inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

23. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „G und H“
    $(G \vee H)$ „G oder H“
    $\neg G$ „nicht G“

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H"
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H"
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G".

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik

- $(G \to H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \to H) \wedge (H \to G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \to \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \to \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G, falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \to \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $$f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W\ falls\ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F\ sonst \end{cases}$$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W \; sonst \\ F \; falls \; f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W \; falls \; f(G_1) = F \\ F \; falls \; f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma.: 1.1 Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
$\rightarrow$ Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow \#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
seien $f_1, \dots, f_{2^n}$ die 2^n Interpretationen von A'
Dann heißt das Schema

A_1	$\dots$	A_n	G
$f_1(A_1)$	$\dots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\vdots$		$\vdots$	
$f_{2^n}(A_1)$	$\dots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

Def.: Sei F_n die Menge aller Formeln über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \quad H \in F_n \backslash K$

Bsp.: $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \ldots\}$

A_1	A_1
F	F
W	W

A_1	$\neg A_1$
F	W
W	F

A_1	$A_1 \vee A_1$
F	F
W	W

A_1	$A_1 \vee \neg A_1$
F	W
W	F

A_1	A
F	F
W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

Bem.: „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation auf F_n und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$“

Bem.:

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
  $(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

Def.:

- Eine Formel G heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation f
- Eine Formel G heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel G heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretation f

Bsp.: $$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee A_1\ gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \wedge \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel G entscheiden, da diese erfüllbar ist.

Bem.:

i) G gültig $\Rightarrow$ G ist er erfüllbar

ii) G ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) G, H gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) G, H nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

A_1	A_2	A_3	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel G mit dieser Wahrheitstabelle?

Lemma.: 1.2 Über eine Menge von n atomaren Formeln gibt es 2^{2^n} semantische Klassen.

Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

Bew.: $\rightarrow$ Zeige: Es gibt 2^{2^n} Wahrheitstabellen über n atomare Formeln. Die 2^n Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

A_1		A_n	
$f_1 F$		F	W_1
$\ldots$			$\ldots$
$f_n W$	$\ldots$	W	W_{2^n}

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}\,(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}\,(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei f Interpretation
$G(G_k) = W \Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \; fr \; m = 1, \ldots, m$
$\Leftrightarrow f(f_m) = W \; fr \; W \; mit \; f_{i,k}(A_m) = W$
$f(\neg A_m) = W \; fr \; W \; mit \; f_{i,k}(A_m) = F$
$\Leftrightarrow f = f_{i,k}$

$f(G) = W \Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W$

$\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}$
$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

Bsp.:

		A_1	A_2	
$\rightarrow$	f_1	F	F	W
$\rightarrow$	f_2	W	F	W
	f_3	F	W	F
	f_4	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten W sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = \neg A_1 \wedge \neg A_2$
$G_2 = A_1 \wedge \neg A_2$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$