Chapitre 1

Généralités

Dr. E. B. Med Mahmoud

LGTR

March 9, 2024

Objectifs généraux

Vocabulaire

- Modélisation des systèmes complexes;
- Analyse et interprétation des données opérationnelles;
- Méthodes de résolution mathématique et algorithmique;
- Optimisation des processus décisionnels;
- Développement de solutions opérationnelles;
- TPs:Utilisation de solveurs et de frameworks d'optimisation.

Plan

Définition

Champ d'application

La recherche opérationnelle (RO) est au confluent de l'informatique, des mathématiques appliquées, de la gestion et du génie industriel. L'objet de cette discipline est de fournir des bases rationnelles à la prise de décisions, habituellement dans un but de contrôle ou d'optimisation (améliorer l'efficacité, diminuer les coûts, etc.). Les techniques de RO sont utilisé pour :

- Gérer les soins de santé dans les hôpitaux
- Organiser les services policiers ou ambulanciers
- Planifier l'utilisation et gérer la production d'énergie
- Planifier des systèmes de livraison ou de transport en commun
- Gérer la production, les stocks et la distribution de produits usinés
- Concevoir des systèmes de communication et des systèmes informatiques
- Établir des horaires de travail, de cours ou des calendriers sportifs
- Choisir des politiques économiques et financières

- IIIe siècle av. J.-C : Archimède propose des solutions pour la défense de Syracuse pendant les Guerres puniques.
- 1503 : Léonard de Vinci participe à la guerre contre Pise en utilisant ses connaissances pour développer des machines de guerre.
- XVIIe et XVIIIe siècles : Newton, Leibniz, Bernoulli et Lagrange travaillent sur l'optimisation mathématique.
- Fin du XIXe siècle : Frederik Winslow Taylor réalise des études pour maximiser le rendement des mineurs.

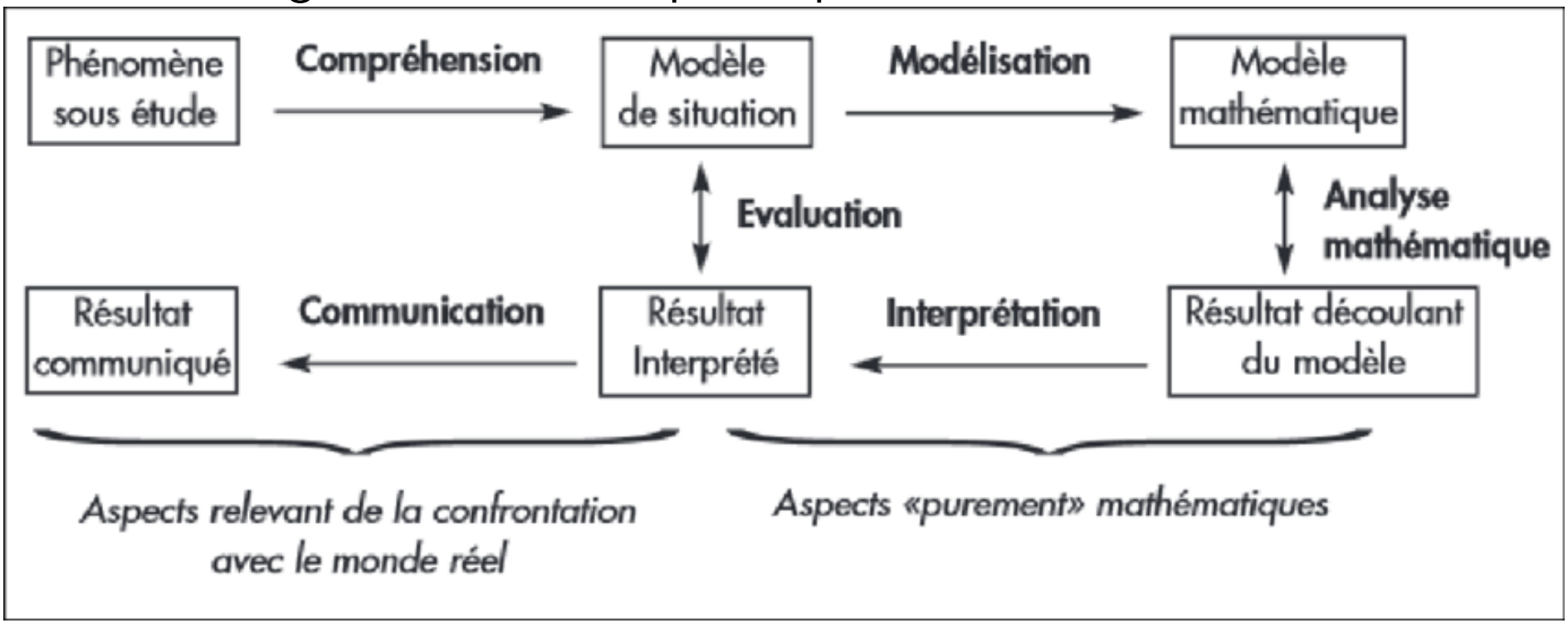
- 1928 : Janos Von Neumann publie la "Théorie des jeux", fondement mathématique de l'optimisation linéaire.
- 1939 : Leonid Vitálievich Kantoróvich et Tjalling Charles Koopmans créent la théorie de l'optimisation linéaire.
- 1945 : George Joseph Stigler pose le problème du régime, résolu par la méthode du Simplexe.
- 1947 : Formation du projet SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs) aux États-Unis pour améliorer les processus de planification à grande échelle.

- 1952 : Premier résultat obtenu avec l'ordinateur SEAC pour résoudre un problème, augmentant considérablement l'efficacité de la force aérienne.
- Années 50 et 60 : Expansion de l'intérêt et du développement de la Recherche Opérationnelle dans le commerce et l'industrie.
- Exemple : Calcul du projet optimal de transport de sable de construction à Moscou, réduisant les coûts de 11
- Applications : Agriculture, transport, localisation, distribution du personnel, réseaux, files d'attente, graphes, etc.

Modélisation Mathématique

La recherche opérationnelle (RO) est une discipline qui vise à améliorer la prise de décision en s'appuyant sur des méthodes scientifiques et mathématiques.

Diagramme schématique du processus de modélisation



Méthodologie de la RO

Problème

Un fabricant de produits alimentaires doit déterminer la quantité de chaque produit à fabriquer chaque mois pour maximiser son profit total. Il dispose de plusieurs usines avec des capacités de production différentes et il doit respecter certaines contraintes, telles que la disponibilité des matières premières, la main-d'œuvre et le stockage.

1. Définition du problème
   - Identifier le problème à résoudre et ses objectifs.
   - Déterminer les variables de décision
   - Définir la fonction objectif à optimiser.
   - Définir les contraintes.

Méthodologie de la RO (suite)

Définition du problème:

1. Variables de décision: Quantité de chaque produit à fabriquer chaque mois.
2. Fonction objectif: Maximiser le profit total.
3. Contraintes:
   - Capacité de production de chaque usine.
   - Disponibilité des matières premières.
   - Main-d'œuvre disponible.
   - Capacité de stockage.

2. Construction du modèle
   - Choisir le type de modèle le plus adapté (linéaire, non linéaire, etc.).
   - Formuler le modèle mathématique du problème.
   - Valider la cohérence et la précision du modèle.

Méthodologie de la RO (suite)

3. Résolution du modèle
   - Choisir la méthode de résolution la plus appropriée.
   - Utiliser un logiciel de RO pour résoudre le modèle.
   - Analyser les résultats de la résolution.

Méthodologie de la RO (suite)

4. Analyse des résultats
   - Interpréter les solutions obtenues.
   - Identifier les points forts et les points faibles des solutions.
   - Evaluer la sensibilité des solutions aux changements de paramètres.

Modélisation Mathématique

Pour modéliser ce problème d'optimisation, vous pouvez définir les éléments suivants :
Variables de décision : x_i représente la quantité du produit i à fabriquer chaque mois.

Modélisation (suite)

Fonction objectif : Maximiser le profit total, qui peut être défini comme la somme des profits de chaque produit fabriqué. Si p_i est le profit unitaire du produit i, alors la fonction objectif peut être exprimée comme :

$$\text{Maximiser} \sum_i p_i \cdot x_i$$

Contraintes :

- Capacité de production de chaque usine : La somme des quantités de chaque produit i fabriqué dans chaque usine j ne doit pas dépasser la capacité de production de l'usine (Cj)
- Disponibilité des matières premières : La quantité de matières premières nécessaires pour fabriquer chaque produit ne doit pas dépasser la disponibilité des matières premières (B).
- Main-d'œuvre disponible : La quantité de main-d'œuvre nécessaire pour fabriquer chaque produit ne doit pas dépasser la main-d'œuvre disponible (D).

Modélisation (suite)

Contraintes (suite) :

- Capacité de stockage : La quantité totale des produits stockés ne doit pas dépasser la capacité de stockage (S).

Mathématiquement, ces contraintes peuvent être représentées comme suit :

Capacité de production : $\sum_i a_{ij} \cdot x_i \leq C_j, \quad \forall j$

Disponibilité des matières premières : $\sum_i b_i \cdot x_i \leq B$

Main-d'œuvre disponible : $\sum_i c_i \cdot x_i \leq D$

Capacité de stockage : $\sum_i x_i \leq S$

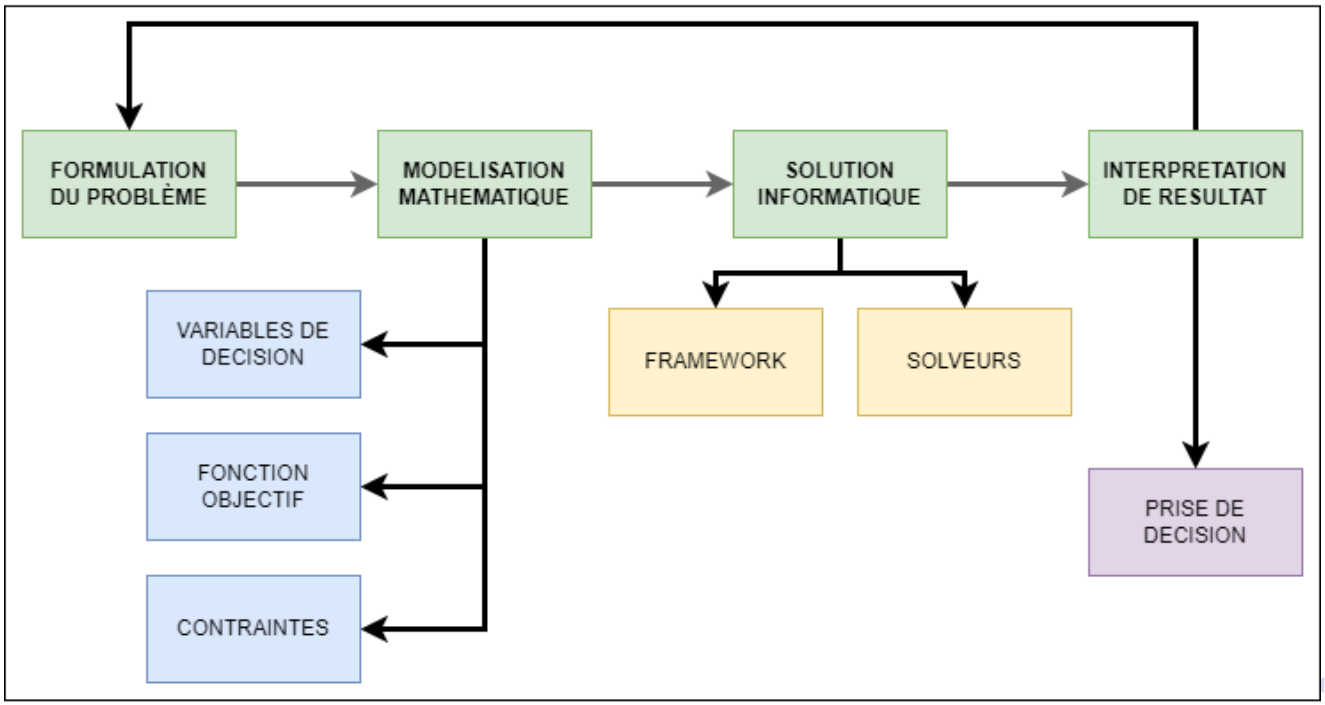
Positivité : $x_i \geq 0, \quad \forall i$

Méthodologie de la RO (suite)

5. Implémentation de la solution
   - Définir un plan d'implémentation de la solution.
   - Mettre en place la solution et suivre son évolution.
   - Mesurer l'impact de la solution sur les performances du système.

Exemple : Maximisation du profit

Une entreprise fabrique deux types de produits alimentaires, notés P_1 et P_2. Elle dispose de trois usines avec des capacités de production respectives de 10, 20 et 15 unités. Les produits nécessitent respectivement 7 et 9 unités de matières premières par unité produite, ainsi que 5 et 8 unités de main-d'œuvre. La capacité de stockage de l'entreprise est de 50 unités. Le profit unitaire pour chaque unité vendue est de 10 pour P_1 et 12 pour P_2.



Correction : Les Données du problème (Partie 1)

L'entreprise cherche à déterminer la quantité de chaque produit à fabriquer chaque mois pour maximiser son profit total, tout en respectant les contraintes de capacité de production, disponibilité des matières premières, main-d'œuvre disponible et capacité de stockage.

Données:

- - Usines : $\text{usines} = \{1, 2, 3\}$
- - Produits : $\text{produits} = \{1, 2\}$
- - Capacité des usines : $\text{capacite\_usine} = [10, 20, 15]$
- - Matières premières : $\text{matieres\_premieres} = [7, 9]$
- - Main-d'œuvre : $\text{main\_oeuvre} = [5, 8]$
- - Capacité de stockage : $\text{capacite\_stockage} = 50$
- - Profit unitaire : $\text{profit\_unitaire} = [10, 12]$

Programme linéaire (1/3)

Le programme linéaire correspondant à cette situation :
Variables de décision :

- x_1 : quantité de produit P1 à fabriquer
- x_2 : quantité de produit P2 à fabriquer

Objectif : Maximiser le profit total, qui est la somme des profits des produits fabriqués.

$$\text{Maximiser } Z = 10x_1 + 12x_2$$

Programme linéaire (2/3)

Contraintes :

- Capacité de production des usines :

$$x_1 \leq 10$$
$$x_2 \leq 20$$
$$x_3 \leq 15$$

- Disponibilité des matières premières :

$$7x_1 + 9x_2 \leq \text{matières premières disponibles}$$

Programme linéaire (3/3)

Contraintes (suite) :

- Main-d'œuvre disponible :

$$5x_1 + 8x_2 \leq \text{main-d'œuvre disponible}$$

- Capacité de stockage :

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

- Non-négativité des variables :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Cela constitue le programme linéaire pour maximiser le profit en tenant compte des contraintes de capacité de production, disponibilité des matières premières, main-d'œuvre disponible et capacité de stockage.

Correction :Modélisation (Partie 2)

Variables de décision : x_i, la quantité du produit i à fabriquer chaque mois.
Fonction objectif : Maximiser le profit total :

$$\text{Maximiser} \sum_{i \in \text{produits}} \text{profit\_unitaire}[i] \cdot x_i$$

Contraintes :

1. Capacité de production de chaque usine :

$$\sum_{i \in \text{produits}} a_{ij} \cdot x_i \leq \text{capacite\_usine}[j], \quad \forall j \in \text{usines}$$

2. Disponibilité des matières premières :

$$\sum_{i \in \text{produits}} \text{matieres\_premieres}[i] \cdot x_i \leq B$$

3. Main-d'œuvre disponible :

$$\sum_{i \in \text{produits}} \text{main\_oeuvre}[i] \cdot x_i \leq D$$

4. Capacité de stockage :

$$\sum_{i \in \text{produits}} x_i \leq \text{capacite\_stockage}$$

avec $x_i \geq 0, \forall i \in \text{produits}$.

Correction : Résolution et prise de décision (Partie 3)

1. Quelle quantité de chaque produit l'entreprise devrait-elle fabriquer chaque mois pour maximiser son profit total ?
2. Quel est le profit total réalisé par l'entreprise dans ce cas optimal ?

Processus de prise de dècision

Pour répondre à ces questions, on va utiliser deux impementation differentes:

- Le solveur Gurobi pour résoudre le modèle Pyomo et obtenir la solution optimale.
- Le framework Pyomo pour modéliser le problème et déterminer les quantités de chaque produit à fabriquer pour maximiser le profit total.
- Le solveur glpk pour résoudre le modèle Pyomo et obtenir la solution optimale.
- Calculer le profit total réalisé par l'entreprise dans ce cas optimal.

Implémentation: Solveur Gurobi en Python (Partie 1)

```
import gurobipy as gp
from gurobipy import GRB

# Problem data
usines = range(3)
produits = range(2)
capacite_usine = [10, 20, 15]
matieres_premieres = [7, 9]
main_oeuvre = [5, 8]
capacite_stockage = 50
profit_unitaire = [10, 12]
```

Implémentation avec Gurobi en Python (Part 2)

```
# Create the model
m = gp.Model("Profit-Maximization")

# Decision variables
x = m.addVars(produits, name="x",
    vtype=GRB.CONTINUOUS)

# Objective function
m.setObjective(gp.quicksum(
    profit_unitaire[i] * x[i] for i in produits),
    GRB.MAXIMIZE)
```

Implémentation avec Gurobi en Python (Part 3)

```
# Constraints
m.addConstrs(
    (gp.quicksum(a[i, j] * x[i] for i in produits)
    <= capacite_usine[j] for j in usines),
    name="capacite_usine")
m.addConstr(
    gp.quicksum(matieres_premieres[i] * x[i]
    for i in produits)
    <= B, name="matieres_premieres")
m.addConstr(
    gp.quicksum(main_oeuvre[i] * x[i]
    for i in produits) <= D, name="main_oeuvre")
m.addConstr(
    gp.quicksum(x[i] for i in produits)
    <= capacite_stockage, name="capacite_stockage")
```

Implémentation avec Gurobi en Python (Part 4)

```
# Solve the model
m.optimize()

# Display the solution
if m.status == GRB.OPTIMAL:
    for i in produits:
        print(f"Quantity of product {i+1} to manufacture: {x[i].x}")
    print(f"Total profit: {m.objVal}")
else:
    print("No optimal solution found.")
```

Implémentation: Framework Pyomo (Part 1)

```
#First, make sure you have Pyomo installed
pip install pyomo

#Then, you can create and solve the optimization model
from pyomo.environ import *

# Problem data
usines = range(3)
produits = range(2)
capacite_usine = [10, 20, 15]
matieres_premieres = [7, 9]
main_oeuvre = [5, 8]
capacite_stockage = 50
profit_unitaire = [10, 12]
```

Implémentation: Framework Pyomo (Part 2)

```
# Create a Pyomo model
model = ConcreteModel()

# Decision variables
model.x = Var(produits, domain=NonNegativeReals)

# Objective function
model.obj = Objective(expr=sum
    (profit_unitaire[i] * model.x[i] for i in produits),
    sense=maximize)
```

Implémentation: Framework Pyomo (Part 3)

```
# Constraints
model.capacity_constraints = ConstraintList()
for j in usines:
    model.capacity_constraints.add(
        sum(a[i, j] * model.x[i] for i in produits)
        <= capacite_usine[j])
model.matieres_premieres_constraint =
    Constraint(expr=sum(matieres_premieres[i] *
    model.x[i] for i in produits) <= B)
model.main_oeuvre_constraint =
    Constraint(expr=sum(main_oeuvre[i] *
    model.x[i] for i in produits) <= D)
model.capacity_stockage_constraint =
    Constraint(expr=sum(model.x[i]
    for i in produits) <= capacite_stockage)
```

Implémentation: Framework Pyomo (Part 4)

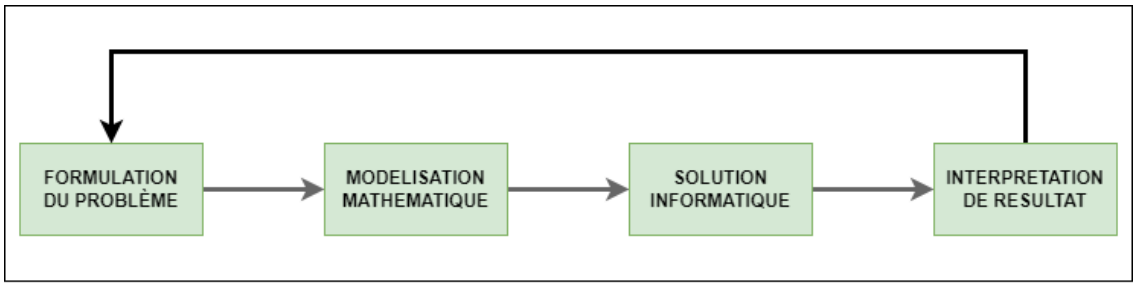
```
# Solve the model
solver = SolverFactory('glpk')
solver.solve(model)

# Display the solution
if 'ok' == str(solver.status):
    for i in produits:
        print(f"Quantity of product {i+1}
-------------to manufacture: {model.x[i].value}")
    print(f"Total profit: {model.obj()}")
else:
    print("No optimal solution found.")
```

A retenir

La recherche opérationnelle :

- traite un problème pratique;
- a un objectif limité (cette application);
- nécessite une boîte à outils (algorithmes et structures des données, optimisation combinatoire, graphes, complexité, programmations linéaire et mathématique, processus stochastiques, probabilités et statistiques, méthodes multicritères....);
- est pluridisciplinaire (Mathématiques, Informatique, Economie);
- est banalisée (Programmation linéaire, Solveurs, Frameworks...);
- aide à la décision.



Aperçu des prochains chapitres

Dans les prochains chapitres, nous explorerons en détail les concepts suivants :

- La **programmation linéaire** et son application à la résolution de problèmes d'optimisation.
- Les méthodes de **programmation non linéaire** pour résoudre des problèmes plus complexes.
- L'utilisation de la **théorie des graphes** pour modéliser et résoudre divers problèmes pratiques.
- La **programmation dynamique** comme méthode puissante pour résoudre des problèmes récursifs.
- Les **heuristiques** et leur rôle dans la recherche de solutions efficaces pour des problèmes difficiles.
- La **programmation par contraintes** pour résoudre des problèmes où les contraintes sont spécifiées avant les variables.
- L'utilisation des **solveurs** et des **frameworks** pour la résolution informatique des problèmes d'optimisation.

Plan

Plan

Plan