Inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung „Logik“, Prof. Volkmar Welker, WS 2013/2014

Stand:

17. Oktober 2013

Die offizielle Vorlesungsseite:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼welker/logik_ws2013.html

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte melden an:
nano13@gmx.net

Die Vorlesung ist laut Herrn Welker an das Buch „Schöning, Logik für Informatiker“ angelehnt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Logische Systeme haben immer zwei Teile:

- Syntax (Formeln)
- Semantik (Wahrheitswert der Formeln)

Def.: (Syntax der Aussagenlogik)

- Menge $A = \{A_1, A_2, ...\}$ von atomaren Formeln
- Wir definieren induktiv die Menge der Formeln der Aussagenlogik
  - jede atomare Formel ist Formel
  - sind G und H Formel, so auch $(G \wedge H)$ „G und H“ $(G \vee H)$ „G oder H“ $\neg G$ „nicht G“

Bew.: Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist Sprache (= Menge von Wörtern) über Alphabet $A \cup \{\wedge, \vee, \neg, (,)\})$

Bsp.:

- $((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \wedge A_4))$
  Formel der Aussagenlogik
- reine syntaktische Objekte
  $\neg\neg A \neq A$

Bew.: Sei G eine Formel der Aussagenlogik
$T(G)$ die Menge der Teilformeln von G induktiv definiert als
$T(G) = \{G\}$ falls G atomare Formel
$T(G) = T(G_1) \vee T(G_2) \cup \{G\}$
falls $G = (G_1 \vee G_2)$ oder $G = (G_1 \wedge G_2)$
$T(G) = T(G_1) \cup \{G\}$

Bsp.: $G = ((A_A \wedge A_2) \vee \neg(A_3 \wedge A_4))$
$T(G) = T\left((A_{17} \vee A_2)\right) \cup T\left(\neg(A_3 \wedge A_4)\right) \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2)\} \cup T((A_3 \vee A_4)) \cup \{\neg(A_3 \vee A_4)\} \cup \{G\}$
$= \{A_{17}, A_2, (A_{17} \vee A_2), A_3, A_4, (A_3 \wedge A_4)\neg(A_3 \vee A_4), ((A_{17} \vee A_2) \wedge \neg(A_3 \vee A_4))\}$

Bew.: $T(G)$ ist die Menge der Formeln, die bei der induktiven Konstruktion von G auftauchen.

Sprechweisen:

Für $(G \wedge H)$ sagt man auch „Konjunktion von G und H“
Für $(G \vee H)$ sagt man auch „Disjunktion von G und H“
Für $\neg G$ sagt man auch „Negation von G“.

Abkürzende Schreibweisen:

G, H Formeln der Aussagenlogik
$(G \rightarrow H)$ aus G folgt H, für $(\neg G \wedge H)$; G impliziert H; Implikation
$(G \leftrightarrow H)$ G äquivalent zu H, für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$; Äquivalenz
$(\bigvee_{i=1}^{n} G_i)$ für $(\ldots(G_1 \vee G_2) \vee G_3) \ldots \vee G_n)$ mit $G_1, \ldots, G_n$ Formeln

Def.: (Semantik der Aussagenlogik)

- Sei $\emptyset \neq A' \subseteq A$ eine Teilmenge der atomaren Formeln
- Eine Abbildung $f : A' \rightarrow \{W, F\}$ (wahr, falsch)
  heißt Interpretation von A'
- Eine Formel G heißt Formel über A' falls $T(G) \cap A \subseteq A'$
- eine Interpretation $f : A \sim \{W, F\}$ heißt passende Interpretation.