Philipps Universität Marburg

inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

24. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „G und H“
    $(G \vee H)$ „G oder H“
    $\neg G$ „nicht G“

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H“
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H“
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G“.

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik

- $(G \rightarrow H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \rightarrow \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G, falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W\ sonst \\ F\ falls\ f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W\ falls\ f(G_1) = F \\ F\ falls\ f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \to H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma 1.1: Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
$\to$ Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow \#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
seien $f_1, \dots, f_{2^n}$ die 2^n Interpretationen von A'
Dann heißt das Schema

A_1	$\dots$	A_n	G
$f_1(A_1)$	$\dots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\vdots$		$\vdots$	
$f_{2^n}(A_1)$	$\dots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

Def.: Sei F_n die Menge aller Formeln über $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \quad H \in F_n \setminus K$

Bsp.: $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \dots\}$

A_1	A_1
F	F
W	W

A_1	$\neg A_1$
F	W
W	F

A_1	$A_1 \vee A_1$
F	F
W	W

A_1	$A_1 \vee \neg A_1$
F	W
W	F

A_1	A
F	F
W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

Bem.: „$\equiv$" ist Äquivalenzrelation auf F_n und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$"

Bem.:

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
  $(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

Def.:

- Eine Formel G heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation f
- Eine Formel G heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel G heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen f

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \lor \neg A_1 \; gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \land \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel G entscheiden, da diese erfüllbar ist.

Bem.:

i) G gültig $\Rightarrow$ G ist er erfüllbar

ii) G ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) G, H gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) G, H nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

A_1	A_2	A_3	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel G mit dieser Wahrheitstabelle?

Lemma 1.2: Über eine Menge von n atomaren Formeln gibt es 2^{2^n} semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

Bew.: $\rightarrow$ Zeige: Es gibt 2^{2^n} Wahrheitstabellen über n atomare Formeln. Die 2^n Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

A_1		A_n	
$f_1 F$	$\ldots$	F	W_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_n W$	$\ldots$	W	W_{2^n}

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei f Interpretation

$$
\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W\ fr\ m = 1, \ldots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W\ fr\ W\ mit\ f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W\ fr\ W\ mit\ f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

Bsp.:

		A_1	A_2	
$\rightarrow$	f_1	F	F	W
$\rightarrow$	f_2	W	F	W
	f_3	F	W	F
	f_4	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten W sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

Satz 1.3: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

Idempotenz $(G \wedge G) \equiv G$
$(G \vee H) \equiv (H \vee G)$

Assoziativität $((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$
$((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))$

Distributivität $(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I))$
$(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))$

Absorption	$(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$ $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$
Doppelnegation	$\neg\neg G \equiv G$
deMorgan Regel	$\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$ $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$

Bew.: Beispielhaft Absorption

G	H	$G \wedge (G \vee H)$	G
F	F	F	F
F	W	F	F
W	F	W	W
W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

Lemma 1.4: G, H, G', H' Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

$\Rightarrow$
$(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
$(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
$\neg G \equiv \neg G'$

Bew.:

G	H	G'	H'	$G \wedge H$	$G' \wedge H'$
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

Satz 1.5: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und G ist Teilformel von I.
Sei I' eine Formel, die aus I entsteht indem man ein Vorkommen von G durch H ersetzt
Dann $I \equiv I'$

Vorlesung vom 21.10.2013

Satz 1.5: $G \equiv H$
I mit G Teilformel
I' ersetze ein Vorkommen von G in I durch H
$\Rightarrow I \equiv I'$

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array}\right\} G \equiv H$$

$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$
$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$

Bew.: Induktion über die Länge $l = \#$ zeichen von I
I.A.: l = Länge von G
$\Rightarrow I = G$ und $I' = H$
$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge $\leq l$
I.S.: Sei I Formel der Länge $l+1$, die G als Teilformel enthält

<u>1. Fall</u>
$I = (I_1 \wedge I_2)$ mit Formeln I_1 und I_2 der Länge $\leq l$

i) $I' = (I_1' \wedge I_2)$
I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G in I, durch H
Sei Länge von $H_1 \leq l$ folgt nach I.V
$I_1 == I_1'$
Also

$$\left.\begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2),\, I' = (I_1' \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I_1' \\ I_2 = I_2 \end{array}\right\} I' \equiv I$$

ii) $I' = I_1 \wedge I_2'$
I_2' entsteht aus I_2 durch ersetzen der Teilformel G in I_2 durch H
weiter analog zu (i)

<u>2. Fall</u>
$I = (I_1 \vee I_2)$
analog zu 1. Fall

<u>3. Fall</u>
$I_1 = \neg I_1$ ist Formel I_1 der länge $\leq l$
$\rightarrow I' = \neg I_1'$ und I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G durch H

Nach I.V. $\qquad I_1 \equiv I_1'$
$\Rightarrow^{Lemma\ 1.4}$ (iii) $I = \neg I_1 \equiv \neg I_1' = I'$ $\square$
$\rightarrow$ Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau“
(„Strukturelle Induktion“)

Beh.: „Aussage über Formeln“

Bew.: Induktion über Formelaufbau
I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel
I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten
für $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $\neg G$
falls die Aussage für G und H gilt.

Def.: Sei Σ eine Menge von Formeln
Σ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W \;\forall\; G \in \Sigma$
so ein f heißt Modell Σ
Σ heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
für alle $G \in \Sigma$

Bsp.
$\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \ldots\}$
$= \{A_1 \wedge \ldots \wedge A \mid n = 1\}$

erfüllbar $f(A_i) = W$ für $i = 1$ ist einziges Modell
$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$ nicht erfüllbar

Bew.:

i) G erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\{G\}$ erfüllbar

ii) Σ erfüllbar $\Rightarrow$ G erfüllbar für alle $G \in \Sigma$

iii) G erfüllbar für alle $G \in \Sigma \not\Rightarrow \Sigma$ erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$ unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$ erfüllbar wenn $A_1 = W$ bzw. F

Lemma 1.6: Sei $\Sigma = \{G_1, G_n\}$ endlich, dann folgt
Σ erfüllbar $\leftrightarrow$ $(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n)$ erfüllbar

Bew.: Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1) = W$, $i = 1, \ldots, n$
$\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n) = W$
$\Leftrightarrow$ $(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n)$ erfüllbar $\square$

Def.: Eine Formelmenge Σ impliziert semantisch eine Formel H, falls für jedes Modell f von Σ gilt $f(H) = W$; d.h. f ist auch Modell von $\{H\}$. Wir schreiben $\Sigma \models H$. Ist $\Sigma = \{G\}$ so schreiben wir auch $G \models H$ für G impliziert semantisch H.

Bsp.: $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$
$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$
$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$
$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \vee A_2) = W$
aber $f(A_1 \wedge A_2) = F$
falls $G \models H$ und $f(G) = F$ muss nicht $f(H) = f$ gelten.
$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$
für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \wedge A_2) = F$
aber $f(A_1 \vee A_2) = W$

Bem.: G, H Formeln
$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H)$ und $(H \models G)$

Bew.: $G \equiv H$, für jede Interpretation f gilt $f(H) = f(G)$
$\Leftrightarrow$ für jede Interpretation f gilt
$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$
$\Leftrightarrow G \models H$ und $H \models G$ $\square$

Bsp.: Es gibt Formel G, H mit $G \not\models H, H \not\models G$
$G = A_1, H = \neg A_1$

Satz 1.7: Gaig'scher Interpolationssatz
Seien G und H Formel mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i) H ist gültig

ii) G ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel I mit $G \models I$, $I \models H$

und jede atomare Teilformel von I ist atomare Teilformel von G und H.

Bsp.: $G = (A_1 \wedge A_2)$, $H = (A_2 \vee A_3)$
$G \models I$ $\quad$ $I \models H$ $\quad$ für $I = A_2$
$(A_1 \wedge A_2) \models A_2$ $\quad$ $A_2 \models (A - 2 \vee A_3)$

Bew.: Es genügt zu Zeigen
$G \models H$ und H nicht gültig mit G erfüllbar $\Rightarrow$ (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H vorkommen.
I.A: $n = 0$ $\quad$ Können $I = G$ wählen

$$G \models I = G \qquad G = I \models H$$