I. <u>Pochodna funkcji</u> to jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. Rachunek pochodnych wykorzystywany jest między innymi w fizyce.

Prędkość średnią poruszającego się punktu materialnego oblicza się dzieląc zmianę jego położenia Δx przez zmianę czasu, w którym zmiana położenia nastąpiła, czyli Δt:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Aby dokładniej okreslić prędkość można mierzyć ją w krótszych odstępach czasu. Można brać pod uwagę bardzo małe odcinki czasu, tak małe, że **nieskończenie bliskie zeru**.

0bliczając granicę ilorazu, przy $\Delta t \to 0$:

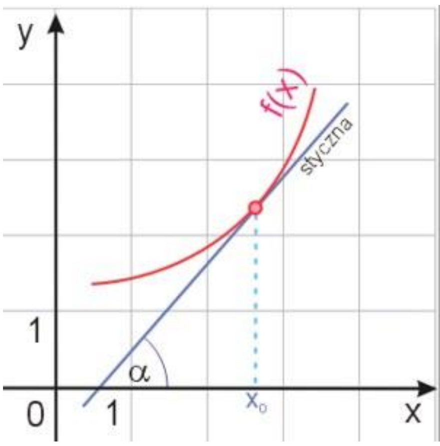
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

otrzymujemy dokładną wartość prędkości w danej chwili ruchu. To jest definicja pochodnej funkcji względem czasu.

Prędkość chwilowa jest to zatem pochodna położenia względem czasu, co zapisujemy następująco:

$$v_{sr} = \frac{dx}{dt}.$$

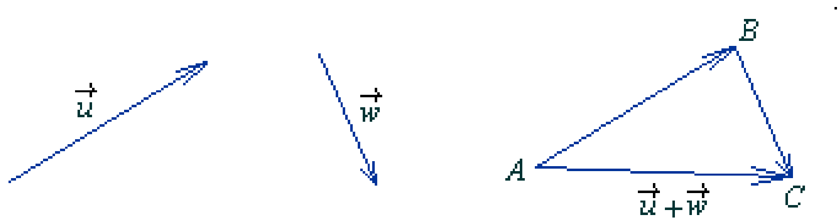
Jest to tylko jeden z prostych przykładów przydatności pochodnej funkcji i pokazuje praktyczny aspekt jej stosowania w fizyce.



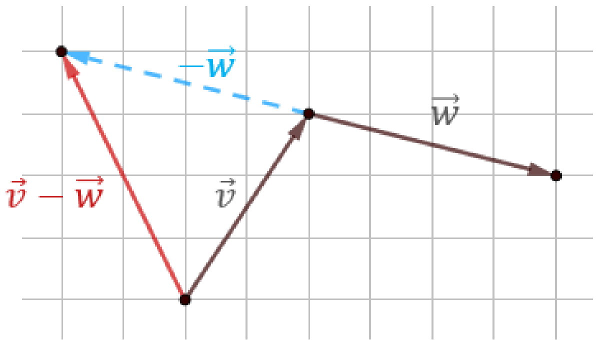
Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do krzywej o równaniu $y=f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 do osi OX.

II. Rachunek wektorów

- Dodawanie wektorów (graficzne)



- Odejmowanie wektorów - interpretacja graficzna



- Iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równy iloczynowi długości wektorów razy cosinus kąta zawartego między nimi. Wyrażamy to następującym wzorem:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}),$$

gdzie $|\vec{a}|$ oraz $|\vec{b}|$ są długosciami wektorów.

- Iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ oraz $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. można obliczyć jako sumę iloczynów odpowiednich współrzędnych;

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Własności iloczynu skalarnego wektorów przedstawiono w tabelce

$\vec{a} \circ \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$ $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} = \vec{o}) \vee (\vec{b} = \vec{o}) \vee (\vec{a}, \vec{b}\ \textit{są prostopadłe})$ $(k\vec{a}) \circ \vec{b} = k(\vec{a} \circ \vec{b}),\ k \in R$ $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

Długość wektora $\lvert\vec{a}\rvert$ można oznaczać a

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Przykład

Sprawdź czy wektory $\vec{a}$ = (1,3,7) i $\vec{b}$ = (-6,2, 0) są prostopadłe.
Oba podane wektory są niezerowe. Czyli gdy ich iloczyn skalarny będzie równy 0 to będą one prostopadłe.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 0 = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów jest równy 0 co oznacza, że dane dwa wektory są prostopadłe.

Przykład

Długości dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równe odpowiednio $a = 4$ i $b = 5$. Iloczyn skalarny tych wektorów wynosi *10*. Ile wynosi kąt między tymi wektorami .
Korzystając ze wzoru:
$\vec{a} \circ \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\, \lvert\vec{b}\rvert \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ otrzymujemy:
$10 = 4 \cdot 5 \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
$1 = 2 \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ czyli
$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ czyli:

Kąt między wektorami wynosi 60°