Philipps Universität Marburg

inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

zuletzt aktualisiert:
13. November 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „G und H“
    $(G \vee H)$ „G oder H“
    $\neg G$ „nicht G“

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H"
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H"
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G".

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik

- $(G \rightarrow H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \vee H)$; G impliziert H; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigwedge_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch) heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \rightarrow \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G, falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W \; sonst \\ F \; falls \; f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W \; falls \; f(G_1) = F \\ F \; falls \; f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma 1.1: Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
$\rightarrow$ Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow$ $\#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \ldots, A_n\}$
seien $f_1, \ldots, f_{2^n}$ die 2^n Interpretationen von A'
Dann heißt das Schema

A_1	$\ldots$	A_n	G
$f_1(A_1)$	$\ldots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\vdots$		$\vdots$	
$f_{2^n}(A_1)$	$\ldots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

Def.: Sei F_n die Menge aller Formeln über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \qquad H \in F_n \backslash K$

Bsp.: $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \ldots\}$

A_1	A_1
F	F
W	W

A_1	$\neg A_1$
F	W
W	F

A_1	$A_1 \vee A_1$
F	F
W	W

A_1	$A_1 \vee \neg A_1$
F	W
W	F

A_1	A
F	F
W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

Bem.: „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation auf F_n und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$“

Bem.:

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
$(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

Def.:

- Eine Formel G heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation f
- Eine Formel G heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel G heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen f

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \lor \neg A_1 \; gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \land \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel G entscheiden, da diese erfüllbar ist.

Bem.:

i) G gültig $\Rightarrow$ G ist er erfüllbar

ii) G ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) G, H gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) G, H nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

A_1	A_2	A_3	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel G mit dieser Wahrheitstabelle?

Lemma 1.2: Über eine Menge von n atomaren Formeln gibt es 2^{2^n} semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

Bew.: $\rightarrow$ Zeige: Es gibt 2^{2^n} Wahrheitstabellen über n atomare Formeln. Die 2^n Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

A_1		A_n	
$f_1 F$	$\ldots$	F	W_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_n W$	$\ldots$	W	W_{2^n}

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}\,(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}\,(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei f Interpretation

$$\begin{aligned} G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \ f\ddot{u}r \ m = 1, \ldots, m \\ &\Leftrightarrow f(f_m) = W \ f\ddot{u}r \ W \ mit \ f_{i,k}(A_m) = W \\ &= f(\neg A_m) = W \ f\ddot{u}r \ W \ mit \ f_{i,k}(A_m) = F \\ &\Leftrightarrow f = f_{i,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\ &\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

Bsp.:

		A_1	A_2	
$\rightarrow$	f_1	F	F	W
$\rightarrow$	f_2	W	F	W
	f_3	F	W	F
	f_4	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten W sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

Satz 1.3: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

Idempotenz	$(G \wedge G) \equiv G$
	$(G \vee H) \equiv (H \vee G)$
Assoziativität	$((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$
	$((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))$
Distributivität	$(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I))$

	$(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))$
Absorption	$(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$ $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$
Doppelnegation	$\neg\neg G \equiv G$
deMorgan Regel	$\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$ $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$

Bew.: Beispielhaft Absorption

G	H	$G \wedge (G \vee H)$	G
F	F	F	F
F	W	F	F
W	F	W	W
W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

Lemma 1.4: G, H, G', H' Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

$\Rightarrow$
$(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
$(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
$\neg G \equiv \neg G'$

Bew.:

G	H	G'	H'	$G \wedge H$	$G' \wedge H'$
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

Satz 1.5: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und G ist Teilformel von I.
Sei I' eine Formel, die aus I entsteht indem man ein Vorkommen von G durch H ersetzt
Dann $I \equiv I'$

Satz 1.5: $G \equiv H$
I mit G Teilformel
I' ersetze ein Vorkommen von G in I durch H
$\Rightarrow I \equiv I'$

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array}\right\} G \equiv H$$

$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$
$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$

Bew.: Induktion über die Länge $l = \#$ zeichen von I
I.A.: l = Länge von G
$\Rightarrow I = G$ und $I' = H$
$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge $\leq l$
I.S.: Sei I Formel der Länge $l + 1$, die G als Teilformel enthält

<u>1. Fall</u>
$I = (I_1 \wedge I_2)$ mit Formeln I_1 und I_2 der Länge $\leq l$

i) $I' = (I_1' \wedge I_2)$
I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G in I, durch H
Sei Länge von $H_1 \leq l$ folgt nach I.V
$I_1 == I_1'$
Also

$$\left.\begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2), I' = (I_1' \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I_1' \\ I_2 = I_2 \end{array}\right\} I' \equiv I$$

ii) $I' = I_1 \wedge I_2'$
I_2' entsteht aus I_2 durch ersetzen der Teilformel G in I_2 durch H
weiter analog zu (i)

<u>2. Fall</u>
$I = (I_1 \vee I_2)$
analog zu 1. Fall

<u>3. Fall</u>
$I_1 = \neg I_1$ ist Formel I_1 der länge $\leq l$
$\rightarrow I' = \neg I_1'$ und I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G durch H

Nach I.V. $\quad I_1 \equiv I_1'$
$\Rightarrow^{Lemma\ 1.4}$ (iii) $I = \neg I_1 \equiv \neg I_1' = I'$ $\square$
$\rightarrow$ Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau"
(„Strukturelle Induktion")

Beh.: „Aussage über Formeln"

Bew.: Induktion über Formelaufbau
I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel
I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten
für $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $\neg G$
falls die Aussage für G und H gilt.

Def.: Sei Σ eine Menge von Formeln
Σ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W \ \forall\ G \in \Sigma$
so ein f heißt Modell Σ
Σ heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es keine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$ für alle $G \in \Sigma$

Bsp.: $\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \ldots\}$
$= \{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \mid n = 1\}$

erfüllbar $f(A_i) = W$ für $i = 1$ ist einziges Modell
$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$ nicht erfüllbar

Bew.:

i) G erfüllbar $\Leftrightarrow \{G\}$ erfüllbar
ii) Σ erfüllbar $\Rightarrow G$ erfüllbar für alle $G \in \Sigma$
iii) G erfüllbar für alle $G \in \Sigma \not\Rightarrow \Sigma$ erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$ unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$ erfüllbar wenn $A_1 = W$ bzw. F

Lemma 1.6: Sei $\Sigma = \{G_1, G_n\}$ endlich, dann folgt
Σ erfüllbar $\leftrightarrow (G_1 \wedge \ldots \wedge G_n)$ erfüllbar

Bew.: Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1) = W$, $i = 1, \ldots, n$
$\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n) = W$
$\Leftrightarrow$ $(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n)$ erfüllbar $\Box$

Def.: Eine Formelmenge Σ impliziert semantisch eine Formel H, falls für jedes Modell f von Σ gilt $f(H) = W$; d.h. f ist auch Modell von $\{H\}$. Wir schreiben $\Sigma \models H$. Ist $\Sigma = \{G\}$ so schreiben wir auch $G \models H$ für G impliziert semantisch H.

Bsp.: $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$
$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$
$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$
$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \vee A_2) = W$
aber $f(A_1 \wedge A_2) = F$
falls $G \models H$ und $f(G) = F$ muss nicht $f(H) = f$ gelten.
$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$
für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \wedge A_2) = F$
aber $f(A_1 \vee A_2) = W$

Bem.: G, H Formeln
$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H)$ und $(H \models G)$

Bew.: $G \equiv H$, für jede Interpretation f gilt $f(H) = f(G)$
$\Leftrightarrow$ für jede Interpretation f gilt
$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$
$\Leftrightarrow G \models H$ und $H \models G$ $\Box$

Bsp.: Es gibt Formel G, H mit $G \not\models H, H \not\models G$
$G = A_1$, $H = \neg A_1$

Satz 1.7: Craig'scher Interpolationssatz
Seien G und H Formel mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i) H ist gültig

ii) G ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel I mit $G \models I$, $I \models H$
und jede atomare Teilformel von I ist atomare Teilformel von G und H.

Bsp.: $G = (A_1 \wedge A_2)$, $H = (A_2 \vee A_3)$

$G \models I \qquad\quad I \models H \qquad\quad$ für $I = A_2$
$(A_1 \wedge A_2) \models A_2 \qquad\quad A_2 \models (A - 2 \vee A_3)$

Bew.: Es genügt zu Zeigen
$G \models H$ und H nicht gültig mit G erfüllbar $\Rightarrow$ (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H vorkommen.
I.A: $n = 0 \qquad$ Können $I = G$ wählen
$G \models I = G \qquad G = I \models H$

Vorlesung vom 24.10.2013

Satz 1.7: (Craig'scher Interpolationssatz)
Seien G, H Formeln mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgeden Aussagen:

i) H gültig

ii) G unerfüllbar

iii) Es gibt eie Formel I mit den Eigenschaften $G \models I$, $I \models H$
und jede atomare Teilformel von I ist Teilformel von G und H.

Bew.: Es genügt zu zeigen:

- H nicht gültig
- G erfüllbar
- $G \models H$

$\Rightarrow$ iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H enthalten sind.

I.A.: Sei $n = 0$. Dann ist jede atomare Teilformel von G in H enthalten.
Wähle $I = G$, dann enthält I nur atomare Teilformeln, die in G und H enthalten sind und $G \models I$ und $I \models H$.

I.V.:

- $G \models H$

- H nicht gültig
- G erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H enthalten sind, ist n.

$\Rightarrow$ iii)

I.S.: $(n \to n+1)$

- $G \models H$
- H nicht gültig
- G erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Formeln von G, die nicht in H enthalten sind, ist $n+1$

Sei A_i eine atomare Formel, die in G aber nicht in H enthalten ist.
Sei G_W/G_F die Formel, die aus G entsteht, wenn jedes Vorkommen von A_i ersetzt wird durch eine gültige/ungültige Formel, die nur atomare Formeln von G und H verwendet.

Setze $G' := (G_W \vee G_F)$

1) Es gibt eine atomare Formel, die in G und in H enthalten ist.
   (d.h. G' ist wohldefiniert)
   Beweis: Angenommen G und H besitzen keine gemeinsame atomare Formel.
   Da G erfüllbar ist, gibt es eine Interpretation f_G der atomaren Teilformeln von G mit $f_G(G) = W$
   Da H nicht gültig ist, gibt es eine Interpretation f_H der atomaren Teilformeln von H mit $f_H(H) = F$
   Da die Menge der atomaren Teilformeln von G disjunkt zur Menge der atomaren Teilformeln von H ist, gibt es eine gemeinsame Erweiterung f von f_G und f_H
   Damit ist f eine Interpretation der atomaren Teilformeln von G und H mit:
   - $f(G) = f_G(G) = W$
   - $f(H) = f_H(H) = F$
     Widerspruch zu $G \models H$

   $\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ Beh.

2) Beh: $G' \models H$
   Beweis: Es genügt zu zeigen:
   a) $G_W \models H$
   b) $G_F \models H$

zu a)
Sei f eine Interpretation der atomaren Teilformeln G_W und H mit $f(G_W) = W$.
Erweitere f zu einer Interpretation f' der atomaren Formeln von G und H durch
$f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ W,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$
$\Rightarrow f'(G) = f(G_W) = W$
$\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$
$\Rightarrow G_W \models H$

zu b)
Sei f eine Interpretation von G_F und H mit $f(G_F) = W$.
Erweitere f zu einer Interpretation f' von G und H durch
$f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ F,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$
$\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$
$\Rightarrow G_F \models H$

3) Beh: Die Anzahl der atomaren Formeln in G', die nicht in H enthalten sind ist n.
Beweis: klar

4) Beh: G' ist erfüllbar.
Beweis:
Sei f eine Interpretation der atomaren Formeln in G mit $f(G) = W$.
(G erfüllbar)
Entweder $f(A_i) = W$, d.h. $f(G_W) = W$
oder $f(A_i) = F$, d.h. $f(G_F) = W$
Somit ist $f(G') = f(G_W \vee G_F) = W$

5) Beh: Es gibt ein I, wie in der Beh. des Satzes.
Beweis: Nach I.V. gibt es eine Formel I, welche nur die atomare Formeln von G' und H verwendet mit $G' \models I$ und $I \models H$.

- I verwendet nur die atomaren Formeln von G und H
- $I \models H$
- zz: $G \models I$
  Sei f eine Interpretation der atomaren Aussagen von G und H mit $f(G) = W$
  Dann gilt entweder
  $f(A_i) = W$ und $f(G_W) = W$
  oder
  $f(A_i) = F$ und $f(G_F) = W$
  Somit folgt $f(G_W \vee G_F) = W$
  $\Rightarrow^{(G' \models H)} f(I) = W$
  $\Rightarrow G \models H \ \square$

2 Normalformen

Bsp.: $\rightarrow (A_1 \vee \neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge \neg\neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge A_2)$

Def.: Ein Literal ist eine atomare Formel oder deren Negation.

Sprechweisen:
$A_i \rightarrow$ atomare Formel $\rightarrow$ positives Literal
$\neg A_i \rightarrow$ Negation einer atomaren Formel $\rightarrow$ negatives Literal

Def.: Sei $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von atomaren Formeln

Ein Minterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Konjunktion
$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases} , 1 \leq i \leq n$
Ein Maxterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Disjunktion
$L_1 \vee \ldots \vee L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases} , 1 \leq i \leq n$

Bsp.:
Sei $\{A_1\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: A_1, $\neg A_1$
Maxterme: A_1, $\neg A_1$

Sei $\{A_1, A_2\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \wedge \neg A_2)$, $(\neg A_1 \wedge A_2)$, $\neg(A_1 \wedge \neg A_2)$
Maxterme: analog $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$

Lemma 2.1: Über $\{A_1, \ldots, A_2\}$ gibt es
genau 2^n Minterme und
genau 2^n Maxterme.

Bew.: Für jedes Literal L_i gibt es (siehe Def.) 2 Möglichkeiten.
Also insgesamt $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-mal} = 2^n$ Möglichkeiten

Bem.: Da $2^n < 2^{2^n}$ für $n \geq 1$ gibt es nicht in jeder semantischen Klasse einen Minterm bzw. Maxterm

Literale $A_i, \neg A_i$
Minterme $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$
Maxterme $L_1 \vee \ldots \vee L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$

2^n Minterme, 2^n Maxterme über $A_1, \ldots, A_n$
$2^n < 2^{2^n} = \#semantische\ Klassen$

Trotzdem wollen wir die semantischen Klassen charakterisieren, in denen Minterme bzw. Maxterme liegen.

Lemma 2.2:
Sei $L_1, \ldots, L_n$ Literale mit $L_i = A_i$ oder $L_i = \neg A_i$
für $1 \leq i \leq n$ und $f : \{A_1, \ldots, A_n\} \rightarrow \{W, F\}$ eine Interpretation.
Dann gilt

$$f(L_1 \wedge \ldots \wedge L_n) = W \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} W\ für\ L_i = A_i \\ F\ für\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$$f(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} F\ für\ L_i = A_i \\ W\ für\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

Bew.: Nachrechnung

Lemma 2.3:

(i) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Minterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht W in der letzten Spalte

(ii) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Maxterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht F in der letzten Spalte

Bew.:
„$\Rightarrow$“ Folgt für (i) und (ii) aus Lemma 2.2
„$\Leftarrow$“

(i) Setzten $L_i = \begin{cases} A_i\ für\ f(A_i) = W \\ \neg A_i\ für\ f(A_i) = F \end{cases}$
für die Interpretation f, für die W in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretation g nach Lemma 2.2

$$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = W \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} W\ für\ L_i = A_i \\ F\ für\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f = g$
$\Rightarrow$ Der Minterm $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

(ii) Setzen $L_1 = \begin{cases} A_i \; f\ddot{u}r \; f(A_i) = F \\ \neg A_i \; f\ddot{u}r \; f(A_i) = W \end{cases}$
für die Interpretation f, für die F in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretationen g nach Lemma 2.2
$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} F \; f\ddot{u}r \; L_i = A_i \\ W \; f\ddot{u}r \; L_i = \neg A_i \end{cases}$
$\Leftrightarrow g = f$
$\Rightarrow$ Der Maxterm $L_1 \vee \ldots \vee$ hat die gegebene Wahrheitstabelle $\square$

Bsp.:

A_1	A_2	
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

Maxterm $A_1 \vee A_2$
Minterm existiert nicht

Def.:
Eine Formel G über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ heißt

(i) in disjunktiver Normalform (DNF)
falls G eine Disjunktion von Mintermen ist
$G = \bigvee_{i=1}^{k} (L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

(ii) in konjunktiver Normalform (KNF)
falls G eine Konjunktion von Maxtermen ist
$G = \bigwedge_{i=1}^{k} (L_{in} \vee \ldots \vee L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

Bem.:

$\rightarrow$ Dieser Begriff von KNF, DNF stimmt nicht genau mit dem Begriff aus dem Buch von Schöning überein. Dessen Definition wid bei uns als VDNF, VKNF auftauchen.

$\rightarrow$ Für DNF $\bigvee_{i=1}^{k} (\bigwedge_{j=1}^{n} L_{ij})$ und
KNF $\bigwedge_{i=1}^{k} (\bigvee_{j=1}^{n} L_{ij})$
erlauben wir $k = 0 \leftarrow$ leere DNF, leere KNF

Dies sind „keine“ Formeln im strengen Sinn
Werden sie aber für Satz 2.4 brauchen
Wir setzen
die DNF für $k = 0$ als unerfüllbar
die KNF für $k = 0$ als gültig

Satz 2.4: Sei G eine Formel über $\{A_1, \ldots, A_n\}$
Dann gibt es Formeln G_D und G_K mit

- $G \equiv G_D \equiv G_K$
- G_D is in DNF
  G_K ist in KNF

Bew.: Konstruktion von G_D

(i) Seien $f_1, \ldots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = W \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Minterm $L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}$
so dass $f(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}) = W \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_D = \bigvee_{i=1}^{k}(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in})$ in DNF nach Konstruktion
Sei f Interpretation
$f(G_D) = W \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}) = W$
$\leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ gilt mit $f(A_j) = \begin{cases} W\ für\ L_{ij} = A_j \\ F\ für\ L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$
$\Leftrightarrow f(G) = W$
$\Rightarrow G \equiv G_D$

Konstruktion von G_K:

(i) Seien $f_1, \ldots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = F \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Maxterm $L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in}$
so dass $f(L_{in} \vee \ldots \vee L_{in}) = F \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_K = \bigwedge_{i=1}^{k}(L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in})$ in KNF nach Konstruktion
Sei f eine Interpretation:
$f(G_K) = F \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in}) = F$

$\Leftrightarrow^{2.3}$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(A_j) = \begin{cases} F\ f\ddot{u}r\ L_{ij} = A_j \\ W\ f\ddot{u}r\ L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$

$\Leftrightarrow f(G) = F$

$\Rightarrow G \equiv G_K \square$

Bsp.: $G = A_1 \vee A_2$

	A_1	A_2	
	F	F	F
$f_1 =$	F	W	W
$f_2 =$	W	F	W
$f_3 =$	W	W	W

$f_1 \leftrightarrow \neg A_1 \wedge A_2$

$f_2 \leftrightarrow A_1 \wedge \neg A_2$

$f_3 \leftrightarrow A_1 \wedge A_2$

$G_D = (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$

Für KNF

	A_1	A_2	
$f_1 =$	F	F	F
	W	F	W
	F	W	W
	W	W	W

Folgerung 2.5: Bis auf die Reihenfolge der Minterme und Maxterme und das Setzen der Klammern in einer vollständigen Klammerung gibt es in jeder semantischen Klasse eindeutig bestimmte Formeln in DNF und in KNF

Erfüllbarkeitsproblem:

Eingabe Formel G:

Ausgabe: G erfüllbar oder G unerfüllbar

$\rightarrow$ Bruteforce: Feste alle 2^n Interpretationen in der n atomaren Formeln aus G

$\rightsquigarrow$ In worst case 2^n Schritte = Laufzeit.

Sei G in DNF

Ist G nicht die leere DNF, so ist G erfüllbar.

$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in konstanter Zeit entscheidbar

Sei G in KNF

Hat $G \leq 2^n - 1$ Maxterme, so ist G erfüllbar.

$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in linearer Zeit entscheidbar.

Weitere, nicht eindeutige Normalform, die die Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems für allgemeine Formeln besser kodiert.

Def.:

- Ein Konjunktionsterm ist eine Konjunktion $\bigwedge_{i=1}^{r} L_i$ für Literale $L_i, i = 1,,r$, sodass jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht.
- Ein Disjunktionsterm ist eine Disjunktion $\bigvee_{i=1}^{r} L_i$ für Literale $L_i, i = 1,,r$, sodass jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht.

Bsp.: $A_1 \wedge \neg A_{13} \wedge A_{38}$ Konjunktionsterm
$A_1 \wedge \neg A_{13} \wedge \neg A_1$ kein Konjunktionsterm (A_1 zweimal)

Bem.: Minterme und Maxterme sind Konjunktions- bzw. Disjunktionsterme

Def.:

- Eine Formel G heißt in verallgemeinerter DNF (VDNF), falls G eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Konjunktionstermen ist.
- Eine Formel G heißt in verallgemeinerter KNF (VKNF), falls G eine Konjunktion von paarweise verschiedenen Disjunktionen ist.

Bsp.: $G = (A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_4 \vee \neg A_7)$ in VKNF (zwei Disjunktionsterme)
aber nicht in KNF

Bem.: Zu jeder Formel G gibt es eine semantisch äquivalente Formel im VDNF bzw. VKNF (Folgt aus Satz 2.5)

Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in VDNF und VKNF
$\rightarrow$ Für Konjunktionsterm $\bigwedge_{i=1}^{r} L_i$ wählen wir Interpretation f mit $f(A_{ji}) = \begin{cases} W & L_i = A_{ji} \\ F & L_i = \neg A_{ji} \end{cases}$
Dann ist f wohldefiniert, da jede atomare Formel höchstens einmal auftaucht
$\Rightarrow f(\bigwedge_{i=1}^{r} L_i) = W$
Also ist jeder Konjunktionsterm erfüllbar.
$\Rightarrow$ jede Formel in VDNF ist erfüllbar bis auf die leere Formel, die wir wieder als unerfüllbar definieren.

Erfüllbarkeit für Formel in VDNF ist in konstanter Zeit entscheidbar

$\rightarrow$ Für jeden Disjunktionsterm gibt es mehrere Interpretationen, die diesen erfüllen. Formel in VKNF ist erfüllbar, falls es eine Interpretation gibt, die alle ihre Disjunktionsterme erfüllt.

Bsp.: $G = \underbrace{(A_1 \vee \neg A_2)}_{f(A_1)=W \text{ oder } f(A_2)=F} \wedge \underbrace{(\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3)}_{f(A_1)=F \text{ oder } f(A_2)=W \text{ oder } f(A_3)=W}$
$f(A_1) = f(A_2) = f(A_3) = W$ erfüllt G

Bem.: Für Formel in VKNF gibt es kein offensichtliches Verfahren, das die Erfüllbarkeit schnell entscheidet.
Spezialfall:
$G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{ij}$ Formel in VDNF
$\rightarrow r_1 = \ldots = r_2 = 1$
$G = L_{1,1} \wedge L_{2,1} \wedge \ldots \wedge L_{5,1}$
G erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt keine atomare Formel A_t und $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq s$ mit $Ls_1 = A_t, L_{s_2} = \neg A_t$ oder $L_{s_1} = \neg A_t, L_{s_2} = A_t$
Das ist in linearer Zeit entscheidbar.

$\rightarrow r_1, \ldots, r_2 \leq 2$
$\rightarrow$ HIer werden wir später einen guten Algorithmus in Kontext von Resolutionen finden
$\rightarrow r_1 = \ldots - r_s = n$ und G ist Formel über n atomare Formeln
$\Rightarrow G$ in KNF, Erfüllbarkeit ist in linearer Zeit entscheidbar

Ziel: Zeigen Fall $r_1, \ldots, r_3 \leq 3$ ist genauso schwer wie der allgemeine Fall.

Def.: Zwei Formeln G und H geißen erfüllbarkeitsäquivalent, falls G erfüllbar $\Leftrightarrow$ H erfüllbar

Satz 2.6: Sei G eine Formel in VKNF. Dann kann in der Länge von G polynomial vielen Schritten eine Formel H konstruiert werden, sodass
$\rightarrow$ G und H sind erfüllbarkeitsäquivalent
$\rightarrow$ H in VKNF
$\rightarrow$ In jedem Disjunktionsterm von H sind ≤ 3 Literale

Bew.: Sei $G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$

$M_i = \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$ und setze $[M_i]_{A_l} = \begin{cases} A_l \; Es \; gilt \; 1 \leq j \leq r_i \;\; L_{i,j} = A_l \\ \neg A_l \; Es \; gilt \; 1 \leq j \leq r_i \;\; A_{i,j} = \neg A_l \\ \emptyset \; sonst \end{cases}$

Seien $A_1, \ldots, A_n$ die atomaren Formeln, die in G auftauchen

Setze: $N_i = ([M_i]_{A_i} \vee A_{i,1}) \wedge (\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_2} \vee A_{i,2}) \wedge \ldots \wedge (\neg A_{i,n-2} \vee [M_i]_{A_{n-1}} \vee A_{i,n-1}) \wedge (\neg A_{i,n-1} \vee [M_i]_{A_n})$
für reine neue atomare Formeln $A_{i,1}, \ldots, A_{i,n-1}$
Setze $H = \bigwedge_{i=1}^{s} N_i = N_1 \wedge \ldots \wedge N_s$
Da jedes N_1 in VKNF ist mit ≤ 3 Literalen pro Disjunktionsterm, ist auch H in VKNF mit ≤ 3 Literalen pro Disjunktionsterm.

Dabei lesen wir
$(\emptyset \vee A_{i,1})$ als $A_{i,1}$
$(\neg A_{i,l} \vee \emptyset A_{i,l+1})$ als $(\neg A_{i.l} \vee A_{i,l-1})$
$(\neg A_{i,n-1} \vee \emptyset)$ als $\neg A_{i,n-1}$

Noch zu zeigen: G und H erfüllbarkeitsäquivalent und H ist in polynomialer Zeit konstruierbar.
$\rightarrow$ Erfüllbarkeitsäquivalenz
Sei G erfüllbar $\Rightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G) = W$
Da $G = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j} = \bigwedge_{i=1}^{s} M_i$

- $f(G) = W \Rightarrow f(M_i) = W$ für alle $1 \leq i \leq s$
- $f(M_i) = f(\bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}) = W \Rightarrow$ Es gibt $1 \leq j \leq r_i$ mit $f(L_{i,j}) = W$

Sei $L_{i,j} = \begin{cases} A_l \ oder \\ \neg A_l \end{cases}$ (l hängt von i, j ab)
Definieren Interpretation g mit
$g(A_1) = f(A_1) \ldots g(A_n) = f(A_n)$
$g(A_{i,j}) = \begin{cases} W, i < l \\ F, i \geq l \end{cases}$
Dann interpretiert g alle atomaren Formeln in H
Betrachten $g(N_i)$
$g([M_I] \vee A_{i,1}, g(\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_i} \vee A_{i,2}), \ldots, g(\neg A_{i,l-1} \vee [M_i]_{A_{l-1}} \vee A_{i,l-1}) = W$
da $g(A_{i,j}) = \ldots = g(A_{i,l-1}) = W$
$g(\underbrace{\neg A_{i,l-1}}_{F} \vee [M_i]_{A_l} \vee \underbrace{A_{j,l})}_{F} = W$ da $g([M_i]_{A_l}) = f([M_i]_{A_l}) = W$
$g(\neg A_{i.l} \vee [M_i]_{A_{l-1}} \vee A_{i,l-1}) \ldots g(\neg A_{i,n-2} \vee [M_i]_{A_n-1} \vee A_{i,n-1})\ g(\neg A_{i,n+1} \vee [M_i]_{A_n}) = W$
da $g(A_{i,l}) = \ldots = g(A_{i,n-1}) = F$
$\Rightarrow g(N_i) = W, 1 \leq i \leq s \Rightarrow g(H) = \neg W$
$\Rightarrow H$ erfüllbar

Satz 2.6: VKNF

- erfüllbarkeitsäquivalent
- H in VKNF mit $\leq$ 3 Literale pro Disjunktionsterm

Bew.:

$G = \bigwedge_{i=1}^{r} M_1, [M_i]_{A_{r,l}} = \begin{cases} A_l \; A_l \; in \; M_1 \\ \neg A_l \; \neg A_l \; in \; M_l \\ \emptyset \; sonst \end{cases}$

$N_i = ([M_i]_{A_1} \vee A_{i,1}) \wedge (\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_2} \vee A_{i,2}) \wedge \ldots \wedge (\neg A_{1,n-1} \vee [M_i]_{A_n})$
$\# \bigwedge_{i=1}^{r} N_i$

H erfüllbar
$\Rightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(H) = W$
$\Rightarrow f(N_i) = W, i = 1, \ldots, r$
$\Rightarrow f([M_i]_{A_1} \vee A_{i,1}) = W, f(\neg A_{i,1} \vee [M_i]_{A_2} \vee A_{i,2}) = W$
$\ldots f(\neg A_{i,n-1} \vee [M_i]_{A_n}) = W, \; i = 1, \ldots, n$

Ann:
Es gibt $1 \leq i \leq r$ mit
$[M_i]_{A_l} = \emptyset$ oder $f([M_i]_{A_l}) = F$
Dann:
$f([M_i]_{A_i} \vee A_{i,1}) = W \Rightarrow f(A_{i,1}) = W$
$f(\neg A_{i,n-1} \vee [M_i]_{A_n}) = W \Rightarrow f(A_{i,n-1}) = F$

Sei $l \geq 1$ mit
$f(A_i, l) = W, \; f(A_{i,l+1}) = F$
Sein ein l existent da $f(A_{i,1}) = W, \; f(A_{i,n-1}) = F$
$f(\neg A_{i,l} \vee [M_i]_{l+1} \vee A_{i,l+1}) = W$
$\Rightarrow [M_i]_{l+1} \neq \emptyset$ und $f([M_i]_{l+1}) = W$
$Widerspruch$ zur Ann. $\Rightarrow$ Ann. falsch.

$\Rightarrow$ Für alle $1 \leq i \leq r$ gibt es ein l mit
$[N_i]_{A_l} \neq \emptyset$ und $f([M_i]_{A_l}) = W$
Da $M_i = \bigvee_{l=1}^{n} [M_i]_{A_l}$ folgt $f(M_i) = W$
Da $G = \bigwedge_{i=1}^{r} M_i$ folgt $f(G) = W \Rightarrow G$ erfüllbar.

$\Rightarrow H$ kann in polynomialer Zeit aus G konstruiert werden
Folgt aus der Konstruktionsvorschrift für H (max. quadratisch) $\square$

Bsp.: $G = \underbrace{A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 \vee A_4}_{M_1} \wedge \underbrace{(\neg A_2 \vee A_4 \vee A_5 \vee \neg A_6)}_{M_2}$

$N_1 = ([M_1]_{A_1} \vee A_{1,1}) \vee (\neg A_{1,1} \vee [M_1]_{A_2} \vee A_{1,2}) \wedge$
$(\neg A_{1,2} \vee [M_1]_{A_3} \vee A_{1,3}) \wedge$
$(\neg A_{1,3} \vee [M_1]_{A_4} \vee A_{1,4}) \wedge$
$(\neg A_{1,4} \vee [M_1]_{A_5} \vee A_{1,5}) \wedge$
$(\neg A_{1,5} \vee [M_1]_{A_6})$
$= (A_1 \vee A_{1,1}) \wedge (\neg A_{1,1} \vee A_2 \vee A_{1,2}) \wedge (\neg A_{1,2} \vee \neg A_3 \vee A_{1,3}) \wedge (\neg A_{1,2} \vee A_4 \vee A_{1,4})$
$(\neg A_{1,3} \vee A_{1,5}) \wedge (\neg A_{1,5})$

$N_2 = (A_{2,1}) \wedge (\neg A_{2,1} \vee \neg A_2 \vee A_{2,2})$
$\wedge (\neg A_{2,2} \vee A_{2,3}) \wedge (\wedge A_{2,3} \vee A_4 \vee A_{2,4})$
$\wedge (\neg A_{2,4} \vee A_5 \vee A_{2,5}) \wedge (\neg A_{2,5} \vee \neg A_6)$
$H = N_1 \wedge N_2$

Algorithmische Konsequenzen von Satz 2.6:
Betrachten folgende Eintscheidungsprobleme
SAT = Entscheidungproblem von einer Formel in VKNF zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist. (Satisfiability)

k-SAT-Entscheidungsproblem von einer Formel in VKNF mit $\leq k$ Literalen pro Disjunktionsterm zu entscheiden, ob sie erfüllbar.

Satz 2.6 sagt: Gibt es für 3-SAT einen Algorithmus, der in polynomialer Zeit entscheidet, ob eine Formel erfüllbar ist, so gibt es für SAT und jedes k-SAT einen polynomialen ALgorithmus.

Zum Abschluss des Kapitels: Eine Klasse von Formeln in VKNF, für die die Erfüllbarkeit in polynomialer Zeit entscheidbar ist.

Def.: Ein Formel in VKNF heißt Horn-Formel, falls in jedem Disjunktionsterm höchstens ein positives Literal auftaucht.

Ein Literal
$L = A_i$ heißt positiv
$L = \neg A_I$ heißt negativ

Bsp.: $(A_1 \vee \neg A_4 \vee \neg A_5 \vee \neg A_7) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge A_{13}$
ist Horn-Formel

$(A_1 \vee A_2) \wedge \neg A_4$ kein Hornformel

Wir können Horn-Formeln folgendermaßen syntaktisch transformieren.

$(A_i \vee \neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js})$
$\equiv (A_1 \vee \neg(A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}))$
$\equiv ((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \to A_i)$

$(\neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js}) \rightsquigarrow ((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \to F)$
$(A_i) \rightsquigarrow (W \to A_i)$

Man wendet auf die so transformierte Formel den Markierungsalgorithmus an

(1) Markiere jeses Vorkommen der atomaren Formeln A_i, für die $(W \to A_i)$ ein Disjunktionsterm ist.

(2) $\to$ Es gibt ein Disjunktionsterm $(A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js} \to F)$
sodass $A_{j1}, \ldots, A_{js}$ markiert sind
Dann STOP mit Ausgabe unerfüllbar
$\to$ Es gibt ein Disjunktionsterm $((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \to A_i)$, sodass $A_{j1}, \ldots, A_{js}$ markiert sind. Dann markieren jedes Vorkommen von A_i und gehen zu (2)
Sonst STOP mit Ausgabe erfüllbar

Bsp.: $G = (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_3) \wedge A_3 \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_4)$
$\rightsquigarrow ((A_2 \wedge A_3) \to A_2) \wedge (A_3 \to A_2) \wedge (W \to A_3) \wedge ((A_3 \wedge A_3) \to F)$
(1) $\rightsquigarrow ((A_2 \wedge \bar{A}_3) \to A_1) \wedge (\bar{A}_3 \to A_2) \wedge (W \to \bar{A}_3) \wedge (\bar{A}_3 \wedge A_4 \to F)$
(2) $\rightsquigarrow ((\bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3) \to A_1) \wedge (\bar{A}_3 \to \bar{A}_2) \wedge (W \to \bar{A}_3) \wedge (\bar{A}_3 \wedge A_4 \to F)$
$\to G$ ist erfüllbar.

Satz 2.7: Der Markierungsalgorithmus ist korrekt.

Bew.: Beh: Ist f eine Interpretation mit $f(G) = W$ für eine Horn-Formel G, so ist $f(A_i) = W$ für jede atomare Formel, die bei Eingabe von G im Markierungsalgorithmus markiert wird.

1. Fall A_i wird in Schritt (1) markiert
$\Rightarrow (W \to A_i)$ bzw. A_i ist Disjunktionsterm in G. Also folgt aus $f(G) = W$ schon $f(A_i) = W$

2. Fall A_i wird in Schritt (2) markiert.
$\Rightarrow ((A_{j,1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \to A_1) \equiv (A_i \vee \neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js})$ ist.

Disjunktionsterm in G und A_{j1}, A_{js} sind markiert.
Per Induktion über die Anzahl der Schritte im Markierungsalgorithmus können wir annehmen $f(A_{i_1}) = \ldots = f(A_{i_3}) = W$ für jede Interpretation f mit $f(G) = W$
Dann folgt aus $f(G) = W$ schon $f(A_i \vee \neg A_{j_1} \vee \ldots \vee \neg A_{j_3}) = W \Rightarrow f(A_i) = W$ $\square$

Horn-Formeln
VKNF mit ≤ 1 ps-Literal pro Disjunktionsterm

$(A_i \vee A_{ij} \vee \ldots \vee A_J) \rightsquigarrow (A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js} \to A_i)$
$A_i \rightsquigarrow (W \to A_i)$
$\neg A_{j1} \vee \ldots \vee A_{js} \rightsquigarrow (A_{j1} \vee \ldots \vee A_{js} \to F)$

Satz : Markierungsalgorithmus korrekt

Bew.: G Hornformel und G erfüllbar
$\Rightarrow f(A_i) = W$ für alle A_i
din im Markierungsalgorithmus markiert werden.

$\to$ ist G erfüllbar, so wird dies vom Markierungsalgorithmus festgestellt

Annahme: Markierungsalgorithmus kommt zum Ergebnis unerfüllbar
Dann gibt es nach einigen Schritten im Markierungsalgorithmus eine Formel $(A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{ji} \to F)$ wobei $A_{j1}, \ldots, A_{js}$ markiert sind

Beh.: Für jede Interpretation f mit $f(G) = W$ gilt
$f(A_{j1}) = \ldots = f(A_{js}) = W$
G enthält aber $((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \to F) \rightsquigarrow (\neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js})$
Da $f(\neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js}) = F$ folgt $f(G) = F$
$\Rightarrow$ also Annahme falsch und Markierungsalgorithmus kommt zum Ergebnis „erfüllbar“

$\to$ Ist G unerfüllbar, so wird das im Markierungsalgorithmus festgestellt.

Annahme: Markierungsalgorithmus kommt zum Ergebnis erfüllbar.
Definieren Interpretation f durch

$$f(A_i) = \begin{cases} W \; A_i \; bei \; Abbruch \; markiert \\ F \; sonst \end{cases}$$

Betrachten die verschiedenen Disjunktionsterme von G
$(A_i \to W)$ Dann ist A_i im 1 Schritt markiert und $f(A_i) = W$
$(A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js} \to A_i)$

Entweder
$A_{j1}, \ldots, A_{js}$ und A_i markiert
Dann $f((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js}) \rightarrow A_i) = W$ da
$f(A_{j1}) = \ldots = f(A_{js}) = W$

oder es gilt $1 \leq l \leq s$, so dass A_{jl} nicht markiert.
Also $f(A_{jl}) = F$
$\Rightarrow f((A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{jl}) \rightarrow A_i) = W$

$(A_{j1} \wedge \ldots \wedge A_{js} \rightarrow F)$
Da der Algorithmus mit „erfüllbar" abbricht gibt es $1 \leq l \leq s$ mit A_{jl} nicht markiert. Also $f(A_{jl}) = F$
Damit $f(\neg A_{j1} \vee \ldots \vee \neg A_{js}) = W$
$\Rightarrow f$ erfüllt alle Disjunktionsterme von G
$\Rightarrow f(G) = W \rightarrow$ Widerspruch zur Annahme
$\Rightarrow$ Markierungsalgorithmus kommt zum Ergebnis „unerfüllbar" $\square$

Def.: Seien f, g Modell von einer Formel G

- Wir sagen $f \leq g \Leftrightarrow (f(A_i) = W \Rightarrow g(A_i) = W$ für alle atomaren Formeln A_i aus $G)$
- Wir sagen f ist minimales Modell von G falls $f \leq g$ für jedes Modell g von G

Bsp.: $G = A_1 \wedge \neg(\neg A_2 \vee A_3)$
Modelle

A_1	A_2	A_3	
W	F	F	f_1
W	F	W	f_2
W	W	W	f_3

(minimales Modell (alle anderen Modelle sind größer oder gleich))

$f_1 \leq f_2$
$f_1 \leq f_3$
$f2 \leq f_3$

Folgerung 2.8: Sei G eine erfüllbare Horn-Formel, dann besitzt G ein minimales Modell

Bew.: Im Beweis von Satz 2.7 wird gezeigt:

- $\rightarrow$ Alle im Markierungsalgorithmus markierten atomaren Formeln müssen durch ein Modell von G als W interpretiert werden
- $\rightarrow$ Die Interpretation f, die alle im Markierungsalgorithmus markierten atomaren Formeln mit W und alle anderen als F interpretiert ist ein Modell von G
- $\rightarrow$ Dieses f ist das minimale Modell $\square$

Bem.: Aus Korrektheit des Markierungsalgorithmus folgt

(i) Eine Horn-Formel mit genau einem pos. Literal pro Disjunktionsterm ist erfüllbar

(ii) Eine Horn-Formel ohne einen Disjunktionsterm, der nur aus einem positiven Literal besteht ist erfüllbar.

Folgerung 2.9: Für Horn-Formeln kann die Erfüllbarkeit in polynomialer Zeit entschieden werden.

Bew.: Analyse des Markierungsalgorithmus
Schritt (1) lineare Zeit
Schritt (2) lineare Zeit (allerdings wird dieser Schritt öfters gemacht)
Schritt (2) wird $\leq$ Formellänge oft durchlaufen (worst-case)
$\Rightarrow$ quadratische Laufzeit $\square$

3 Kompaktheitssatz

Wiederholung
Σ Formelmenge heißt erfüllbar: $\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G) = W$ für $G \in \Sigma$
(so ein f heißt Modell von Σ)

Falls $\#\Sigma < \infty$ und $\Sigma = \{G_1, \ldots, G_r\}$
Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $G_1 \wedge \ldots \wedge G_r$ erfüllbar

Satz 3.1: (Kompaktheitssatz)
Sei Σ Formelmenge. Dann gilt:
Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Σ ist erfüllbar.

Bew.:

„$\Rightarrow$" Σ erfüllbar $\Rightarrow$ Es gilt Interpretation f mit $f(G) = W$ für alle $G \in \Sigma$

Sei $\Sigma' \subseteq \Sigma$ endlich
Dann $f(G) = W$ für alle $G \in \Sigma'$
$\Rightarrow$ Σ' erfülbar

„$\Leftarrow$" Sei Σ Formelmenge über $\{A_1, A_2, \ldots\}$
$\Sigma_n := \{G \in \Sigma$ | keine atomare Formel A_i mit $i \gneqq n$ kommt in G vor $\}$

Es gibt 2^{2^n} semantische Klassen von Formeln über $\{A_1, \ldots, A_n\}$
$\Rightarrow$ $\Sigma'_n =$ Menge von Repräsentationen der semantischen Klassen, für die es eine Formel in Σ_n gibt, ist endliche Menge, $\#\Sigma'_n < \infty$
$\Rightarrow$ Σ'_n erfüllbar

Jedes Modell von Σ'_n ist Modell von Σ_n
$\Rightarrow$ Es gibt Interpretation $f_n, n \geq 1$, mit $f_n(G) = W$ für alle $G \in \Sigma_n$
Es gibt $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Sigma$
Konstruktion einer Interpretation f mit $f(G) = W$ für alle $G \in \Sigma$

(1) Indexmenge $I = \{1, 2, 3, \ldots\}, i := 1$

(2) Falls $\#\{n \in I \mid f_n(A_i) = W\} = \infty$
dann $f(A_i) = W$
$I := I \backslash \{n \mid f_n(A_i) = F\}$
sonst
$f(A_i) = F$
$I := I \backslash \{n \mid f_n(A_i) W\}$

(3) $i = i + 1$, gehe zu (2)

Kompaktheitssatz
Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Jede endl. Teilmenge von Σ erfüllbar.

Bew.: „$\Rightarrow$“
„$\Leftarrow$“ Σ_n = Formeln aus Σ über $A_1, \dots, A_n$
$\Sigma'_n =$ Repräsenten der semantischen Klassen aus Σ_n

Fakt: $\#\Sigma'_n < \infty$
Daher Σ'_n erfüllbar und es gibt Modell f_n

(1) $I = \{1, 2, \dots\}, i = 1$

(2) $\#\{n \in I | f_n(A_i) = W\} = \infty \rightsquigarrow f(A_i) = W$
$I = I \backslash \{n | f_n(A_i) = F\}$
sonst $f(A_i) = F, I := I \backslash \{n | f_n(A_i) = W\}$

(3) $i = i + 1$ gehe zu (2)

Wir zeigen: f ist Modell für G

Beh.: Sei I die Menge der Indizes nach dem i-ten Durchlauf von (2)-(3).
Dann gilt $\#I = \infty$ und für alle $m \in I$ ist $f_m(A_j) = f(A_j), 1 \leq j \leq i$

Bew.: Induktion nach i
I.A.:
$i = 0$
$\#I = \#\{1, 2, \dots\} = \infty$
und $f(A_j) = f_m(A_j)$ für $1 \leq j \leq i$ ist leere Bed.

I.S.:
$i \to i + 1$
Sei I die Menge nach dem $(i+1)$-ten Durchlauf und I' die Menge nach dem i-ten Durchlauf

<u>1. Fall</u> $\#\{n \in I' | f_n(A_{i+1}) = W\} = \infty$
$\to I = I' \backslash \{n \in I' | f_n(A_{i+1}) = F\}$
$= \{n \in I' | f_n(A_{i+1}) = W\}$
$\Rightarrow \#I = \infty$

Nach I.V. gilt $f_m(A_j) = f(A_j), 1 \leq j \leq i$
und $m \in I'$

Da $I \subseteq I'$ folgt
$f_m(A_j) = f(A_j), 1 \leq j \leq i$ und $m \in I$
Im 1. Fall wird $f(A_{i+1}) = W$ und $f_m(A_{i+1}) = W$ für $m \in I$
$\Rightarrow f(A_j) = f_m(A_j)$ für $1 \leq j \leq i+1$ und $m \in I$
<u>2. Fall</u> $\#\{n \in I' | f_n(A_{i+1}) = W\} < \infty$
$\Rightarrow$ Da nach I.V. $\#I' = \infty \Rightarrow \#\{n \in I' | f_n(A_{i+1}) = F\} = \infty$

Beweis nun analog zum 1. Fall
Sei $G \in \Sigma \Rightarrow$ es gibt $n \in \{1, 2, \dots\}$ mit $G \in \Sigma_n$
Nach Beh. folgt dass $\#\{m | f(A_j) = f_m(A_j), 1 \leq j \leq n\} = \infty$
also gibt es ein $m \geq n$ mit $f(A_j) = f_m(A_j), 1 \leq j \leq m$
f_m ist Modell von Σ_m wegen $\Sigma_n^{n \leq m} \subseteq \Sigma_m$ ist f_m auch Modell von $\Sigma_n \Rightarrow f_m(G) = W$ Aber
$f_m(G) = f(G)$ da $f(A_j) = f_m(A_j), 1 \leq A_j \leq n \leq m$
$\Rightarrow f(G) = W \ \square$

Folgerung 3.2: Sei Σ Formelmenge
Dann gilt:
Σ unerfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt endliche Teilmenge von Σ, die unerfüllbar ist.

Bew.: Folgt sofort aus Kompaktheitssatz $\square$
Alogrithmische Anwendung:
Sei Σ eine Formelmenge und $\Sigma_n \in \Sigma$ mit:
($\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ für alle n)

(1) $\#\Sigma_n < \infty$

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n = \Sigma$

(1) $n = 1$

(2) Ist Σ_n unerfüllbar STOP.
Σ ist unerfüllbar (kann wegen $\#\Sigma_n < \infty$ getestet werden)

Ist Σ_n erfüllbar
$n = n + 1$, gehe zu (2)

Wegen Folgerung 3.2 gilt:
Algorithmus terminiert genau dann, wenn Σ unerfüllbar ist.

4 Resolutionen

Bisher: Test auf Erfüllbarkeit: Semantische Verfahren
„suche Modell“

Jetzt: Syntaktische Verfahren
„Transformation der Formel“

Für das Resolutionsverfahren nimmt man an, dass die Formel schon in VKNF sind.
Die Disjunktionsterme werden dazu noch umgeschrieben:

Notation: $\bigvee_{i=1}^{l} L_i$ Disjunktionsterm $\rightsquigarrow \{L_1, \ldots, L_l\}$

Def.: Eine endliche Menge von Literalen heißt Klausel.
Eine Menge von Klauseln heißt Klauselmenge

Bem.:

- Klauseln können das positive und negative Literal zu einer atomaren Formel gleichzeitig enthalten.
  Disjunktionsterme aber nicht
- Klauseln sind endliche Mengen
  Klauselmengen können unendlich sein

Notation: Sei $\bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$ in VKNF identifizieren diese mit Klauselmenge
$\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,r_1}\}, \{L_{2,1}, \ldots, L_{2,r_2}\}, \ldots, \{L_{s,1}, \ldots, L_{s,r_s}\}\}$

Def.:

- Die leere Klausel wird mit $\Box$ bezeichnet und ist erfüllbar.
- Eine Klausel $\{L_1, \ldots, L_l\} + \Box$ ist erfüllbar $\leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{l} L_i$ ist erfüllbar
- Eine Klauselmenge ist erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt, die alle Klauseln in der Klauselmenge erfüllt.
- Ein Model einer Klauselmenge ist eine Interpretation f, die alle Klauseln in der Klauselmenge erfüllt.

Bsp.:
$(A_1 \vee \neg A_4) \wedge (A_2 \vee \neg A_3 \vee A_4) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3)$ VKNF
$\{\{A_1, \neg A_3\}, \{A_2, \neg A_3, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_3\}\}$ Klauselmenge

$$\left.\begin{array}{l} f(A_1) = f(A_2) = W \\ f(A_3), f(A_4)\ beliebig \end{array}\right\} \text{ist Modell der Klauselmenge}$$

Bem.: K Klauselmenge und $\square \in K \Rightarrow K$ ist unerfüllbar

Def.: Seien K_1, K_2 zwei Klauseln und $L_1 \in K_1, L_2 \in K_2$
das positive und negative Literal zu selben atomaren Formel.

Dann heißt $R = (K_1 \backslash \{L_1\}) \vee (K_2 \backslash \{L_1\})$ eine Resolvente von K_1 und K_2

Bsp.: $K = \{\underbrace{\{A_1, \neg A_4\}}_{K_1}, \underbrace{\{A_2, \neg A_3, A_4\}}_{K_2}, \underbrace{\{\neg A_1, A_2, A_3\}}_{K_3}\}$
$L_1 = \neg A_4 \in K_1$
$L_2 = A_4 \in K_2$
$R = (K_1 \backslash \{L_1\}) \vee (K_2 \backslash \{L_2\}) = \{A_1, A_2, \neg A_3\}$

$L_1 = \neg A_3 \in K_2$
$L_2 = A_3 \in K_3$
$R = (K_2 \backslash \{L_1\}) \vee (K_3 \backslash \{L_2\}) = \{A_2, A_4, \neg A_1\}$

$K = \{\underbrace{\{A_1, \neg A_2\}}_{K_1}, \underbrace{\{\neg A_1, A_2\}}_{K_2}\} \leadsto^{VKNF} (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee A_2)$

$\left.\begin{array}{l} L_1 A_1 \in K_1 \\ L_2 = \neg A_1 \in K_2 \end{array}\right\} R = (K_1 \backslash \{L_1\}) \vee (K_2 \backslash \{L_2\}) = \{A_2, \neg A_2\} \rightarrow$ gehört nicht zu Disjunktionsterm

Lemma 4.1: (Resolutionslemma) Sei K Klauselmenge, $K_1, K_2 \in K$ KLauseln und R Resolvent von K_1 und K_2

Dann gilt

(1) $K \models R$

(2) $K \equiv K \cup \{R\}$

Bsp.:
$K1 = \{A_1, \neg A_4\}$
$K_2 = \{A_2, \neg A_3, \neg A_4\}$
$R = \{A_1, A_2, \neg A_3\}$
Wollen sehen $\{K_1, K_2\} \models R$
$f(K_1) = W \rightarrow f(A_1) = W$ oder $f(\neg A_4) = W$

$f(A_1) = W \Rightarrow f(R) = W$
$\left.\begin{array}{l} f(\neg A_4) = W \\ f(K_2) = W \end{array}\right\} f(A_2) = W$

$oder\ f(\neg A_3) \Rightarrow f(R) = W$
Also $\{K_1, K_2\} \models R$

Stichwortverzeichnis