1. Funkcje trygonometryczne

Korzystając z wzoru Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

można przedstawić funkcje trygonometryczne:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

2. Funkcje hiperboliczne

funkcje zmiennej rzeczywistej określone są następująco:

- **sinus hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{sh} x$)

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

- **cosinus hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{ch} x$)

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

- **tangens hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{th} x$

  lub $\tanh x$)

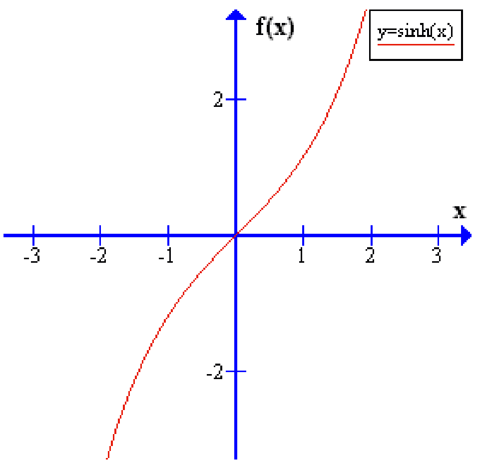
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

- **cotangens hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{cth} x$ lub $\coth x$)

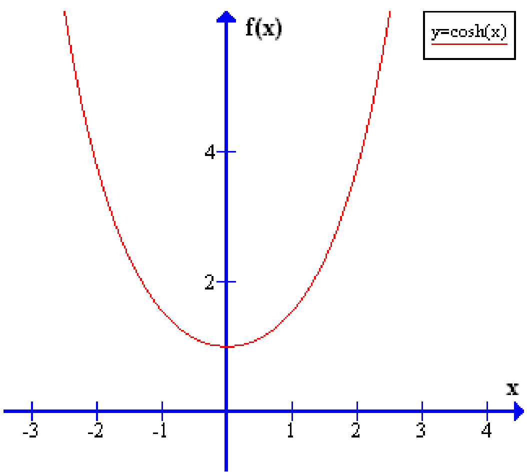
$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

3. Wykresy funkcji hiperbolicznych

Wykres funkcji sinh(x):

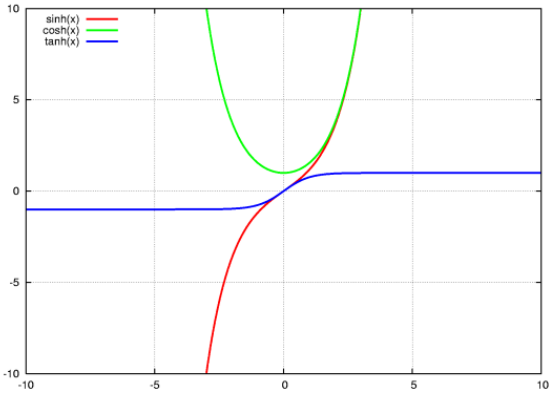


Wykres funkcji cosh(x)



ma kształt linii łańcuchowej.

Wykresy funkcji sinh(x), cosh(x), tanh(x)



4. **Wzór jedynkowy:**

- Zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych postaci (cos x, sin x) jest okręgiem.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- Zbiór punktów o współrzędnych postaci (cosh(x), sinh(x)) wyznacza hiperbolę.

  Wynika to z tożsamości, znanej jako jedynka hiperboliczna:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$