Inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, Prof. Volkmar Welker, WS 2013/2014

Stand:

18. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
nano13@gmx.net

Die Vorlesung ist laut Herrn Welker an das Buch „Schöning, Logik für Informatiker“ angelehnt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswerte der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch $(G \wedge H)$ „G und H“ $(G \vee H)$ „G oder H“ $\neg G$ „nicht G“

Bem.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\}$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \cup T(G_2) \cup \{G\}$
falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_{17} \wedge A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \wedge A_4)) \cup \{\neg(A_3 \wedge A_4)\} \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4), \neg(A_3 \vee A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \vee A_4))\}$

Bem.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H“
Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H“
Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G“.

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik
$(G \rightarrow H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H; Implikation
$(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
$(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3)\ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln
$(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \wedge G_2) \wedge G_3)\ldots \wedge G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: (Semantik der Aussagenlogik)

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \rightarrow \{W, F\}$ heißt passend zu Formel G, falls G Formel über A' ist.
- Sei $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ eine zur Formel G passende Interpretation. Dann definieren wir $f(G)$ induktiv.

  $$f(G) = f((G_1 \wedge G_2)) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = W \\ F \ sonst \end{cases}$$

  $$f(G) = f((G_1 \vee G_2)) = \begin{cases} W \ sonst \\ F \ falls \ f(G_1) = f(G_2) = F \end{cases}$$

  $$f(G) = f(\neg G_1) = \begin{cases} W \ falls \ f(G_1) = F \\ F \ falls \ f(G_1) = W \end{cases}$$

  für $G = \neg G_1$

Bsp.: Semantik der abkürzenden Schreibweisen

G	H	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
F	F	W	W
F	W	W	F
W	F	F	F
W	W	W	W

Lemma.: 1.1 Sei A' eine Menge von n atomaren Formeln. Dann gibt es 2^n Interpretationen von A'

Bew.: Für jede atomare Formel mit A' gibt es 2 Möglichkeiten für das Bild unter f
$\rightarrow$ Die atomaren Formeln A' können unabhängig voneinander interpretiert werden
$\Rightarrow$ # Interpretationen $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{n} = 2^n$ $\square$

Def.: Sei G eine Formel über $A' = \{A_1, \dots, A_n\}$
seien $f_1, \dots, f_{2^n}$ die 2^n Interpretationen von A'
Dann heißt das Schema

A_1	$\dots$	A_n	G
$f_1(A_1)$	$\dots$	$f_1(A_n)$	$f_1(G)$
$\dots$			
$f_{2^n}(A_1)$	$\dots$	$f_{2^n}(A_n)$	$f_{2^n}(G)$

Wahrheitstabelle von G

Bsp.: $(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \vee (A_2 \wedge \neg A_3))$
F	F	F	F
F	F	W	F
F	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
W	F	W	W
W	W	F	W
W	W	W	W

Def.: Sei $F_{A'}$ die Menge aller Formeln über A'
Für $G, H \in F_{A'}$ sagen wir G ist semantisch äquivalent zu H, falls $f(G) = f(H)$ für alle Interpretationen $f : A' \rightarrow \{W, F\}$
Wir schreiben $G \equiv H$