# inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

23. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Aussagenlogik

*Vorlesung vom 14.10.2013*

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

### Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind $G$ und $H$ Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „$G$ und $H$"
    $(G \vee H)$ „$G$ oder $H$"
    $\neg G$ „nicht $G$"

**Bem.:** Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (, )\}$

**Bsp.:**

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

**Bew.:** Sei $G$ eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von $G$ induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls $G$ atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

**Bsp.:** $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

**Bem.:** $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von $G$ auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von $G$ und $H$“
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von $G$ und $H$“
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G“.

Abkürzende Schreibweisen:

$G, H$ Formeln der Aussagenlogik

- $(G \to H)$ aus $G$ folgt $H$, für $(\neg G \wedge H)$; $G$ impliziert $H$; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ $G$ äquivalent zu $H$, für $(G \to H) \wedge (H \to G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

**Def.: Semantik der Aussagenlogik**

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \to \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von $A'$
- Eine Formel $G$ heißt Formel über $A'$ falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \to \{W, F\}$ heißt passend zu Formel $G$, falls $G$ Formel über $A'$ ist.
- Sei $f : A' \to \{W, F\}$ eine zur Formel $G$ passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W\ sonst \\ F\ falls\ f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W\ falls\ f(G_1) = F \\ F\ falls\ f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

**Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen**

| $G$ | $H$ | $(G \to H)$ | $(G \leftrightarrow H)$ |
|---|---|---|---|
| F | F | W | W |
| F | W | W | F |
| W | F | F | F |
| W | W | W | W |

**Lemma 1.1:** Sei $A'$ eine Menge von $n$ atomaren Formeln. Dann gibt es $2^n$ Interpretationen von $A'$

**Bew.:** Für jede atomare Formel mit $A'$ gibt es $2$ Möglichkeiten für das Bild unter $f$
$\to$ Die atomaren Formeln $A'$ können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow \#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

**Def.:** Sei $G$ eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
seien $f_1, \dots, f_{2^n}$ die $2^n$ Interpretationen von $A'$
Dann heißt das Schema

| $A_1$ | $\dots$ | $A_n$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| $f_1(A_1)$ | $\dots$ | $f_1(A_n)$ | $f_1(G)$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $f_{2^n}(A_1)$ | $\dots$ | $f_{2^n}(A_n)$ | $f_{2^n}(G)$ |

Wahrheitstabelle von $G$

**Bsp.:** $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | F | W | F |
| F | W | F | W |
| W | F | F | W |
| F | W | W | F |
| W | F | W | W |
| W | W | F | W |
| W | W | W | W |

**Def.:** Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über $A'$
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir $G$ ist semantisch äquivalent zu $H$, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

*Vorlesung vom 17.10.2013*

**Def.:** Sei $F_n$ die Menge aller Formeln über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \quad H \in F_n \backslash K$

**Bsp.:** $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \ldots\}$

| $A_1$ | $A_1$ |
|---|---|
| F | F |
| W | W |

| $A_1$ | $\neg A_1$ |
|---|---|
| F | W |
| W | F |

| $A_1$ | $A_1 \vee A_1$ |
|---|---|
| F | F |
| W | W |

| $A_1$ | $A_1 \vee \neg A_1$ |
|---|---|
| F | W |
| W | F |

| $A_1$ | $A$ |
|---|---|
| F | F |
| W | F |

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

**Bem.:** „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation auf $F_n$ und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$“

**Bem.:**

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
  $(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

**Def.:**

- Eine Formel $G$ heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation $f$
- Eine Formel $G$ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation $f$ gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel $G$ heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen $f$

**Bsp.:**

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee \neg A_1 \; gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \wedge \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel $G$ entscheiden, da diese erfüllbar ist.

**Bem.:**

i) $G$ gültig $\Rightarrow$ $G$ ist er erfüllbar

ii) $G$ ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) $G, H$ gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) $G, H$ nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | ? |
|---|---|---|---|
| F | F | F | W |
| F | F | W | F |
| F | W | F | F |
| W | F | F | W |
| F | W | W | F |
| W | F | W | F |
| W | W | F | W |
| W | W | W | F |

Gibt es Formel $G$ mit dieser Wahrheitstabelle?

**Lemma 1.2:** Über eine Menge von $n$ atomaren Formeln gibt es $2^{2^n}$ semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

**Bew.:** $\rightarrow$ Zeige: Es gibt $2^{2^n}$ Wahrheitstabellen über $n$ atomare Formeln. Die $2^n$ Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

| $A_1$ | | $A_n$ | |
|---|---|---|---|
| $f_1 F$ | $\ldots$ | $F$ | $W_1$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f_n W$ | $\ldots$ | $W$ | $W_{2^n}$ |

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei $f$ Interpretation

$$
\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \ fr \ m = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W \ fr \ W \ mit \ f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W \ fr \ W \ mit \ f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

**Bsp.:**

| | | $A_1$ | $A_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | $f_1$ | F | F | W |
| $\rightarrow$ | $f_2$ | W | F | W |
| | $f_3$ | F | W | F |
| | $f_4$ | W | W | F |

(suche Zeilen, die hinten $W$ sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

**Satz 1.3:** Seien $G, H, I$ Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

Idempotenz $(G \wedge G) \equiv G$
$(G \vee H) \equiv (H \vee G)$

Assoziativität $((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$
$((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))$

Distributivität $(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I))$
$(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))$

| | |
|---|---|
| Absorption | $(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$ <br> $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$ |
| Doppelnegation | $\neg\neg G \equiv G$ |
| deMorgan Regel | $\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$ <br> $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$ |

**Bew.:** Beispielhaft Absorption

| $G$ | $H$ | $G \wedge (G \vee H)$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | W | F | F |
| W | F | W | W |
| W | W | W | W |

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

**Lemma 1.4:** $G, H, G', H'$ Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

$\Rightarrow$
$(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
$(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
$\neg G \equiv \neg G'$

**Bew.:**

| $G$ | $H$ | $G'$ | $H'$ | $G \wedge H$ | $G' \wedge H'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F | F |
| F | W | F | W | F | F |
| W | F | W | F | F | F |
| W | W | W | W | W | W |

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

**Satz 1.5:** Seien $G, H, I$ Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und $G$ ist Teilformel von $I$.
Sei $I'$ eine Formel, die aus $I$ entsteht indem man ein Vorkommen von $G$ durch $H$ ersetzt
Dann $I \equiv I'$