ F\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$$f(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} F\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ W\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

**Bew.:** Nachrechnung

### Lemma 2.3:

(i) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Minterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht W in der letzten Spalte

(ii) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Maxterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht F in der letzten Spalte

### Bew.:

„$\Rightarrow$“ Folgt für (i) und (ii) aus Lemma 2.2
„$\Leftarrow$“

(i) Setzten $L_i = \begin{cases} A_i\ f\ddot{u}r\ f(A_i) = W \\ \neg A_i\ f\ddot{u}r\ f(A_i) = F \end{cases}$
für die Interpretation $f$, für die W in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretation $g$ nach Lemma 2.2

$$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = W \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} W\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ F\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f = g$
$\Rightarrow$ Der Minterm $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

(ii) Setzen $L_1 = \begin{cases} A_i \; für \; f(A_i) = F \\ \neg A_i \; für \; f(A_i) = W \end{cases}$
für die Interpretation $f$, für die F in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretationen $g$ nach Lemma 2.2
$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} F \; für \; L_i = A_i \\ W \; für \; L_i = \neg A_i \end{cases}$
$\Leftrightarrow g = f$
$\Rightarrow$ Der Maxterm $L_1 \vee \ldots \vee$ hat die gegebene Wahrheitstabelle $\square$

**Bsp.:**

| $A_1$ | $A_2$ | |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | W | W |
| W | F | W |
| W | W | W |

Maxterm $A_1 \vee A_2$
Minterm existiert nicht

**Def.:**
Eine Formel $G$ über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ heißt

(i) in disjunktiver Normalform (DNF)
falls $G$ eine Disjunktion von Mintermen ist
$G = \bigvee_{i=1}^{k} (L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

(ii) in konjunktiver Normalform (KNF)
falls $G$ eine Konjunktion von Maxtermen ist
$G = \bigwedge_{i=1}^{k} (L_{in} \vee \ldots \vee L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

**Bem.:**

$\rightarrow$ Dieser Begriff von KNF, DNF stimmt nicht genau mit dem Begriff aus dem Buch von Schöning überein. Dessen Definition wid bei uns als VDNF, VKNF auftauchen.

$\rightarrow$ Für DNF $\bigvee_{i=1}^{k} (\bigwedge_{j=1}^{n} L_{ij})$ und
KNF $\bigwedge_{i=1}^{k} (\bigvee_{j=1}^{n} L_{ij})$
erlauben wir $k = 0 \leftarrow$ leere DNF, leere KNF

Dies sind „keine“ Formeln im strengen Sinn
Werden sie aber für Satz 2.4 brauchen
Wir setzen
die DNF für $k = 0$ als unerfüllbar
die KNF für $k = 0$ als gültig

**Satz 2.4:** Sei $G$ eine Formel über $\{A_1, \dots, A_n\}$
Dann gibt es Formeln $G_D$ und $G_K$ mit

- $G \equiv G_D \equiv G_K$
- $G_D$ is in DNF
  $G_K$ ist in KNF

**Bew.:** Konstruktion von $G_D$

(i) Seien $f_1, \dots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = W \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Minterm $L_{i1} \wedge \dots \wedge L_{in}$
so dass $f(L_{i1} \wedge \dots \wedge L_{in}) = W \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_D = \bigvee_{i=1}^{k} (L_{i1} \wedge \dots \wedge L_{in})$ in DNF nach Konstruktion
Sei $f$ Interpretation
$f(G_D) = W \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \wedge \dots \wedge L_{in}) = W$
$\leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ gilt mit $f(A_j) = \begin{cases} W\ f\ddot{u}r\ L_{ij} = A_j \\ F\ f\ddot{u}r\ L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$
$\Leftrightarrow f(G) = W$
$\Rightarrow G \equiv G_D$

Konstruktion von $G_K$:

(i) Seien $f_1, \dots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = F \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Maxterm $L_{i1} \vee \dots \vee L_{in}$
so dass $f(L_{in} \vee \dots \vee L_{in}) = F \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_K = \bigwedge_{i=1}^{k} (L_{i1} \vee \dots \vee L_{in})$ in KNF nach Konstruktion
Sei $f$ eine Interpretation:
$f(G_K) = F \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \vee \dots \vee L_{in}) = F$

$\Leftrightarrow^{2.3}$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(A_j) = \begin{cases} F\ für\ L_{ij} = A_j \\ W\ für\ L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$
$\Leftrightarrow f(G) = F$
$\Rightarrow G \equiv G_K \square$

**Bsp.:** $G = A_1 \vee A_2$

| | $A_1$ | $A_2$ | |
|---|---|---|---|
| | F | F | F |
| $f_1 =$ | F | W | W |
| $f_2 =$ | W | F | W |
| $f_3 =$ | W | W | W |

$f_1 \leftrightarrow \neg A_1 \wedge A_2$
$f_2 \leftrightarrow A_1 \wedge \neg A_2$
$f_3 \leftrightarrow A_1 \wedge A_2$
$G_D = (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$

Für KNF

| | $A_1$ | $A_2$ | |
|---|---|---|---|
| $f_1 =$ | F | F | F |
| | W | F | W |
| | F | W | W |
| | W | W | W |

**Folgerung 2.5:** Bis auf die Reihenfolge der Minterme und Maxterme und das Setzen der Klammern in einer vollständigen Klammerung gibt es in jeder semantischen Klasse eindeutig bestimmte Formeln in DNF und in KNF

Erfüllbarkeitsproblem:
EIngabe Formel $G$:
Ausgabe: $G$ erfüllbar oder $G$ unerfüllbar
$\rightarrow$ Bruteforce: Feste alle $2^n$ Interpretationen in der $n$ atomaren Formeln aus $G$
$\rightsquigarrow$ In worst case $2^n$ Schritte = Laufzeit.

Sei $G$ in DNF
Ist $G$ nicht die leere DNF, so ist $G$ erfüllbar.
$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in konstanter Zeit entscheidbar

Sei $G$ in KNF
Hat $G \leq 2^n - 1$ Maxterme, so ist $G$ erfüllbar.
$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in linearer Zeit entscheidbar.

Weitere, nicht eindeutige Normalform, die die Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems für allgemeine Formeln besser kodiert.

**Def.:**

- Ein Konjunktionsterm ist eine Konjunktion $\bigwedge_{i=1}^{r} L_i$ für Literale $L_i, i = 1, , r$, sodass jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht.
- Ein Dusjunktionsterm ist eine Disjunktion $\bigvee_{i=1}^{r} L_i$ für Literale $L_i, i = 1, , r$, sodass jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht.

**Bsp.:** $A_1 \wedge \neg A_{13} \wedge A_{38}$ Konjunktionsterm
$A_1 \wedge \neg A_{13} \wedge \neg A_1$ kein Konjunktionsterm ($A_1$ zweimal)

**Bem.:** Minterme und Maxterme sind Konjunktions- bzw. Disjunktionsterme

**Def.:**

- Eine Formel $G$ heißt in verallgemeinerter DNF (VDNF), falls $G$ eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Konjunktionstermen ist.
- Eine Formel $G$ heißt in verallgemeinerter KNF (VKNF), falls $G$ eine Konjunktion von paarweise verschiedenen Disjunktionen ist.

**Bsp.:** $G = (A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_4 \vee \neg A_7)$ in VKNF (zwei Disjunktionsterme)
aber nicht in KNF

**Bem.:** Zu jeder Formel $G$ gibt es eine semantisch äquivalente Formel im VDN bzw. VKNF (Folgt aus Satz 2.5)

Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in VDNF und VKNF
$\rightarrow$ Für Konjunktionsterm $\bigwedge_{i=1}^{r} L_i$ wählen wir Interpretation $f$ mit $f(A_{ji}) = \begin{cases} W & L_i = A_{ji} \\ F & L_i = \neg A_{ji} \end{cases}$
Dann ist $f$ wohldefiniert, da jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht
$\Rightarrow f(\bigwedge_{i=1}^{r} L_i) = W$
Also ist jeder Konjunktionsterm erfüllbar.
$\Rightarrow$ jede Formel in VDNF ist erfüllbar bis auf die leere Formel, die wir wieder als unerfüllbar definieren.

Erfüllbarkeit für Formel in VDNF ist in konstanter Zeit entscheidbar

$\rightarrow$ Für jeden Disjunktionsterm gibt es mehrere Interpretationen, die diesen erfüllen. Formel in VKNF ist erfüllbar, falls es eine Interpretation gibt, die alle ihre Disjunktionsterme erfüllt.

**Bsp.:** $G = \underbrace{(A_1 \vee \neg A_2)}_{f(A_1)=W \ oder \ f(A_2)=F} \wedge \underbrace{(\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3)}_{f(A_1)=F \ oder \ f(A_2)=W \ oder \ f(A_3)=W}$

$f(A_1) = f(A_2) = f(A_3) = W$ erfüllt $G$

**Bem.:** Für Formel in VKNF gibt es kein offensichtliches Verfahren, das die Erfüllbarkeit schnell entscheidet.
Spezialfall:
$G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{ij}$ Formel in VDNF
$\rightarrow r_1 = \ldots = r_2 = 1$
$G = L_{1,1} \wedge L_{2,1} \wedge \ldots \wedge L_{5,1}$
$G$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt keine atomare Formel $A_t$ und $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq s$ mit $Ls_1 = A_t, L_{s_2} = \neg A_t$ oder $L_{s_1} = \neg A_t, L_{s_2} = A_t$
Das ist in linearer Zeit entscheidbar.

$\rightarrow r_1, \ldots, r_2 \leq 2$
$\rightarrow$ HIer werden wir später einen guten Algorithmus in Kontext von Resolutionen finden
$\rightarrow r_1 = \ldots - r_s = n$ und $G$ ist Formel über $n$ atomare Formeln
$\Rightarrow G$ in KNF, Erfüllbarkeit ist in linearer Zeit entscheidbar

Ziel: Zeigen Fall $r_1, \ldots, r_3 \leq 3$ ist genauso schwer wie der allgemeine Fall.

**Def.:** Zwei Formeln $G$ und $H$ geißen erfüllbarkeitsäquivalent, falls $G$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $H$ erfüllbar

**Satz 2.6:** Sei $G$ eine Formel in VKNF. Dann kann in der Länge von $G$ polynomial vielen Schritten eine Formel $H$ konstruiert werden, sodass
$\rightarrow G$ und $H$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
$\rightarrow H$ in VKNF
$\rightarrow$ In jedem Disjunktionsterm von $H$ sind $\leq 3$ Literale

**Bew.:** Sei $G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$

$M_i = \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$ und setze $[M_i]_{A_l} = \begin{cases} A_l \ Es \ gilt \ 1 \leq j \leq r_i \ \ L_{i,j} = A_l \\ \neg A_l \ Es \ gilt \ 1 \leq j \leq r_i \ \ A_{i,j} = \neg A_l \\ \emptyset \ sonst \end{cases}$

Seien $A_1, \ldots, A_n$ die atomaren Formeln, die in $G$ auftauchen

Setze: $N_i = ([M_i]_{A_i} \vee A_{i,1}) \wedge (\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_2} \vee A_{i,2}) \wedge \ldots \wedge (\neg A_{i,n-2} \vee [M_i]_{A_{n-1}} \vee A_{i,n-1}) \wedge (\neg A_{i,n-1} \vee [M_i]_{A_n})$
für reine neue atomare Formeln $A_{i,1}, \ldots, A_{i,n-1}$
Setze $H = \bigwedge_{i=1}^{s} N_i = N_1 \wedge \ldots \wedge N_s$
Da jedes $N_1$ in VKNF ist mit $\leq 3$ Literalen pro Disjunktionsterm, ist auch $H$ in VKNF mit $\leq 3$ Literalen pro Disjunktionsterm.

Dabei lesen wir
$(\emptyset \vee A_{i,1})$ als $A_{i,1}$
$(\neg A_{i,l} \vee \emptyset A_{i,l+1})$ als $(\neg A_{i.l} \vee A_{i,l-1})$
$(\neg A_{i,n-1} \vee \emptyset)$ als $\neg A_{i,n-1}$

Noch zu zeigen: $G$ und $H$ erfüllbarkeitsäquivalent und $H$ ist in polynomialer Zeit konstruierbar.
$\rightarrow$ Erfüllbarkeitsäquivalenz
Sei $G$ erfüllbar $\Rightarrow$ Es gibt Interpretation $f$ mit $f(G) = W$
Da $G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j} = \bigwedge_{i=1}^{s} M_i$

- $f(G) = W \Rightarrow f(M_i) = W$ für alle $1 \leq i \leq s$
- $f(M_i) = f(\bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}) = W \Rightarrow$ Es gibt $1 \leq j \leq r_i$ mit $f(L_{i,j}) = W$

Sei $L_{i,j} = \begin{cases} A_l \ oder \\ \neg A_l \end{cases}$ ( $l$ hängt von $i, j$ ab)
Definieren Interpretation $g$ mit
$g(A_1) = f(A_1) \ldots g(A_n) = f(A_n)$
$g(A_{i,j}) = \begin{cases} W, i < l \\ F, i \geq l \end{cases}$
Dann interpretiert $g$ alle atomaren Formeln in $H$
Betrachten $g(N_i)$
$g([M_I] \vee A_{i,1}, g(\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_i} \vee A_{i,2}), \ldots, g(\neg A_{i,l-1} \vee [M_i]_{A_{l-1}} \vee A_{i,l-1}) = W$
da $g(A_{i,j}) = \ldots = g(A_{i,l-1}) = W$
$g(\underbrace{\neg A_{i,l-1}}_{F} \vee [M_i]_{A_l} \vee \underbrace{A_{j,l})}_{F} = W$ da $g([M_i]_{A_l}) = f([M_i]_{A_l}) = W$
$g(\neg A_{i.l} \vee [M_i]_{A_{l-1}} \vee A_{i,l-1}) \ldots g(\neg A_{i,n-2} \vee [M_i]_{A_n-1} \vee A_{i,n-1})\ g(\neg A_{i,n+1} \vee [M_i]_{A_n}) = W$
da $g(A_{i,l}) = \ldots = g(A_{i,n-1}) = F$
$\Rightarrow g(N_i) = W, 1 \leq i \leq s \Rightarrow g(H) = \neg W$
$\Rightarrow H$ erfüllbar