Теоријске основе информатике

I година

Стаменковић Јефимија

-вежбе + предавања-

Скупови

-предавање-
01.10.2019.

$\mathbb{N}$ - скуп природних бројева

$\mathbb{Z}$ - скуп целих бројева

$\mathbb{Q}$ - скуп рационалних бројева

$\mathbb{R}$ - скуп реалних бројева (рационални + ирационални)

$\mathbb{C}$ - скуп комплексних бројева

- $\in$ - припадање
  $y \in x$
  $z \notin x$

- Раселов парадокс:

-Нека је S начињен од елемената x за које важи $x \notin x$.

*Да ли $S \in S$?

1) Ако јесте $S \in S$, за S мора да важи $S \notin S$.

2) Ако није $S \in S$, то јест $S \notin S$, па задовољава својство $S \notin S$ што јест $S \in S$.

Закључак: S са овим својством није скуп.

Аксиоме теорије скупова

(A1) АКСИОМА ЕКСТЕНЗИОНАЛНОСТИ:
-Два скупа су једнака ако имају исте елементе.

(A2) АКСИОМА ПРАЗНОГ СКУПА
-Постоји скуп који нема ниједан елемент. Означавамо га са $\emptyset$.

(A3) АКСИОМА ПАРА:
-За све скупове x и y постоји скуп $z \in \{x, y\}$ (чији су једини елементи својства x и y.

(A4) АКСИОМА УНИЈЕ:
-За сваки скуп x постоји скуп z тако да $u \in z$ ако и само ако $u \in y$ за неки $y \in x$.
Скуп z представља унију чланова скупа x и означавамо га са $\cup x$.

(A5) АКСИОМА ПАРТИТИВНОГ СКУПА
-За сваки скуп x постоји скуп $z = P(x)$ који се састоји од свих подскупа скупа x.

(A6) АКСИОМА ИЗДВАЈАЊА ПОДСКУПА
- За сваку формулу $\varphi(x)$ и сваки скуп a $\{x\in a \mid \varphi(x)\}$ је скуп

(A7) АКСИОМА ЗАМЕНЕ:
- Нека је $\varphi(x,y)$ формула за коју важи да за свако x постоји највише једно y тако да је $\varphi(x,y)$ испуњено. Тада је за сваки скуп a и $\{y \mid \varphi(x,y)$ за неко $x\in a\}$ такође скуп.

(A8) АКСИОМА РЕГУЛАРНОСТИ:
- Сваки непразан скуп A садржи елемент a такав да је $A\cap a=\emptyset$

(A9) АКСИОМА БЕСКОНАЧНОСТИ:
- Постоји скуп A који садржи празан скуп и са сваким својим елементом x садржи и $x\cup\{x\}$

(A10) АКСИОМА ИЗБОРА:
- Ако је дат скуп x чији су сви елементи непразни скупови онда постоји ф-ја $f: x\to \cup x$ такви да $f(z)\in z$ за све $z\in x$. Функција f се назива функција избора.

(A1)–(A9): Зермело–Френкелова теорија скупова (ZF)

(A1)–(A10): Зермело–Френкелова теорија скупова са аксиомом избора (ZFC)

* Скупове можемо задавати навођењем њихових елемената или својстава који њихови елементи испуњавају.

Пр.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ A=\{2,3\}\\ (2)\ B=\{x\in R \mid x^2-5x+6=0\}\end{array}\right\} \Rightarrow A=B$$

ДЕФ Кажемо да је скуп A подскуп скупа B ако је сваки елемент скупа A уједно и елемент скупа B.
Пишемо $A\subseteq B$

Ако је $A\subseteq B$ и $A\neq B$, онда је $A\subset B$.

Пр. (1) $\emptyset$ је подскуп сваког скупа
(2) $\{x\in R \mid x\geq 5\}\subseteq\{x\in R \mid x>-10\}$
(3) $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$

Скупови

вежбе 02.10.2019

$X, Y, Z, \ldots$ – ознака скупа
x, y, z – ознака за елемент скупа

* Основна релација код скупова је припадање.

$x\in X$ – елемент x припада скупу X
$x\notin X$ – елемент x не припада скупу X

* За све скупове X и Y постоји скуп Z чији су једини елементи X и Y.

Деф Нека су x и y произвољни скупови, одговарајући уређени пар дефинишемо са:

$$(x,y) \overset{\text{деф}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$$

$\{x\}$ – синглтон
$\{x,y\}$ – двотачка

* Синглтони су скупови који имају само један елемент.

Представљање скупова:
1. набрајањем $A=\{1,2,5,7\}$
2. оператором $A=\{x \mid x<5\}$

Примери:
- $X=\{a,b,c\}$
- $Y=\{\{a,b\},c\}$
- $Z=\{\{a\}\}$ => Z је синглтон; Z садржи скуп a
- $Z_1=\{a\}$ => Z_1 садржи елемент a

$V=\{x\in R \mid x^2<5\}$ – V је бесконачан скуп
$V_1=\{x\in Z \mid x^2<5\}$ – V_1 је коначан скуп

$$\{\underbrace{\{a,b\}}_{\text{скуп}},\underbrace{a,c}_{\text{елементи}}\}$$

1. Која од наведених тврђења су тачна?

А) $a\in\{a\}$ $\top$ Г) $\{a\}\in\{a\}$ $\perp$
Б) $a\in\{\{a\},\{b\}\}$ $\perp$ Д) $\{a\}\in\{\{a,b\},\{c\}\}$ $\perp$
В) $\{a\}\in\{\{a\},\{b\}\}$ $\top$ Ђ) $\{a,b\}=\{a,\{b\}\}$ $\perp$

е) $\underbrace{\{\{a\},\{b\}\}}_{\text{двочланка}} = \underbrace{\{\{\{a\},\{b\}\}\}}_{\text{синглтон}}$, $\perp$

2) На празна поља уписати $\in$ или $\notin$ и $=$ или $\neq$ тако да тврђења буду тачна:

а) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\qquad \emptyset \neq \{\emptyset\}$

б) $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$ $\qquad \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

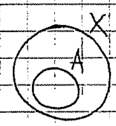
в) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ $\qquad \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$

г) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ $\qquad \{\emptyset\} \neq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

3) Описати скуп X који садржи целе бројеве веће од 10 дељиве са 7.

$X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 10 \wedge x = 7k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

4) Када је $A \subseteq X$?

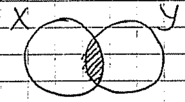


$\subseteq$ – бити подскуп или инклузија

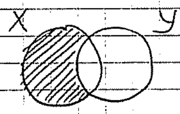
$X \subseteq X$ ✓

* Ако је $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$ онда је $X = Y$.
* Ако је $X = Y$ следи да је $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

– Пресек: $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$



– Разлика: $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$



* Ако је $A \cap B = \emptyset$ тада за A и B кажемо да су ДИСЈУНКТНИ.

1. Описати скуп X ако је:

а) $\{1,2,3\} \cap X = \{2,3\} \Rightarrow X = \{2,3,7,4\}$

б) $\{1,2,3,4\} \setminus X = \{1,2,3\} \Rightarrow X = \{4,5,6,8\}$

в) $X \setminus \{1,2\} = \{3,4,5\} \Rightarrow X = \{3,4,5,1,2\}$

2. За дате скупове $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $C = \{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$ одредити:

а) $A \cap B = \{\emptyset\}$ $\qquad$ г) $B \setminus A = \{\{\emptyset\}\}$

б) $A \cap B \cap C = \{\emptyset\}$ $\qquad$ д) $C \setminus A = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

в) $A \setminus B = \emptyset$ $\qquad$ ђ) $C \setminus B = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

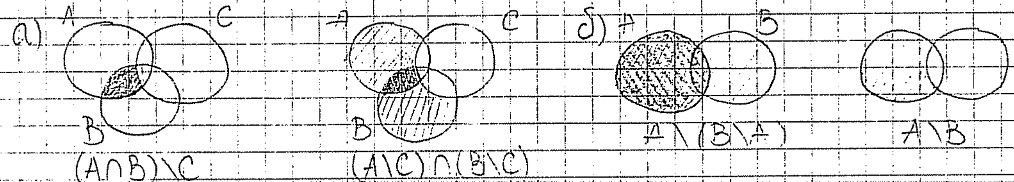
3. Уписати $\subseteq$, $\supseteq$, $=$ тако да тврђења буду тачна

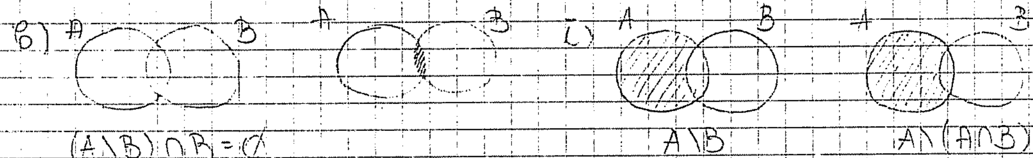
а) $(A \cap B) \setminus C \;=\; (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

б) $A \setminus (B \setminus A) \;\supseteq\; A \setminus B$

в) $(A \setminus B) \cap B \;\subseteq\; A \cap B$

г) $A \setminus B \;=\; A \setminus (A \cap B)$





4. Ако су $A = \{\emptyset\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$ навести елементе скупа X задате на следећи начин:

а) $X = A \setminus B$ $\qquad X = \{\emptyset\}$

б) $X = (B \setminus C) \setminus A$ $\qquad X = \emptyset$

в) $X = (B \cap C) \setminus A$ $\qquad X = \{a,b\}$

г) $X = (A \cap B) \setminus C$ $\qquad X = \emptyset$

д) $X = (B \setminus A) \cap C$ $\qquad X = \{a,b\}$

ђ) $X = (C \setminus A) \setminus B$ $\qquad X = \{c\}$

⑤ Доказати да ако је:

а) $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ онда је $X \subseteq Z$

б) $A \cap A = A$

в) $A \cap \emptyset = \emptyset$

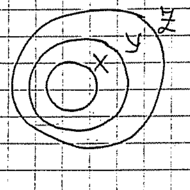
г) $X \cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$

д) $X \setminus X = \emptyset$

ђ) $X \setminus \emptyset = X$

е) $\emptyset \setminus X = \emptyset$

ж) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

а) 

– Ако је $X \subseteq Y$ онда се сви елементи од X морају налазити у скупу Y.
– Такође ако је $Y \subseteq Z$ онда се сви елементи од Y морају налазити у Z па закључујемо да су сви елементи из скупа X у скупу Z.

б) $A \cap A = A$

$x \in A \cap A \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in A$
$\Longleftrightarrow x \in A$

в) $A \cap \emptyset = \emptyset$

$x \in A \cap \emptyset \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset$
$\Longleftrightarrow x \in \emptyset$

⑥ Које од следећих реченица су тачне за било које скупове A и B, а које не морају увек бити тачне.

1) ако је $A \subseteq B$, онда је $A \cap B = B$ $\perp$

2) ако је $A \subseteq B$, онда је $B \setminus A = \emptyset$ $\perp$

3) ако је $A \cap B = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$ $\perp$

4) ако је $A \cap B = A$, онда је $A \subseteq B$ T

5) ако је $A \subseteq B$, онда је $A \setminus B = \emptyset$ T

6) ако је $A \setminus \emptyset = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$ T

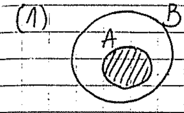
7) ако је $A \setminus B \subseteq B$, онда је $A \subseteq B$ T

8) ако је $A \cap B = \emptyset$, онда је $A \setminus B = A$ T

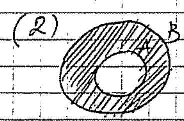
9) ако је $A \cap \emptyset = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$ $\perp$

10) ако је $A \subseteq B$ онда је $A \setminus B = \emptyset$ T

11) ако је $A \cap B = A$, онда је $A = B$ $\perp$

(1) 

$A \cap B = A$

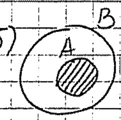
(2) 

$B \setminus A \neq \emptyset$

(3) $A = \{1,2\}$ и $B = \{3\}$

$A \cap B = \emptyset$

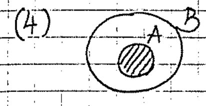
$A = \emptyset$ $B = \emptyset$

(5) 

$A \setminus B = \emptyset$

9) $A = \{1,2\}$

$\{1,2\} \cap \emptyset = \emptyset$ $A \neq \emptyset$

(4) 

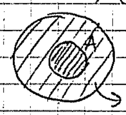
11) $A = \{1,2\}$ $A \cap B = \{1,2\}$

$B = \{1,2,3\}$ $A \neq B$

Деф: Ако је $A \subseteq X$ онда се $X \setminus A$ назива КОМПЛЕМЕНТОМ скупа A у односу на скуп X и означава се A^C.

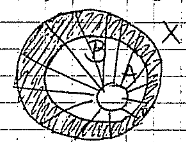
• Особине: Нека су $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, онда важи:

1) $(A^C)^C = A$



$(A^C)^C = X \setminus A^C$

2) $A \subseteq B \Rightarrow B^C \subseteq A^C$



3) $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ a - прва координата, b - друга координата

$\boxed{(a,b) \neq (b,a)}$

$(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}$

$\{a,b\} = \{b,a\}$

Тврђење: (a,b) и (c,d) су једнаки ако важи $a = c$ и $b = d$

- Уређена тројка: $(a,b,c) \overset{деф}{=} ((a,b),c)$

Декартов производ скупова:

$X \times Y \overset{\text{деф.}}{=} \{(x,y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$

$X \times Y \times Z \overset{\text{деф}}{=} \{(x,y,z) \mid x \in X \text{ и } y \in Y \text{ и } z \in Z\}$

$X \times X = X^2$

$X \times Y \neq Y \times X$ ако су $X \neq Y$

① Нека су $A=\{0,1,2\}$ и $B=\{a,b\}$ одредити $A\times B$ и $B \times A$

$A \times B = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$B \times A = \{(a,0),(a,1),(a,2),(b,0),(b,1),(b,2)\}$

② $A=\{1,2,3\}$ $B=\{11,12,13,14\}$ $C=\{4,5,6,7,8\}$

Одредити скупове задате на следећи начин:

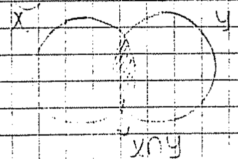
$X=\{(a,b,c) \mid (a,b,c) \in A\times B \times C, a>2, b$ је паран број$, c<6\}$

$Y=\{(a,b,c) \mid (a,b,c) \in B\times A \times C, a>2, b$ је паран број$, c<6\}$

$X = \{(3,12,4),(3,12,5),(3,14,4),(3,14,5)\}$

$Y = \{(11,2,4),(11,2,5),(12,2,4),(12,2,5),(13,2,4),(13,2,5),(14,2,4),(14,2,5)\}$

⑤ i) $X\cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$



$\left.\begin{array}{l} X\cap Y \in X \\ X \cap Y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X\cap Y \subseteq X \\ X\cap Y \subseteq Y \end{array}$

ђ) $X \setminus \emptyset = X$

$X=\{1,2,3\}$

$X \setminus \emptyset = \{1,2,3\} \Rightarrow \underline{\underline{X = X\setminus\emptyset}}$

е) $\emptyset \setminus X = \emptyset$

$X=\{1,2,3\}$

$\emptyset \setminus X = \emptyset$

д) $X \setminus X = \emptyset$

– Ако узмемо 2 скупа са истим елементима, пресек та два скупа је празан скуп јер не постоји елемент који може да припада једном скупу, а да не припада другом скупу, тј. оба скупа имају исте елементе

ж) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$\left.\begin{array}{l} A=\{0,1,2\} \\ B=\{0,1,2,3\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$

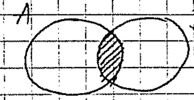
$A \cap B = \{0,1,2\} \Rightarrow A = A\cap B \Rightarrow A \subseteq B$

предавање
08.10.2019.

Теорема: За произвољне скупове A и B важи ако је $A\subseteq B$ и $B \subseteq A$ тада је $A=B$.

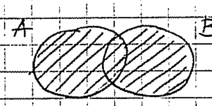
Деф.: Пресек скупова A и B је скуп

$A\cap B = \{x\in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$



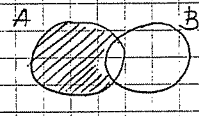
Деф.: Унија скупова A и B је скуп

$A \cup B = \{x \mid x\in A \vee x \in B\}$



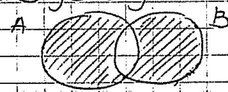
Деф.: Разлика скупова A и B је скуп

$A\setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



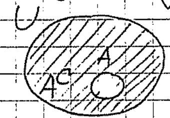
Деф.: Симетрична разлика скупова A и B је скуп

$A \triangle B = (A\setminus B) \cup (B \setminus A)$



Деф.: Нека је $A \subseteq U$. Комплемент скупа A у односу на скуп U је скуп:

$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}$



Пр. Нека је скуп $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и нека су $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{2,3,7,8,9\}$ његови подскупови. Одредити:

$A\cap B = \{2,3\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,7,8,9\}$

$A\setminus B = \{1,4\}$

$B \setminus A = \{7,8,9\}$

$A \triangle B = \{1,4,7,8,9\}$

$A^C_U = \{5,6,7,8,9,10\}$

Пр. Одредити партитивне скуп

(1) $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \underbrace{\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{\emptyset\}\}}_{2^2}$

(2) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(3) Доказати $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

- Нека је $x\in \mathcal{P}(A\cap B)$ акко $x\subseteq A\cap B$
  акко $x\subseteq A$ и $x\subseteq B$
  акко $x\in\mathcal{P}(A)$ и $x\in\mathcal{P}(B)$
  акко $x\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

$$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$$

Теорема: За скупове a, b, c и d важи $\{a,b\}=\{c,d\}$ акко ($a=c$ и $b=d$) или ($a=d$ и $b=c$)

Деф.: Уређени пар (a,b) скупова a и b је скуп $\{\{a\},\{a,b\}\}$

$$(a,b) \overset{\text{ДЕФ.}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Теорема: За уређене парове (a,b) и (c,d) важи $(a,b)=(c,d)$ акко $a=c$ и $b=d$

Доказ: ($\longleftarrow$) Нека је $a=c$ и $b=d$. Докажимо да је $(a,b)=(c,d)$

$$(a,b) \overset{\text{ДЕФ.}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\} \overset{\text{ДЕФ.}}{=} (c,d)$$

($\longrightarrow$): Нека је $(a,b)=(c,d)$. Докажимо да је $a=c$ и $b=d$.

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

Тада је (на основу претходне теореме)

(1) $\{a\}=\{c\}$ и $\{a,b\}=\{c,d\}$ или

(2) $\{a\}=\{c,d\}$ и $\{a,b\}=\{c\}$

Ако важи (1) тада

$a=c$ и $\left(\begin{array}{c} a=c \text{ и } b=d \\ \text{или} \\ a=d \text{ и } b=c \end{array}\right)$

а) $a=c$ и $\underline{a=c}$ и $\underline{b=d}$ ✓

б) $a=c$ и $a=d$ и $b=c$

$a=b=c=d$

$a=c$ и $b=d$

Ако важи (2) тада $c=d=a$ и $a=b=c$

$a=b=c=d$

$a=c$ и $b=d$ ✓ ∎

Деф.: Декартов производ скупова A и B је скуп

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \text{ и } b\in B\}$$

Пр. $A=\{a,b\}$ $B=\{1,2,3\}$

$A\times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

$B\times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$A\times B\neq B\times A$

$A\times A = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

* Декартов производ није комутативна операција!

Релације:

Деф.: Нека су A и B скупови. Релација ρ са скупа A у скуп B је сваки подскуп од $A\times B$. Дакле, $\rho\subseteq A\times B$. Ако је $A=B$ онда кажемо да је ρ бинарна релација на скупу A.

$(a,b)\in\rho$ или $a\rho b$

Деф. Домен релације $\rho\subseteq A\times B$ је скуп

$$Dom(\rho)=\{a\in A \mid \text{постоји } b\in B \text{ тако да је } a\rho b\}$$

Деф. Инверзна релација релације $\rho\subseteq A\times B$ је

$$\rho^{-1}=\{(b,a)\in B\times A \mid a\rho b\}$$

Деф.: Композиција релација $\rho\subseteq A\times B$ и $\sigma\subseteq B\times C$ је релација

$$\sigma\circ\rho=\{(a,c)\in A\times C \mid \text{постоји } b\in B \text{ тако да } a\rho b \text{ и } b\sigma c\}$$

Пр. $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{x,y,z\}$ $C=\{\alpha,\beta,\gamma\}$

$\rho=\{(1,y),(2,z),(2,x),(3,y)\}$

$\sigma=\{(x,\beta),(y,\beta)\}$

$Dom(\rho)=\{1,2,3\}$

$Im(\rho)=\{x,y,z\}$

$\rho^{-1}=\{(y,1),(z,2),(x,2),(y,3)\}$

$\sigma\circ\rho=\{(1,\beta),(2,\beta),(3,\beta)\}$

Деф.: Под n-арном релацијом на скупу A подразумевамо било који подскуп скупа A^n.

Деф.: Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ:

(1) РЕФЛЕКСИВНА ако за свако $a \in A$ важи $(a,a) \in \rho$ $(=, \geq, \leq, :)$

(2) АНТИРЕФЛЕКСИВНА ако за свако $a \in A$ важи $(a,a) \notin \rho$ $(>, <)$

(3) СИМЕТРИЧНА ако за све $a,b \in A$ важи ако $(a,b) \in \rho$ тада $(b,a) \in \rho$

(4) АНТИСИМЕТРИЧНА ако за све $a,b \in A$ важи ако $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ тада је $a=b$

(5) ТРАНЗИТИВНА ако за све $a,b \in A$ важи ако $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$ тада $(a,c) \in \rho$

Пр. Нека је $A=\{a,b,c\}$. Испитати које од наведених особина задовољава релација ρ.

(1) $\rho = A \times A$

(2) $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$

(1) $\rho = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

P ✓, AP ✗, C ✓, AC ✗, T ✓

(2) P ✗, AP ✗, C ✓, AC ✗, T ✓

09.10.2019. — вежбе —

① Доказати:

$$(X \cap Y) \times (X \cap Z) = (X \times X) \cap (Y \times Z)$$

Докажимо: (1) $(X \cap Y) \times (X \cap Z) \subseteq (X \times X) \cap (Y \times Z)$

(2) $(X \times X) \cap (Y \times Z) \subseteq (X \cap Y) \times (X \cap Z)$

(1) Нека је $(a,b) \in (X \cap Y) \times (X \times Z)$ онда је $a \in (X \cap Y)$ и $b \in (X \cap Z)$
онда је $a \in X$ и $a \in Y$ и $b \in X$ и $b \in Z$
онда је $a \in X$ и $b \in X$ и $a \in Y$ и $b \in Z$
онда је $(a,b) \in X \times X$ и $(a,b) \in (Y \times Z)$
онда је $(a,b) \in (X \times X) \cap (Y \times Z)$

(2) Нека је $(a,b) \in (X \times X) \cap (Y \times Z)$ онда је $(a,b) \in (X \times X)$ и $(a,b) \in (Y \times Z)$
онда је $a \in X$ и $b \in X$ и $a \in Y$ и $b \in Z$
онда је $a \in X$ и $a \in Y$ и $b \in X$ и $b \in Z$
онда је $a \in (X \cap Y)$ и $b \in (X \cap Z)$
онда је $(a,b) \in (X \cap Y) \times (X \cap Z)$

Дакле, $(X \cap Y) \times (X \times Z) = (X \times X) \cap (Y \times Z)$

Домаћи:

① Утврдити која од следећих реченица су тачне. Ако реченица није тачна, навести контра-пример:
а) $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A$
б) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A$

② Доказати:
а) $A \cap B = B \cap A$
б) $A \setminus B \subseteq A$

Унија скупова

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$$

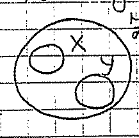
Особине:

(1) $\{x\} \cup \{y\} = \{x,y\}$

(2) $X \cup X = X$

(3) $X \cup \emptyset = X$

(4) ако је $X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$ онда је $X \cup Y \subseteq Z$



Партитивни скуп $P(X)$ - скуп свих подскупова скупа X.

а) $X=\{1,2,3\}$ $\quad P(X)=\{\emptyset, X, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

б) $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$

в) $P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

г) $P(\{a,b\})=\{\emptyset,\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$

д) $P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})\setminus P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\setminus\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=$
$=\{\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

ђ) Домаћи: $P(\{\{\emptyset\}\})\cap\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=$

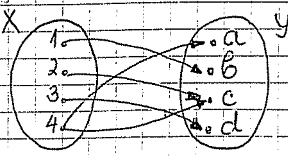
Пресликавања (Функције)

Деф. Пресликавање (функција) скупа X у скуп Y је скуп f који задовољава следеће услове

1) $f \subseteq X \times Y$

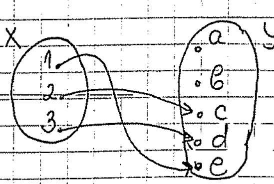
2) за сваки елемент $x\in X$ постоји тачно један елемент $y\in Y$ тако да $(x,y)\in f$ и пише се $y=f(x)$

Пр.



$\left.\begin{array}{l}4\to a\\ 4\to c\end{array}\right\}$ није функција

Пр.



$f:\begin{pmatrix}1&2&3\\ e&c&d\end{pmatrix}$ $\quad f=\{(1,e),(2,c),(3,d)\}$

X је домен

Y је кодомен

① Који од скупова

$f_1=\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c),(5,d),(6,d)\}$

$f_2=\{(1,a),(2,b),(3,c),(3,d),(4,c),(5,d),(6,d)\}$

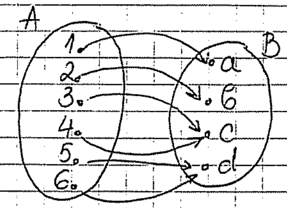
$f_3=\{(1,b),(2,c),(3,a),(5,d)\}$

$f_4=\{(1,b),(2,b),(3,b),(4,b),(5,b),(6,b)\}$

$f_5=\{(1,a),(3,c),(4,c),(2,b),(5,c),(6,c)\}$

представља функцију скупа $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ у скуп $B=\{a,b,c,d\}$

f_1:



f_1 јесте функција

f_2: $3\to c$, $3\to d$

f_2 није функција

f_3: није функција јер 4 и 6 немају слике

f_4: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ b&b&b&b&b&b\end{pmatrix}$ јесте функција

f_5: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ a&b&c&c&c&c\end{pmatrix}$ јесте функција

Деф.: $f:A\to B$ је „1-1" или ИНЈЕКЦИЈА $f:A\xrightarrow{\text{"1-1"}}B$ ако за све елементе $x_1,x_2\in A$ важи:

Ако $f(x_1)=f(x_2)$ тада $x_1=x_2$

или ако $x_1\neq x_2$ тада $f(x_1)\neq f(x_2)$

Деф.: $f:A\to B$ је "на" функција или СИРЈЕКЦИЈА $f:A\xrightarrow{\text{"на"}}B$ ако за свако y из B постоји x из A тако да је $f(x)=y$

$(\forall y\in B)(\exists x\in A)\ f(x)=y$

Деф. $f:A\to B$ је БИЈЕКЦИЈА или обострано једнозначно пресликавање ако је f инјекција и сирјекција.

$f:A\xrightarrow[\text{"на"}]{\text{"1-1"}}B$

Није „1-1" $(\exists x_1,x_2\in A)\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1\neq x_2$

Није „на" $(\exists y\in B)(\forall x\in A)\ f(x)\neq y$

① Одредити сва пресликавања скупа $A=\{a,b,c\}$ у скуп $B=\{1,2\}$ и испитати која од њих су "1-1", а која "на".

$f:A\to B$

$f_1:\begin{pmatrix}a&b&c\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\quad f_2:\begin{pmatrix}a&b&c\\1&1&2\end{pmatrix}$ $\quad f_3:\begin{pmatrix}a&b&c\\1&2&1\end{pmatrix}$ $\quad f_4:\begin{pmatrix}a&b&c\\2&1&1\end{pmatrix}$

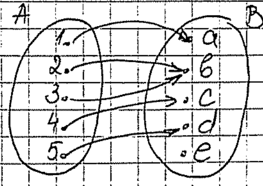
$f_5:\begin{pmatrix}a&b&c\\2&2&1\end{pmatrix}$ $\quad f_6:\begin{pmatrix}a&b&c\\2&1&2\end{pmatrix}$ $\quad f_7:\begin{pmatrix}a&b&c\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\quad f_8:\begin{pmatrix}a&b&c\\2&2&2\end{pmatrix}$

f_1, f_8 нису на

f_1: $f_1(a)=f_1(b)=1$, $a\neq b$, није „1-1" $\quad f_2$: $f_2(a)=f_2(b)=1$, $a\neq b$, није „1-1" $\quad f_7$: $f_7(b)=f_7(c)=2$, $b\neq c$, није „1-1"

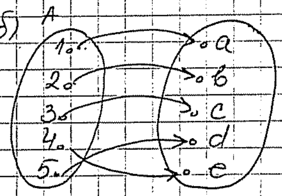
Ниједна функција није "1-1"

Примери:

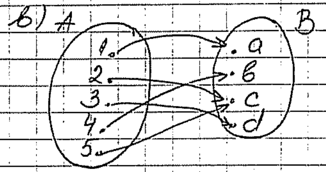
а) 

Није „1-1" $f(2)=f(3)=b$, $2\neq 3$

Није "на" јер е нема оригинал

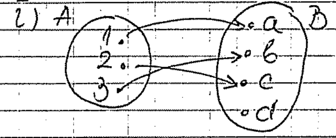
б) 

Бијекција је тј. "1-1" и "на"

в) 

$f(2)=f(5)=c$
$2\neq 5$

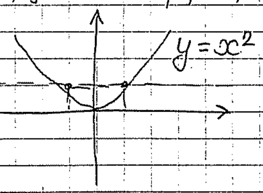
Није "1-1"
Јесте "на" (није битан број оригинала)

г) 

Јесте "1-1"
Није "на" јер d нема оригинал

② Испитајте које од следећих функција су "1-1"

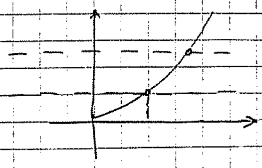
а) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$



$f(-1)=f(1)=1$ } није "1-1"
$-1\neq 1$

*уколико се повуче паралелна линија кроз график и у пресеку се наће 2 или више тачака, онда функција није "1-1".

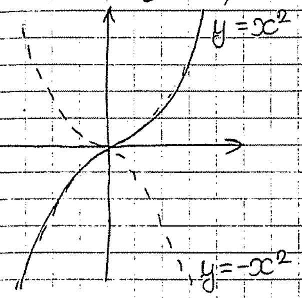
б) $f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x^2$



Јесте "1-1"

в) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$$



Јесте "1-1"

г) $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$f(x)=2x-1$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1

$f(x_1)=f(x_2)$
$2x_1-1=2x_2-1$
$2x_1=2x_2$ /:2
$\boxed{x_1=x_2} \Rightarrow f$ јесте "1-1"

③ Испитати које од следећих функција су "на".

а) $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{Z}$
$y=3 \Rightarrow \neg(\exists x\in\mathbb{Z})\ f(x)=3$

$3=x^2$
$y=x^2$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ $x_{1,2}\notin\mathbb{Z}$

б) $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $f(x)=2x-1$
$y=2x-1$
$y+1=2x$
$x=\frac{y+1}{2}$

пр. $y=2$ $x=\frac{3}{2} \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

-предавање- 15.10.2019.

Релације еквиваленције

Деф.: Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ релација еквиваленције ако је симетрична, рефлексивна и транзитивна.

Пример: (1) На скупу $\mathbb{R}$ релација $=$
(2) На скупу троуглова релација подударности ($\cong$)

Деф.: Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A. Класа еквиваленције елемента $a\in A$ је скуп $C_a=\{x\in A \mid a\sim x\}$
a - представник класе

Теорема: Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A
(1) Све класе еквиваленције су непразни скупови
(2) Нека су $a,b\in A$. Ако је $C_a\cap C_b\neq\emptyset$ тада $C_a=C_b$
(3) Унија свих класа еквиваленције једнака је скупу A.

Доказ:

(1) Како је за свако $a\in A$ испуњено да је $a\sim a$ (јер је $\sim$ рефлексивна) имамо да $a\in C_a$ то јест $C_a\neq\emptyset$.

(2) Нека је $C_a\cap C_b=\emptyset$. Тада постоји $x\in C_a\cap C_b$ тј. $x\in C_a$ и $x\in C_b$

$C_a\subseteq C_b$

Нека је $y\in C_a$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y\sim a \\ \text{Из } x\in C_a \Rightarrow x\sim a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y\sim a \\ a\sim x \end{array}\right\} \overset{(T)}{\Rightarrow} y\sim x$$

$$x\in C_b \Rightarrow x\sim b \quad \overset{(T)}{\Rightarrow} y\sim b \text{ тј. } y\in C_b, \quad C_a\subseteq C_b$$

$C_b\subseteq C_a$ аналогно
$\Rightarrow C_a=C_b$

! На испиту је довољно да докажете да је $C_a\subseteq C_b$, а за C_b само напишете аналогно.

(3) Нека је $a\in A$ произвољан. Како је $a\sim a \Rightarrow a\in C_a$
$a\in\bigcup C_a$
$A=\bigcup C_a$

Деф.: Количнички скуп скупа A за релацију еквиваленције $\sim$ је скуп $A/\sim\ =\{C_a \mid a\in A\}$

Пример: На скупу целих бројева дефинисана је релација на следећи начин:
$x\sim y$ акко $x-y$ је дељиво са 3

(P) Нека је $x\in\mathbb{Z}$ произвољан. $x\sim x$ јер $x-x=0$, а то јесте дељиво са 3.

(C) Нека за $x,y\in\mathbb{Z}$ важи $x\sim y \Rightarrow x-y$ је дељиво са 3
$\Rightarrow -(x-y)$ дељиво са 3

(T) Нека за $x,y,z\in\mathbb{Z}$ важи $x\sim y$ и $y\sim z$ тј. $x-y$ дељиво са 3, $y-z$ дељиво са 3
$\Rightarrow x-y+y-z$ је дељиво са 3 тј. $x-z$ је дељиво са 3 $\Rightarrow x\sim z$

Доказали еквиваленцију значи да постоје класе
$C_0=C_6=\{0,3,6,9,12,-3,-6,-9,\dots\}=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}$
$C_5=\{2,5,8,11,14,\dots,-1,-4,\dots\}=\{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$
$C_7=\{1,4,7,10,13,\dots,-2,-5,\dots\}=\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}=C_6\cup C_5\cup C_7$
$C_6\cap C_5=\emptyset$
$C_6\cap C_7=\emptyset$
$C_5\cap C_7=\emptyset$

$\mathbb{Z}/\sim\ =\{C_5,C_6,C_7\}$

Релације парцијалног уређења

Деф.: Нека је ρ бинарна релација на скупу A. Кажемо да је ρ релација парцијалног уређења ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Најчешћа ознака је $\preccurlyeq$.
Скуп A на коме је дефинисана релација $\preccurlyeq$ назива се парцијално уређен скуп или ПОСЕТ.

Пример: (1) $(P(x),\subseteq)$
(2) $(\mathbb{R},\geq)$
(3) $(\mathbb{R},=)$
(4) $(\mathbb{N},\mid)$ не важи за $\mathbb{Z}$

Деф.: Нека је $\preccurlyeq$ релација парцијалног уређења на скупу A. Кажемо да је $a\in A$:

(1) МИНИМАЛАН − ако је за сваки $x\in A$ тачно $x\preccurlyeq a \Rightarrow x=a$
(2) МАКСИМАЛАН − ако је за сваки $x\in A$ тачно $a\preccurlyeq x \Rightarrow x=a$
(3) НАЈМАЊИ − ако је за сваки $x\in A$ $a\preccurlyeq x$
(4) НАЈВЕЋИ − ако је за сваки $x\in A$, $x\preccurlyeq a$

Напомена: Ако постоји најмањи (највећи) елемент тада је он једини такав, односно јединствен.
Ако постоји најмањи (највећи) елемент тада је он једини минимални (максимални) елемент.

Пример: На скупу $A=\{2,3,5,6,15,30\}$ дефинисана је релација парцијалног уређења $x\preccurlyeq y$ акко $x\mid y$.

- нема најмањег елемента
- 30 је највећи елемент
- минимални: 2,3,5
- максимални: 30

Функције

Деф.: Скуп f је пресликавање (функција) скупа A у скуп B у ознаци $f: A\to B$ ако је испуњено:
1) $f \subseteq A\times B$
2) за сваки елемент $x\in A$ постоји тачно један елемент $y\in B$ тако да $(x,y)\in f$ и пишемо $y=f(x)$

- Скуп A је ДОМЕН функције f
- $x\in A$ је оригинал
- $f(A) = \{y \mid y=f(x), x\in A\}$ – скуп слика
- Скуп B је КОДОМЕН функције f

Деф.: (1) Функције $f:A\to B$ и $g:A\to B$ су једнаке $f=g$ ако је $f(x)=g(x)$ за свако $x\in A$

(2) Функција $i_A: A\to A$ дата са $i_A(x)=x$ за све $x\in A$ се назива идентичко пресликавање скупа A.

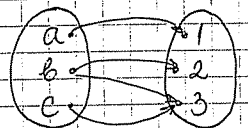
(3) $f:A\to B$ је "1-1" (инјекција) у ознаци $f: A\xrightarrow{"1-1"} B$ ако за све $x_1,x_2\in A$ важи: ако је $f(x_1)=f(x_2)$ онда је $x_1=x_2$

(4) $f:A\to B$ је "на" функција (сурјекција) у ознаци $f:A\xrightarrow{"на"}B$ ако за сваки $y\in B$ постоји $x\in A$ такав да је $f(x)=y$.

(5) $f:A\to B$ је бијекција или обострано једнозначно пресликавање ако је $f:A\to B$ и "1-1" и "на"

(6) Ако су $f:A\to B$ и $g:B\to C$ функције тада функција $g\circ f: A\to C$ дефинисана са $g\circ f = g(f(x))$ за све $x\in A$ и зове се композиција пресликавања f и g

Примери: $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2,3\}$

(1)


није функција

(2)


јесте функција
није "1-1"
није "на"

* Уколико је и "1-1" и "на", оба скупа морају да имају исти број елемената.

Теорема: (1) Ако $f:A\to B$ онда $f\circ i_A = f$ и $i_B\circ f = f$ – доказати ово

(2) Ако $h:A\to B$, $g:B\to C$ и $f:C\to D$
$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

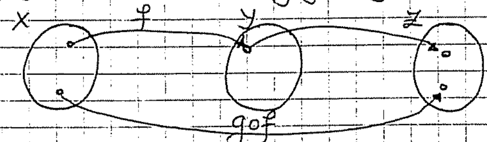
(3) Ако су $f:A\to B$ и $g:B\to C$ бијекције онда је и $g\circ f: A\to C$ бијекција

16.10.2019. – вежбе

Једнакост пресликавања

Деф.: Функције $f:X\to Y$ и $g:X\to Y$ су једнаке ако је $f(x)=g(x)$ за $x\in X$.

Нека су $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$. Композиција функција f и g је пресликавање $g\circ f: X\to Z$ при чему је $(g\circ f)(x) = g(f(x))$



① $f\circ g$ $g: Y\to Z$ и $f: Z\to X$ не може $f\circ g$? може $f\circ g$

Одредити $g\circ f$ ако је $f: \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\a&b&c&c&d&d\end{pmatrix}$ и $g:\begin{pmatrix}a&b&c&d\\p&p&q&r\end{pmatrix}$

$g\circ f: \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\p&p&q&q&r&r\end{pmatrix}$

② Дате су функције $f:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$
$g:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$
$h:\{1,2,3\}\to\{a,b,c\}$ са

$f: \begin{pmatrix}a&b&c\\2&1&3\end{pmatrix}$ $g: \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$ $h: \begin{pmatrix}1&2&3\\a&a&a\end{pmatrix}$

Одредити следеће композиције уколико је то могуће:
$f\circ g, f\circ h, f\circ f, g\circ g, g\circ f, g\circ g\circ f$

– $f\circ g: \{1,2,3\} = f(g(\{1,2,3\})) = f(\{1,2,3\})$ немогуће

– $f\circ h: \{1,2,3\} = f(h(\{1,2,3\})) = f(\{a,b,c\}) = \{1,2,3\}$
$f\circ h: \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$

– $f\circ f: \{a,b,c\} = f(f(\{a,b,c\})) = f(\{1,2,3\})$ немогуће

– $g\circ g: \{1,2,3\} = g(g(\{1,2,3\})) = g(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$
$g\circ g: \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$

– $g\circ f: \{a,b,c\} = g(f(\{a,b,c\})) = g(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$
$g\circ f: \begin{pmatrix}a&b&c\\1&1&3\end{pmatrix}$

– $g\circ g\circ f: \{a,b,c\} = g(g(f(\{a,b,c\}))) = g(g(\{1,2,3\})) = g(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$
$g\circ g\circ f: \begin{pmatrix}a&b&c\\1&1&3\end{pmatrix}$

③ Функције $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисане су на следећи начин

а) $f(x)=2x-1$
$g(x)=5-x$

б) $f(x+1)=3x+2$
$g(2x+3)=2-3x$

Одредити $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$

а) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(5-x) = 2(5-x)-1 = 10-2x-1 = 9-2x$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 5-(2x-1) = 5-2x+1 = 6-2x$

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-1) = 2\cdot(2x-1)-1 = 4x-3$

$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(5-x) = 5-(5-x) = x$

б) $f(x+1)=3x+2$ $\qquad g(2x+3)=2-3x$

$t=x+1$
$x=t-1$
$f(t)=3(t-1)+2$
$\boxed{f(x)=3x-1}$

$t=2x+3$
$x=\frac{t-3}{2}$
$g(t)=2-3\cdot\frac{t-3}{2}$
$g(x)=\frac{4-3x+9}{2}$
$\boxed{g(x)=\frac{13-3x}{2}}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{13-3x}{2}\right) = 3\cdot\frac{13-3x}{2}-1 = \frac{39-9x-2}{2} = \frac{37-9x}{2}$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = \frac{13-3(3x-1)}{2} = \frac{13-9x+3}{2} = \frac{16-9x}{2}$

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x-1) = 3(3x-1)-1 = 9x-4$

$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{13-3x}{2}\right) = \frac{13-3\cdot\frac{13-3x}{2}}{2} = \frac{26-3(13-3x)}{4} =$
$= \frac{26-39+9x}{4} = \frac{9x-13}{4}$

Операције и релације

* Унарна операција: Свака функција, али она мора бити дефинисана на том скупу $f: X\to X$
* Бинарна операција: Свака функција $f: X\times X\to X$
* n-арна операција $f: X^n\to X$

Пример:

$* \left(\frac{(a,a)}{a}, \frac{(a,b)}{b}, \frac{(a,c)}{a}, \frac{(b,a)}{c}, \frac{(b,b)}{c}, \frac{(b,c)}{b}, \frac{(c,a)}{a}, \frac{(c,b)}{c}, \frac{(c,c)}{c} \right)$

*	a	b	c
a	a	b	a
b	c	c	b
c	a	c	c

Кејлијева таблица

Пример: $\mathbb{Z}$

- унарна $-: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad -(x) = -x \in \mathbb{Z}$
- бинарна $+: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad +(2,3) = 2+3 = 5 \in \mathbb{Z}$

Особине бинарних операција

* Комутативност: $(\forall x,y\in X)\ x*y = y*x$
* Асоцијативност: $(\forall a,b,c\in X)\ a*(b*c) = (a*b)*c$
* Дистрибутивност: $(\forall a,b,c\in X)\ a*(b\,\square\, c) = a*b \,\square\, a*c$
(* према $\square$) $\qquad (b\,\square\, c)*a = (b*a)\,\square\,(c*a)$

Пример:

Комутативне операције: сабирање у $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
Није комутативна операција: композиција, множење матрица

Релације

* Унарна релација $f: X\to\{$тачно, нетачно$\}$

$f(x) = \begin{cases} \text{тачно}, & x \text{ задовољава својство } б \\ \text{нетачно}, & x \text{ не задовољава својство } б \end{cases}$

$f: X\to\{0,1\}$

Пример: Карактеристична функција $\chi_A: X\to\{0,1\}$, $A\subseteq X$

$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x\notin A \\ 1, & x\in A \end{cases}$

Ако је $X=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,c\}$

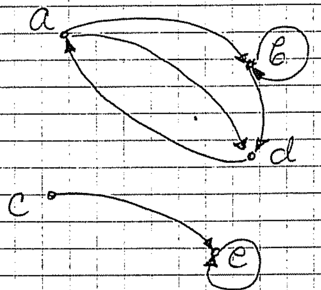
$$\chi_A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* **Бинарна релација:** свака функција $\rho: X\times X\to\{0,1\}$
  - подскуп Декартовог производа

Нека је $X=\{a,b,c,d,e\}$ и релација $\rho=\{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,e),(d,a),(e,e)\}$

$\rho\subseteq X\times X$

ρ	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	1	0	1	0
c	0	0	0	0	1
d	1	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1



* **n-арна релација** $\rho: X^n\to\{0,1\}$

Особине бинарних релација

$\rho: X\times X\to\{0,1\}$

1) ρ је рефлексивна ако $x\rho x$ за свако x тј. $(x,x)\in\rho$, тј. $\rho(x,x)=1$
2) ρ је симетрична ако $(\forall x,y\in X)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$
3) ρ је антисиметрична ако $(\forall x,y\in X)\ x\rho y\wedge y\rho x\Rightarrow x=y$
4) ρ је транзитивна ако $(\forall x,y,z\in X)\ x\rho y\wedge y\rho z\Rightarrow x\rho z$

1. На скупу $A=\{1,2,3,4,5\}$ дате су релације

$\rho_1=\{(1,2),(3,5),(4,2),(1,5),(3,2),(1,3),(4,3)\}$

Није Р (нема 1-1)
Није С $(1,2)$ шу, $(2,1)$ нема
Није Т (шу су $(4,3),(3,5)$ $4\rho 3\wedge 3\rho 5$, али $4\not\rho 5$)
Јесте АС

22.10.2019. предавање

Особине функције:

(1) Ако $f:A\to B$ и $g:B\to A$ и $g\circ f=i_A$ тада је f "1-1" функција, g је "на" функција

(2) Ако $f:B\to C$ и за произвољне функције $g:A\to B$ и $h:A\to B$ из $f\circ g=f\circ h$ следи да је $g=h$, онда је f "1-1" функција

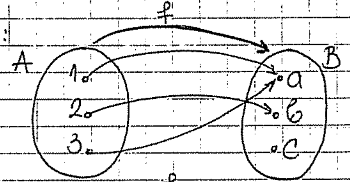
(3) Ако $f:A\to B$ и за произвољне функције $g:B\to C$ и $h:B\to C$ из $g\circ f=h\circ f$ следи да је $g=h$, тада је f "на" функција

(4) Ако $f:A\to B$ и $g:B\to C$ и f и g су "1-1" ("на") тада $f\circ g:A\to C$ је "1-1" ("на") функција

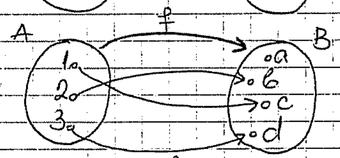
Деф. (1) Пресликавање $f^{-1}:B\to A$ је инверзна функција функције $f:A\to B$ ако важи да је $f^{-1}\circ f=i_A$ и $f\circ f^{-1}=i_B$

(2) Ако $f:A\to B$ и $C\subseteq A$ тада функција $f_{|C}:C\to B$ дата са $f_{|C}(x)=f(x)$, $x\in C$ назива се РЕСТРИКЦИЈА функције f на скупу C.

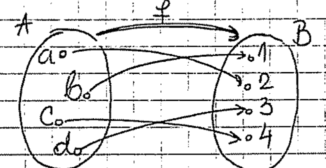
Пример:



Јесте функција, али f^{-1} не постоји (а се слика у 2 елемента, с се не слика ни у један елемент)



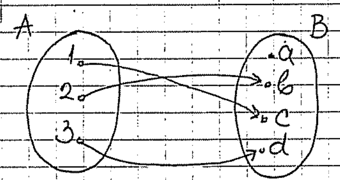
f^{-1} не постоји



$f=\{(a,2),(b,1),(c,4),(d,3)\}$

$f^{-1}=\{(2,a),(1,b),(3,d),(4,c)\}$

Пример:



$f_{|C}=\{(1,c),(2,b)\}$

Особине инверзне функције:

(1) Функција $f:A\to B$ има инверзно пресликавање ако је f бијекција

(2) Ако су $f:A\to B$ и $g:B\to C$ бијекције тада $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Кардиналност скупова

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ − природни бројеви $\quad 5+x=3$

$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ − цели бројеви $\quad 2x+1=0$

$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ − рационални бројеви $\quad x^2=2$

$\mathbb{R}$ − реални бројеви

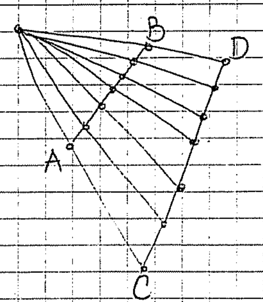
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ − бројева има исто
$\mathbb{R}$ − има више

Деф. Кажемо да скупови A и B имају исти број елемената или да су исте кардиналности у ознаци $|A|=|B|$ ако постоји бијекција $f: A\to B$

Примери: $f(x)=2x$, $f: \mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$

1 2 3 4 5 6 ... Јесте "1-1" и "на"
2 4 6 8 10 12 ...

$|\mathbb{N}|=|2\mathbb{N}|$



Јесте "1-1" и "на"
За сваку тачку са дужи AB постоји тачка на дужи CD и обрнуто

Деф. Скупови које је могуће бијективно пресликати на скуп $\mathbb{N}$ су пребројиви скупови. Дакле, $|X|=|\mathbb{N}|$ значи да је X пребројив скуп и пишемо

$|X|=\aleph_0$

$\{x_1,x_2,\dots x_n\}$ − коначно много (n елемената)

$\{x_1,x_2,\dots\}$ − пребројиво много (иде ка бесконачности)

Чији елементи могу да се представе низом по неком правилу значи да их има пребројиво много.

1,2,3,4,5,6,7,...
0,1,−1,2,−2,3,−3,... $\quad |\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=\aleph_0$

Деф. X је бесконачан скуп ако је истобројан са неким својим правим подскупом тј. постоји $A\subset X$ такав да је $|A|=|X|$

$\left.\begin{array}{l} 2\mathbb{N}\subset\mathbb{N} \\ |2\mathbb{N}|=|\mathbb{N}| \end{array}\right\} \overset{\text{деф}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{N}$ је бесконачан скуп

Канторов дијагонални поступак

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} \dots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \dots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{-3}{3} \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \dots \\
\frac{0}{5} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}|$

Деф. Бесконачан скуп који се не може бијективно пресликати на скуп природних бројева назива се НЕПРЕБРОЈИВ СКУП.

Доказ: Претпоставимо супротно тј. да елементе интервала $(0,1)$ можемо поређати у низ. Такав низ имао би облик

$a_1 = 0,d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}d_{15}\dots$
$a_2 = 0,d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}d_{25}\dots \qquad a=0,d_1d_2d_3\dots$
$a_3 = 0,d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}d_{35}\dots \qquad d_1\neq d_{11} \quad d_1\neq 9$
$a_4 = 0,d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}d_{45}\dots \qquad d_2\neq d_{22} \quad d_2\neq 9$
$a_5 = 0,d_{51}d_{52}d_{53}d_{54}d_{55}\dots \qquad d_3\neq d_{33} \quad d_3\neq 9$

Уочимо број $a=0,d_1d_2d_3\dots$ при чему је $d_1\neq d_{11}, d_2\neq d_{22}, d_3\neq d_{33}$ и $d_1\neq 9, d_2\neq 9, d_3\neq 9$. Уочени број a очигледно припада интервалу $(0,1)$. Прва децимала броја a се разликује од 1. децимале броја a_1 тј. $a\neq a_1$. Друга децимала броја a се разликује од 2. децимале броја a_2 итд. Добили смо контрадикцију јер број a није наведен у низу (разликује се од свих елемената низа. Дакле, реални бројеви интервала $(0,1)$ се не могу поређати у низ па је $|(0,1)|\neq|\mathbb{N}|$ тј. $|\mathbb{R}|\neq|\mathbb{N}|$

$|\mathbb{R}|=c$ − континуум (кардиналност од скупа $\mathbb{R}$)

Скуп реалних бројева је непребројив скуп.

* $0,9999\dots=1$

Доказ: $x=0,9999\dots$
$9x=10x-x$
$9x=10\cdot 0,999\dots-0,9999\dots$
$9x=9,9999\dots-0,9999\dots$
$9x=9$
$x=1$

$1,254254254$
$999x=1000x-x$
$999x=1254,254\dots-1,254254\dots$
$999x=1253$
$x=\frac{1253}{999}$

-Вежбе- 23.10.2019.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$

$\rho_1=\{(1,2),(3,5),(4,2),(1,5),(3,2),(1,3),(4,3)\}$

$\rho_2=\{(1,1),(2,2)\}$

$\rho_3=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$

$\rho_4=\emptyset$

$\rho_5=A\times A$

Испитати особине свих релација

ρ_1: Није Р јер нпр. $(1,1)\notin\rho_1$, $1\not\rho_1 1$

Није С јер нпр. $1\rho_1 2$, али $2\not\rho_1 1$

Није Т јер нпр. $4\rho_1 3 \land 3\rho_1 5 \not\Rightarrow 4\not\rho_1 5$

Јесте АС $(\forall x,y\in X)\ \underbrace{x\rho y\land y\rho x}_{\perp}\Rightarrow x=y$

$\perp \Rightarrow \{$било шта$\}$ (T)

$\boxed{\begin{matrix}\perp\Rightarrow T & (T)\\ \perp\Rightarrow\perp & (T)\end{matrix}}$

ρ_2: Није Р јер нпр. $(3,3)\notin\rho_2$, $3\not\rho_2 3$

Јесте С јер $2\rho 2\Rightarrow 2\rho 2$

Јесте Т $(\forall x,y,z\in A)\ \underbrace{x\rho y\land y\rho z}_{\perp}\Rightarrow x\rho z$

$\perp\Rightarrow\perp$ (T)

Јесте АС $(\forall x,y\in X)\ \underbrace{x\rho y\land y\rho x}_{\perp}\Rightarrow x=y$

$\perp\Rightarrow\{$било шта$\}$ (T)

ρ_3: Није Р

Није С

Јесте Т

Јесте АС $(\forall x,y\in X)\ \underbrace{x\rho y\land y\rho x}_{\perp}\Rightarrow x=y$

ρ_4: Није Р јер нема (1,1)

Јесте С зато што не могу да се нађу 2 елемента за које ово важи.

Јесте Т

Јесте АС

ρ_5: Јесте Р

Јесте С

Јесте Т

Није АС

Деф. Бинарна релација ~ скупа A је релација еквиваленције ако је релација рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример:

(1) Једнакост (=)

(2) Паралелност правих

(3) Подударност троуглова

(1) Релација $\equiv\pmod 2$ у скупу $\mathbb{Z}$ се дефинише на следећи начин:

$$x\equiv y\pmod 2 \iff 2\mid x-y$$

Доказати да је $\equiv\pmod 2$ релација еквиваленције

(Р) $x\equiv x\pmod 2$

$2\mid x-x$ тј. $2\mid 0$ јесте рефлексивна

(С) $(\forall x,y\in\mathbb{Z})\ x\equiv y\pmod 2 \iff 2\mid x-y$

$\iff 2\mid -(x-y)$

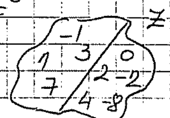
$\iff 2\mid y-x$

(Т) $x\equiv y\pmod 2 \land y\equiv z\pmod 2 \iff 2\mid x-y \land 2\mid y-z$

$\iff 2\mid x-y+y-z$

$\iff 2\mid x-z$

$x\equiv z\pmod 2$



* Ако је ~ релација еквиваленције на скупу A и $x\in A$ произвољан, класа еквиваленције елемената x у односу на релацију ~ је скуп $C_x=\{y\in A\mid x\sim y\}$

$C_0=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\dots\}$

$C_1=\{\pm1,\pm3,\pm5,\dots\}$

$C_0\cup C_1=\mathbb{Z}$

$C_0\cap C_1=\emptyset$

Деф. Скуп свих класа еквиваленције назива се ФАКТОР скуп или КОЛИЧНИК скуп и означава се са $X/_\sim$.

Теорема: Нека је ~ релација еквиваленције скупа X

(1) Свака класа еквиваленције је непразан скуп

(2) За произвољне $x,y\in X$ важи:

а) $x\sim y\Rightarrow C_x=C_y$ → припадају истој класи

б) $x\not\sim y\Rightarrow C_x\cap C_y=\emptyset$ → не припадају истој класи

в) Унија свих класа еквиваленције једнака је целом скупу.

(2) У скупу $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ дата је релација $x\sim y$ акко $x^2=y^2$. Доказати да је ~ релација еквиваленције и одредити класе.

$\sim\subseteq A\times A$

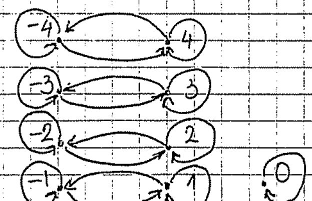
$$\sim=\left\{\begin{matrix}(-4,-4),(-4,4),(4,-4),(4,4),\\(-3,-3),(-3,3),(3,-3),(3,3),\\(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2),\\(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(0,0)\end{matrix}\right\}$$

*овакав задатак може да падне на колоквијуму

(Р) $(\forall x\in A)\ x\sim x$ јер $x^2=x^2$

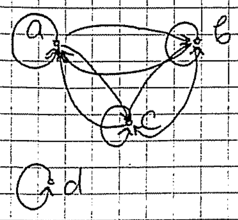
(С) $(\forall x,y\in A)\ x\sim y$ акко $x^2=y^2$ акко $y^2=x^2$ акко $y\sim x$

(Т) $(\forall x,y,z)\ x\sim y\land y\sim z$ акко $x^2=y^2\land y^2=z^2$ акко $x^2=z^2$ акко $x\sim y$



③ На скупу $A=\{a,b,c,d\}$ дефинисана је релација $\sim=\{(a,a),(a,c),(b,c)\}$. Допунити релацију $\sim$ до минималне релације еквиваленције $\approx$ и одредити класе новодобијене релације еквиваленције.

$$\approx=\left\{\begin{array}{l}(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,c),(c,a),(c,b)\\(a,b),(b,a)\end{array}\right\}$$



$C_a=\{a,b,c\}=C_b=C_c$ * КОЛОКВИЈУМ

$C_d=\{d\}$

$C_a\cup C_d=A$

$C_a\cap C_d=\emptyset$

④ На скупу $\mathbb{Z}$ дефинисана је релација $\sim$ на следећи начин $a\sim b$ акко $5\mid 2a+3b$. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и одредити класе.

(P) $a\sim a$ акко $5\mid 2a+3a$ тј. $5\mid 5a$

(C) $a\sim b$ акко $\left.\begin{array}{l}5\mid 2a+3b\\5\mid 5a+5b\end{array}\right]-\Big\{\,5\mid 5a+5b-2a-3b\,\Big\}\ 5\mid 3a+2b$

$\Rightarrow 5\mid 2b+3a$ тј. $b\sim a$

(T) $a\sim b\wedge b\sim c$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}5\mid 2a+3b\\5\mid 2b+3c\end{array}\right]+\left\{\left.\begin{array}{l}5\mid 2a+5b+3c\\5\mid 5b\end{array}\right]-\right\}\Leftrightarrow 5\mid 2a+3c$

$C_0=\{5k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ * КОЛОКВИЈУМ

$C_1=\{5k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$C_2=\{5k+2\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$C_3=\{5k+3\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$C_4=\{5k+4\mid k\in\mathbb{Z}\}$

⑤ На скупу $R\times R$ дефинисана је релација $\sim$ на следећи начин $(a,b)\sim(c,d)$ акко $a=c$. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и одредити класе.

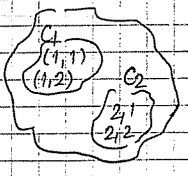
(P) $(a,b)\sim(a,b)$ јер $a=a$

(C) $(a,b)\sim(c,d)$ акко $a=c$ акко $c=a\Rightarrow(c,d)\sim(a,b)$

(T) $(a,b)\sim(c,d)\wedge(c,d)\sim(e,f)$ акко

$a=c\wedge c=e\Rightarrow a=e\Rightarrow(a,b)\sim(e,f)$

Има бесконачно класа



$C_{(1)}=\{(1,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$

$C_{(2)}=\{(2,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$

$C_{(3)}=\{(3,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$

$C_{(a)}=\{(a,b)\mid b\in\mathbb{R}\},\ a\in\mathbb{R}$

Деф: Бинарна релација ρ скупа A је релација поретка ако је рефлексивна (P), антисиметрична (AC) и транзитивна (T).

Примери: (1) $(\mathbb{N},\mid)$ $\quad n\mid m\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{N})\ m=kn$

(P) $n\in\mathbb{N}\quad n\mid n$

(AC) $n\mid m\wedge m\mid n\Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l}m=kn\\n=pm\end{array}\right\}\begin{array}{l}m=kpm\\kp=1\\k=p=1\Rightarrow m=n\end{array}$

(T) $n\mid m\wedge m\mid s\Rightarrow$

$m=n\underset{\in\mathbb{N}}{q}\quad s=m\underset{\in\mathbb{N}}{p}\Rightarrow s=n\overset{\in\mathbb{N}}{qp}\Rightarrow n\mid s$

(2) $(\mathbb{Z},\mid)$

(P) $n\mid n$

(AC) $n\mid m\wedge m\mid n\Rightarrow n=m$ није јер $2\mid-2\wedge-2\mid 2\Rightarrow 2\neq-2$

(3) $(\mathbb{N},<)$

(P) није јер $1\not<1$

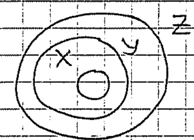
(4) $(\mathbb{Z},\leq)$

(P) $x\leq x$ ✓

(AC) $x\leq y\wedge y\leq x\Rightarrow x=y$ ✓

(T) $x\leq y\wedge y\leq z\Rightarrow x\leq z$ ✓

(5) $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$



(P) Јесте, $X\subseteq X,\ X\in\mathcal{P}(A)$

(AC) $X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X\Rightarrow X=Y$ ✓

(T) $X\subseteq Y\wedge Y\subseteq Z\Rightarrow X\subseteq Z$ ✓

-предавање- 29.10.2019.

Алгоритамски системи

Интуитивно, алгоритам је коначан скуп строго формулисаних правила за решавање неке класе задатака. Ако се алгоритмом израчунавају вредности неке функције онда се за ту функцију каже да је ефективно израчунљива или алгоритмом израчунљива или само израчунљива.

Пример 1: $f(m,n) = NZD(m,n)$ је израчунљива

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако постоји } n \text{ узастопних цифара броја 5 у децималном запису броја } \sqrt{5} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$f(n)$ није израчунљива

Алгоритам се неформално може представити на следећи начин:

УЛАЗ → ИЗРАЧУНАВАЊЕ → ИЗЛАЗ

Примери алгоритамски решивих проблема:

(1) сабирање и множење реалних бројева
(2) решавање система линеарних једначина
...

Примери алгоритамски нерешивих проблема

(1) решавање алгебарских Диофантових једначина ($x^2+y^2-z^2=0$)
(2) утврђивање да ли се програм написан у програмском језику C за произвољно улазне податке зауставља после коначно много корака (не можемо да утврдимо)

Да би се одговорило на питање да ли је неки математички проблем алгоритамски решив, потребно је формално прецизирати појмове алгоритма и израчунљивости.

* Алгоритамски систем је формални систем S у оквиру којег се математичким средствима дефинише појам ефективне израчунљивости односно појам алгоритма.

Деф.: Сваку функцију $f: D \to \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{N}^k$, $k>0$ зваћемо аритметичком функцијом дужине k. Ако је домен аритметичке функције f цео скуп $\mathbb{N}^k$ тј. $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ рећи ћемо да је функција f тотална, а у супротном функција f је парцијална аритметичка функција.

Примери тоталних функција на скупу $\mathbb{N}$:
- сабирање
- множење
- степеновање

Примери парцијалних функција на скупу $\mathbb{N}$:
- одузимање
- дељење
- кореновање

Системом S дефинишемо подскуп F_S скупа свих аритметичких функција.
- За функције из F_S кажемо да су S-израчунљиве
- Ако аритметичка функција $f \notin F_S$ тада кажемо да f није израчунљива
- Ако се неком математичком задатку M може придружити S израчунљива функција која тај задатак решава, кажемо да је задатак алгоритамски решив у систему S. У супротном кажемо да је M алгоритамски нерешив у S.

Примери алгоритамских система:

(1) систем рекурзивних функција
(2) Тјурингове машине
(3) Черчов λ-рачун
(4) Постови системи
(5) Нормални алгоритми Маркова
(6) URM (систем неограничених регистар машина)

Иако наизглед различити, сви системи одређују исти скуп израчунљивих функција.

Идеални рачунар (IR)

Описна дефиниција идеалног рачунара:

Идеални рачунар има следеће особине:

(1) нема никаквог ограничења на величину меморијског простора
(2) нема никаквог ограничења на величину улазних података
(3) програми су коначни, односно сва израчунавања се изводе у коначно много корака
(4) број улазних података је коначан, а излаз само један
(5) улазни и излазни подаци су искључиво из скупа природних бројева $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

Деф. Идеални рачунар има следеће делове:

(1) неограничен низ регистара $R_1, R_2, \dots$ који у сваком тренутку садрже природне бројеве $r_1, r_2, \dots$ и ови бројеви се могу мењати приликом процеса израчунавања
(2) простор за програм – то је простор који чува коначан низ инструкција $P = (I_1, I_2, \dots, I_h)$, а тај низ инструкција називамо програм
(3) бројач који у сваком тренутку садржи природан број k односно редни број инструкције коју идеални рачунар треба да изврши у том тренутку.

Инструкције које препознаје идеални рачунар:

(1) Нула инструкција

* Ако је $I_k: Z(n)$ IR је извршава тако што у регистар R_n уноси 0, остали регистри су непромењени, а у бројач уписује $k+1$

R_1	R_2	R_3	R_4
3	2	7	15

↓ Z(2)

(2) Инструкција следбеника

* Ако је I_k: $S(n)$, IR је извршава тако што садржај регистра R_n увећава за 1, остали регистри остају непромењени, а у бројач се уписује $k+1$.

R_1	R_2	R_3	R_4
3	2	1	0
	↓ $S(4)$		
3	2	1	1

(3) Инструкција преноса

* Ако је I_k: $T(m,n)$, $m,n\geq 1$ IR је извршава тако што у регистар R_n уноси садржај регистра R_m, остали регистри су непромењени, а у бројач се уписује $k+1$.

R_1	R_2	R_3	R_4
3	2	1	7
	↓ $T(4,1)$		
~~3~~ 7	2	1	7

(4) Инструкција прелаза

* Ако је I_k: $J(m,n,p)$, $m,n,p\geq 1$ IR је извршава тако да садржаји регистара остају непромењени, а у бројач се уписује p ако је $R_m=R_n$, односно $k+1$ ако је $R_m\neq R_n$.

Пример: $X+Y=?$

R_1	R_2	R_3
X	Y	Z
X+0	Y	0
X+1	Y	1
X+2	Y	2
	⋮	
X+Y	Y	Y

I_1: $Z(3)$
I_2: $J(2,3,6)$
I_3: $S(1)$
I_4: $S(3)$
I_5: $J(1,1,2)$

ТЕСТ (4,3)

4	3	0
4+1	3	1
4+2	3	2
4+3	3	3

Нека је $P=(I_1,\dots,I_s)$ неки програм и $n\geq 1$ природан број.

Деф. Бесконачан низ природних бројева $R_1,R_2,\dots$ који се налазе у регистрима $R_1,R_2,\dots$ непосредно пре стартовања програма назива се почетна конфигурација.

R_1	R_2	R_3	R_4	...
r_1	r_2	r_3	r_4	

$P(r_1,r_2,\dots,r_n)$ - израчунавање по програму P за почетну конфигурацију $(r_1,r_2,\dots,r_n)$

Низ природних бројева у регистрима након завршетка програма чини завршну конфигурацију, а резултат програма је садржај регистра R_1.

Деф. Ако IR заврши израчунавање $P(r_1,r_2,\dots,r_n)$ и у завршној конфигурацији у регистру R_1 је уписан број b, тада кажемо да програм P конвергира за почетну конфигурацију $(r_1,r_2,\dots,r_n)$ ка излазу b и пишемо
$$P(r_1,r_2,\dots,r_n)\downarrow b$$

Уколико се IR никада не заустави при израчунавању $P(r_1,\dots,r_n)$ кажемо да програм P дивергира за почетну конфигурацију $(r_1,\dots,r_n)$ и пишемо
$$P(r_1,\dots,r_n)\uparrow$$

вежбе

Теорија израчунљивости

30.10.2019.

* IR је рачунар без ограничења за меморијски простор и величину улазних података, не прави грешке

Опис идеалног рачунара:

* Неограничен број регистара: $R_1,R_2,R_3,\dots,R_n,\dots$ који памте природне бројеве и могу мењати садржај током процеса израчунавања.

R_1	R_2	R_3	R_4	...

I_1
I_2
I_3
I_4
I_5

простор за програм

Програм је низ нумерисаних наредби чије извршавање почиње од прве наредбе и наставља се редом сем евентуално у случају наредбе J када може доћи до скока, а прекида се преласком на непостојећу наредбу. Резултат се на крају рада налази у R_1.

Инструкције:

Нека је тренутна инструкција I_i.

(1) Нула инструкција: $Z(1), Z(2),\dots$

$Z(n)$ - уписује 0 у R_n и бројач прелази на $i+1$, сви остали регистри остају непромењени

(2) Инструкција следбеник: $S(1), S(2),\dots$

R_1	R_2	R_3	R_4
1	5	0	7
	↓ $S(1)$		
2	5	0	7
	↓ $S(4)$		
2	5	0	8

$S(n)$ - број у R_n увећа за 1, сви остали регистри остају непромењени

(3) Инструкција преноса: $T(1,1), T(1,2), T(2,1)\dots$

R_1	R_2	R_3	R_4	
15	3	18	35	...
		↓ $T(2,4)$		
15	3	18	3	...

$T(m,n)$ $m,n\geq 1$ број у регистру R_n замењује бројем из регистра R_m, а садржај R_m и осталих регистара остаје непромењен.
"оно што је у R_2 залепи у R_4"

(4) Инструкција прелаза: $J(1,1,1), J(1,1,2), J(2,3,4)\dots$

$J(m,n,k)$. $m,n,k\geq 1$

Ако важи $R_m=R_n$ у бројач се уписује k, ако је $R_m\neq R_n$ у бројач се уписује $i+1$.

Пример 1. За дати алгоритам написати одговарајући програм и наћи завршну конфигурацију, ако је почетна конфигурација:

а)

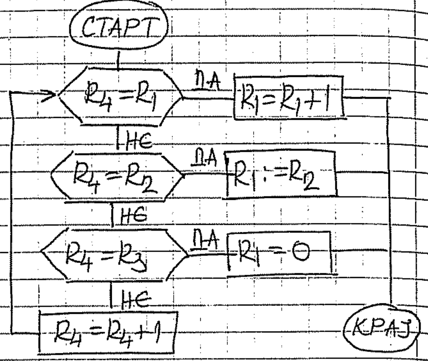
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
2	3	1	0	0

б)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
3	1	2	0	0

в)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
1	1	2	3	0



Решење:

а) $I_1: J(4,1,6)$
$I_2: J(4,2,8)$
$I_3: J(4,3,10)$
$I_4: S(4)$
$I_5: J(1,1,1)$
$I_6: S(1)$
$I_7: J(1,1,11)$
$I_8: T(2,1)$
$I_9: J(1,1,11)$
$I_{10}: Z(1)$

Провера исписа:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
2	3	1	0	0

↓ $I_1: R_1 \neq R_4 \rightarrow I_2$

2	3	1	0	0

↓ $I_2: R_4 \neq R_2 \rightarrow I_3$

2	3	1	0	0

↓ $I_3: R_4 \neq R_3 \rightarrow I_4$

2	3	1	0	0

↓ $I_4: S(4)$

2	3	1	1	0

↓ $I_1: R_4 \neq R_1 \rightarrow I_2$

2	3	1	1	0

↓ $I_2: R_4 \neq R_2 \rightarrow I_3$

2	3	1	1	0

↓ $I_3: R_4 = R_3 \rightarrow I_{10}$

2	3	1	1	0

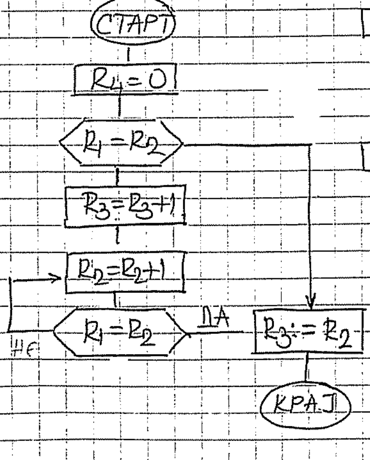
↓ $I_{10}: Z(1)$

0	3	1	1	0

ЗАВРШНА КОНФИГУРАЦИЈА

Пример 2: За дати програм и почетну конфигурацију | 25 | 23 | 0 | 12 | 5 | 0 | 0 | одредити завршну конфигурацију и нацртати алгоритам.

$I_1: Z(4)$
$I_2: J(1,2,7)$
$I_3: S(3)$
$I_4: S(2)$
$I_5: J(1,2,7)$
$I_6: J(1,1,4)$
$I_7: T(3,2)$



П:	25	23	0	12	5	0	0
	25	23	0	0	5	0	0
	25	23	1	0	5	0	0
	25	24	1	0	5	0	0
	25	25	1	0	5	0	0
З:	25	1	1	0	5	0	0

① Написати програм за $f(x,y)=x+y$

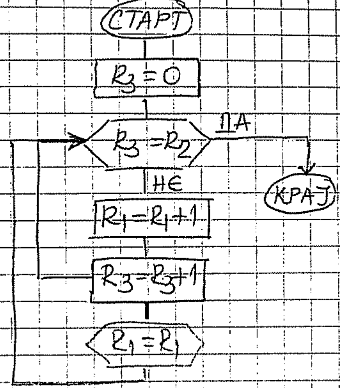
R_1	R_2	R_3	R_4 ...
x	y	z	t ...

x	y	0
$x+1$	y	1
$x+2$	y	2
⋮	⋮	⋮
$x+k$	y	k
$x+y$	y	y

R_1

$I_1: Z(3)$
$I_2: J(2,3,6)$
$I_3: S(1)$
$I_4: S(3)$
$I_5: J(1,1, \ )$

АЛГОРИТАМ:

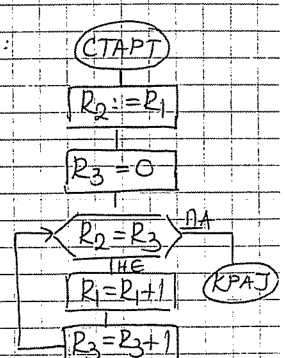


② Написати програм за $f(x)=2x$

x	y	z	t ...
x	x	0	
$x+1$	x	1	
$x+2$	x	2	
	⋮		
$x+x$	x	x	
$2x$	x	x	

$I_1: T(1,2)$
$I_2: Z(3)$
$I_3: J(2,3,7)$
$I_4: S(1)$
$I_5: S(3)$
$I_6: J(1,1,3)$

АЛГОРИТАМ:



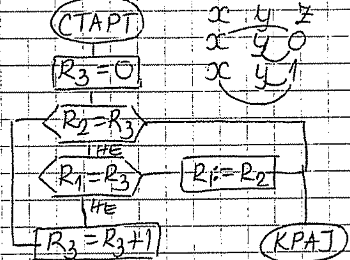
③ Написати програм $f(x)=3x$

x	y	z	t ...
x	x	0	
$x+2$	x	1	
$x+4$	x	2	
$x+6$	x	3	
		⋮	
$x+2x$	x	x	

$\underbrace{x+2x}_{3x}$

$I_1: Z(3)$
$I_2: T(1,2)$
$I_3: J(2,3,8)$
$I_4: S(1)$
$I_5: S(1)$
$I_6: S(3)$
$I_7: J(1,1,3)$

④ Написати програм $f(x,y)=\max\{x,y$

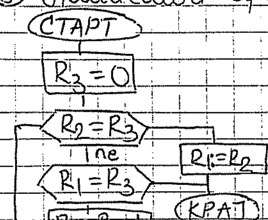


x	y	z
x	y	0
x	y	1

$I_1: Z(3)$
$I_2: J(2,3,$
$I_3: J(1,3,6$
$I_4: S(3)$
$I_5: J(1,1,$
$I_6: T(2,1)$

проверити са собом!

⑤ Написати програм $f(x,y)=\min\{x,y\}$



x	y	z
x	y	0

$I_1: Z(3)$
$I_2: J(2,3,6)$
$I_3: J(1,3,7)$
$I_4: S(3)$
$I_5: J(1,1,2)$
$I_6: T(2,1)$

(6) Написати програм за функцију $f(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Помоћни програм 1: $f(x,y) = \min\{x,y\}$

I_1: $Z(3)$
I_2: $J(2,3,6)$
I_3: $J(1,3,7)$
I_4: $S(1)$
I_5: $J(1,1,2)$
I_6: $T(2,1)$

Помоћни програм 2: $f(x,y) = x-y$, $x \geq y$

x	y	0
x	$y+1$	1
x	$y+2$	2
$\vdots$		
x	x	k

I_1: $Z(3)$
I_2: $J(1,2,6)$ → провери са собом!
I_3: $S(2)$
I_4: $S(3)$
I_5: $J(1,1,2)$
I_6: $T(3,1)$

I_1: $Z(3)$
I_2: $J(1,3,13)$ → „x је мање од y" тј. x је min
I_3: $J(2,3,6)$ → уради разлику
I_4: $S(3)$
I_5: $J(1,1,2)$
I_6: $Z(3)$
I_7: $J(1,2,11)$
I_8: $S(2)$
I_9: $S(3)$
I_{10}: $J(1,1,7)$
I_{11}: $T(3,1)$
I_{12}: $J(1,1,14)$ – иди на крај кад завршиш $x-y$
I_{13}: $Z(1)$

домаћи: $f(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 3, & \text{иначе } x<y \end{cases}$

предавање 3

Надовезивање програма

Нека су P и Q програми

* I проблем:

- Нека је $P = (I_1, \dots, I_p)$
- Израчунавање по програму P се завршава ако се у бројачу појави број $s > p$.
- Да бисмо наставили са израчунавањем по програму Q мора бити $s = p+1$.
- Да бисмо надовезали програм Q на програм P, програм P мора бити написан тако да се зауставља само ако се у бројачу појави број $p+1$. Другим речима, у свим инструкцијама прелаза $J(m,n,k)$ програма P мора бити $k \leq p+1$.

Деф.: За програм $P = (I_1, \dots, I_p)$ кажемо да је у стандардној форми ако за сваку његову инструкцију прелаза $J(m,n,k)$ важи да је $k \leq p+1$.

Лема: Сваком програму P можемо придружити програм P^* у стандардној форми такав да $P(a_1, \dots, a_n) \downarrow a$ ако и само ако $P^*(a_1, \dots, a_n) a \downarrow$ за све $a_1, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ провери са собом

Пример:

x	y	0
$x+1$	y	1
$\vdots$		
$x+y$	y	y

P:
I_1: $Z(3)$
I_2: $J(2,3,10)$ → значи да програм није у стандардној форми
I_3: $S(1)$
I_4: $S(3)$
I_5: $J(1,1,2)$

P^*:
I_1^*: $Z(3)$
I_2^*: $J(2,3,6)$
I_3^*: $S(1)$
I_4^*: $S(3)$
I_5^*: $J(1,1,2)$

Доказ: Нека је $P = (I_1, \dots, I_p)$ почетни програм (необавезно у стандардној форми). Да бисмо добили програм P^* у стандардној форми довољно је изменити инструкције на следећи начин

- ако I_s није инструкција прелаза, тада $I_s^* = I_s$
- ако I_s јесте $J(m,n,k)$ тада:

$$I_s^* = \begin{cases} I_s, & k \leq p+1 \\ J(m,n,p+1), & k > p+1 \end{cases}$$

Тада, програм $P^* = (I_1^*, \dots, I_p^*)$ је програм у стандардној форми и сигурно важи $P(a_1, \dots, a_n) \downarrow a$ акко $P^*(a_1, \dots, a_n) \downarrow a$ ∎

II проблем

- Проблем приликом инструкције $J(m,n,k)$ уколико $R_m = R_n$ у програму Q
  - Проблем отклањамо ако k-та инструкција програма Q постане $p+k$-та инструкција програма PQ. Зато сваку инструкцију $J(m,n,k) \to J(m,n,p+k)$

Деф.: Нека су $P = (I_1, \dots, I_p)$ и $Q = (I_1', \dots, I_q')$ програми у стандардној форми. Програм $PQ = (I_1, \dots, I_p, I_{p+1}, \dots, I_{p+q})$ је композиција програма P и Q ако:

$$I_{p+l} = \begin{cases} I_i' & \text{ако } I_i' \text{ није инструкција прелаза} \\ J(m,n,p+k) & \text{ако } I_i' = J(m,n,k) \text{ за } i = 1,\dots,q \end{cases}$$

Програми P и Q су потпрограми програма PQ.

Дубина програма

– Најмањи природан број $\delta(P) \in \mathbb{N}$ такав да за све $n > \delta(P)$ регистри R_n остају непромењени током израчунавања по програму P зове се дубина програма P.

Пример: Дубина за $f(x_1,\dots,x_n)$

Нека је P програм у стандардној форми који израчунава вредност $f(x_1,\dots,x_n)$. Често се дешава следеће:

- бројеви $x_1,\dots,x_n$ могу бити записани у регистрима $R_{i_1},\dots,R_{i_n}$, а не у регистрима $R_1,\dots,R_n$ како захтева програм P.
- излаз $f(x_1,\dots,x_n)$ који је потребан за даља израчунавања можемо сместити у R_s, а не у R_1.
- Регистри $R_{n+1},\dots,R_{\delta(P)}$ могу садржати неке податке, па их претходно треба испразнити.

Дакле, програм P треба модификовати на следећи начин:

преместити $x_1,\dots,x_n$ из регистара $R_{i_1},\dots,R_{i_n}$ у регистре $R_1,\dots,R_n$
очистити регистре
извршити програм P
пребацити излаз из R_1 у R_s

$T(i_1,1)$
$T(i_2,2)$
⋮
$T(i_n,n)$
$Z(n+1)$
$Z(n+2)$
⋮
$Z(\delta(P))$
P
$T(1,s)$

Овај програм означавамо са $P[i_1,\dots,i_n \to s]$. Он израчунава $f(r_{i_1},\dots,r_{i_n})$ и резултат памти у R_s.

Супституција

Нека је $g_1 : D_1 \to \mathbb{N}$
$g_2 : D_2 \to \mathbb{N}$
⋮
$g_k : D_k \to \mathbb{N}$

где су $D_1, D_2, \dots, D_k \subseteq \mathbb{N}^k$

$h : D' \to \mathbb{N}, \quad D' \subseteq \mathbb{N}^k$

$D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k \cap \{(x_1,\dots,x_n) \mid (g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n)) \in D'\}$

Пример: $g_1(x,y,z) = x+y$
$g_2(x,y,z) = \left[\frac{x+z}{2}\right]$
$g_3(x,y,z) = xyz$
$h(a,b,c) = \min\{a,b,c\}$

Деф: За функцију $f : D \to \mathbb{N}$ дефинисану са $f(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{деф}}{=} (g_1(x_1,\dots,x_n), g_2(x_1,\dots,x_n), \dots, g_k(x_1,\dots,x_n))$ за $(x_1,\dots,x_n) \in D$ кажемо да је супституција функција $g_1, g_2, \dots, g_k$ у функцији h и пишемо $f = Sub(h; g_1, g_2, \dots, g_k)$.

$f(x,y,z) = \min\{x+y, \left[\frac{x+z}{2}\right], xyz\}$

Теорема: Ако су $g_1, g_2, \dots, g_k$ и h израчунљиве функције онда је израчунљива и супституција f функција $g_1, g_2, \dots, g_k$ у функцији h.

Доказ: $g_1, g_2, \dots, g_k, h$ израчунљиве функције $\Rightarrow$ постоје програми $G_1, G_2, \dots, G_k$ и H у стандардној форми који израчунавају редом вредности функција $g_1, g_2, \dots, g_k$ и h. Одредимо програм F који израчунава вредности функције f.

$G_1 \leftrightarrow g_1(x_1,\dots,x_n)$
$G_2 \leftrightarrow g_2(x_1,\dots,x_n)$
⋮
$G_k \leftrightarrow g_k(x_1,\dots,x_k)$
$H \leftrightarrow h(g_1,g_2,\dots,g_k)$
$f = h(g_1,g_2,\dots,g_k)$

Приликом израчунавања потребно је обезбедити довољно простора и сачувати све потребне улазне податке.

$$m = \max\{n, k, \delta(G_1), \delta(G_2), \dots, \delta(G_k), \delta(H)\}$$

R_1	R_2		R_n	R_m	R_{m+1}	R_{m+2}		R_{m+n}	R_{m+n+1}	R_{m+n+2}		R_{m+n+k}	$R_{m+n+k+1}$
x_1	x_2	...	x_n	...	x_1	x_2	...	x_n	g_1	g_2	...	g_k	$h(g_1 \dots g_k)$

$x_1, x_2, \dots, x_n \to R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}$

Садржај регистара $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}$ нећемо мењати приликом израчунавања $G_1, G_2, \dots, G_k, H$

$H \to R_{m+n+k+1} \to R_1$

(P)

запамти $X_1,\dots,X_n$ у $R_{m+1},\dots,R_{m+n}$

запамти $g_1(x_1,\dots,x_n)$ у R_{m+n+1}

⋮

запамти $g_k(x_1,\dots,x_n)$ у R_{m+n+k}

запамти $h(g_1,\dots,g_k)$ у R_1

(K)

Програм:

$T(1,m+1)$
$T(2,m+2)$
⋮
$T_n(n,m+n)$
$G_1[m+1,m+2,\dots,m+n \to m+n+1]$
$G_2[m+1,m+2,\dots,m+n \to m+n+2]$
⋮
$G_k[m+1,m+2,\dots,m+n \to m+n+k]$
$H[m+n+1,m+n+2,\dots,m+n+k \to 1]$

Рекурзија

Пример 1:
$0! = 1$
$1! = 1\cdot 1 = 1$
$2! = 2\cdot 1$
$3! = 3\cdot 2\cdot 1$
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$0! = 1$
$(x+1)! = (x+1)\cdot x!$

Пример 2: Нека су $f(x)$ и $g(x,y,z)$ дате функције и нека је h дефинисано са:

$$\begin{cases} h(x,0) = f(x) \\ h(x,y+1) = g(x,y,h(x,y)) \end{cases}$$

$h(5,3) = g(5,2,h(5,2))$
$h(5,2) = g(5,1,h(5,1))$
$h(5,1) = g(5,0,h(5,0))$
$h(5,0) = f(5)$

Нека је $f: D_f \to \mathbb{N}$, $D_f \subseteq \mathbb{N}^n$
$g: D_g \to \mathbb{N}$, $D_g \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$

За јединствено одређену функцију $h: D_h \to \mathbb{N}$, $D_h \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ такву да важе једнакости:

$$\begin{cases} h(x_1,\dots,x_n,0) = f(x_1,\dots,x_n) \\ h(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{5},\underbrace{y+1}_{3}) = g(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{5},\underbrace{y}_{2},\underbrace{h(x_1,x_2,\dots,x_n,y)}_{h(5,2)}) \end{cases}$$

кажемо да је добијена рекурзијом функција f и g, при томе за домен D_h важи

$(x_1,\dots,x_n,0) \in D_h$ акко $(x_1,\dots,x_n) \in D_f$
$(x_1,\dots,x_n,y+1) \in D_h$ акко $(x_1,\dots,x_n,y) \in D_h$ и $(x_1,\dots,x_n,y,h(x_1,\dots,x_n,y)) \in D_g$

Примери

(1) $\begin{cases} h(x,0) = x \\ h(x,y+1) = h(x,y)+1 \end{cases}$

$h(3,5) = h(3,4)+1$
$= h(3,3)+2$
$= h(3,2)+3$
$= h(3,1)+4$
$= h(3,0)+5 = 3+5$

(2) $\begin{cases} h(x,0) = 0 \\ h(x,y+1) = h(x,y)+x \end{cases}$

$h(2,3) = h(2,2)+2$
$= h(2,1)+2+2$
$= h(2,0)+2+2+2$
$= 2+2+2 = 3\cdot 2 = 6$

(3) $\begin{cases} h(x,0) = 1 \\ h(x,y+1) = h(x,y)\cdot x \end{cases}$

Теорема: Ако су $f: D_f \to \mathbb{N}$, $D_f \subseteq \mathbb{N}^n$ и $g: D_g \to \mathbb{N}$, $D_g \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ израчунљиве функције, онда је израчунљива и функција $h: D_h \to \mathbb{N}$, $D_h \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ добијена рекурзијом f и g.

$h(x,0) = 1$
$h(x,1) = 1\cdot x = x^1$
$h(x,2) = x^1\cdot x = x^2$
$h(x,3) = x^2\cdot x = x^3$
$h(x,4) = x^3\cdot x = x^4$
$h(x,5) = x^4\cdot x = x^5$
$h(x,y) = x^{y-1}\cdot x = x^y$

Доказ: Нека су F и G програми у стандардном облику који израчунавају редом вредности функција f и g. Одредимо програм H за израчунавање вредности функције h добијене рекурзијом функција f и g.

Опис програма H:
За задату почетну конфигурацију програм H најпре израчунава $h(x_1,\dots,x_n,0)$ што јесте $f(x_1,\dots,x_n)$ уз помоћ програма F, а затим ако је $y \neq 0$ израчунава редом
$h(x_1,\dots,x_n,1)$
$h(x_1,\dots,x_n,2)$
⋮
$h(x_1,\dots,x_n,y)$ користећи програм G

$m = \max\{n+1, \delta(F), \delta(G)\}$

R_1	R_2		R_n	R_{n+1}		R_m	R_{m+1}	R_{m+2}		R_{m+n}	R_{m+n+1}	R_{m+n+2}	R_{m+n+3}
x_1	x_2	...	x_n	y	...		x_1	x_2	...	x_n	y	$k=0$	$h(x_1,x_2,\dots,x_n,k)$

бројач

последњи израчунати резултат

Програм:
$T_1(1,m+1)$
$T_2(2,m+2)$
⋮
$T(n,m+n)$
$T(n+1,m+n+1)$
$Z(m+n+2)$
$F[m+1,m+2,\dots,m+n \to m+n+3]$
$I_p: J(m+n+1,m+n+2,q)$
$S(m+n+2)$
$G: [m+1,m+2,\dots,m+n,m+n+1,m+n+3 \to m+n+3]$
$J(1,1,p)$
$I_q: T(m+n+3,1)$

Дакле, функција h јесте израчунљива.

Дефиниције:

(1) Свака функција $f: D \to \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{N}^k$ назива се **аритметичка функција**.

(2) Аритметичка функција f је **тотална** ако је њен домен $\mathbb{N}^k$ тојест $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

(3) Ако желимо нагласити да нека аритметичка функција није тотална кажемо да је та функција парцијална.

(4) Функција f је примитивно рекурзивна ако је добијена из основних аритметичких функција (нула, следбеник и пројекције) применом супституције и рекурзије.

Примери:

$$\left.\begin{array}{l} Z(x)=0 \\ S(x)=x+1 \\ \pi_i(x_1,\dots,x_n)=x_i \quad , i=\overline{1,n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{тоталне} \\ \text{аритметичке} \\ \text{функције} \end{array}$$

- Сабирање и множење су тоталне израчунљиве функције, а оне су и примитивно рекурзивне.

* Рекурзијом и супституцијом се од тоталних израчунљивих функција добијају увек тоталне израчунљиве функције

Минимизација

Полазећи од основних аритметичких функција применом супституције и рекурзије добија се широка класа израчунљивих функција.

Постоје функције које су израчунљиве, али нису примитивно рекурзивне.

Операција која генерише израчунљиве функције које нису тоталне је **минимизација**.

Деф: Нека $f: D_f \to \mathbb{N}, D_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Израчунајмо $f(x_1,\dots,x_n,0)$, $f(x_1,\dots,x_n,1)$, $f(x_1,\dots,x_n,2)$... све док не добијемо један природан број y такав да је $f(x_1,\dots,x_n,y)=0$ ако такво y постоји.

Дефинишемо функцију на следећи начин:

$$g: D_g \to \mathbb{N}, \quad D_g \subseteq \mathbb{N}^n$$

$$g(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} y, & y \text{ је најмањи природан број такав да је } f(x_1,\dots,x_n,y)=0 \\ \text{недефинисано,} & \text{иначе} \end{cases}$$

и постоје $f(x_1,\dots,x_n,z)$ за све $z \le y$

За функцију $g(x_1,\dots,x_n)$ кажемо да је добијена минимизацијом $f(x_1,\dots,x_n,y)$ и означавамо је са

$$g(x_1,\dots,x_n) = \mu y\,(f(x_1,\dots,x_n,y)=0)$$

→ бројач по коме вршимо минимизацију

Теорема: Ако је функција $f: D_f \to \mathbb{N}$, где је $D_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ израчунљива онда је израчунљива и функција g добијена њеном минимизацијом.

Доказ: Нека је F програм у стандардном облику који израчунава вредности функције f. Напишимо програм G који израчунава вредности функције g.

Опис програма G:

За задату почетну конфигурацију $x_1,\dots,x_n$ програм G израчунава вредности $f(x_1,\dots,x_n,0)$, $f(x_1,\dots,x_n,1)$, $f(x_1,\dots,x_n,2)$, користећи програм F. Сваку од добијених вредности упоређује са 0. Прва вредност k за коју је $f(x_1,\dots,x_n,k)=0$ биће излаз програма G.

$$m = \max\{n, \delta(F)\}$$

R_1		R_n		R_m	R_{m+1}		R_{m+n}	R_{m+n+1}	R_{m+n+2}
x_1	...	x_n	...		x_1	...	x_n	$k=0$	0

Програм:
$T(1,m+1)$
$T(2,m+2)$
...
$T(n,m+n)$
$Z(m+n+1)$
$Z(m+n+2)$
$F[m+1,m+2,\dots,m+n, m+n+1 \to 1]$
I_p: $J(1,m+n+2,q)$ – крај
$S(m+n+1)$
$J(1,1,S)$
I_q: $T(m+n+1,1)$

Ограничени збир

Нека је $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ дата тотална функција

Деф: Функција $Sf: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ означена са $Sf(x_1,\dots,x_n,y) = \sum_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z)$ дефинисана рекурзивно са:

$$\begin{cases} Sf(x_1,\dots,x_n,0)=0 \\ Sf(x_1,\dots,x_n,y+1) = Sf(x_1,\dots,x_n,y) + f(x_1,\dots,x_n,y) \end{cases}$$

то јест:

$$\begin{cases} \sum\limits_{z<0} f(x_1,\dots,x_n,z)=0 \\ \sum\limits_{z<y+1} f(x_1,\dots,x_n,z) = \sum\limits_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z) + f(x_1,\dots,x_n,y) \end{cases}$$

зове се **ограничени збир**.

Очигледно је

$$\sum_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z) = f(x_1,\dots,x_n,0)+f(x_1,\dots,x_n,1)+\dots+f(x_1,\dots,x_n,y)$$

Ограничени производ

Нека је $f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ дата тотална функција.

Деф. Функција $p_f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ означена са $p_f(x_1,\dots,x_n,y)=\prod_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z)$ дефинисана рекурзивно са:

$$\begin{cases} p_f(x_1,\dots,x_n,0)=1 \\ p_f(x_1,\dots,x_n,y+1)=p_f(x_1,\dots,x_n,y)\cdot f(x_1,\dots,x_n,y) \end{cases}$$

то јест

$$\begin{cases} \prod_{z<0} f(x_1,\dots,x_n,z)=1 \\ \prod_{z<y+1} f(x_1,\dots,x_n,z)=\prod_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z)\cdot f(x_1,\dots,x_n,y) \end{cases}$$

Очигледно је

$$\prod_{z<y} f(x_1,\dots,x_n,z)=f(x_1,\dots,x_n,0)\cdot f(x_1,\dots,x_n,1)\cdot\dots\cdot f(x_1,\dots,x_n,y-1)$$

Теореме: (1) Ако је функција $f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ израчунљива, онда су израчунљиве и функције ограничени збир и ограничени производ одређене функцијом f.

(2) Ако су функције $f,g:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ израчунљиве, тада су израчунљиве и функције

$$\sum_{z<g(x_1,\dots,x_n,y)} f(x_1,\dots,x_n,z) \quad и \quad \prod_{z<g(x_1,\dots,x_n,y)} f(x_1,x_2,\dots,z)$$

Доказ: (1) Функције S_f и P_f се добијају рекурзијом израчунљивих функција, па су и оне израчунљиве.

(2) Овако дефинисане функције су израчунљиве јер су добијене из израчунљивих функција S_f и P_f супституцијом y-а израчунљивом функцијом g.

Ограничена минимизација

Нека је $f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ дата функција.

Деф. За функцију $m:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ дату са

$$m(x_1,\dots,x_n,y)=\begin{cases} z, & \text{ако постоји најмање } z<y \text{ такво да је } f(x_1,\dots,x_n,z)=0 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$$

кажемо да је добијена ограниченом минимизацијом функције f и означавамо са

$$m(x_1,\dots,x_n,y)=\mu z<y\,(f(x_1,\dots,x_n,z)=0)$$

Приметимо да је ограничена минимизација тотална функција за разлику од минимизације која не мора бити тотална.

Теореме: (1) Ако је $f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ израчунљива функција, онда је израчунљива и функција m добијена ограниченом минимизацијом функције f.

(2) Ако су $f:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ и $g:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ израчунљиве функције тада је израчунљива и функција

$$m'(x_1,\dots,x_n,y)=\mu z<g(x_1,\dots,x_n,y)\,(f(x_1,\dots,x_n,z)=0)$$

Класа израчунљивих функција

До сада смо доказали:

1) елементарне функције (нула функција, следбеник, пројекције) су израчунљиве
2) функције добијене
   - супституцијом
   - рекурзијом
   - минимизацијом

израчунљивих функција су израчунљиве

Теорема: Скуп израчунљивих функција је најмањи скуп који садржи основне функције и затворен је за супституцију, рекурзију и минимизацију.

Деф.: Функција f је израчунљива ако и само ако постоји коначан низ функција $f_1,f_2,\dots,f_n$ такав да је:

1) $f_n=f$
2) и свако f_i, $1\le i\le n$

је или основна функција или је добијена из претходних функција $f_1,f_2,\dots,f_{i-1}$ применом супституције, минимизације или рекурзије.

Сви остали алгоритамски системи дефинишу исти скуп израчунљивих функција.

вежбе

① Написати програм за $f(x,y) = \begin{cases} x-1, & x>0 \\ 0, & иначе \end{cases}$

x	0	0
x	1	0
x	2	1
x	3	2
⋮	⋮	⋮
x	x	x−1

$I_1: Z(2)$
$I_2: Z(3)$
$I_3: J(1,2,10)$ → $x=0$
$I_4: S(2)$
$I_5: J(1,2,9)$ → ако радимо $x-1$
$I_6: S(2)$
$I_7: S(3)$
$I_8: J(1,1,5)$
$I_9: T(3,1)$

② $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$

x	0	0
x	1	0
x	2	0
x	3	1
x	4	1
x	5	1
x	6	2

$I_1: Z(2)$
$I_2: Z(3)$
$I_3: J(1,2,11)$
$I_4: S(2)$
$I_5: J(1,2,11)$
$I_6: S(2)$
$I_7: J(1,2,11)$
$I_8: S(2)$
$I_9: S(3)$
$I_{10}: J(1,1,3)$
$I_{11}: T(3,1)$

Питамо се три пута јер је период 3.

③ $f(x,y) = |x-y| = max\{x,y\} - min\{x,y\}$

$I_1: Z(3)$
$I_2: J(1,3,13)$
$I_3: J(2,3,6)$ → ради $x-y$ јер је $min=y$
$I_4: S(3)$
$I_5: J(1,1,2)$
$I_6: Z(3)$
$I_7: J(1,2,11)$
$I_8: S(2)$
$I_9: S(3)$
$I_{10}: J(1,1,7)$
$I_{11}: T(3,1)$
} $x-y$

$I_{12}: J(1,1,19)$
$I_{13}: Z(3)$
$I_{14}: J(1,2,18)$
$I_{15}: S(1)$
$I_{16}: S(3)$
$I_{17}: J(1,1,14)$
} $y-x$

$I_{18}: T(3,1)$

x	y	0
x+1	y	1
x+2	y	2
⋮		⋮
x+k	y	k

④ $f(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 3, & иначе \end{cases}$

$I_1: Z(3)$
$I_2: J(2,3,6)$
$I_3: J(1,3,13)$
$I_4: S(3)$
$I_5: J(1,1,2)$
$I_6: Z(3)$
$I_7: J(1,2,11)$
$I_8: S(2)$
$I_9: S(3)$
$I_{10}: J(1,1,7)$
$I_{11}: T(3,1)$
$I_{12}: J(1,1,17)$
$I_{13}: Z(1)$
$I_{14}: S(1)$
$I_{15}: S(1)$
$I_{16}: S(1)$

⑤ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ парно} \\ 0, & x \text{ непарно} \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ парно} \\ 1, & x \text{ непарно} \end{cases}$

	непарно	парно
x	0	0
	1	2
	3	4
	⋮	⋮

I начин:
$I_1: Z(2)$
$I_2: Z(3)$
$I_3: S(2)$
$I_4: J(1,3,11)$
$I_5: J(2,1,14)$
$I_6: S(2)$
$I_7: S(2)$
$I_8: S(3)$
$I_9: S(3)$
$I_{10}: J(1,1,4)$
$I_{11}: Z(1)$
$I_{12}: S(1)$
$I_{13}: J(1,1,15)$
$I_{14}: Z(1)$

II начин:
$I_1: Z(2)$
$I_2: J(1,2,$
$I_3: S(2)$
$I_4: J(1,2,10)$
$I_5: S(2)$
$I_6: J(1,1,2)$
$I_7: Z(1)$
$I_8: S(1)$
$I_9: J(1,1,11)$
$I_{10}: Z(1)$

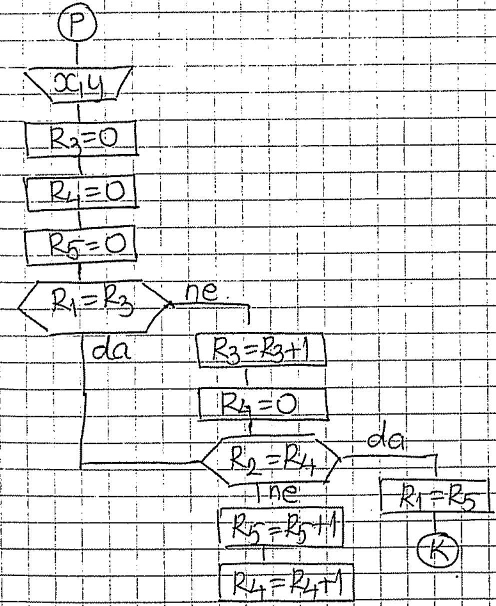
⑥ $f(x,y) = x \cdot y$

$x=2, y=3$

$x \cdot y = \underbrace{(1+1+1) + (1+1+1)}_{2 \text{ пута правим } 3}$

$I_1: Z(3)$
$I_2: Z(4)$
$I_3: Z(5)$
$I_4: J(1,3,11)$
$I_5: S(3)$
$I_6: Z(4)$
$I_7: J(2,4,4)$
$I_8: S(4)$
$I_9: S(5)$
$I_{10}: J(1,1,7)$
$I_{11}: T(5,1)$

		x	y	производ
x	y	0	0	0
x	y	1	0	0
x	y	1	1	1
x	y	1	2	2
x	y	1	3	3
x	y	2	0	3
x	y	2	1	4
x	y	2	2	5
x	y	2	3	6



(7) $f(x,y,z) = \begin{cases} \left[\frac{y}{3}\right], & 2 \mid z \\ x+1, & \text{иначе} \end{cases}$

x	y	z	0	0
x	y	z	1	0
x	y	z	3	2
x	y	z	5	4

I_1: Z(4)
I_2: Z(5)
I_3: S(4)
I_4: J(3,4,11) } парно
I_5: J(3,5,13) } непарно
I_6: S(4)
I_7: S(4)
I_8: S(5)
I_9: S(5)
I_{10}: J(1,1,4)
I_{11}: S(1) $\rightarrow x+1$
I_{12}: S(1,1,25) КРАЈ
I_{13}: T(2,1)
I_{14}: Z(2)
I_{15}: Z(3)
I_{16}: J(1,2,24)
I_{17}: S(2)
I_{18}: J(1,2,24)
I_{19}: S(2)
I_{20}: J(1,2,24)
I_{21}: S(2)
I_{22}: S(3)
I_{23}: J(1,1,16)
I_{24}: T(3,1)

домаћи $f(x,y,z) = \begin{cases} \left[\frac{z}{2}\right], & 3 \mid y \\ \max\{y,z\}, & y \bmod 3 = 1 \\ x+y-2, & \text{иначе} \end{cases}$

0	0	0
3	1	2
6	4	5
9	7	8
12	10	11

Супституција

Пример: $\underset{h}{\max}\{\underset{g_1}{2x}, \underset{g_2}{x-1}\}$

(1) $f(x,y,z) = \max\{\underset{g_1}{x \cdot z}, \underset{g_2}{\left[\frac{y}{3}\right]}\}$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
x	y	z			x	y	z	$x \cdot z$	$\left[\frac{y}{3}\right]$
								g_1	g_2

I_1: T(1,6) } чување почетне конфигурације
I_2: T(2,7)
I_3: T(3,8)
I_4: T(6,1) } припрема за $x \cdot z$
I_5: T(8,2)
I_6: Z(3)
I_7: Z(4)
I_8: Z(5)
I_9: J(1,3,16) } $x \cdot z$
I_{10}: S(3)
I_{11}: Z(4)
I_{12}: J(2,4,9)
I_{13}: S(5)
I_{14}: S(4)
I_{15}: J(1,1,12)
I_{16}: T(5,9) $\rightarrow$ чувамо $x \cdot z$ у R_9
I_{17}: T(7,1) } припрема за $\left[\frac{y}{3}\right]$
I_{18}: Z(2)
I_{19}: Z(3)
I_{20}: J(1,2,28) } чувамо $\left[\frac{y}{3}\right]$
I_{21}: S(2)
I_{22}: J(1,2,28)
I_{23}: S(2)
I_{24}: J(1,2)
I_{25}: S(2)
I_{26}: S(3)
I_{27}: J(1,1,20)
I_{28}: T(3,10)
I_{29}: T(9,1) } припрема за max
I_{30}: T(10,2)
I_{31}: Z(3)
I_{32}: J(1,3,36)
I_{33}: J(2,3,37)
I_{34}: S(3)
I_{35}: J(1,1,32)
I_{36}: T(2,1)

(2) $f(x,y,z) = \max\{x^2, \left\lfloor\frac{y+z}{2}\right\rfloor\}$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}
x	y	z			x	y	z	x^2	$y+z$	$\left[\frac{y+z}{2}\right]$

I_1: T(1,6) } чувамо почетну конфигурацију
I_2: T(2,7)
I_3: T(3,8)
I_4: T(6,1) } припрема за $x * x$
I_5: T(6,2)
I_6: Z(3)
I_7: Z(4)
I_8: Z(5)
I_9: J(1,3,16) } x^2
I_{10}: S(3)
I_{11}: Z(4)
I_{12}: J(2,4,9)
I_{13}: S(4)
I_{14}: S(5)
I_{15}: J(1,1,12)
I_{16}: T(5,9) $\rightarrow$ чувамо x^2
I_{17}: T(7,1) } припрема за $y+z$
I_{18}: T(8,2)
I_{19}: Z(3)
I_{20}: J(2,3,24)
I_{21}: S(1)
I_{22}: S(3)
I_{23}: J(1,1,20)
I_{24}: T(1,10) $\rightarrow$ чувамо $y+z$
I_{25}: T(10,1) } припрема за $\left[\frac{-}{-}\right]$
I_{26}: Z(2)
I_{27}: Z(3)
I_{28}: J(1,2,34) } $\left[\frac{y+z}{2}\right]$
I_{29}: S(2)
I_{30}: J(1,2,34)
I_{31}: S(2)
I_{32}: S(3)
I_{33}: J(1,1,28)
I_{34}: T(3,11) $\rightarrow$ чувамо $\left[\frac{y+z}{2}\right]$
I_{35}: T(9,1) } припрема за max
I_{36}: T(11,2)
I_{37}: Z(3)
I_{38}: J(1,3,42) } max
I_{39}: J(2,3,43)
I_{40}: S(3)
I_{41}: J(1,1,38)
I_{42}: T(2,1)

Рекурзија

(1) $h(x,0) = 3x$
$h(x,y+1) = \left[\frac{h(x,y)}{2}\right]$

$h_0 = 3x$

$h_1 = \left[\frac{h_0}{2}\right]$

$h_2 = \left[\frac{h_1}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{h_0}{2}\right]}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{3x}{2}\right]}{2}\right]$

$h_{10,3} = \left[\frac{h(10,2)}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{h(10,1)}{2}\right]}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{\left[\frac{3x}{2}\right]}{2}\right]}{2}\right] = 3$

~~h_0~~	~~h_1~~
h_2	h_3

или

~~h_0~~	~~h_1~~
h_1	h_2

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
			x	y	$k=0$	h_0
					бројач	h_1, h_2

Помоћни програм:
$f(x) = 3x$

x	x	0
$x+2$	x	1
$x+4$	x	2
⋮	⋮	⋮
$x+2k$	x	k
⋮	⋮	⋮
$x+2x$	x	x

I_1: T(1,2)
I_2: Z(3)
I_3: J(2,3,8)
I_4: S(1)
I_5: S(1)
I_6: S(3)
I_7: J(1,1,3)

$f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$

x	0	0
x	1	0
x	2	1
x	3	1
x	4	2
x	5	2

$x = 3 \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

I_1: Z(2)
I_2: Z(3)
I_3: J(1,2,9
I_4: S(2)
I_5: J(1,2,9
I_6: S(2)
I_7: S(3)
I_8: J(1,1,
I_9: T(3,1

Главни програм:

I_1: T(1,4)
I_2: T(2,5)
I_3: Z(6) → бројач на 0
I_4: T(4,1) → позовемо x да би направили $3x$
I_5: T(1,2)
I_6: Z(3)
I_7: J(2,3,12)
I_8: S(1)
I_9: S(1)
I_{10}: S(3)
I_{11}: J(1,1,7)
$\}$ h_0
I_{12}: T(1,7) → чувамо h_0 у R_7
I_{13}: J(5,6,27) – крај
I_{14}: T(7,1) → позивамо h_0 у R_1
I_{15}: Z(2)
I_{16}: Z(3)
I_{17}: J(1,2,23)
I_{18}: S(2)
I_{19}: J(1,2,23)
I_{20}: S(2)
I_{21}: S(3)
I_{22}: J(1,1,17)
$\}$ $\left[\frac{h_0}{2}\right] = h_1 \quad \left(\left[\frac{h_i}{2}\right]\right)$
I_{23}: T(3,1)
I_{24}: S(6)
I_{25}: T(1,7)
I_{26}: J(1,1,13)
I_{27}: T(7,1) → може, а и не мора

(2.) $h(x,0)=3$
$h(x,1)=3x+2$
$h(x,y+1)=h(x,y)+h(x,y-1)$

$h_0=3$
$h_1=3x+2$
$h_2=h_1+h_0$
$h_3=h_2+h_1$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
x	y		x	y	$k=0$	h_0	h_1	
						h_1	h_2	
						h_2	h_3	

h_0: I_1: Z(1)
I_2: S(1)
I_3: S(1)
I_4: S(1)

Главни програм:

I_1: T(1,4)
I_2: T(2,5)
I_3: Z(6)
I_4: Z(1)
I_5: S(1)
I_6: S(1)
I_7: S(1)
$\}$ $h_0=3$
I_8: J(5,6,34) – крај
I_9: T(1,7) – чувамо h_0 у R_7
I_{10}: S(6)
I_{11}: T(4,1) – x зовемо у R_1 да рачунамо $3x+2$
I_{12}: T(4,2)
I_{13}: Z(3)
I_{14}: J(2,3,19)
I_{15}: S(1)
I_{16}: S(1)
I_{17}: S(3)
I_{18}: J(1,1,14)
I_{19}: S(1)
I_{20}: S(1)
I_{21}: T(1,8) → чувамо
I_{22}: J(5,6,34) → крај
I_{23}: S(6)
I_{24}: T(8,1)
I_{25}: T(7,2)
I_{26}: Z(3)
I_{27}: J(2,3,31)
I_{28}: S(1)
I_{29}: S(3)
I_{30}: J(1,1,27)
$\}$ h_1+h_0
I_{31}: T(8,7)
I_{32}: T(1,8)
I_{33}: T(1,1,22)

Минимизација

(1) $f(y)=\mu x\left(\left[\frac{y+1}{3}\right]-x=0\right)$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
y			y	$x=0$	$y+1$	$[-]$	$[\,]\times$	0
				↓ бројач				

I_1: T(1,4)
I_2: Z(5)
I_3: Z(9)
I_4: T(4,1)
I_5: S(1)
$\}$ $y+1$
I_6: T(1,6) чувамо $y+1$
I_7: Z(2)
I_8: Z(3)
I_9: J(1,2,17)
I_{10}: S(2)
I_{11}: J(1,2,17)
I_{12}: S(2)
I_{13}: J(1,2,17)
I_{14}: S(2)
I_{15}: S(3)
I_{16}: J(1,1,9)
I_{17}: T(3,7)
I_{18}: T(7,1)
I_{19}: T(5,2)
I_{20}: Z(3)
I_{21}: J(1,2,25)
I_{22}: S(2)
I_{23}: S(3)
I_{24}: J(1,1,21)
$\}$ $[-]-x$
– чувамо $[-]-x$
I_{25}: T(3,8)
I_{26}: J(8,9,29)
I_{27}: S(5)
I_{28}: J(1,1,18)
I_{29}: T(5,1)

додатак:
$g(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & 3\mid x\\ \text{недефинисано, иначе}\end{cases}$
$\frac{x}{3}=k$
$x=3k$
$\mu k(x-3k)=0$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y}, & y \text{ дели } x\\ \text{недефинисано, иначе}\end{cases}$

$\frac{x}{y}=k$
$x=yk$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}
x	y				x	y	$k=0$	yk	$x-yk$	0

$\mu k(x-yk)=0$

$g(x,y)=\mu k(x-yk)=0$

I_1: T(1,6)
I_2: T(1,7)
I_3: Z(8) → бројач $(k)=0$
I_4: Z(11) → фиксирана 0
I_5: T(8,1)
I_6: T(7,2)
I_7: Z(3)
I_8: Z(4)
I_9: Z(5)
I_{10}: J(1,3,17)
I_{11}: S(3)
I_{12}: Z(4)
I_{13}: J(2,4,10)
I_{14}: S(4)
I_{15}: S(5)
I_{16}: J(1,1,13)
$\}$ yk
I_{17}: T(5,9) → чувамо $y \cdot k$ у R_9
I_{18}: T(6,1)
I_{19}: T(9,2)
I_{20}: Z(3)
$\}$ припрема за разлику
I_{21}: J(1,2,25)
I_{22}: S(2)
I_{23}: S(3)
I_{24}: J(1,1,21)
I_{25}: T(3,10)
$\}$ $x-yk$
I_{26}: J(10,11,29) – крај
I_{27}: S(8)
I_{28}: J(1,1,5)
I_{29}: T(8,1)

предавање

Булове алгебре

Булове алгебре треба замишљати као структуре чије се операције понашају као скуповне операције.

Пример 1: U - произвољан скуп
$\mathcal{P}(U)$ - партитивни скуп скупа U
- унија $\cup : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$
- пресек $\cap : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$
- комплементирање ${}^c : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$
- специјални елементи: $\emptyset, U \in \mathcal{P}(U)$

$(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, U)$ - типичан пример булове алгебре

Пример 2: $(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$ - исказна алгебра

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\neg$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Деф. Булова алгебра је структура $(B, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ коју чине неки скуп B, две бинарне операције $\oplus, \odot : B \times B \to B$, једна унарна операција $' : B \to B$ и два различита елемента 0 и 1 из B, при чему произвољни елементи $x, y, z \in B$ испуњавају следеће услове:

(B1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (B1') $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

(B2) $x \oplus y = y \oplus x$ (B2') $x \odot y = y \odot x$

(B3) $x \oplus (y \odot z) = (x \oplus y) \odot (x \oplus z)$ (B3') $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$

(B4) $x \oplus x' = 1$ (B4') $x \odot x' = 0$

(B5) $x \oplus 0 = x$ (B5') $x \odot 1 = x$

Скуп B се назива домен или скуп носач булове алгебре

Пример 3: $(D_6, NZS, NZD, \frac{6}{x}, 1, 6)$

D_6 - скуп делилаца броја 6 $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

Деф. $B_1 = (B_1, \oplus^1, \odot^1, '^1, 0^1, 1^1)$ и $B_2 = (B_2, \oplus^2, \odot^2, '^2, 0^2, 1^2)$ су изоморфне булове алгебре ако постоји бијекција $f : B_1 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B_2$, таква да за све $x_1, x_2 \in B$ важи:

(1) $f(x_1 \oplus^1 x_2) = f(x_1) \oplus^2 f(x_2)$ (4) $f(0^1) = 0^2$

(2) $f(x_1 \odot^1 x_2) = f(x_1) \odot^2 f(x_2)$ (5) $f(1^1) = 1^2$

(3) $f(x'^1) = (f(x))'^2$

Бијекција која задовољава набројане особине назива се изоморфизам и пишемо $B_1 \cong B_2$

Теорема 1: Ако је $|U| = |V|$ онда су $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, U)$ и $(\mathcal{P}(V), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, V)$ изоморфне.

Теорема 2: Нека су $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3$ булове алгебре. Тада важи:

(1) $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_1$

(2) Ако је $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_2$, тада је $\mathbb{B}_2 \cong \mathbb{B}_1$

(3) Ако је $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2 \cong \mathbb{B}_3$ онда је и $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_3$.

Особине булових алгебри

Теорема 1: За све елементе x и y булове алгебре $\mathbb{B}$ важи:

(1) $x \oplus x = x$, $x \odot x = x$ - идемпотенција

(2) $x \oplus 1 = 1$, $x \odot 0 = 0$ - највећи и најмањи елементи

(3) $x \oplus (x \odot y) = x$, $x \odot (x \oplus y) = x$ - апсорпција

сами доказујемо ове 3

Доказ: (1) $x \oplus x \overset{(B5)'}{=} (x \oplus x) \odot 1$
$\overset{(B4)}{=} (x \oplus x) \odot (x \oplus x')$
$= x \oplus (x \odot x')$
$\overset{(B4')}{=} x \oplus 0$
$\overset{(B5)}{=} x$

(2) $x \oplus 1 = (x \oplus 1) \odot 1$
$\overset{(B4)}{=} (x \oplus 1) \odot (x \oplus x')$
$= x \oplus (1 \odot x')$
$= x \oplus (x' \odot 1)$
$\overset{(B5')}{=} x \oplus x'$
$\overset{(B4)}{=} 1$

(3) $x \oplus (x \odot y) = (x \odot 1) \oplus (x \odot y)$
$= x \odot (1 \oplus y)$
$\overset{(2)}{=} x \odot (y \oplus 1)$
$\overset{(B5)}{=} x \odot 1$
$\overset{(B5')}{=} x$

Теорема 2: Теорема о јединствености комплементирања

Ако је $x \oplus y = 1$ и $x \odot y = 0$, онда је $y = x'$

$$\begin{aligned} y &= y \odot 1 \\ &= y \odot (x \oplus x') \\ &= (y \odot x) \oplus (y \odot x') \\ &= (x \odot y) \oplus (y \odot x') \\ &= 0 \oplus (y \odot x') \\ &= (y \odot x') \oplus 0 \\ &= (y \odot x') \oplus (x \odot x') \\ &= (x' \odot y) \oplus (x' \odot x) \\ &= x' \\ &= x' \odot (x \oplus y) \\ &= x' \odot 1 \\ &= x' \end{aligned}$$

Теорема 3: За све елементе x, y Булове алгебре B важи:

1) $(x')' = x$ инволуција

2) $0' = 1$ и $1' = 0$ комплементирање најмањег и највећег елемента

3) $(x \oplus y)' = x' \odot y'$, $(x \odot y)' = x' \oplus y'$ Де Морганови закони

Доказ:

(1) $\left.\begin{aligned} x' \oplus x &= x \oplus x' = 1 \\ x' \odot x &= x \odot x' = 0 \end{aligned}\right\} \overset{T2}{\Longrightarrow} x = (x')'$

(2) $\left.\begin{aligned} 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 \\ 0 \odot 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{T2}{\Longrightarrow} 1 = 0'$

(3) $(x \oplus y) \oplus (x' \odot y') =$

I: $$\begin{aligned} &= ((x \oplus y) \oplus x') \odot ((x \oplus y) \oplus y') = \\ &= ((y \oplus x) \oplus x') \odot (x \oplus (y \oplus y')) = \\ &= (y \oplus (x \oplus x')) \odot (x \oplus 1) = \\ &= (y \oplus 1) \odot (x \oplus 1) \\ &= 1 \odot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

II: $$\begin{aligned} &(x \oplus y) \odot (x' \odot y') = \\ &= (x' \odot y') \odot (x \oplus y) = \\ &= ((x' \odot y') \odot x) \oplus ((x' \odot y') \odot y) = \\ &= ((y' \odot x') \odot x) \oplus (x' \odot (y' \odot y)) = \\ &= (y' \odot (x' \odot x)) \oplus (x' \odot (y \odot y')) = \\ &= (y' \odot (x \odot x')) \oplus (x' \odot 0) = \\ &= (y' \odot 0) \oplus (x' \odot 0) = \\ &= 0 \oplus 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Закључујемо $x' \odot y' = (x \oplus y)'$

вежбе

Исказна алгебра

$\{\{\top, \bot\}, \land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$

Валуација је пресликавање које сваком исказном слову даје вредно

$$v : \begin{pmatrix} p & q \\ \top & \bot \end{pmatrix}$$

Интерпретација је пресликавање које свакој формули додељује вредност $\top$ или $\bot$.

Пример: $\hat{v}((p \land q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p))$

$(\top \land \bot) \Leftrightarrow (\bot \Rightarrow \bot)$

$\bot \Leftrightarrow \top$ $\quad \bot$

$\hat{v}(F) = \bot$

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \lor r \Rightarrow r \land q$ за $v : \begin{pmatrix} p & q \\ \top & \top \end{pmatrix}$

$\hat{v}(F) = \bot \lor \bot \Rightarrow \bot \land \top$

$\bot \Rightarrow \bot$

$\top$

$\hat{v}(F) = \top$

Деф. Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$ кажемо да је формула α тачна при интерпретацији v и пишемо $v \models \alpha$ ("v је модел за α")

Исказна формула је:

1) задовољива - ако постоји валуација v која је модел за α

2) таутологија - ако је свака валуација v модел за α

3) контрадикција - ако не постоји ниједна валуација v која је модел за α.

4) порецива - ако постоји валуација v таква да v није модел за

2. Написати таблицу истинитости за формулу $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	F
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

$v : \begin{pmatrix} p & q \\ \top & \top \end{pmatrix}$ - задовољива

$v : \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}$ - порецива

3) Одредити валуације, уколико постоје, које показују да је формула задовољива односно порецива

а) $((p\Rightarrow q)\wedge(p_1\Rightarrow q_1)) \Rightarrow ((p\Rightarrow p_1)\Rightarrow(q\Rightarrow q_1))$

б) $((p\Rightarrow q)\wedge(p_1\Rightarrow q_1)) \Rightarrow ((p\Leftrightarrow p_1)\Rightarrow(q\Leftrightarrow q_1))$

а) $v(\underbrace{(p\Rightarrow q)\wedge(p_1\Rightarrow q_1)}_{\top} \Rightarrow \underbrace{((p\Rightarrow p_1)\Rightarrow(q\Rightarrow q_1))}_{\bot}) = \bot$

$v((p\Rightarrow q)\wedge(p_1\Rightarrow q_1)) = \top$ и $v((p\Rightarrow p_1)\Rightarrow(q\Rightarrow q_1)) = \bot$

$v(p\Rightarrow q)=\top$ и $v(p_1\Rightarrow q_1)=\top$ и $v(p\Rightarrow p_1)=\top$ и $v(q\Rightarrow q_1)=\bot$

$v(p)=\top$ или $v(p)=\bot$ $\quad \boxed{v(p_1)=\bot} \quad \boxed{v(p)=\bot} \quad \boxed{v(q)=\top,\ v(q_1)=\bot}$

$v: \begin{pmatrix} p & q & p_1 & q_1 \\ \bot & \top & \bot & \bot \end{pmatrix}$ за коју је формула порецива

4) Испитати да ли је формула таутологија таблицом.

$$(p \overset{A}{\Rightarrow} q) \Rightarrow ((q \overset{B}{\Rightarrow} r) \overset{C}{\Rightarrow} (p\Rightarrow r))$$

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow r$	$B\Rightarrow C$	R
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

5) Свођењем на противречност доказати да је формула таутологија.

$$F: (p\vee q\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

Претпоставимо супротно, F није таутологија

$$v(F)=\bot$$

I. $(p\vee q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ и II. $(p\vee q\Rightarrow r)\Leftarrow(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

$v((p\vee q\Rightarrow r)\Rightarrow((p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)))=\bot$ и $v((p\vee q\Rightarrow r)\Leftarrow(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r))=\top$

$v(p\vee q\Rightarrow r)=\bot$ и $v((p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)=\top)$

предавање

Исказна логика

Искази

Примери: (1) Земља се окреће око Сунца
(2) Број 1 је решење једначине $x^2=2$ или број 1 није решење једначине $x^2=2$

Пример: Ако сте ви у праву, онда сам ја луд
Ви нисте у праву, ја нисам луд

Деф: Реченице које имају смисла и које су тачне или нетачне (само једно од ова два) зову се искази

- исказна слова: $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$

Деф: Дисјункција исказа p и q је исказ „p или q" у ознаци $p\vee q$ који је тачан акко је бар један од исказа p или q тачан

Деф: Конјункција исказа p и q је исказ „p и q" у ознаци $p\wedge q$ који је тачан акко су оба исказа p и q тачна
* уместо и може "а, али"

Деф: Импликација исказа p и q је исказ „ако p онда q" у ознаци $p\Rightarrow q$, који је нетачан акко је исказ p тачан, а исказ q нетачан
Исказ p назива се премиса (претпоставка), а исказ q закључак

Деф: Еквиваленција исказа p и q је исказ „p акко q" у ознаци $p\Leftrightarrow q$ који је тачан акко су оба исказа тачна или оба исказа нетачна

Деф: Негација исказа p је исказ „није p" у ознаци $\neg p$ који је тачан акко је исказ p нетачан.

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\neg$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

$p\Rightarrow q$

- ако p онда q
- из p следи q
- p повлачи q
- p имплицира q
- p је довољан услов за q
- q је потребан услов за p

$p\Leftrightarrow q$

- p је еквивалентно са q
- p акко q
- p је довољан и потребан сад

Синтакса исказне логике

Деф. Алфабет исказне логике се састоји од следећих симбола:
- пребројив скуп исказних слова $(p, q, r, s, \dots, p_1, q_1, \dots)$
- скуп исказних везника $(\land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$
- скуп логичких константи: $\top, \bot$
- помоћни симболи:), (

Деф. Исказне формуле се дефинишу индуктивно на следећи начин:
(1) исказна слова и логичке константе су исказне формуле
(2) ако су A и B исказне формуле, онда су и $(A\land B)$, $(A\lor B)$, $(A\Rightarrow B)$, $(A\Leftrightarrow B)$, $(\neg A)$ исказне формуле
(3) исказне формуле се добијају само коначном применом правила (1) и (2)

Пример: (1) $(p\land q)$ – јесте формула
$((\neg p)\Rightarrow(p\lor q))$ – јесте формула
$(\top\Rightarrow(\neg p))$ – јесте

(2) $p\land q\lor r$, $(p\Rightarrow q)(\lor r)$ нису формуле

Конвенција

- формуле означавамо са $A, B, C, \dots$
- $A\equiv B$ значи да су A и B синтаксно једнаке (као низови симбола) $(p\lor q\equiv p\lor q)$
- у грађењу формула учествује коначно много исказних слова $A=A(p_1,p_2,\dots,p_n)$
- избегавање гомилања заграда
  * брисање спољашњих заграда
  * $\neg$ се најјаче везује
  * $\land$ и $\lor$ се слабије везују

  $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ се најслабије везују

$p\lor q\lor r$ – јесте формула
$p\Rightarrow q\Rightarrow r$ – није формула

Семантика исказне логике

Деф. Двоелементна алгебра $(\{\top,\bot\}, \land, \lor, \neg, \top, \bot)$ је исказна алгебра ако су:
- $\top$ и $\bot$ два различита елемента
- $\land, \lor$ бинарне операције на скупу $\{\top,\bot\}$
- $\neg$ унарна операција на скупу $\{\top,\bot\}$

Деф. Свако пресликавање $v: \{p_1, p_2, \dots\}\to\{\top,\bot\}$ зовемо валуација исказних слова
Ако је p исказно слово, вредност $v(p)$ зовемо вредношћу исказног слова p при валуацији v.

Напомена: Ако је задата валуација онда свакој формули одговара тачно једна истинитосна вредност

$v: P\to\{\top,\bot\}$ се природно проширује до $\hat{v}: For\to\{\top,\bot\}$

Деф. Свакој исказној формули A, за дату валуацију v придружујемо вредност $\hat{v}(A)$ из скупа $\{\top,\bot\}$ дефинисану индукцијом по сложености формуле на следећи начин:
- $A=p$ онда $\hat{v}(A)=v(p)$
- $A=\top$ онда $\hat{v}(A)=\top$
- $A=\bot$ онда $\hat{v}(A)=\bot$
- $A=B\land C$ онда $\hat{v}(A)=\hat{v}(B)\,\hat{\land}\,\hat{v}(C)$
  ↳ везник ↳ операција
- $A=B\lor C$ онда $\hat{v}(A)=\hat{v}(B)\lor\hat{v}(C)$
- $A=B\Rightarrow C$ онда $\hat{v}(A)=\hat{v}(B)\Rightarrow\hat{v}(C)$
- $A=B\Leftrightarrow C$ онда $\hat{v}(A)=\hat{v}(B)\Leftrightarrow\hat{v}(C)$
- $A=\neg B$ онда $\hat{v}(A)=\neg\hat{v}(B)$

* $\hat{v}(A)$ – вредност формуле A при интерпретацији v за валуацију v

- Ако је $\hat{v}(A)=\top$ кажемо да је формула тачна за валуацију v.
- Ако је $\hat{v}(A)=\bot$ кажемо да је формула нетачна за валуацију v.

Деф. (1) Формула A је задовољива акко постоји валуација v таква да је $\hat{v}(A)=\top$
(2) Формула A је таутологија акко за сваку валуацију v важи $\hat{v}(A)=\top$ ознака $(\models A)$
(3) Формула A је порецива акко постоји валуација v таква да је $\hat{v}(A)=\bot$
(4) Формула је контрадикција акко за сваку валуацију v важи $\hat{v}(A)=\bot$

Деф.: Формуле A и B су логички (семантички) еквивалентне у ознаци $A\equiv B$ акко $\models A\Leftrightarrow B$ тј. уколико је $\hat{v}(A)=\hat{v}(B)$ за сваку валуацију v.

Таутологије:

(1) $p\lor\neg p$ Закон искључења трећег
(2) $\neg(p\land\neg p)$ Закон непротивречности
(3) $(\neg p\Rightarrow\bot)\Rightarrow p$ Закон свођења на апсурд
(4) $p\land(p\Rightarrow q)\Rightarrow q$ modus ponens
(5) $((p\Rightarrow q)\land\neg q)\Rightarrow\neg p$ modus tolens
(6) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$ Закон контрапозиције
(7) $\neg(p\land q)\Leftrightarrow\neg p\lor\neg q$, $\neg(p\lor q)\Leftrightarrow\neg p\land\neg q$ Де Морганови закони
(8) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg p\lor q$ закон уклањања импликације
(9) $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)\land(q\Rightarrow p)$ закон уклањања еквиваленције
(10) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow((q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r))$ транзитивност импликације

Теорема: Ако је $\models A$ и $\models A\Rightarrow B$ таутологија, тада је $\models B$.

Доказ: Нека је $\models A$ и $\models A\Rightarrow B$ тј. за сваку валуацију v важи
$\hat{v}(A)=\top$, $\hat{v}(A\Rightarrow B)=\top$ тј. $\hat{v}(A)\Rightarrow\hat{v}(B)=\top$

$\top\Rightarrow\hat{v}(B)=\top$ дакле $\hat{v}(B)=\top$ тј. $\models B$ ∎

Методе за доказивање таутологије

I Таблични метод:

- истинитосну вредност формуле проверавамо тако што одређујемо интерпретацију за сваку валуацију исказних слова v.
- за формулу $A = A(p_1, \dots, p_n)$ имамо 2^n валуација
- таблица са 2^n врста

① Испитати да ли је формула таутологија
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow (p \wedge q))$

p	q	$p\Rightarrow q$	$\neg p$	$p\wedge q$	$\neg p\Rightarrow(p\wedge q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

Формула није $\models$.

II Свођење на апсурд (противречност):

- ако постоји валуација v таква да је $\hat{v}(A)=\bot$ онда A није таутологија.
- а ако не постоји таква валуација, онда формула A јесте таутологија

① Доказати да је формула $F: (p\Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ таутологија

Претпоставимо супротно, тј. да формула није таутологија. Онда постоји бар једна v таква да је $\hat{v}((p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)) = \bot$
Тада је $\hat{v}(p\Rightarrow q)=\top$ и $\hat{v}(\neg q\Rightarrow \neg p)=\bot$
$\hat{v}(p\Rightarrow q) = \bot$ $\quad$ $\hat{v}(\neg q)=\top$ и $\hat{v}(\neg p)=\bot$
$\hat{v}(q)=\bot$ и $\hat{v}(p)=\top$

претпоставка није добра ⇒ формула јесте таутологија

Деф. Исказна слова и негације исказних слова називају се ЛИТЕРАЛИМА.

Деф. Исказна формула A је у КОНЈУНКТИВНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ ако је облика $C_1\wedge C_2\wedge\dots\wedge C_n$ где је свака формула C_i ДИСЈУНКЦИЈА литерала.
Исказна формула A је у ДИСЈУНКТИВНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ ако је облика $C_1\vee C_2\vee\dots\vee C_n$ где је свака формула C_i КОНЈУНКЦИЈА литерала.

Пример: (1) $\underbrace{(p\vee q\vee\neg r)}_{C_1}\wedge\underbrace{(\neg p\vee q)}_{C_2}$ КНФ – конјунктивна нормална форма

(2) $\underbrace{(p\wedge q)}_{C_1}\vee\underbrace{(\neg p\wedge\neg r)}_{C_2}\vee\underbrace{\neg q}_{C_3}$ ДНФ – дисјунктивна нормална форма

(3) $\underbrace{p}_{C_1}\wedge\underbrace{q}_{C_2}\wedge\underbrace{\neg r}_{C_3}$ је КНФ и ДНФ → доказ за КНФ
$\underbrace{(p\wedge q\wedge\neg r)}_{C_1}$ → доказ за ДНФ

Алгоритам за свођење на КНФ

- елиминација еквиваленције
  $A\Leftrightarrow B \equiv (A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$
- елиминација импликације
  $A\Rightarrow B\equiv \neg A\vee B$
- Де Морганови закони
  $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$
  $\neg(A\wedge B)\equiv \neg A\vee\neg B$
- дупла негација
  $\neg\neg A\equiv A$
- примена дистрибутивних закона
  $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
  $(A\wedge B)\vee C\equiv(A\vee C)\wedge(B\vee C)$

* За ДНФ су исти кораци сем последњег (сваки знак у ДНФ се мења $\wedge\Rightarrow\vee$, $\vee\Rightarrow\wedge$)

$((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge\neg p$
$(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge\neg p$

III Свођење на КНФ

Формула A која је у КНФ тј. $A=C_1\wedge C_2\wedge\dots\wedge C_n$ је таутологија акко је свака формула C_i таутологија $1\le i\le n$.
Формула C_i је таутологија акко се у њој јавља неко исказно слово заједно са својом негацијом.

Пример: $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p) \equiv \neg(\neg p\vee q)\vee(\neg\neg q\vee\neg p)$
$\equiv(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee q\vee\neg p$
$\equiv(p\wedge\neg q)\vee q\vee\neg p$
$\equiv\underbrace{(p\vee q\vee\neg p)}_{C_1}\wedge\underbrace{(\neg q\vee q\vee\neg p)}_{C_2}$ КНФ

C_1 и C_2 су таутологије ⇒ A је таутологија

Хипотезе и последице

Нека је A исказна формула и $v: P\to\{\top,\bot\}$ валуација исказних слова

Деф.: (а) Валуација v је модел за исказну формулу A ако је $\hat{v}(A)=\top$

(б) Валуација v је модел за скуп исказних формула Γ ако за свако $A\in\Gamma$ важи $\hat{v}(A)=\top$

Деф.: Формула A је семантичка (логичка) последица скупа формула Γ у ознаци $\Gamma\models A$ ако свака валуација v која задовољава Γ (која је модел за Γ и за A) тј. за сваку валуацију за коју су тачне све формуле скупа Γ, тачна је и формула A. Елементи скупа Γ се зову хипотезе а A

- Ако је Γ коначан скуп $\Gamma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ онда уместо $\Gamma \models A$ пишемо $B_1, B_2, \dots, B_n \models A$
- $\emptyset \models A$ акко $\models A$

Теорема 1:
(1) Ако $A \in \Gamma$, онда је $\Gamma \models A$
(2) За сваку формулу A важи $\bot \models A$
(3) Ако је $\Gamma \models A$ и притом важи $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ тада $\Gamma_1 \models A$.

Теорема 2: Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ исказне формуле. Тада важи $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ акко $\models A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n \Rightarrow A$

Доказ: $(\rightarrow)$ Нека је $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ и нека је v произвољна валуација:

(1) ако је $\hat{v}(A_i) = T$ за све $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
тада $\hat{v}(A) = T$ јер је $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$
па је $\hat{v}(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n \Rightarrow A) = T \Rightarrow T = T$

(2) ако је $v(A_i) = \bot$ за бар једно $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
тада је $\hat{v}(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n) = \bot$
па је $\hat{v}(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n \Rightarrow A) = \bot \Rightarrow \hat{v}(A) = T \Rightarrow \models A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n \Rightarrow A$

$(\leftarrow)$ Нека је $\models A_1 \land A_2 \land \dots \land A_n \Rightarrow A$. Нека је v валуација која задовољава (која је модел) за све формуле $A_1, A_2, \dots, A_n$ тј. $\hat{v}(A_i) = T$, за све $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{v}(A_1 \land \dots \land A_n) = T \\ \text{из претпоставке } \hat{v}(A_1 \land \dots \land A_n \Rightarrow A) = T \end{array}\right\} \hat{v}(A) = T$$

то јест v је модел за A. Дакле $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ ▨

Последица (Т2):
(1) $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ акко $\models A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \dots))$
(2) $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ акко $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow A$

Теорема дедукције: $\Gamma, A \models B$ акко $\Gamma \models A \Rightarrow B$

-вежбе-

$F: (\neg p \Rightarrow (q \land \neg q)) \Rightarrow p$ доказати да је таутологија

Претпоставимо супротно, то јест $\hat{v}(F) = \bot$

$\hat{v}((\neg p \Rightarrow (q \land \neg q)) \Rightarrow p) = \bot$
$\hat{v}(\neg p \Rightarrow (q \land \neg q)) = T$ и $v(p) = \bot$
$\hat{v}(T \Rightarrow (q \land \neg q)) = T$
$\hat{v}(q \land \neg q) = T$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{v(q) = T} \\ \boxed{v(\neg q) = T} \\ v(q) = \bot \end{array}\right] \lightning \quad \text{Дакле, } F \text{ јесте таутологија}$$

Деф. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ у ознаци $\Gamma \models \alpha$ ако свака валуација задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

Теорема 1: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$ акко $\models \alpha_1 \land \alpha_2 \land \dots \land \alpha_n \Rightarrow \beta$

Теорема 2: Нека је Γ скуп формула и α и β неке формуле, тада важи $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ акко $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \beta$

① Нека је скуп формула $\Gamma = \{p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, p\}$. Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа Γ.

(а) $p \land \neg q$ (г) $p \land q \land r$
(б) $r \Rightarrow q$ (д) $\neg q \Rightarrow \neg p$
(в) $\neg r$ (ђ) $p \Rightarrow \bot$

$\{p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, p\} \models p \land \neg q$

Посматрајмо валуацију v која задовољава скуп формула Γ
Деф. $\hat{v}(p \Rightarrow q) = T$ и $\hat{v}(\neg r \Rightarrow \neg q) = T$ и $\hat{v}(p) = T$
$\boxed{v(q) = T}$ $\hat{v}(\neg r) = \bot$ $\boxed{v(p) = T}$
$\boxed{v(r) = T}$

Валуација $v: \begin{pmatrix} p & q & r \\ T & T & T \end{pmatrix}$ задовољава скуп формула Γ. Проверимо да ли та валуација задовољава дате формуле

а) $p \land \neg q = T \land \bot = \bot$ $p \land \neg q$ није логичка последица скупа формуле Γ
б) $r \Rightarrow q = T \Rightarrow T$ ~~јесте логичка последица скупа формуле Γ~~
в) $\neg r = \bot$ није логичка последица
г) $p \land q \land r = T \land T \land T = T$ јесте
д) $\neg q \Rightarrow \neg p = \bot \Rightarrow \bot = T$ јесте
ђ) $p \Rightarrow \bot = T \Rightarrow \bot = \bot$ није

③ Доказати да је формула $p\vee r\Rightarrow q$ логичка последица скупа формула $\{p\Rightarrow q, r\Rightarrow q\}$

$\Gamma\models p\vee r\Rightarrow q \qquad \Gamma=\{p\Rightarrow q, r\Rightarrow q\}$

$p\Rightarrow q, r\Rightarrow q\models p\vee r\Rightarrow q$

$\models(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow\beta$

$\models((p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q))\Rightarrow(p\vee r\Rightarrow q)$ – проверавамо да ли је ова формула таутологија

Свођењем на противречност, покажимо да је дата формула таутологија

$\hat{v}(F)=\perp$

$\hat{v}(\underbrace{((p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q))}_{T}\Rightarrow\underbrace{(p\vee r\Rightarrow q)}_{\perp})=\perp$

$\hat{v}((p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q))=T$ и $\hat{v}(\underbrace{p\vee r}_{T}\Rightarrow \underbrace{q}_{\perp})=\perp$

$\hat{v}(p\Rightarrow q)=T$ и $\hat{v}(r\Rightarrow q)=T$ $\qquad \hat{v}(p\vee r)=T \quad \hat{v}(q)=\perp$

$\boxed{v(p)=\perp} \quad \boxed{v(r)=\perp} \quad \perp\vee\perp=\perp$ ↯ $\boxed{v(q)=\perp}$

Дакле, формула $\models(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q)\Rightarrow(p\vee r\Rightarrow q)$ је таутологија, а самим тим формула $p\vee r\Rightarrow q$ је логичка последица скупа формула $\Gamma=\{p\Rightarrow q, r\Rightarrow q\}$

Деф. Исказне формуле α и β су логички еквивалентне у ознаци $\alpha\equiv\beta$, ако важи $\alpha\models\beta$ и $\beta\models\alpha$. Дакле, формуле α и β су логички еквивалентне уколико су њихове вредности међусобно једнаке за било коју валуацију.

Теорема: Формуле α и β су логички еквивалентне акко је исказна формула $\alpha\Leftrightarrow\beta$ таутологија, тј. $\models\alpha\Leftrightarrow\beta$.

4. Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули $p\Rightarrow\neg(q\vee r)$

а) $\neg p\vee q\vee\neg r$
б) $\neg p\vee\neg(q\Rightarrow\neg r)$
в) $\neg q\wedge\neg r\Rightarrow\neg p$
г) $\neg p\vee\neg(\neg q\Rightarrow r)$

$p\Rightarrow q\equiv\neg p\vee q$
$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$
$\neg(\neg p\vee\neg\neg q)\equiv\neg(\neg p\vee q)$
$\equiv\neg\neg p\wedge\neg q$
$\equiv p\wedge\neg q$

F: $p\Rightarrow\neg(q\vee r)\equiv p\Rightarrow(\neg q\wedge\neg r)$
$\equiv\neg p\vee(\neg q\wedge\neg r)$

а) $\neg p\vee q\vee r$ није

б) $\neg p\vee\neg(q\Rightarrow\neg r)\equiv\neg p\vee\neg(\neg q\vee\neg r)$
$\equiv\neg p\vee(\neg\neg q\wedge\neg\neg r)$
$\equiv\neg p\vee(q\wedge r)$ није

в) $\neg q\wedge\neg r\Rightarrow\neg p\equiv\neg(\neg q\wedge\neg r)\vee\neg p$
$\equiv(\neg\neg q\vee\neg\neg r)\vee\neg p$
$\equiv(q\vee r)\vee\neg p$
$\equiv\neg p\vee(q\vee r)$ није

г) $\neg p\vee\neg(\neg q\Rightarrow r)\equiv\neg p\vee\neg(\neg\neg q\vee r)$
$\equiv\neg p\vee\neg(q\vee r)$
$\equiv\neg p\vee(\neg q\wedge\neg r)$ јесте

*домаћи: 6. задатак

⑦ Четири пријатеља – Милена, Сузана, Алекса и Милан осумњичени су за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:
МИЛЕНА: Ако је Сузана крива, крив је и Милан
СУЗАНА: Милена је крива, а Милан није крив
АЛЕКСА: Ја нисам крив, али су Милена или Милан криви
МИЛАН: Ако Милена није крива, тада је крив Алекса.

(а) Да ли су ове четири изјаве непротивречне, односно да ли је скуп формула добијен превођењем у исказну логику непротивречан
(б) Ако свако говори истину, ко је крив?

РЕШЕЊЕ:
p – Милена је крива $\qquad$ (1) $q\Rightarrow s$
q – Сузана је крива $\qquad$ (2) $p\wedge\neg s$
r – Алекса је крив $\qquad$ (3) $\neg r\wedge(p\vee s)$
s – Милан је крив $\qquad$ (4) $\neg p\Rightarrow r$

Претпоставимо да постоји валуација v у којој су све четири формуле тачне и одредимо вредности исказних слова p,q,r,s

$\hat{v}(\underbrace{q}_{\perp}\Rightarrow s)=T$ и $\hat{v}(p\wedge\neg s)=T$ и $\hat{v}(\neg r\wedge(p\vee s))=T$ и $\hat{v}(\neg p\Rightarrow r)=T$

$\boxed{v(q)=\perp}$ $\quad \boxed{v(p)=T}$ $\boxed{v(s)=\perp}$ $\quad T\wedge T=T \quad \perp\Rightarrow r=T \quad \boxed{v(r)=\perp}$

$v:\begin{pmatrix}p & q & r & s\\ T & \perp & \perp & \perp\end{pmatrix}$

Добили смо да су све 4 формуле тачне за валуацију $v:\begin{pmatrix}p & q & r & s\\ T & \perp & \perp & \perp\end{pmatrix}$ што значи да је горњи скуп формула непротивречан.
Дакле, Милена је крива јер је једино $v(p)=T$

⑧ Превести следећа тврђења у исказне формуле и одредити исправност аргументације:
(1) Ако су једине особе присутне у кући у време убиства били батлер и собарица, тада је батлер убица или је собарица убица
(2) Једине особе присутне у кући у време убиства су били батлер и собарица
(3) Ако је собарица убица, онда је собарица имала мотив за убиство
(4) Собарица није имала мотив за убиство.
ЗАКЉУЧАК: Батлер је убица.

p – Једине особе за време убиства... $\qquad$ 1) $p\Rightarrow q\vee r$
q – Батлер је убица $\qquad$ 2) p
r – Собарица је убица $\qquad$ 3) $r\Rightarrow s$
s – Собарица је имала мотив за убиство $\qquad$ 4) $\neg s$
$\qquad\qquad$ q

$\models((p\Rightarrow q\vee r)\wedge p\wedge(r\Rightarrow s)\wedge\neg s\Rightarrow q)$ таутологија?

$\hat{v}(\underbrace{(p\Rightarrow q\vee r)\wedge p\wedge(r\Rightarrow s)\wedge\neg s}_{T}\Rightarrow\underbrace{q}_{\perp})=\perp$

$\hat{v}(p\Rightarrow q\vee r)=T$ $\quad \hat{v}(p)=T$ $\quad \hat{v}(r\Rightarrow s)=T$ $\quad \hat{v}(\neg s)=T$ $\quad \boxed{v(q)=\perp}$
$T\Rightarrow\perp\vee\perp$ $\quad \boxed{v(p)=T}$ $\quad \boxed{v(r)=\perp}$ $\quad \boxed{v(s)=\perp}$
$T\Rightarrow\perp=\perp$ ↯

Аргументација је исправна јер смо добили да је формула таутологија.

(9) Пера, Влада и Сава су другари који често излазе заједно на пиће у кафану. Познато је да свако од њих пије двек исто пиће и то или вино или пиво (само једно од тога, јер знају ако се пиће меша, ујутро боли глава). У вези тога ко од њих шта пије, познати су следећи искази:

(1) Ако Пера пије пиво, онда Влада пије исто пиће као и Сава

(2) Ако Влада наручује пиво, онда Сава пије другачије пиће од Периног.

(3) Ако Сава наручује вино, онда Пера пије исто пиће као и Сава.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За кога од њих са сигурношћу можете да тврдите шта пије?

p – Пера пије пиво   1) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

q – Влада пије пиво   2) $q \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg p)$

r – Сава пије пиво   3) $\neg r \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

p	q	r	1)	2)	3)	1)∧2)∧3)
T	T	T	T	⊥	T	⊥
T	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥
T	⊥	T	⊥	T	T	⊥
T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥
⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥
⊥	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T

Има 3 валуације, па јесу противречне

→ const. ⇒ Пера пије вино

КНФ-ДНФ алгоритам

5. Доказати да су следеће формуле таутологије:

в) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
$\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$
$\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg\neg q) \vee \neg p$
$\equiv ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p$
$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p$
$\equiv ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$
$\equiv (p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)$
$\equiv (\top \vee q) \wedge (\top \vee p)$
$\equiv \top \wedge \top$
$\equiv \top$

Метод резолуције

(6) Методом резолуције доказати да је F таутологија.
$F: (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Испитаћемо да ли је $\neg F$ задовољива

ДНФ: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \equiv (\neg p \vee q) \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow (\neg p \vee r))$
$\equiv (\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r))$
$\equiv (\neg p \vee q) \Rightarrow ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r))$
$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$
$\equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$ ДНФ

$\neg F \equiv \neg((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r)$
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$ КНФ

КЛАУЗА
ЛИТЕРАЛ

$C_1: \neg p, q$
$C_2: \neg q, r$
$C_3: p$
$C_4: \neg r$
$C_5: q \; (C_1, C_3, \neg p, p)$
$C_6: r \; (C_2, C_5, q, \neg q)$
$C_7: \emptyset \; (C_4, C_6, r, \neg r)$

(7) Методом резолуције доказати да је F таутологија.
$F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$

Докажимо да је $\neg F$ контрадикција

$F \equiv (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$
$\equiv (\neg r \vee p) \Rightarrow (\neg((p \wedge q) \vee r) \vee (p \wedge (q \vee r)))$
$\equiv (\neg r \vee p) \Rightarrow ((\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee r)))$
$\equiv (\neg r \vee p) \Rightarrow (((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee r)))$
$\equiv \neg(\neg r \vee p) \vee (((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee r)))$
$\equiv (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$\equiv (r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ДНФ

$\neg F \equiv (\neg r \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

$C_1: \neg r, p$
$C_2: p, r$
$C_3: q, r$
$C_4: \neg p, \neg q$
$C_5: \neg p, \neg r$
$C_6: p, q \;$ Res $(C_1, C_3, \neg r, r)$
$C_7: p \;$ Res $(C_1, C_2, \neg r, r)$
$C_8: \neg q \;$ Res $(C_4, C_7, p, \neg p)$
$C_9: r \;$ Res $(C_8, C_3, \neg q, q)$
$C_{10}: \neg p \;$ Res $(C_9, C_5, r, \neg r)$
$C_{11}: \emptyset \;$ Res $(C_7, C_{10}, \neg p, p)$

Дедукција у исказном рачуну

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему

$\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
акко $p \wedge q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
акко $p \wedge q \Rightarrow r, p \vdash q \Rightarrow r$
акко $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash r$

1. $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash p \wedge q \Rightarrow r$ (ax)
2. $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash p$ (ax)
3. $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash q$ (ax)
4. $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash p \wedge q$ ($\wedge$u) 2,3
5. $p \wedge q \Rightarrow r, p, q \vdash r$ ($\Rightarrow$e) 1,4
6. $p \wedge q \Rightarrow r, p \vdash q \Rightarrow r$ ($\Rightarrow$u) у 5
7. $p \wedge q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ($\Rightarrow$u) у 6
8. $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ у 7

Дедуктивни систем (Формалне теорије)

Деф. Дедуктивни систем (формална теорија) $\mathcal{T}$ је уређена четворка (S, For, Ax, R) где је:

- S највише пребројив скуп полазних симбола (азбука, алфабет). Коначни низови симбола из S су речи. Скуп свих речи означавамо са S^*.
- $For \subseteq S^*$ For – скуп формула
- $Ax \subseteq For$ Ax – аксиоме
- R је коначан скуп правила извођења и свако правило је облика

$r: \frac{A_1,\dots,A_n}{A}$, $A_1,\dots,A_n \in For$, $A \in For$

Деф. (1) Коначан низ формула $B_1, B_2, \dots, B_n$ је доказ у формалној теорији $\mathcal{T}$ ако за све $i=1,\dots,n$
– B_i је аксиома или
– B_i је добијена из претходних формула низа
– $B_1, B_2, \dots, B_{i-1}$ применом неког правила R

(2) Формула B је теорема формалне теорије $\mathcal{T}$ у ознаци $\vdash B$ ако је последњи члан неког доказа тј. постоји доказ $B_1, B_2, \dots, B_n, B$ у формалној теорији $\mathcal{T}$.

(3) Формална теорија $\mathcal{T}$ је одлучива ако постоји ефективни поступак којим се за произвољну формулу утврђује да ли је теорема или не.

(4) Формула A је синтаксна последица скупа формула $\mathcal{F}$ у ознаци $\mathcal{F} \vdash A$ ако постоји коначан низ $B_1,\dots,B_n$ формула из скупа формула такав да је $B_n = A$ и за свако $i=1,\dots,n$
— $B_i \in Ax$
— $B_i \in \mathcal{F}$ или
— B_i је добијена из претходних чланова низа помоћу неког од правила извођења R. У том случају формуле скупа $\mathcal{F}$ се зову премисе или хипотезе.

Исказни рачун као формална теорија (Природна дедукција)

Секвент $\mathcal{F} \vdash A$ је доказив ако се може добити применом следећих правила извођења коначан број пута:

(1) Аксиома $\frac{}{\mathcal{F}, A \vdash A}$ (ax)

(2) Слабљење $\frac{\mathcal{F}\vdash A}{\mathcal{F}, B \vdash A}$ (sl)

(3) Увођење импликације $\frac{\mathcal{F}, A\vdash B}{\mathcal{F}\vdash A\Rightarrow B}$ ($\Rightarrow_u$)

(4) Елиминација импликације $\frac{\mathcal{F}\vdash A \quad \mathcal{F}\vdash A\Rightarrow B}{\mathcal{F}\vdash B}$ ($\Rightarrow_E$)

(5) Увођење конјункције $\frac{\mathcal{F}\vdash A \quad \mathcal{F}\vdash B}{\mathcal{F}\vdash A\wedge B}$ ($\wedge_u$)

(6) Елиминација конјункције $\frac{\mathcal{F}\vdash A\wedge B}{\mathcal{F}\vdash A}$ ($\wedge_E^l$) $\frac{\mathcal{F}\vdash A\wedge B}{\mathcal{F}\vdash B}$ ($\wedge_E^d$)

(7) Увођење дисјункције $\frac{\mathcal{F}\vdash A}{\mathcal{F}\vdash A\vee B}$ ($\vee_u^l$) $\frac{\mathcal{F}\vdash A}{\mathcal{F}\vdash B\vee A}$ ($\vee_u^d$)

(8) Елиминација дисјункције $\frac{\mathcal{F}\vdash A\vee B,\ \mathcal{F},A\vdash C,\ \mathcal{F},B\vdash C}{\mathcal{F}\vdash C}$ ($\vee_E$)

(9) Увођење негације $\frac{\mathcal{F},A\vdash\bot}{\mathcal{F}\vdash\neg A}$ ($\neg_u$)

(10) Елиминација негације $\frac{\mathcal{F}\vdash A,\ \mathcal{F}\vdash \neg A}{\mathcal{F}\vdash\bot}$ ($\neg_E$)

(11) Класична противречност $\frac{\mathcal{F},\neg A\vdash\bot}{\mathcal{F}\vdash A}$ ($\bot_c$)

еквиваленција $A\Leftrightarrow B = (A\Rightarrow B)\vee(B\Rightarrow A)$

- Ако је секвент $\mathcal{F}\vdash A$ доказив, кажемо да је формула A синтаксна последица скупа формула $\mathcal{F}$.
- Специјално, ако је $\emptyset\vdash A$ кажемо да је формула A теорема и пишемо $\vdash A$.

Став потпуности: $\mathcal{F}\models A$ акко $\mathcal{F}\vdash A$
- Специјално, $\models A$ акко $\vdash A$ $\models A$ – таутологија, $\vdash A$ теорема

Језик предикатске логике

– Језик предикатске логике се састоји из скупа логичких и скупа нелогичких симбола.

– Скуп логичких симбола чине:
- операцијски симболи: $f, g, h, f_1, g_1, h_1, \dots$
- релацијски симболи: $R, P, Q, S, \dots$
- симболи константи: $a, b, c, d, \dots$

при чему се подразумева да је дефинисана и функција арности ar која сваком операцијском и релацијском симболу додељује неки природан број тзв. арност или дужина.

$\mathcal{L} = Rel_\mathcal{L}\cup Fun_\mathcal{L}\cup Const_\mathcal{L}$ $ar: Rel_\mathcal{L}\cup Fun_\mathcal{L}\to\mathbb{N}$

Деф. Терм (израз):
(1) променљиве и симболи константи су изрази
(2) ако су $t_1,\dots,t_n$ изрази и f операцијски симбол дужине n, онда је $f(t_1,\dots,t_n)$ израз
(3) изрази се добијају само коначном применом правила (1) и (2)

Пример: $x+1$; $((x+1)\cdot y+z)^2$ → изрази

$Term_\mathcal{L}$ – скуп свих израза

Деф. Атомске формуле:
(1) Ако су $t_1,t_2\in Term_\mathcal{L}$, онда је $t_1=t_2$ атомска формула
(2) Ако су $t_1,\dots,t_n\in Term_\mathcal{L}$ и R релацијски симбол дужине n онда је $R(t_1,\dots,t_n)$ атомска формула

Пример: $x+y=z$
$x+7\le 8$

Деф.: Формуле:

(1) Атомске формуле су формуле.
(2) Ако су A и B формуле и x променљива, онда су и $\neg A$, $(A \lor B)$, $(A \land B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(\forall x)A(x)$, $(\exists x)A(x)$ формуле.
(3) Формуле се могу добити само применом правила (1) и (2) коначан број пута.

Пример:
$(x+y=y+x)$
$(\forall x)(x+y=y+x)$
$(\forall y)(\forall x)(x+y=y+x)$
$(\forall y)(\forall x)(x+y=y+x) \land (\forall x)(x \le x)$
$(\forall y)(\forall x)(x+y=y+x) \land (x \le x)$

Деф. Ако је променљива x у формули A под дејством квантификатора, кажемо да је то појављивање променљиве x везано. У супротном, појављивање променљиве је слободно.

Деф. Формула без слободних променљивих назива се затворена формула или реченица.

Пример: $(\forall x)(\forall y)\ (x+y=y+x)$
$(\forall x)\ x \le x$

Напомена: Ако језик $\mathcal{L}$ садржи симбол $\in$ (релација припадања) могу се увести ограничени квантификатори
$(\exists x \in S)\ A(x)$ је замена за $(\exists x)(x \in S \land A(x))$
$(\forall x \in S)\ A(x)$ је замена за $(\forall x)(x \in S \Rightarrow A(x))$
$(\exists_1 x)\ A(x)$ је замена за $(\exists x)(A(x) \land (\forall y)(A(y) \Rightarrow x=y))$

вежбе

(2) Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \land q \Rightarrow r)$ теорема дата у дедуктивном систему

акко $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \land q \Rightarrow r$
акко $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash r$

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (ax)
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash p \land q$ (ax)
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash p$ $(\land_E^L)$ из 2.
4. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash q$ $(\land_E^D)$ из 2.
5. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash q \Rightarrow r$ $(\Rightarrow_E)$ из 1. и 3.
6. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \land q \vdash r$ $(\Rightarrow_E)$ из 4. и 5.
7. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \land q \Rightarrow r$ $(\Rightarrow_u)$ у 6.
8. $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \land q \Rightarrow r)$ $(\Rightarrow_u)$ у 7.

(9) $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \land q))$

акко $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p \vdash p \Rightarrow \neg(p \land q)$
акко $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p \vdash \neg(p \land q)$
акко $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, \neg\neg(p \land q) \vdash \bot$

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, \neg\neg(p \land q) \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$ (ax)
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, \neg\neg(p \land q) \vdash p$ (ax)
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, \neg\neg(p \land q) \vdash \neg\neg(p \land q)$ (ax)
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, p \land q \vdash p \land q$ из 3.
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, p \land q \vdash q$ $(\land_E^D)$ из 4.
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p \land q \vdash p \Rightarrow q$ $(\Rightarrow_u)$ из 5.
7. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, p \land q \vdash p \Rightarrow q$ (SL) из 6.
8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, p \land q \vdash \neg p$ $(\Rightarrow_E)$ из 1. и 7.
9. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p, p \land q \vdash \bot$ $(\neg E)$ из 2. и 8.
10. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p, p \vdash \neg(p \land q)$
11. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p \vdash p \Rightarrow \neg(p \land q)$ $(\Rightarrow_E)$
12. $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \land q))$

Предикатска логика првог реда

(1) Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:
$Rel = \{R, S\}$, $Fun = \{F, G\}$, $Const = \{e\}$, при чему је $ar(R)=2$, $ar(S)=1$, $ar(F)=2$, $ar(G)=1$
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$ — x, y - променљиве (терми)
$ar(G)=1$ ✓
$ar(F)=2$ ✓
$G(x)$ - терм
$G(y)$ - терм
$F(G(x), G(y))$ - терм (израз)
израз израз

(б) $S(F(x, G(e)))$ — x - променљива, e - константа } терм
$ar(G)=1$ ✓
$ar(F)=2$ ✓
$G(e)$ - терм
$F(x, G(e))$ - терм
$S(F(x, G(e)))$ - атомична формула
релација терм

(в) $R(x, S(x))$
x - терм
$S(x)$ - атомична формула
} $R(x, S(x))$ - није ништа јер релације делују само на терме а $S(x)$ је атомична формула

(г) $F(G(x))$
x - терм
$G(x)$ - терм
$ar(G)=1$
$ar(F)=1$ ↯ јер је $ar(F)=2$

(д) $R(e, e)$
$ar\ R = 2$
e - терм $\Rightarrow R(e,e)$ - атомична формула

(ђ) $(\forall x)(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$ } није ништа јер је $F(x,y)$ терм, а не формула
терм терм
атомична формула

(е) $F(F(x, e), S(e))$ · није ништа јер $S(e)$ није терм
терм атомична

ж) $(\forall x)(\exists y)\, R(x,y)$

$R(x,y)$ – атомична формула

$(\exists y) R(x,y)$ – формула

$(\forall x)(\exists y) R(x,y)$ – формула

з) $(\forall x)\,(S(G(e)) \Leftrightarrow (\forall y) R(x,y))$

e – константа – терм

$G(e)$ – терм

$S(G(e))$ – формула

$R(x,y)$ – атомична формула

$(\forall y) R(x,y)$ – формула

$S(G(e)) \Leftrightarrow (\forall y) R(x,y)$ – формула

$(\forall x)(S(G(e)) \Leftrightarrow (\forall y) R(x,y))$ – формула

(2.) Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

а) Сви природни бројеви су рационални.

б) Неки природни бројеви су рационални

в) Ниједан природан број није рационалан

г) Неки природни бројеви нису рационални

[а) $(\forall x)(N(x) \Rightarrow Q(x))$ тј. $(\forall x)(\neg N(x) \vee Q(x))$

[г) $(\exists x)(N(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ тј. $(\forall x)(\neg N(x) \vee \neg Q(x))$

Деф.: Интерпретација језика $\mathcal{L}$ (нелогичких симбола) у скупу M је пресликавање J које:

* сваком релацијском симболу дужине n придружује једну n-арну релацију скупа M.
* сваком функцијском симболу дужине n придружује једну n-арну операцију скупа M.
* сваком симболу константе придружује један елеменат скупа M.

4. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$Rel = \{R, S\}$, $Fun = \{F, G\}$, $Const = \{e\}$

при чему је $ar(R)=2$, $ar(S)=1$, $ar(F)=2$ и $ar(G)=1$ и нека су дате следеће интерпретације:

(а) интерпретација на скупу $\mathbb{Z}$

$J(R) = \leq$

$J(S)$ = бити позитиван број

$J(F) = +$

$J(G) = g$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = -x$

$J(e) = 0$

у $\mathbb{Z}$ $t_1: F(F(x,e), G(y))$ $\quad \mu_Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu_N = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$t_1^{\mathbb{Z}}[\mu_Z] = J(F)(J(F)(\mu_Z(x), J(e)), J(G)(\mu_Z(y))) = (-2+0)+(-1) = -3$

у N: $t_1: F(F(x,e), G(y))$

$t_1^N[\mu_N] = J(F)(J(F)(\mu_N(x), J(e)), J(G)(\mu_N(y))) = (2\cdot 1)(2\cdot 1+1) = 6$

$\varphi = R(F(x,e), G(y))$

у $\mathbb{Z}$:

$t_1^{\mathbb{Z}}[\mu_Z] = J(F)(\mu_Z(x), J(e)) = -2+0 = -2$

$t_2^{\mathbb{Z}}[\mu_Z] = J(G)(\mu_Z(y)) = -1$

$\varphi = R(-2,-1)$ „$-2 \leq -1$" T

3) а) $\underbrace{(\exists x)(\forall y)\, R(x,y)}$. – „постоји цео број тако да је за сваки цео број y испуњено $x \leq y$"

у $\mathbb{Z}$: $\perp$

б) у N: $\xrightarrow{\text{бити позитиван}}$

$\underbrace{\underbrace{(\forall x)\, S(x)}_{\perp} \vee \underbrace{(\forall x) \neg S(x)}_{\perp}}_{\perp}$

– предавање

Интерпретација језика и предикатских формула

Деф. Под интерпретацијом језика $\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Const_{\mathcal{L}}$ подразумевамо уређени пар (M, J) где је M непразан скуп који називамо домен интерпретације, а J је ф-ја која:

- сваком релацијском знаку $R \in Rel_{\mathcal{L}}$ дужине n додељује једну n-арну релацију R^M на скупу M, тј. $J(R) = R^M$, где је $R^M \subseteq M^n$.
- сваком операцијском знаку $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ дужине n додељује једну n-арну операцију f^M на скупу M, тј. $J(f) = f^M$ где је $f^M: M^n \to M$.
- сваком симболу константе $c \in Const_{\mathcal{L}}$ додељује један елемент c^M скупа M, тј. $J(c) = c^M$, где је $c^M \in M$.

Структура $\mathbb{M} = (M, R^{\mathbb{M}}, \ldots, f^{\mathbb{M}}, \ldots, c^{\mathbb{M}}, \ldots)$ зове се модел језика $\mathcal{L}$

Пр. $\mathcal{L} = \{R, f, g, c\}$ $\quad Rel_{\mathcal{L}} = \{R\}$ $\quad Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\}$ $\quad Const_{\mathcal{L}} = \{c\}$

$ar(R) = ar(f) = ar(g) = 2$

(1) $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 1)$

(2) $(N, >, +, \cdot, 3)$

(3) $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cup, \cap, \emptyset)$

Деф.: Нека је (M, J) интерпретација језика $\mathcal{L}$. Пресликавање $\mu: Var \to M$ зове се валуација променљивих у односу на домен M. Ако је $\mu(x) = d$ кажемо да је d вредност променљиве x при валуацији μ:

Пр: $\mu: \begin{pmatrix} x & y & z & t \ldots \\ \sqrt{2} & \pi & 1 & 0 \ldots \end{pmatrix}$

Деф: Вредност терма t језика $\mathcal{L}$ у интерпретацији (M, J) за валуацију μ означавамо са $t^{\mathbb{M}}[\mu]$ и дефинишемо индукцијом по сложености терма t на следећи начин:

- ако је t променљива x онда је $t^{\mathbb{M}}[\mu] = \mu(x)$
- ако је t симбол константе c онда је $t^{\mathbb{M}}[\mu] = c^{\mathbb{M}}$

• ако је $t=f(t_1,\dots,t_n)$ где је $f\in Fun_L$, $ar(f)=n$, $t_1,\dots,t_n\in Term_L$ онда је
$t^M[\mu]=f^M(t_1^M[\mu],\dots,t_n^M[\mu])$

Пр. $t=f(z,g(x,c))$ (све је повезано са претходним примерима)

$t^R[\mu]=1+(\sqrt{2}\cdot 1)=1+\sqrt{2}$

Деф. Да је формула A тачна за валуацију μ у моделу M означавамо са $M\models A[\mu]$ и дефинишемо индукцијом по сложености формуле A на следећи начин:

- ако је A атомска формула $t_1=t_2$ онда $M\models A[\mu]$ акко $t_1^M[\mu]=t_2^M[\mu]$
- ако је A атомска формула $R(t_1,\dots,t_n)$ онда $M\models A[\mu]$ акко $(t_1^M[\mu],\dots,t_n^M[\mu])\in R^M$
- ако је $A=\neg B$ онда је $M\models A[\mu]$ акко не важи $M\models B[\mu]$
- ако је $A=B\wedge C$ онда је $M\models A[\mu]$ акко $M\models B[\mu]$ и $M\models C[\mu]$
- ако је $A=(\forall x)B(x)$ онда $M\models A[\mu]$ акко $M\models B[\mu(x/a)]$ за свако $a\in M$
- ако је $A=(\exists x)B(x)$ онда $M\models A[\mu]$ акко $M\models B[\mu(x/a)]$ за неко $a\in M$

где је $\mu(x/a)$ валуација која променљивој x додељује вредност "a", а на осталим променљивим једнака је са валуацијом μ.

Пример: $f(x,g(x,y))=c\wedge(\forall x)R(t,g(x,x))$

$\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi=1 \wedge (\forall x)\, 0\le x^2$

$\perp \wedge \top$

$\perp$ ова формула није тачна у моделу $(R,\le,+,\cdot,1)$

Деф. Интерпретација (M,J) је модел формуле A у ознаци $M\models A$ ако је формула A тачна за сваку валуацију $\mu: Var\to M$, тј. $M\models A[\mu]$. Ако није $M\models A$ онда кажемо да је M контрамодел за A и пишемо $M\not\models A[\mu]$

Пример: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y)\vee R(y,x))$

(1) $(R,\le)$

$(\forall x)(\forall y)(x\le y\vee y\le x)$ модел

(2) $(R,<)$

$(\forall x)(\forall y)(x<y\vee y<x)$ контрамодел

Деф. (а) Формула A језика L је ваљана у ознаци $\models A$ ако је тачна у сваком моделу језика L тј. за сваки модел M језика L и сваку валуацију $\mu: Var\to M$ важи $M\models A[\mu]$

(б) Формула A језика L је задовољива ако постоји модел M и постоји валуација $\mu: Var\to M$ тако да $M\models A[\mu]$

вежбе

Комбинаторика

(1) $V_{32}^4=32\cdot 31\cdot 30\cdot 29$

(2) T: $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$ $\quad C_n^3=\frac{n!}{(n-3)!\,3!}$

n: $\frac{n(n-1)}{2}$ $\quad C_n^2=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$

(3) МЕТАР

$n=5$

$P_5=5!$

(4) МАТЕМАТИКА

$n=10$

М	А	Т	Е	И	К
2	3	2	1	1	1

$P^{10}_{2,3,2,1,1,1}=\frac{10!}{2!\,3!\,2!}$

(5) $n=7$

$P_{3,2,2}=\frac{7!}{3!\,2!\,2!}$

(6) 5 4 3 2 1 | 5 4 3 2 1

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad 5!\cdot 5!$

(7) $n=52$, $k=4$

а) $52\cdot 51\cdot 50\cdot 49$

б) 52^4

в) $\binom{52}{4}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2}$

(8) $4\cdot 3\cdot 2$

(9) 6 5 4 3 7 $=360$

(10) 6-цифрени парни бројеви

9 9 9 9 9 4 $=4\cdot 9^5$

(11) 9 10 10 10 10 10 2 $=18\cdot 10^5$

(12) $n>2$ $\quad A=\{1,2,\dots,n\}$ код којих су елементи 1 и 2 суседи

$\underbrace{(1\ 2)\dots}_{n}$

Пар 1,2 можемо да схватимо као 1 елемент који пермутујемо са осталих $n-2$ елемената на $(n-1)!$ начина. Пошто

$\boxed{2\cdot(n-1)!}$

пар 1,2 пермутујемо на 2 начина (12,21) према принципу производа укупан број пермутација је $2(n-1)!$

предавање

Ваљане формуле и њихова својства

Ваљане формуле су формуле које су тачне у сваком моделу одговарајућег језика:

(1) $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$ } Де Морганови закони
(2) $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$ } за квантификаторе
(3) $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$
(4) $(\exists x)(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$
(5) $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$
(6) $(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

→ контрапримери за (5) и (6)

1. $(\forall x)(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$

у $\mathbb{N}$
A(x) − x је паран број $\quad T \Rightarrow \bot\vee\bot$
B(x) − x је непаран број $\quad T\Rightarrow\bot$
$\bot$

2. $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x)\wedge B(x))$

у $\mathbb{N}$
A(x) − x је паран број $\quad T\wedge T\Rightarrow\bot$
B(x) − x је непаран број $\quad T\Rightarrow\bot$
$\bot$

(7) $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,y)$
(8) $(\exists x)(\exists y)A(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$
(9) $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x,y)$

контрапример
$(\forall y)(\exists x)A(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)A(x,y)$
$T\Rightarrow\bot$ $\quad$ пример за мајку и дете
$\bot$

• Ако x није слободна променљива формуле B онда су и следеће формуле ваљане

(10) $(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge B$
(11) $(\forall x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\vee B$
(12) $(\exists x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge B$
(13) $(\exists x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee B$
(14) $(\forall x)(B\Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow (B\Rightarrow(\forall x)A(x))$

Теорема: Ако су A и $A\Rightarrow B$ ваљане формуле онда је и B ваљана формула

Доказ: $\models A$ и $\models A\Rightarrow B$

Нека је M произвољан модел и μ произвољна валуација променљивих. Тада (⇒)
$M\models A[\mu]$ $\quad M\models(A\Rightarrow B)[\mu]$
$\Rightarrow$ ако $M\models A[\mu]$ онда $M\models B[\mu]$
$\Rightarrow M\models B[\mu]$
$\Rightarrow$ B је ваљана ■

Теорема: Формула A(x) је ваљана акко је формула $(\forall x)A(x)$ ваљана

Деф. Формула A је логичка (семантичка) последица скупа формула $\mathcal{F}$ и означава $\mathcal{F}\models A$ ако за сваки модел M и сваку валуацију $\mu: Var\to M$ важи: ако $M\models F[\mu]$ за све формуле $F\in\mathcal{F}$, онда $M\models A[\mu]$

Деф. Формуле A и B су логички (семантички) еквивалентне у ознаци $A\equiv B$ ако је формула $A\Leftrightarrow B$ ваљана, односно $A\equiv B$ акко за сваки модел и сваку валуацију $\mu: Var\to M$ важи $M\models A[\mu]$ акко $M\models B[\mu]$.

Основни комбинаторни објекти

У основне комбинаторне објекте спадају: пермутације, варијације, комбинације, композиције и партиције

Три принципа:

(1) ПРИНЦИП ЈЕДНАКОСТИ: Ако између 2 коначна скупа A и B постоји бијекција тј. обострано једнозначна кореспонденција, тада ови скупови имају једнак број елемената.

(2) ПРИНЦИП ЗБИРА: Ако су A и B дисјунктни коначни скупови тада је $A\cup B$ коначан скуп и важи $|A\cup B| = |A|+|B|$

(3) ПРИНЦИП ПРОИЗВОДА: Ако су A и B коначни скупови тада је $A\times B$ коначан скуп и важи $|A\times B| = |A|\cdot|B|$

Нека је $X_n=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ коначан скуп од n елемената

Деф. Пермутација скупа X_n је било која уређена n-торка различитих елемената из тог скупа.

Пример: $\{a,b,c\}$

abc acb
bac bca $\quad P_n = n(n-1)\dots 2\cdot 1 = n!$
cab cba

Деф. Варијација r-те класе скупа X_n је свака уређена r-торка различитих елемената из тог скупа.

Пример: $\{a,b,c,d\}$ $\quad r=3$

Све варијације треће класе су:

abc	abd	acb	acd	adb	adc
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb
dab	dac	dab	dbc	dca	dcb

} 4·3·2

$P_{n,r} = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-(r-1))$

$\boxed{P_{n,r} = n(n-1)\dots(n-r+1)}$

Комбинација r-те класе скупа X_n је било који његов подскуп од r елемената

Пример: $\{a,b,c,d\}$

abc, abd, acd, bcd $\binom{4}{3}$

$$\boxed{C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$

Деф: Варијација са понављањем r-те класе са понављањем скупа X_n је било која уређена r-торка његових елемената

Пример: Све варијације са понављањем друге класе скупа $\{a,b,c,d\}$ су:

aa ab ac ad
ba bb bc bd
ca cb cc cd
da db dc da

$4\cdot 4$

$$\boxed{\overline{P}_{n,r} = \underbrace{n\cdot n\cdots n}_{r} = n^r}$$

Деф: Нека се елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$ скупа X_n појављују редом $m_1, m_2, \dots, m_n$ пута у посматраним r-торкама које чине пермутације при чему је $m_1+m_2+\dots+m_n = r$

$$\boxed{P_{m_1,m_2,\dots,m_n} = \frac{r!}{m_1!\cdot m_2!\cdots m_n!}}$$

Пример: $\{a,a,b,b,c,c,c,c\}$

$\frac{9!}{3!\,2!\,4!}$

Деф: Комбинација r-те класе са понављањем скупа X_n је било који мултискуп од тачно r <u>не</u> обавезно различитих елемената скупа X_n.

Пример: Све комбинације са понављањем треће класе скупа $\{a,b,c,d\}$ су:

aaa aab aac aad
abb acc add abc
abd acd
bbb bbc bbd bcd bcc bdd
ccc ccd cdd ddd

20

Број комбинација r-те класе од n елемената је

$$\boxed{\overline{C}_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}}$$

$\overline{C}_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 20$

вежбе –

(13) $\{1,2,\dots,n\}$

$1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{k!}\ 2\ \dots\ n$

$\binom{n-2}{k}\cdot k!\cdot 2\cdot \underbrace{(n-k-1)!}$

(1,2) (1,2) n−1
(2,1) k n−1−k

(14) $3\cdot 8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \underset{(2)}{1} = 3\cdot 8^2\cdot 7\cdot 6$

(15) 32 карте; бирамо 5
тачно 2 од 4 десетке

$\binom{4}{2}\binom{28}{3}$ (32) 5

(16) m белих куглица $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$
n црних куглица

(18) 10 врста разгледница
8 разгледница
а) различите $\binom{10}{8}$
б) $\binom{10}{1}\binom{9}{6}$
в) $\binom{10}{2}\binom{8}{4}$

(19) $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$ комисија

$20\cdot\binom{20}{5}\cdot 5!$

(20) $\binom{10}{4}\cdot 4!\,28!$ → за осталих 28 места → на 4 различита места

бирамо 4 карте

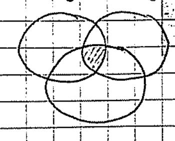
Принцип укључења – искључења

$n=2$ $|A_1\cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1\cap A_2|$

$n=3$ $|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|$

1. Колико има природних бројева не већих од 1000 који су дељиви са <u>бар</u> једним од бројева 2,3,5?

A – скуп бројева дељивих са 2 $|A| = 500$
B – скуп бројева дељивих са 3 $|B| = 333$
C – скуп бројева дељивих са 5 $|C| = 200$



$|A\cap B| = 166$

дељиви са 2 и 3 = дељиви са 6

$|A\cap C| = 100$

$|B\cap C| = 66$

$|A\cap B\cap C| = 33$

$|A\cup B\cup C| = 500+333+200-166-100-66+33 = \underline{734}$

2. На колико начина се бројеви 1,2,3,4,5,6 могу поређати у низ тако да бар 1 од бројева 1,2 или 3 буде на свом месту?

A_1 – 1 на свом (првом) месту

$\underline{1}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ $|A_1| = 5!$

A_2 – 2 на свом месту

$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$ $|A_2| = 5!$

A_3 – 3 на свом месту $|A_3| = 5!$

$|A_1\cap A_2| = 4!$

$\underline{(1)}\ \underline{(2)}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$|A_1\cap A_3| = 4!$ Решење: $3\cdot 5! - 3\cdot 4! + 3! = 294$

$|A_2\cap A_3| = 4!$

$|A_1\cap A_2\cap A_3| = 3!$