Erklärung Strukturelle Induktion

Mitschrift aus dem Tutorium von Jens Kosiol

1. November 2013

Beispiel: Induktion in $\mathbb{N}$:
Wir haben einen „Anfang“ 1
Wir haben eine Regel aus Zahlen, neue Zahlen zu berechnen: $n + 1$

Strukturelle Induktion:
Wir haben „Anfänge“ $A_1, A_2, \ldots,$, die atomaren Formeln.
Wir haben drei Regeln um aus Formeln neue Formeln zu bilden.

Idee: Zeige für eine Aussage P dass P für alle atomaren Formeln gilt.

Zeige, dass P beim bilden neuer Formeln durch die drei Regeln enthalten bleibt:

Also: Wenn P für b_1, b_2 gilt, dann auch für
$\neg G_1$
$(G_1 \wedge G_2)$
$(G_1 \vee G_2)$

Beispiel:
Blatt 1, 4a (Hier kommen alle drei Fälle vor)
P: „In jeder semantischen Klasse liegt Formel G, die nur $\wedge$ und $\neg$ benutzt.“
<u>I.A.:</u> P gilt für alle atomaren Formeln.
Sei A_i beliebige atomare Formel.

Dann $A_i \equiv A_i$ und A_i verwendet $\wedge$ und $\neg$
<u>I.V.:</u> Seien G_1 und G_2 Formeln, für die es semantisch äquivalente Formeln $G_1' \equiv G_1$ und $G_2' \equiv G_2$, die nur $\wedge$ und $\neg$ benutzen.
<u>I.S.:</u> Wir müssen zeigen: Die Eigenschaft P bleibt beim Bilden neuer Formeln erhalten.

1. Fall: $G = \neg G_1$
   (G_x' vorausgesetzt) Nach I.V. existiert $G_1' \equiv G_1 \Rightarrow \neg G_1' \equiv G$
   und $\neg G_1'$ verwendet nur $\wedge$ und $\neg$. ✓

2. Fall: $G = (G_1 \vee G_2)$
   nach I.V. existiert $G_1 \equiv G_1'$ und $G_2 \equiv G_2'$
   für die gilt: G_1' und G_2' verwenden nur $\wedge$ und $\neg$
   $\Rightarrow G = (G_1' \vee G_2') \equiv \neg\neg(G_2' \vee G_2')$
   $\equiv \neg(\neg G_1 \wedge \neg G_2')$
   und $\neg(\neg G_1' \wedge G_2')$ verwendet nur $\wedge$ und $\neg$

3. Fall: $G = (G_1 \wedge G_2)$
   Nach I.V. existiert $G_1' \equiv G_1$ und $G_2' \equiv G_2$,
   die nur $\wedge$ und $\neg$ verwenden

Damit $G \equiv (G_1' \wedge G_2')$ und $G_1' \wedge G_2')$ verwendet nur $\wedge$ und $\neg$