Besprechung Zettel 2

Tutorium vom 31.10.2013

Mitschrift aus dem Tutorium (Jens Kosiol), vermutlich mit Fehlern

2. November 2013

Aufgabe 1

G, H Formeln
zz: $G \equiv H \Leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$ gültig.
$(G \leftrightarrow H)$ gültig. $\Leftrightarrow$ $(G \to H)$ und $(H \to G)$ gültig.

G	H	$G \to H$	$H \to G$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	W
W	W	W	W

Die Hinrichtung „$\Rightarrow$“:
$G \equiv H$
$\Rightarrow (G \to H), (H \to G)$ gültig

Die Rückrichtung „$\Leftarrow$“:
$(G \to H)$
$\Rightarrow f(G) = f(H)$
$\Leftrightarrow G \equiv H$

Aufgabe 2

Beh.: G enhält keine Negation $\Rightarrow G$ nicht gültig, aber erfüllbar
Bew: Seien f_W und f_F zu G passende Interpretationen mit $f_W(A_i) = W, f_F(A_i) = F$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Wir zeigen $F_W(G) = W, f_F(G) = F \ \forall G$
I.A: Sei A_i atomar, dann gilt:
$f_W(A_i) = W, f_F(A_i) = F \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$
I.S:

1. Fall $G = (G_1 \vee G_2)$
   Nach I.V. gilt
   $f_W(G_1) = W = f(G_2)$
   $f_F(G_1) = F = f_F(G_2)$
   Damit gilt
   $f_W(G) = f_W(G_1 \vee G_2) = W$
   $f_F(G) = f_F(G_1 \vee G_2) = F$

2. Fall $G = (G_1 \wedge G_2)$
   Nach I.V. gilt
   $f_W(G_1) = f_W(G_1) = W$
   $f_F(G_1) = f_F(G_2) = F$
   Damit gilt:
   $f_W(G) = f_W((G_1 \wedge G_2)) = W$
   $f_F(G) = f_F((G_1 \wedge G_2)) = F$

3. Fall entfällt

$\Rightarrow G$ ist nicht gültig, aber erfüllbar.

Aufgabe 3

a)

Beh.: „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation

- Reflexivität
  G Formel. Dann gilt für jede zu G passende Interpretation f: $f(G) = f(G)$
  $\Rightarrow G \equiv G$

- Symmetrie:
  G, H Formeln mit $G \equiv H$. Dann gilt für jede zu G und H passende Interpretation f: $f(G) = f(H) \Leftrightarrow f(H) = f(G)$
  $\Rightarrow H \equiv G$

- Transitivität:
  G, H, I Formel mit $G \equiv H, H \equiv I$
  für jede zu G und H passende Interpretation
  f gilt $f(G) = f(H)$ und jede zu H und I passende Interpretation g mit $g(H) = g(I)$
  Sei h zu G und I passende Interpretation.
  Sei h' zu H passend mit $h' = h$ auf $((A \cap T(G)) \cup (A \cap T(I)))$ und beliebig sonst.
  Dann gilt: $\underbrace{h'(G)}_{=h(G)} = h'(H) = \underbrace{h'(I)}_{=h(I)}$
  $\Rightarrow G \equiv I$

Mit gleichen Wahrheitstabellen kommt man nicht immer weiter.
Oder Tabellen, wo ALLE verwendeten atomaren Formeln vorkommen.

b)

c)

ii) Beh. $((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$

$$f(((G \wedge H) \wedge I)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G \wedge H), f(I) \ W \\ F \ sonst \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} W \ falls \ f(G), f(H), f(I) \ W \\ F \ sonst \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \ sonst \\ W \ falls \ f(G), f(H \wedge I) \ W \end{cases}$$
$$= f((G \wedge (H \wedge I)))$$

Aufgabe 4

Ein Alphabet nur mit $\{\neg, \#, (,), A_1 \ldots\}$
Formel G, die nur ein Atom enthält

	$f(A)$	$f(G_1)$
f_2	F	W
f_1	W	W

$f(A)$	$f(G_1)$
F	F
W	F

$f_1(G_1) \neq f_2(G_1)$

I.A. $G = A$ atomar
$f_1(G_1) = f_1(A) \neq f_2(A) = f_2(G)$
IS:

1 Fall $G = \neg G_1$
$f_1(\neg G_1) \neq f_2(\neg G_1)$

2 Fall $G = \#(G_1, G_2, G_3)$
$f(G_1) = f_1(G_2) = f_1(G_3) = W$
$f_1(G) = W$
$f_2(G) = F$
da nach I.V. $f_1(G_i) \neq f_2(G_i)$

2.2 Genau 2 G_i sind wahr unter f_1
$\Rightarrow f_1(G) = W$
$\Rightarrow$ nach IV ist unter f_2 nur ein G_i wahr
$f_2(G) = F$

2.3 Genau ein G ist W unter f_1
$\Rightarrow f_1(G) = F$
nach I.V. sind unter f_2 genau 2 G_i W
$\Rightarrow f_2(G) = W$

2.4 Unter f_1 sind alle G_i f
$f_1(G) = F$ nach IV sind alle G_i W unter $f_2 \Rightarrow f_2(G) = W$