W1 09.10.20223 **I. Wprowadzenie**

Matematyka jest to nauka, która dotyczy prawidłowości rozumowania oraz dostarcza narzędzi do otrzymywania poprawnych wniosków z przyjętych założeń.

Zakres matematyki jest szeroki i stale się powiększa, dotyczy ona różnych dziedzin myśli ludzkiej, dlatego powstają ciągle nowe działy matematyki teoretycznej i stosowanej.

W naukach doświadczalnych, eksperymentalnych standardem jest potwierdzanie istnienia obserwowanych zależności za pomocą metod matematycznych.

Leonardo da Vinci[1] stwierdził w *Traktacie o malarstwie*: *„Żadne ludzkie badania nie mogą być nazywane prawdziwą nauką, jeśli nie mogą być zademonstrowane matematycznie”.*

Matematyka teoretyczna często rozwijana jest bez wyraźnego związku z konkretnymi zastosowaniami, dlatego jest ona często uważana za formę sztuki.

Jednak niektóre działy matematyki teoretycznej znalazły swoje praktyczne zastosowanie, kiedy okazało się, że potrzebuje ich zarówno nowoczesna fizyka jak też informatyka.

Bez osiągnięć matematyki nie byłoby rozwoju myśli technicznej, informatyki, nauk przyrodniczych, ekonomicznych, filozofii czy nawet sztuki.

Obecnie uważa się, że nie ma gałęzi matematyki, która pewnego dnia nie zostanie zastosowana do zjawisk otaczającego świata.

Główne działy matematyki:

- algebra,
- analiza matematyczna,
- geometria, topologia,
- statystyka i rachunek prawdopodobieństwa,
- matematyka dyskretna

[1] Włoski renesansowy artysta i uczony Leonardo da Vinci żył w latach (1452 -1519), był malarzem, rzeźbiarzem, architektem, inżynierem, a także matematykiem, wynalazcą, filozofem, muzykiem, pisarzem.

Matematyka dyskretna, bada struktury nieciągłe. Do matematyki dyskretnej zalicza się między innymi logikę matematyczną.

II. Elementy logiki matematycznej

Dzięki metodom logiki matematycznej można sprawdzić prawdziwość zdania lub jego fałsz.

Jest to szczególnie przydatne w informatyce (w programowaniu). Jeżeli chcemy np. stworzyć program, to należy napisać wiele poprawnych logicznie warunków, które komputer będzie dobrze interpretował.

W tym celu należy poznać podstawowe narzędzia logiki matematycznej, takie jak np.: koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność oraz prawa rachunku zdań. Logika matematyczna zajmuje się zdaniami logicznymi.

Zdanie logiczne, jest to zdanie gramatyczne orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen (wartość);

- Prawda (TRUE);
- Fałsz (FALSE).

Dla obu tych ocen stosuje się też krótsze oznaczenia:

- prawdę oznacza się cyfrą 1
- fałsz oznacza się cyfrą 0

Zatem zdania logiczne podlegają wartościowaniu. Zdania pytające i rozkazujące nie są zdaniami logicznymi.

Prawdę i fałsz nazywa się wartościami logicznymi zdania logicznego.

Ustalaniem wartości logicznej zdania zajmuje się określona dziedzina nauki. To samo zdanie logiczne może mieć przypisane różne wartości logiczne.

Zdania oznacza się małymi literami alfabetu, na przykład p,q,r,s,t,... .

Przykład:

Zdanie	Nauka	Wartość logiczna
Istnieje iloraz 2 przez 3.	Arytmetyka liczb całkowitych	0
	Arytmetyka liczb rzeczywistych	1
	Medycyna	Nie można przypisać ani prawdy ani fałszu, więc nie jest to zdanie logiczne

Ustalanie wartości logicznej dokonuje się na podstawie wartości logicznych zdań składowych.

Funktory logiczne (spójniki):

- **Funktory jednoargumentowe** (wystarczy jedno zdanie)

Negacja – jest to zaprzeczenie zdania, czyli:

nieprawda, że (zdanie).

- Negację w matematyce oznacza się symbolem ~ p lub ¬ p.
- Negację zdania: nieprawda, że p zapisuje się tak: ~p.
- Negacja zdania ~p jest prawdziwa tylko wtedy, gdy zdanie p jest fałszywe.

Wszystkie możliwe przypadki dla negacji zostały zestawione poniżej:

p	~p
1	0
0	1

Negacja zmienia wartość logiczną zdania na przeciwną.

Własności negacji:

- Z dwóch zdań: p oraz ~p jedno musi być prawdziwe, zaś drugie fałszywe.
- Zdania: p oraz ~(~p) są równoważne (mają tę samą wartość logiczną).

- **Funktory dwuargumentowe** (wymagają dwóch zdań) np.

Koniunkcja są to dwa zdania połączone spójnikiem logicznym *i.*

- Spójnik logiczny *i* w matematyce oznacza się symbolem ∧.
- Koniunkcję zdań p i q zapisuje się tak: *p∧q.*
- Koniunkcja dwóch zdań *p∧q* jest prawdziwa jedynie wtedy, gdy oba zdania p oraz q są prawdziwe.

Wszystkie możliwe przypadki dla koniunkcji zostały zestawione poniżej.

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatywa są to dwa zdania złączone spójnikiem logicznym *lub*.

- Spójnik logiczny *lub* w matematyce oznacza się symbolem ∨.
- Alternatywę zdań p lub q zapisuje się tak: *p∨q*.
- Alternatywa dwóch zdań p∨q jest prawdziwa wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań p lub q jest prawdziwe.

Możliwe przypadki dla alternatywy zostały zestawione poniżej.

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacja są to dwa zdania połączone następująco:

jeżeli (zdanie 1) to (zdanie 2).

- Implikację w matematyce oznacza się symbolem ⇒.
- Implikację zdań: jeżeli p to q zapisuje się tak: $p \Rightarrow q$.
- Implikacja dwóch zdań $p \Rightarrow q$ jest fałszywa tylko wtedy, gdy zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q jest fałszywe.

Wszystkie możliwe przypadki dla implikacji zostały zestawione:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zdanie p nazywa się poprzednikiem implikacji, a zdanie q - jej następnikiem. Z tabelki widać, że z prawdy może wynikać tylko prawda.

Równoważność są to dwa zdania połączone w następujący sposób: (zdanie 1) wtedy i tylko wtedy, gdy (zdanie 2).

- Równoważność w matematyce oznacza się symbolem ⇔.
- Równoważność zdań: p wtedy i tylko wtedy, gdy q, zapisuje się tak: $p \Leftrightarrow q$.
- Równoważność dwóch zdań $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania p i q są równocześnie prawdziwe lub równocześnie fałszywe.

Wszystkie możliwe przypadki dla równoważności zostały zestawione

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dwa zdania są równoważne, jeżeli mają tę samą wartość logiczną.

<u>Prawa logiczne (tautologie)</u> – zawsze prawdziwe

<u>Prawem rachunku zdań lub tautologią</u> nazywa się wyrażenie zbudowane ze zdań prostych i spójników, które zawsze jest zdaniem prawdziwym - niezależnie od wartości logicznych zdań prostych.

<u>Metoda zero-jedynkowa dowodzenia tautologii</u>

Tautologie dowodzimy metodą **zero-jedynkową**. Polega ona na odpowiednim wypełnianiu tabelki zerami i jedynkami.

W pierwszych kolumnach wypisujemy wszystkie możliwe wartości logiczne zdań prostych. W kolejnych kolumnach wyznaczamy wartości coraz bardziej złożonych zdań, tworzących naszą tautologię.

Przykład:

Rozważmy następujące zdanie: $p\Rightarrow((\sim p)\vee q)$
Metodą zero-jedynkową sprawdzimy, czy jest to tautologia. Zaczynamy od przygotowania tabelki:

p	q	$\sim p$	$(\sim p)\vee q$	$p\Rightarrow((\sim p)\vee q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Wypełniamy pierwszą wolną kolumnę (wyznaczamy wartości logiczne dla zdania $\sim p$) korzystając z wartości logicznych z pierwszej kolumny (dla zdania p):

p	q	~p	(~p)∨q	p⇒((~p)∨q)
1	1	0		
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

Teraz wypełniamy kolejną kolumnę (wyznaczamy wartości logiczne dla zdania (~p)∨q). W tym celu wykorzystamy wartości logiczne z drugiej i trzeciej kolumny:

p	q	~p	(~p)∨q	p⇒((~p)∨q)
1	1	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	1	

Teraz wypełniamy ostatnią kolumnę (wyznaczamy wartości logiczne dla zdania p⇒((~p)∨q)). W tym celu wykorzystamy wartości logiczne z pierwszej i czwartej kolumny:

p	q	~p	(~p)∨q	p⇒((~p)∨q)
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Z drugiego wiersza naszej tabelki odczytujemy, że zdanie p⇒((~p)∨q) jest fałszywe (przyjmuje wartość logiczną 0) dla p=1 i q=0.
Zatem zdanie p⇒((~p)∨q) nie jest tautologią.

Aby jakieś wyrażenie okazało się tautolgią, to w ostatniej kolumnie naszej tabelki muszą stać same jedynki (tzn. w każdym przypadku badane zdanie musi okazać się prawdziwe).

W dalszym ciągu będę pokazywać wypełnione wszystkie kolumny danej tabelki ale pamiętać należy, że tabelkę wypełnia się kolumna po kolumnie.

Prawa rachunku zdań - najważniejsze wzory

1. prawo podwójnego przeczenia $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2. prawo wyłączonego środka $p \vee (\sim p)$

   (*z dwóch zdań przeciwnych przynajmniej jedno jest prawdziwe)*
3. prawo sprzeczności $\sim(p \wedge (\sim p))$ *(z dwóch zdań przeciwnych przynajmniej jedno jest fałszywe). Jest to tautologia*
4. prawo przemienności koniunkcji $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
5. prawo przemienności alternatywy $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
6. prawa de Morgana:

   I. prawo de Morgana: $(\sim (p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$

   Zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań $\sim(p \wedge q)$ jest równoważne alternatywie zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \vee (\sim q)$.

   II. prawo de Morgana: $(\sim(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$

   Zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań $\sim(p \vee q)$ jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \wedge (\sim q)$.
7. prawo zaprzeczania implikacji $(\sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
8. prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy

   $$(p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$
9. prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji

   $$(p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

Zestawienie wszystkich najważniejszych praw rachunku zdań przedstawia Tabela

TABELA

Nazwa tautologii	Tautologia
prawo wyłączonego środka	$p\vee(\sim p)$
prawo sprzeczności	$\sim(p\wedge(\sim p))$
prawo podwójnej negacji	$p\Leftrightarrow\sim(\sim p)$
I prawo de Morgana	$(\sim(p\wedge q))\Leftrightarrow((\sim p)\vee(\sim q))$
II prawo de Morgana	$(\sim(p\vee q))\Leftrightarrow((\sim p)\wedge(\sim q))$
prawo odrywania	$(p\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$
prawo negacji implikacji	$(\sim(p\Rightarrow q))\Leftrightarrow(p\wedge(\sim q))$
rozdzielność koniunkcji względem alternatywy	$(p\wedge(q\vee r))\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
rozdzielność alternatywy względem koniunkcji	$(p\vee(q\wedge r))\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

Warunek konieczny (WK) i warunek wystarczający (WW):

$p \Rightarrow q$, p jest warunkiem wystarczającym dla q, a q jest warunkiem koniecznym dla p.

$p \Leftrightarrow q$, p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q.

Przykłady:

- Podzielność liczby całkowitej przez 2 i przez 3 jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności tej liczby przez 6.
- Podzielność liczby całkowitej przez 10 jest warunkiem wystarczającym podzielności tej liczby przez 5.

Formy (funkcje) zdaniowe są to zdania orzekające, którym nie można przypisać określonej wartości logicznej, gdyż zawierają zmienną w zbiorze X (tak zwana dziedzina formy zdaniowej).

Gdy przyjmiemy zamiast zmiennej dowolny element dziedziny, to forma zdaniowa staje się zdaniem logicznym.

Każde równanie jest formą zdaniową.

Kwantyfikatory:

Kwantyfikatorami nazywa się zwroty:

- *dla każdego*

oraz

- *istnieje takie.*

Kwantyfikator ogólny oznacza się symbolem $\forall$ (albo $\bigwedge$) i czytamy: *dla każdego.*

Kwantyfikator szczegółowy oznaczamy symbolem $\exists$ (albo $\bigvee$) i czytamy: *istnieje takie.*

Pod kwantyfikatorem zawsze umieszczamy parametr, którego ma dotyczyć dany kwantyfikator.

Rachunek zdań jest sztucznym, bardzo uproszczonym, językiem, który umożliwia obejście wielu problemów związanych z potocznym językiem np. dwuznaczność słów.

W rachunku zdań istotnymi pojęciami są pojęcia składni i semantyki.

- Składnia odpowiada na pytania z jakich podstawowych znaków składa się język oraz jak stworzyć skomplikowane wyrażenia, a w szczególności zdania, za pomocą podstawowych znaków.
- Pojęcie semantyki zajmuje się kwestią znaczenia podstawowych znaków języka.

W **klasycznym rachunku zdań** przyjmuje się założenie, że każdemu zdaniu można przypisać jedną z dwu wartości logicznych – **prawdę** lub **fałsz**, które umownie przyjęto oznaczać odpowiednio 1 lub 0.

Klasyczny rachunek zdań jest więc **dwuwartościowym rachunkiem zdań.**

- W rachunku zdań treść rozpatrywanych zdań nie ma znaczenia, istotna jest jedynie ich wartość logiczna.
- Wartość logiczną zdań złożonych powstałych przez zastosowanie funktorów zdaniotwórczych określa funkcja prawdy, związana z każdym funktorem zdaniotwórczym.
- Wartość ta zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań składowych, a nie zależy od ich treści.
- Szczególną rolę w rachunku zdań odgrywają takie zdania złożone, dla których wartość logiczna jest równa 1, niezależnie od tego, jakie wartości logiczne mają zdania proste, z których się składają.

Takie zdania nazywa się prawami rachunku zdań lub tautologiami.

Metajęzyk i język obiektowy

- Język staje się językiem obiektowym, gdy o nim mówimy.
- Aby mówić o języku potrzebujemy również języka, w którym to robimy. Ów język nazywamy metajęzykiem. W tym wypadku metajęzykiem jest język polski.

Logika wielowartościowa jest to rodzaj rachunku zdań, w którym przyjmuje się więcej niż dwie wartości logiczne.

- Tradycyjny rachunek zdań jest dwuwartościowy – są w nim możliwe tylko dwie wartości logiczne – prawda albo fałsz.
- Ale klasyczna dwuwartościowość jest tylko jedną z możliwości zakresu wartości logicznych.
- Istotą logiki wielowartościowej jest odejście od klasycznej logiki dwuwartościowej (prawda i fałsz) i wprowadzenie wartości pośrednich (możliwości, niezdeterminowania).

- Podstawy logik wielowartościowych stworzyli polscy uczeni skupieni w szkole lwowsko-warszawskiej (między innymi Tarski, Ajdukiewicz).
- Logiki wielowartościowe wykładane są na kursach logiki dla filozofów, matematyków, informatyków (szerokie zastosowanie logik wielowartościowych w technikach komputerowych).