

Philipps



Universität  
Marburg

# inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

24. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:

[http://www.mathematik.uni-marburg.de/~welker/logik\\_ws2013.html](http://www.mathematik.uni-marburg.de/~welker/logik_ws2013.html)

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:

[beckers4@mathematik.uni-marburg.de](mailto:beckers4@mathematik.uni-marburg.de)

empfohlenes Buch zur Vorlesung:

„Schöning, Logik für Informatiker“

# Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik
---	---------------

3
---

# 1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

## Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge  $A = \{A_1, A_2, \dots\}$  von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind  $G$  und  $H$  Formel, so auch
    - $(G \wedge H)$  „ $G$  und  $H$ “
    - $(G \vee H)$  „ $G$  oder  $H$ “
    - $\neg G$  „nicht  $G$ “

**Bem.:** Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet  $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (, )\}$

## Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$   
Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte  
 $\neg\neg A \neq A$

**Bew.:** Sei  $G$  eine Formel der Aussagenlogik

$T(G)$  die Menge der Teilformeln von  $G$  induktiv definiert als

$T(G) = \{G\}$  falls  $G$  atomare Formel

$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$ , falls  $G = (G_1 \vee G_2)$  oder  $G = (G_1 \wedge G_2)$

$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

**Bsp.:**  $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$

$T(G) = T((A_{17} \vee A_2)) \cup T(\neg(A_3 \wedge A_4)) \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$$

**Bem.:**  $T(G)$  ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von  $G$  auftauchen.

Sprechweisen:

- Für  $(G \wedge H)$  sagt man auch „Konjunktion von  $G$  und  $H$ “
- Für  $(G \vee H)$  sagt man auch „Disjunktion von  $G$  und  $H$ “
- Für  $\neg G$  sagt man auch „Negation von  $G$ “.

Abkürzende Schreibweisen:

$G, H$  Formeln der Aussagenlogik

- $(G \rightarrow H)$  aus  $G$  folgt  $H$ , für  $(\neg G \wedge H)$ ;  $G$  impliziert  $H$ ; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$   $G$  äquivalent zu  $H$ , für  $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ ; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^n G_i)$  für  $(\dots (G_1 \vee G_2) \vee G_3) \dots \vee G_n$  mit  $G_1, \dots, G_n$  Formeln
- $(\bigwedge_{i=1}^n G_i)$  für  $(\dots (G_1 \wedge G_2) \wedge G_3) \dots \wedge G_n$  mit  $G_1, \dots, G_n$  Formeln

**Def.: Semantik der Aussagenlogik**

- Sei  $\emptyset \neq A' \subseteq A$  eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung  $f : A' \rightarrow \{W, F\}$  (wahr, falsch) heißt Interpretation von  $A'$
- Eine Formel  $G$  heißt Formel über  $A'$  falls  $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation  $f : A \rightarrow \{W, F\}$  heißt passend zu Formel  $G$ , falls  $G$  Formel über  $A'$  ist.
- Sei  $f : A' \rightarrow \{W, F\}$  eine zur Formel  $G$  passende Interpretation. Dann definieren wir  $f(G)$  induktiv.

$$f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W & \text{falls } f(G_1) = f(G_2) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W & \text{sonst} \\ F & \text{falls } f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W & \text{falls } f(G_1) = F \\ F & \text{falls } f(G_1) = W \end{cases}$$

für  $G = \neg G_1$

**Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen**

$G$	$H$	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

**Lemma 1.1:** Sei  $A'$  eine Menge von  $n$  atomaren Formeln. Dann gibt es  $2^n$  Interpretationen von  $A'$

**Bew.:** Für jede atomare Formel mit  $A'$  gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter  $f$   
 $\rightarrow$  Die atomaren Formeln  $A'$  können unabhängig voneinander interpretiert werden  
 $\Rightarrow \# \text{ Interpretationen} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_n = 2^n \quad \square$

**Def.:** Sei  $G$  eine Formel über  $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$   
 seien  $f_1, \dots, f_{2^n}$  die  $2^n$  Interpretationen von  $A'$

Dann heißt das Schema

$A_1$	$\dots$	$A_n$	$G$
$f_1(A_1)$	$\dots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\vdots$		$\vdots$	
$f_{2^n}(A_1)$	$\dots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von  $G$

**Bsp.:**  $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

**Def.:** Sei  $F_{A'}$  die Menge aller Formeln über  $A'$

Für  $G, H \in F_{A'}$  sagen wir  $G$  ist semantisch äquivalent zu  $H$ , falls  $f(G) = f(H)$  für alle Interpretationen  $f : A' \rightarrow \{W, F\}$

Wir schreiben  $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

**Def.:** Sei  $F_n$  die Menge aller Formeln über  $\{A_1, \dots, A_n\}$  eine Teilmenge  $K \subseteq F_n$  heißt semantische Klasse, falls  $G \equiv H$  für  $G, H \in K$  und  $G \not\equiv H$  für  $G \in K$   $H \in F_n \setminus K$

**Bsp.:**  $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \dots\}$

$A_1$	$A_1$	$A_1$	$\neg A_1$	$A_1$	$A_1 \vee A_1$	$A_1$	$A_1 \vee \neg A_1$	$A_1$	$A$
F	F	F	W	F	F	F	W	F	F
W	W	W	F	W	W	W	F	W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:

$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$

$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$

$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$

$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

**Bem.:** „ $\equiv$ “ ist Äquivalenzrelation auf  $F_n$  und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „ $\equiv$ “

**Bem.:**

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln  
( $G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots$ )

**Def.:**

- Eine Formel  $G$  heißt gültig oder Tautologie, falls  $f(G) = W$  für jede Interpretation  $f$
- Eine Formel  $G$  heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation  $f$  gibt mit  $f(G) = W$
- Eine Formel  $G$  heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls  $f(G) = F$  für alle Interpretationen  $f$

**Bsp.:**

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \vee \neg A_1 \text{ gültig} \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array} \right\} \text{erfüllbar}$$

$A_1 \wedge \neg A_1$  unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel  $G$  entscheiden, da diese erfüllbar ist.

**Bem.:**

- i)  $G$  gültig  $\Rightarrow G$  ist er erfüllbar
- ii)  $G$  ist unerfüllbar  $\Leftrightarrow \neg G$  gültig
- iii)  $G, H$  gültig  $\Rightarrow G \equiv H$
- iv)  $G, H$  nicht erfüllbar  $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:

Gegeben eine Wahrheitstabelle

z. B.

$A_1$	$A_2$	$A_3$	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel  $G$  mit dieser Wahrheitstabelle?

**Lemma 1.2:** Über eine Menge von  $n$  atomaren Formeln gibt es  $2^{2^n}$  semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

**Bew.:**  $\rightarrow$  Zeige: Es gibt  $2^{2^n}$  Wahrheitstabellen über  $n$  atomare Formeln. Die  $2^n$  Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest. Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n} \text{ Möglichkeiten}$$

$\rightarrow$  Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

$A_1$		$A_n$	
$f_1 F$	$\dots$	$F$	$W_1$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_n W$	$\dots$	$W$	$W_{2^n}$

$W_1, \dots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien  $i_1, \dots, i_l$  die Indizes mit  $W_{i_j} = W$  für  $1 \leq j \leq l$

$$G_k = \bigwedge_{m=1}^n H_{k,m}, H_{k,m} = \begin{cases} A_m \text{ falls } f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \text{ falls } f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$$

Setz  $G = \bigvee_{k=1}^l G_k$

Sei  $f$  Interpretation



$$\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \text{ fr } m = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W \text{ fr } W \text{ mit } f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W \text{ fr } W \text{ mit } f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow G$  hat die gegebene Wahrheitstabelle

**Bsp.:**

		$A_1$	$A_2$	
$\rightarrow$	$f_1$	F	F	$\mathbb{W}$
$\rightarrow$	$f_2$	W	F	$\mathbb{W}$
	$f_3$	F	W	F
	$f_4$	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten  $W$  sind)

$$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$$

$$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$$

$$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$$

$$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

**Satz 1.3:** Seien  $G, H, I$  Formeln der Aussagenlogik  
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\text{Idempotenz} \quad &(G \wedge G) \equiv G \\
&(G \vee H) \equiv (H \vee G)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Assoziativität} \quad &((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I)) \\
&((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Distributivität} \quad &(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I)) \\
&(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))
\end{aligned}$$

Absorption  $(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$   
 $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$

Doppelnegation  $\neg\neg G \equiv G$

deMorgan Regel  $\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$   
 $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$

**Bew.:** Beispielhaft Absorption

$G$	$H$	$G \wedge (G \vee H)$	$G$
F	F	F	F
F	W	F	F
W	F	W	W
W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

**Lemma 1.4:**  $G, H, G', H'$  Formeln der Aussagenlogik  
und  $G \equiv G'$  und  $H \equiv H'$

$\Rightarrow$   
 $(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$   
 $(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$   
 $\neg G \equiv \neg G'$

**Bew.:**

$G$	$H$	$G'$	$H'$	$G \wedge H$	$G' \wedge H'$
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

**Satz 1.5:** Seien  $G, H, I$  Formeln der Aussagenlogik und  $G \equiv H$  und  $G$  ist Teilformel von  $I$ .  
Sei  $I'$  eine Formel, die aus  $I$  entsteht indem man ein Vorkommen von  $G$  durch  $H$  ersetzt  
Dann  $I \equiv I'$

Vorlesung vom 21.10.2013

**Satz 1.5:**  $G \equiv H$

$I$  mit  $G$  Teilformel

$I'$  ersetze ein Vorkommen von  $G$  in  $I$  durch  $H$

$\Rightarrow I \equiv I'$

**Bsp.:**

$$\left. \begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array} \right\} G \equiv H$$

$$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$$

$$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$$

**Bew.:** Induktion über die Länge  $l = \#$  Zeichen von  $I$

I.A.:  $l =$  Länge von  $G$

$\Rightarrow I = G$  und  $I' = H$

$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge  $\leq l$

I.S.: Sei  $I$  Formel der Länge  $l + 1$ , die  $G$  als Teilformel enthält

### 1. Fall

$I = (I_1 \wedge I_2)$  mit Formeln  $I_1$  und  $I_2$  der Länge  $\leq l$

i)  $I' = (I'_1 \wedge I_2)$

$I'_1$  entsteht aus  $I_1$  durch Ersetzen der Teilformel  $G$  in  $I_1$  durch  $H$

Sei Länge von  $H_1 \leq l$  folgt nach I.V

$$I_1 \equiv I'_1$$

Also

$$\left. \begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2), I' = (I'_1 \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I'_1 \\ I_2 = I_2 \end{array} \right\} I' \equiv I$$

ii)  $I' = I_1 \wedge I'_2$

$I'_2$  entsteht aus  $I_2$  durch Ersetzen der Teilformel  $G$  in  $I_2$  durch  $H$

weiter analog zu (i)

### 2. Fall

$$I = (I_1 \vee I_2)$$

analog zu 1. Fall

### 3. Fall

$I_1 = \neg I_1$  ist Formel  $I_1$  der Länge  $\leq l$

$\rightarrow I' = \neg I'_1$  und  $I'_1$  entsteht aus  $I_1$  durch Ersetzen der Teilformel  $G$  durch  $H$

Nach I.V.  $I_1 \equiv I'_1$

$\Rightarrow$  Lemma 1.4 (iii)  $I = \neg I_1 \equiv \neg I'_1 = I' \square$

$\rightarrow$  Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau“

(„Strukturelle Induktion“)

## Beh.: „Aussage über Formeln“

**Bew.:** Induktion über Formelaufbau

I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel

I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten

für  $(G \wedge H)$ ,  $(G \vee H)$ ,  $\neg G$

falls die Aussage für  $G$  und  $H$  gilt.

**Def.:** Sei  $\Sigma$  eine Menge von Formeln

$\Sigma$  heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation  $f$  gibt mit  $f(G) = W \ \forall G \in \Sigma$

so ein  $f$  heißt Modell  $\Sigma$

$\Sigma$  heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es eine Interpretation  $f$  gibt mit  $f(G) = W$  für alle  $G \in \Sigma$

**Bsp.:**  $\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \dots\}$   
 $= \{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \mid n = 1\}$

erfüllbar  $f(A_i) = W$  für  $i = 1$  ist einziges Modell

$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$  nicht erfüllbar

**Bew.:**

i)  $G$  erfüllbar  $\Leftrightarrow \{G\}$  erfüllbar

ii)  $\Sigma$  erfüllbar  $\Rightarrow G$  erfüllbar für alle  $G \in \Sigma$

iii)  $G$  erfüllbar für alle  $G \in \Sigma \not\Leftrightarrow \Sigma$  erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$  unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$  erfüllbar wenn  $A_1 = W$  bzw.  $F$

**Lemma 1.6:** Sei  $\Sigma = \{G_1, G_n\}$  endlich, dann folgt

$\Sigma$  erfüllbar  $\Leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$  erfüllbar

**Bew.:**  $\Sigma$  erfüllbar  $\Leftrightarrow$  Es gibt Interpretation  $f$  mit  $f(G_i) = W, i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow$  Es gibt Interpretation  $f$  mit  $f(G_1 \wedge \dots \wedge G_n) = W$

$\Leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$  erfüllbar  $\square$

**Def.:** Eine Formelmengende  $\Sigma$  impliziert semantisch eine Formel  $H$ , falls für jedes Modell  $f$  von  $\Sigma$  gilt  $f(H) = W$ ; d.h.  $f$  ist auch Modell von  $\{H\}$ . Wir schreiben  $\Sigma \models H$ . Ist  $\Sigma = \{G\}$  so schreiben wir auch  $G \models H$  für  $G$  impliziert semantisch  $H$ .

**Bsp.:**  $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$

$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$

$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$

$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für  $f(A_1) = W, f(A_2) = F$  gilt  $f(A_1 \vee A_2) = W$

aber  $f(A_1 \wedge A_2) = F$

falls  $G \models H$  und  $f(G) = F$  muss nicht  $f(H) = f$  gelten.

$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$

für  $f(A_1) = W, f(A_2) = F$  gilt  $f(A_1 \wedge A_2) = F$

aber  $f(A_1 \vee A_2) = W$

**Bem.:**  $G, H$  Formeln

$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H) \text{ und } (H \models G)$

**Bew.:**  $G \equiv H$ , für jede Interpretation  $f$  gilt  $f(H) = f(G)$

$\Leftrightarrow$  für jede Interpretation  $f$  gilt

$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$

$\Leftrightarrow G \models H \text{ und } H \models G \quad \square$

**Bsp.:** Es gibt Formel  $G, H$  mit  $G \not\models H, H \not\models G$

$G = A_1, H = \neg A_1$

**Satz 1.7: Gaig'scher Interpolationssatz**

Seien  $G$  und  $H$  Formel mit  $G \models H$

Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i)  $H$  ist gültig

ii)  $G$  ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel  $I$  mit  $G \models I, I \models H$

und jede atomare Teilformel von  $I$  ist atomare Teilformel von  $G$  und  $H$ .

**Bsp.:**  $G = (A_1 \wedge A_2), H = (A_2 \vee A_3)$

$G \models I \quad I \models H \quad \text{für } I = A_2$

$(A_1 \wedge A_2) \models A_2 \quad A_2 \models (A_2 \vee A_3)$

**Bew.:** Es genügt zu Zeigen

$G \models H$  und  $H$  nicht gültig mit  $G$  erfüllbar  $\Rightarrow$  (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von  $G$ , die nicht in  $H$  vorkommen.

I.A:  $n = 0$  Können  $I = G$  wählen

$$G \models I = G \qquad G = I \models H$$