inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, WS 2013/2014

gehalten von Prof. Volkmar Welker

28. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
beckers4@mathematik.uni-marburg.de

empfohlenes Buch zur Vorlesung:
„Schöning, Logik für Informatiker“

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Vorlesung vom 14.10.2013

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch
    $(G \wedge H)$ „G und H“
    $(G \vee H)$ „G oder H“
    $\neg G$ „nicht G“

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$, falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \vee A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$

$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \wedge A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))\}$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

- Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H"
- Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H"
- Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G".

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik

- $(G \rightarrow H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H; Implikation
- $(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
- $(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: Semantik der Aussagenlogik

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \rightarrow \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G, falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.
  $$f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$$

$$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W \; sonst \\ F \; falls \; f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

$$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W \; falls \; f(G_1) = F \\ F \; falls \; f(G_1) = W \end{cases}$$

für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma 1.1: Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
$\rightarrow$ Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow$ $\#$ Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \ldots, A_n\}$
seien $f_1, \ldots, f_{2^n}$ die 2^n Interpretationen von A'
Dann heißt das Schema

A_1	$\ldots$	A_n	G
$f_1(A_1)$	$\ldots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\vdots$		$\vdots$	
$f_{2^n}(A_1)$	$\ldots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \to \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$

Vorlesung vom 17.10.2013

Def.: Sei F_n die Menge aller Formeln über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Teilmenge $K \subseteq F_n$ heißt semantische Klasse, falls $G \equiv H$ für $G, H \in K$ und $G \not\equiv H$ für $G \in K \quad H \in F_n \backslash K$

Bsp.: $F_1 = \{A_1, \neg A_1, A_1 \vee A_1, A_1 \wedge A_1, \ldots\}$

A_1	A_1
F	F
W	W

A_1	$\neg A_1$
F	W
W	F

A_1	$A_1 \vee A_1$
F	F
W	W

A_1	$A_1 \vee \neg A_1$
F	W
W	F

A_1	A
F	F
W	F

$A_1 \equiv A_1 \vee A_1$

Das sind alle Wahrheitstabellen, die bei einer atomaren Formel möglich sind.

Die semantischen Klassen sind:
$K_1 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1\}$
$K_2 = \{G \in F_1 | G \equiv \neg A_1\}$
$K_3 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \vee \neg A_1\}$
$K_4 = \{G \in F_1 | G \equiv A_1 \wedge \neg A_1\}$

Bem.: „$\equiv$“ ist Äquivalenzrelation auf F_n und die semantischen Klassen sind die Äquivalenzklasse bzgl „$\equiv$“

Bem.:

- Die Elemente einer semantischen Klasse sind alle Formeln mit der gleichen Wahrheitstabellen
- Jede semantische Klasse enthält unendlich viele Formeln
  $(G \equiv \neg\neg G \equiv \neg\neg\neg\neg G \equiv \dots)$

Def.:

- Eine Formel G heißt gültig oder Tautologie, falls $f(G) = W$ für jede Interpretation f
- Eine Formel G heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
- Eine Formel G heißt nicht erfüllbar, unerfüllbar oder Antilogie, falls $f(G) = F$ für alle Interpretationen f

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee \neg A_1 \; gültig \\ A_1 \\ \neg A_1 \end{array}\right\} erfüllbar$$

$A_1 \wedge \neg A_1$ unerfüllbar

Ein zentrales Ziel der Vorlesung wird es sein, Algorithmen zu entwickeln, die zur Gegebenen Formel G entscheiden, da diese erfüllbar ist.

Bem.:

i) G gültig $\Rightarrow$ G ist er erfüllbar

ii) G ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg G$ gültig

iii) G, H gültig $\Rightarrow G \equiv H$

iv) G, H nicht erfüllbar $\Rightarrow G \equiv H$

Wir untersuchen nun die Ausdruckskraft der Aussagenlogik:
Gegeben eine Wahrheitstabelle
z. B.

A_1	A_2	A_3	?
F	F	F	W
F	F	W	F
F	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	F
W	W	F	W
W	W	W	F

Gibt es Formel G mit dieser Wahrheitstabelle?

Lemma 1.2: Über eine Menge von n atomaren Formeln gibt es 2^{2^n} semantische Klassen. Insbesondere gibt es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel mit dieser Wahrheitstabelle.

Bew.: $\rightarrow$ Zeige: Es gibt 2^{2^n} Wahrheitstabellen über n atomare Formeln. Die 2^n Interpretationen (Lemma 1.1) legen die Wahrheitstabelle bis auf die letzte Spalte fest.
Für jede Zeile gibt es zwei Möglichkeiten für den Eintrag in die letzte Spalte

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$ Möglichkeiten

$\rightarrow$ Zeige: Zu jeder Wahrheitstabelle gibt es Formel mit dieser Wahrheitstabelle

Konstruktion

A_1		A_n	
$f_1 F$	$\ldots$	F	W_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$f_n W$	$\ldots$	W	W_{2^n}

$W_1, \ldots, W_{2^n} \in \{W, F\}$

Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Indizes mit $W_{i_j} = W$ für $1 \leq j \leq l$

$G_k = \bigwedge_{m=1}^{n} H_{k,m}$, $H_{k,m} = \begin{cases} A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = W \\ \neg A_m \; falls \; f_{i_k}(A_m) = F \end{cases}$

Setz $G = \bigvee_{k=1}^{l} G_k$

Sei f Interpretation

$$
\begin{aligned}
G(G_k) = W &\Leftrightarrow f(H_{2,m}) = W \; für \; m = 1, \ldots, m \\
&\Leftrightarrow f(f_m) = W \; für \; W \; mit \; f_{i,k}(A_m) = W \\
&= f(\neg A_m) = W \; für \; W \; mit \; f_{i,k}(A_m) = F \\
&\Leftrightarrow f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(G) = W &\Leftrightarrow \exists k : f(G_k) = W \\
&\Leftrightarrow \exists k : f = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow G$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

Bsp.:

		A_1	A_2	
$\rightarrow$	f_1	F	F	W
$\rightarrow$	f_2	W	F	W
	f_3	F	W	F
	f_4	W	W	F

(suche Zeilen, die hinten W sind)

$i_1 = 1, i_2 = 2, l = 2$
$G_1 = (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
$G_2 = (A_1 \wedge \neg A_2)$
$G = G_1 \vee G_2 = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A))$

Regeln zur semantischen Äquivalenz.

Satz 1.3: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik
Dann gilt

Idempotenz	$(G \wedge G) \equiv G$
	$(G \vee H) \equiv (H \vee G)$
Assoziativität	$((G \wedge H) \wedge I) \equiv (G \wedge (H \wedge I))$
	$((G \vee H) \vee I) \equiv (G \vee (H \vee I))$
Distributivität	$(G \wedge (H \vee I)) \equiv ((G \wedge H) \vee (G \wedge I))$
	$(G \vee (H \wedge I)) \equiv ((G \vee H) \wedge (G \vee I))$

Absorption	$(G \wedge (G \vee H)) \equiv G$ $(G \vee (G \wedge H)) \equiv G$
Doppelnegation	$\neg\neg G \equiv G$
deMorgan Regel	$\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H$ $\neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H$

Bew.: Beispielhaft Absorption

G	H	$G \wedge (G \vee H)$	G
F	F	F	F
F	W	F	F
W	F	W	W
W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge (G \vee H)) \equiv G$

Lemma 1.4: G, H, G', H' Formeln der Aussagenlogik
und $G \equiv G'$ und $H \equiv H'$

$\Rightarrow$
$(G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$
$(G \vee H) \equiv (G' \vee H')$
$\neg G \equiv \neg G'$

Bew.:

G	H	G'	H'	$G \wedge H$	$G' \wedge H'$
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W

$\Rightarrow (G \wedge H) \equiv (G' \wedge H')$

andere analog

Satz 1.5: Seien G, H, I Formeln der Aussagenlogik und $G \equiv H$ und G ist Teilformel von I.
Sei I' eine Formel, die aus I entsteht indem man ein Vorkommen von G durch H ersetzt
Dann $I \equiv I'$

Vorlesung vom 21.10.2013

Satz 1.5: $G \equiv H$
I mit G Teilformel
I' ersetze ein Vorkommen von G in I durch H
$\Rightarrow I \equiv I'$

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{l} G = \neg(\neg A_1 \vee A_3) \\ H = (A_1 \wedge \neg A_3) \end{array}\right\} G \equiv H$$

$I = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee \neg(\neg A_1 \vee A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_3))$
$I' = (((\neg A_2 \vee A_4) \wedge (A_6 \vee (A_1 \wedge \neg A_3))) \wedge \neg(\neg A_1 \vee A_2))$

Bew.: Induktion über die Länge $l = \#$ zeichen von I
I.A.: l = Länge von G
$\Rightarrow I = G$ und $I' = H$
$\Rightarrow I = G \equiv H = I'$

I.V.: Die Aussage gilt für alle Formeln der Länge $\leq l$
I.S.: Sei I Formel der Länge $l+1$, die G als Teilformel enthält

1. Fall
$I = (I_1 \wedge I_2)$ mit Formeln I_1 und I_2 der Länge $\leq l$

i) $I' = (I_1' \wedge I_2)$
I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G in I, durch H
Sei Länge von $H_1 \leq l$ folgt nach I.V
$I_1 == I_1'$
Also

$$\left.\begin{array}{l} I = (I_1 \wedge I_2), I' = (I_1' \wedge I_2) \\ I_1 \equiv I_1' \\ I_2 = I_2 \end{array}\right\} I' \equiv I$$

ii) $I' = I_1 \wedge I_2'$
I_2' entsteht aus I_2 durch ersetzen der Teilformel G in I_2 durch H
weiter analog zu (i)

2. Fall
$I = (I_1 \vee I_2)$
analog zu 1. Fall

3. Fall
$I_1 = \neg I_1$ ist Formel I_1 der länge $\leq l$
$\rightarrow I' = \neg I_1'$ und I_1' entsteht aus I_1 durch ersetzen der Teilformel G durch H

Nach I.V. $\quad I_1 \equiv I_1'$
$\Rightarrow^{Lemma\ 1.4}$ (iii) $I = \neg I_1 \equiv \neg I_1' = I'$ $\square$
$\rightarrow$ Der Beweis von Satz 1.5 ist ein erstes Beispiel des Beweisprinzips „Induktion über Formelaufbau“
(„Strukturelle Induktion“)

Beh.: „Aussage über Formeln“

Bew.: Induktion über Formelaufbau
I.A.: Aussage für Kürzest mögliche Formel
I.S.: Die Aussage gilt für die 3 Möglichkeiten
für $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $\neg G$
falls die Aussage für G und H gilt.

Def.: Sei Σ eine Menge von Formeln
Σ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W \; \forall \; G \in \Sigma$
so ein f heißt Modell Σ
Σ heißt unerfüllbar oder nicht erfüllbar, falls es eine Interpretation f gibt mit $f(G) = W$
für alle $G \in \Sigma$

Bsp.: $\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \dots\}$
$= \{A_1 \wedge \dots \wedge A \mid n = 1\}$

erfüllbar $f(A_i) = W$ für $i = 1$ ist einziges Modell
$\Sigma = \{A_1 \wedge A_2, \neg(\neg A_1 \vee A_2)\}$ nicht erfüllbar

Bew.:

i) G erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\{G\}$ erfüllbar

ii) Σ erfüllbar $\Rightarrow$ G erfüllbar für alle $G \in \Sigma$

iii) G erfüllbar für alle $G \in \Sigma \not\Rightarrow \Sigma$ erfüllbar

$\Sigma = \{A_1, \neg A_1\}$ unerfüllbar

$A_1, \neg A_1$ erfüllbar wenn $A_1 = W$ bzw. F

Lemma 1.6: Sei $\Sigma = \{G_1, G_n\}$ endlich, dann folgt
Σ erfüllbar $\leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar

Bew.: Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1) = W$, $i = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretation f mit $f(G_1 \wedge \dots \wedge G_n) = W$
$\Leftrightarrow (G_1 \wedge \dots \wedge G_n)$ erfüllbar $\square$

Def.: Eine Formelmenge Σ impliziert semantisch eine Formel H, falls für jedes Modell f von Σ gilt $f(H) = W$; d.h. f ist auch Modell von $\{H\}$. Wir schreiben $\Sigma \models H$. Ist $\Sigma = \{G\}$ so schreiben wir auch $G \models H$ für G impliziert semantisch H.

Bsp.: $A_1 \wedge A_2 \models A_1 \vee A_2$
$f(A_1 \wedge A_2) = W \Rightarrow f(A_1) = f(A_2) = W$
$\Rightarrow f(A_1 \vee A_2) = W$
$A_1 \vee A_2 \not\models A_1 \wedge A_2$

für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \vee A_2) = W$
aber $f(A_1 \wedge A_2) = F$
falls $G \models H$ und $f(G) = F$ muss nicht $f(H) = f$ gelten.
$(A_1 \wedge A_2) \models (A_1 \vee A_2)$
für $f(A_1) = W,\ f(A_2) = F$ gilt $f(A_1 \wedge A_2) = F$
aber $f(A_1 \vee A_2) = W$

Bem.: G, H Formeln
$G \equiv H \Leftrightarrow (G \models H)$ und $(H \models G)$

Bew.: $G \equiv H$, für jede Interpretation f gilt $f(H) = f(G)$
$\Leftrightarrow$ für jede Interpretation f gilt
$f(G) = W \Leftrightarrow f(H) = W$
$\Leftrightarrow G \models H$ und $H \models G$ $\square$

Bsp.: Es gibt Formel G, H mit $G \not\models H, H \not\models G$
$G = A_1$, $H = \neg A_1$

Satz 1.7: Gaig'scher Interpolationssatz
Seien G und H Formel mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgenden 3 Aussagen:

i) H ist gültig

ii) G ist unerfüllbar

iii) Es gibt eine Formel I mit $G \models I$, $I \models H$

und jede atomare Teilformel von I ist atomare Teilformel von G und H.

Bsp.: $G = (A_1 \wedge A_2)$, $H = (A_2 \vee A_3)$
$G \models I$ $\quad$ $I \models H$ $\quad$ für $I = A_2$
$(A_1 \wedge A_2) \models A_2$ $\quad$ $A_2 \models (A - 2 \vee A_3)$

Bew.: Es genügt zu Zeigen
$G \models H$ und H nicht gültig mit G erfüllbar $\Rightarrow$ (iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H vorkommen.
I.A: $n = 0$ $\quad$ Können $I = G$ wählen

$G \models I = G \qquad G = I \models H$

Vorlesung vom 24.10.2013

Satz 1.7: (Graig'scher Interpolationssatz)
Seien G, H Formeln mit $G \models H$
Dann gilt mindestens eine der folgeden Aussagen:

i) H gültig

ii) G unerfüllbar

iii) Es gibt eie Formel I mit den Eigenschaften $G \models I$, $I \models H$
und jede atomare Teilformel von I ist Teilformel von G und H.

Bew.: Es genügt zu zeigen:

- H nicht gültig
- G erfüllbar
- $G \models H$

$\Rightarrow$ iii)

Induktion über die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H enthalten sind.

I.A.: Sei $n = 0$. Dann ist jede atomare Teilformel von G in H enthalten.
Wähle $I = G$, dann enthält I nur atomare Teilformeln, die in G und H enthalten sind und $G \models I$ und $I \models H$.

I.V.:

- $G \models H$
- H nicht gültig
- G erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Teilformeln von G, die nicht in H enthalten sind, ist n.

$\Rightarrow$ iii)

I.S.: $(n \to n+1)$

- $G \models H$
- H nicht gültig
- G erfüllbar
- Die Anzahl der atomaren Formeln von G, die nicht in H enthalten sind, ist $n+1$

Sei A_i eine atomare Formel, die in G aber nicht in H enthalten ist.
Sei G_W/G_F die Formel, die aus G entsteht, wenn jedes Vorkommen von A_i ersetzt wird durch eine gültige/ungültige Formel, die nur atomare Formeln von G und H verwendet.

Setze $G' := (G_W \vee G_F)$

1) Es gibt eine atomare Formel, die in G und in H enthalten ist.
   (d.h. G' ist wohldefiniert)
   Beweis: Angenommen G und H besitzen keine gemeinsame atomare Formel.
   Da G erfüllbar ist, gibt es eine Interpretation f_G der atomaren Teilformeln von G mit $f_G(G) = W$
   Da H nicht gültig ist, gibt es eine Interpretation f_H der atomaren Teilformeln von H mit $f_H(H) = F$
   Da die Menge der atomaren Teilformeln von G disjunkt zur Menge der atomaren Teilformeln von H ist, gibt es eine gemeinsame Erweiterung f von f_G und f_H
   Damit ist f eine Interpretation der atomaren Teilformeln von G und H mit:
   - $f(G) = f_G(G) = W$
   - $f(H) = f_H(H) = F$
     Widerspruch zu $G \models H$

   $\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ Beh.

2) Beh: $G' \models H$
   Beweis: Es genügt zu zeigen:
   a) $G_W \models H$
   b) $G_F \models H$

   zu a)
   Sei f eine Interpretation der atomaren Teilformeln G_W und H mit $f(G_W) = W$.
   Erweitere f zu einer Interpretation f' der atomaren Formeln von G und H durch
   $f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ W,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$
   $\Rightarrow f'(G) = f(G_W) = W$
   $\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$
   $\Rightarrow G_W \models H$

   zu b)
   Sei f eine Interpretation von G_F und H mit $f(G_F) = W$.

Erweitere f zu einer Interpretation f' von G und H durch
$f'(A_j) = \begin{cases} f(A_j),\ falls\ A_j \neq A_i \\ F,\ falls\ A_j = A_i \end{cases}$
$\Rightarrow^{(G \models H)} f(H) = f'(H) = W$
$\Rightarrow G_F \models H$

3) Beh: Die Anzahl der atomaren Formeln in G', die nicht in H enthalten sind ist n.
Beweis: klar

4) Beh: G' ist erfüllbar.
Beweis:
Sei f eine Interpretation der atomaren Formeln in G mit $f(G) = W$.
(G erfüllbar)
Entweder $f(A_i) = W$, d.h. $f(G_W) = W$
oder $f(A_i) = F$, d.h. $f(G_F) = W$
Somit ist $f(G') = f(G_W \vee G_F) = W$

5) Beh: Es gibt ein I, wie in der Beh. des Satzes.
Beweis: Nach I.V. gibt es eine Formel I, welche nur die atomare Formeln von G' und H verwendet mit $G' \models I$ und $I \models H$.

- I verwendet nur die atomaren Formeln von G und H
- $I \models H$
- zz: $G \models I$
  Sei f eine Interpretation der atomaren Aussagen von G und H mit $f(G) = W$
  Dann gilt entweder
  $f(A_i) = W$ und $f(G_W) = W$
  oder
  $f(A_i) = F$ und $f(G_F) = W$
  Somit folgt $f(G_W \vee G_F) = W$
  $\Rightarrow^{(G' \models H)} f(I) = W$
  $\Rightarrow G \models H$ □

2 Normalformen

Bsp.: $\rightarrow (A_1 \vee \neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge \neg\neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge A_2)$

Def.: Ein Literal ist eine atomare Formel oder deren Negation.

Sprechweisen:
$A_i \rightarrow$ atomare Formel $\rightarrow$ positives Literal

$\neg A_i \rightarrow$ Negation einer atomaren Formel $\rightarrow$ negatives Literal

Def.: Sei $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von atomaren Formeln

Ein Minterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Konkunktion
$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases} , 1 \leq i \leq n$
Ein Maxterm über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist eine Disjunktion
$L_1 \vee \ldots \vee L_n$ von Literalen $L_i = \begin{cases} A_i \\ \neg A_i \end{cases} , 1 \leq i \leq n$

Bsp.:
Sei $\{A_1\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: A_1, $\neg A_1$
Maxterme: A_1, $\neg A_1$

Sei $\{A_1, A_2\}$ Menge von atomaren Formeln
Minterme: $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \wedge \neg A_2)$, $(\neg A_1 \wedge A_2)$, $\neg(A_1 \wedge \neg A_2)$
Maxterme: analog $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$, $(\vee)$

Lemma 2.1: Über $\{A_1, \ldots, A_2\}$ gibt es
genau 2^n Minterme und
genau 2^n Maxterme.

Bew.: Für jedes Literal L_i gibt es (siehe Def.) 2 Möglichkeiten.
Also insgesamt $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-mal} = 2^n$ Möglichkeiten

Bem.: Da $2^n < 2^{2^n}$ für $n \geq 1$ gibt es nicht in jeder semantischen Klasse einen Minterm bzw. Maxterm

Literale $A_i, \neg A_i$
Minterme $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$
Maxterme $L_1 \vee \ldots \vee L_n, L_i = A_i$ oder $\neg A_i$

2^n Minterme, 2^n Maxterme über $A_1, \ldots, A_n$
$2^n < 2^{2^n} = \#semantische\ Klassen$

Trotzdem wollen wir die semantischen Klassen charakterisieren, in denen MInterme Maxterme liegen.

Lemma 2.2:

Sei $L_1, \ldots, L_n$ Literale mit $L_i = A_i$ oder $L_i = \neg A_i$
für $1 \leq i \leq n$ und $f : \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{W, F\}$ eine Interpretation.
Dann gilt

$$f(L_1 \wedge \ldots \wedge L_n) = W \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} W\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ F\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$$f(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \leftrightarrow f(A_i) = \begin{cases} F\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ W\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

Bew.: Nachrechnung

Lemma 2.3:

(i) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Minterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht W in der letzten Spalte

(ii) Zu einer Wahrheitstabelle gibt es einen Maxterm mit dieser Wahrheitstabelle
$\Leftrightarrow$ Nur für eine einzige Interpretation steht F in der letzten Spalte

Bew.:

„$\Rightarrow$“ Folgt für (i) und (ii) aus Lemma 2.2
„$\Leftarrow$“

(i) Setzten $L_i = \begin{cases} A_i\ f\ddot{u}r\ f(A_i) = W \\ \neg A_i\ f\ddot{u}r\ f(A_i) = F \end{cases}$
für die Interpretation f, für die W in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretation g nach Lemma 2.2

$$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = W \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} W\ f\ddot{u}r\ L_i = A_i \\ F\ f\ddot{u}r\ L_i = \neg A_i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f = g$
$\Rightarrow$ Der Minterm $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ hat die gegebene Wahrheitstabelle

(ii) Setzen $L_1 = \begin{cases} A_i \; f\ddot{u}r \; f(A_i) = F \\ \neg A_i \; f\ddot{u}r \; f(A_i) = W \end{cases}$
für die Interpretation f, für die F in der letzten Spalte steht.
Dann gilt für beliebige Interpretationen g nach Lemma 2.2
$g(L_1 \vee \ldots \vee L_n) = F \Leftrightarrow g(A_i) = \begin{cases} F \; f\ddot{u}r \; L_i = A_i \\ W \; f\ddot{u}r \; L_i = \neg A_i \end{cases}$
$\Leftrightarrow g = f$
$\Rightarrow$ Der Maxterm $L_1 \vee \ldots \vee$ hat die gegebene Wahrheitstabelle $\square$

Bsp.:

A_1	A_2	
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

Maxterm $A_1 \vee A_2$
Minterm existiert nicht

Def.:
Eine Formel G über $\{A_1, \ldots, A_n\}$ heißt

(i) in disjunktiver Normalform (DNF)
falls G eine Disjunktion von Mintermen ist
$G = \bigvee_{i=1}^{k} (L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

(ii) in konjunktiver Normalform (KNF)
falls G eine Konjunktion von Maxtermen ist
$G = \bigwedge_{i=1}^{k} (L_{in} \vee \ldots \vee L_{in})$
$L_{ij} = \begin{cases} A_j \\ \neg A_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$

Bem.:

$\rightarrow$ Dieser Begriff von KNF, DNF stimmt nicht genau mit dem Begriff aus dem Buch von Schöning überein. Dessen Definition wid bei uns als VDNF, VKNF auftauchen.

$\rightarrow$ Für DNF $\bigvee_{i=1}^{k} (\bigwedge_{j=1}^{n} L_{ij})$ und
KNF $\bigwedge_{i=1}^{k} (\bigvee_{j=1}^{n} L_{ij})$
erlauben wir $k = 0 \leftarrow$ leere DNF, leere KNF

Dies sind „keine“ Formeln im strengen Sinn
Werden sie aber für Satz 2.4 brauchen
Wir setzen
die DNF für $k = 0$ als unerfüllbar
die KNF für $k = 0$ als gültig

Satz 2.4: Sei G eine Formel über $\{A_1, \ldots, A_n\}$
Dann gibt es Formeln G_D und G_K mit

- $G \equiv G_D \equiv G_K$
- G_D is in DNF
  G_K ist in KNF

Bew.: Konstruktion von G_D

(i) Seien $f_1, \ldots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = W \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Minterm $L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}$
so dass $f(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}) = W \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_D = \bigvee_{i=1}^{k}(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in})$ in DNF nach Konstruktion
Sei f Interpretation
$f(G_D) = W \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{in}) = W$
$\leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ gilt mit $f(A_j) = \begin{cases} W \; für \; L_{ij} = A_j \\ F \; für \; L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$
$\Leftrightarrow f(G) = W$
$\Rightarrow G \equiv G_D$

Konstruktion von G_K:

(i) Seien $f_1, \ldots, f_k$ die Interpretationen mit $f_i(G) = F \qquad 1 \leq i \leq k$

(ii) Für $1 \leq i \leq k$ konstruiere Maxterm $L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in}$
so dass $f(L_{in} \vee \ldots \vee L_{in}) = F \Leftrightarrow f = f_i$
(Benutze Lemma 2.3)

(iii) Setze
$G_K = \bigwedge_{i=1}^{k}(L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in})$ in KNF nach Konstruktion
Sei f eine Interpretation:
$f(G_K) = F \Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(L_{i1} \vee \ldots \vee L_{in}) = F$

$\Leftrightarrow^{2.3}$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f(A_j) = \begin{cases} F \; für \; L_{ij} = A_j \\ W \; für \; L_{ij} = \neg A_j \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $f = f_i$

$\Leftrightarrow f(G) = F$

$\Rightarrow G \equiv G_K \; \square$

Bsp.: $G = A_1 \vee A_2$

	A_1	A_2	
	F	F	F
$f_1 =$	F	W	W
$f_2 =$	W	F	W
$f_3 =$	W	W	W

$f_1 \leftrightarrow \neg A_1 \wedge A_2$

$f_2 \leftrightarrow A_1 \wedge \neg A_2$

$f_3 \leftrightarrow A_1 \wedge A_2$

$G_D = (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$

Für KNF

	A_1	A_2	
$f_1 =$	F	F	F
	W	F	W
	F	W	W
	W	W	W

Folgerung 2.5: Bis auf die Reihenfolge der Minterme und Maxterme und das Setzen der Klammern in einer vollständigen Klammerung gibt es in jeder semantischen Klasse eindeutig bestimmte Formeln in DNF und in KNF

Erfüllbarkeitsproblem:
EIngabe Formel G:
Ausgabe: G erfüllbar oder G unerfüllbar
$\rightarrow$ Bruteforce: Feste alle 2^n Interpretationen in der n atomaren Formeln aus G
$\rightsquigarrow$ In worst case 2^n Schritte = Laufzeit.

Sei G in DNF
Ist G nicht die leere DNF, so ist G erfüllbar.
$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in konstanter Zeit entscheidbar

Sei G in KNF
Hat $G \leq 2^n - 1$ Maxterme, so ist G erfüllbar.
$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit in linearer Zeit entscheidbar.