Funkcje, własności funkcji i działania na funkcjach

Niech X i Y będą niepustymi zbiorami.

Funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y.

Aby przyporządkowanie było funkcją, musi, zgodnie z definicją, spełniać dwa warunki:

1. Element ze zbioru Y musi być przyporządkowany każdemu elementowi zbioru X ,

2. Każdemu elementowi zbioru X musi być przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y

Zamiast mówić

- odwzorowanie zbioru *X* w *Y* można też mówić
- przekształcenie zbioru *X* w *Y* lub
- funkcja odwzorowująca *X* w *Y*.

Słowa odwzorowanie, przekształcenie i funkcja mają więc to samo znaczenie. Odwzorowania jednego zbioru w drugi oznacza się najczęściej małymi literami alfabetu łacińskiego: *f*, *g*, *h*.

Zamiast zdania:

- *f jest odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y*
- piszemy symbolicznie: $f: X \to Y$.

Jeśli $f: X \to Y$, to

- element zbioru *Y* przyporządkowany przez przekształcenie *f* nazywamy wartością funkcji *f* dla argumentu x lub mówimy, że jest
- obrazem elementu x przy przekształceniu *f* i oznaczamy f(x).

Symbole *f* i $f(x)$ mają różne znaczenie, pierwszy oznacza samą funkcję, drugi oznacza wartość funkcji dla argumentu *x*, czyli element zbioru *Y*.

Dziedzina funkcji jest to zbiór *X* tych elementów, dla których funkcja została zdefiniowana.

Przeciwdziedzina jest to zbiór *Y*, do którego należą wartości funkcji, czyli zbiór tych elementów *y* zbioru *Y*, dla których istnieje $x \in X$, takie że $y = f(x)$.

Ścisła definicja funkcji sformułowana za pomocą teorii mnogości pochodzi od G. Peano (1911 r.)

Niech *X* i *Y* będą dowolnymi zbiorami. Jeżeli relacja dwuczłonowa $f \subset X \times Y$ spełnia następujący warunek:

- jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$, taki że x f y, (co czytamy: *x* jest w relacji *f* z *y* lub zapisujemy $(x, y) \in f$. to relację tę nazywamy funkcją (odwzorowaniem).

Każdy element dziedziny relacji *f* pozostaje w tej relacji tylko z jednym elementem zbioru *Y*. To jedyne *y*, które pozostaje z *x* w relacji *f*, czyli takie że *x f y*, oznaczamy symbolem $f(x)$ i nazywamy wartością funkcji *f* dla argumentu *x*. Wzór $y = f(x)$ wyraża więc to samo co *x f y*.

Sposoby określania funkcji

Funkcję możemy przedstawić za pomocą:
- opisu słownego
- tabelki
- wzoru
- grafu
- zbioru par uporządkowanych
- wykresu

Opis słowny

Mamy daną funkcję określoną opisem słownym:
Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru *X* przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

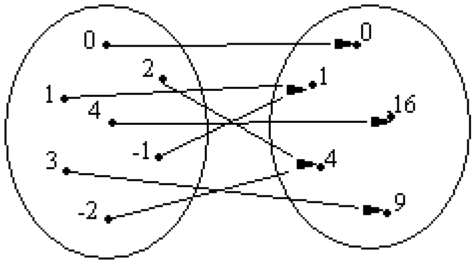
Określenie za pomocą tabelki

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	9	16

Określenie za pomocą wzoru

$y = x^2$,   dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
Używa się również zapisu $f(x) = x^2$, lub $f: x \to x^2$.

Określenie za pomocą grafu



Przedstawienie funkcji w postaci grafu nie jest wygodne, gdyż przyporządkowanie wraz ze zwiększającą się liczbą argumentów staje się nieczytelne.

Określenie za pomocą zbioru par uporządkowanych

$\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$
Takie określenie funkcji również jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Określenie za pomocą wykresu

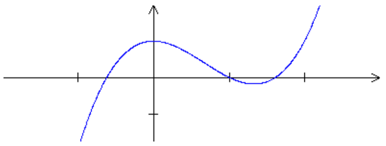
Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

Mając dany wykres funkcji jednej zmiennej o wartościach rzeczywistych można odczytać miejsca zerowe funkcji, punkty ekstremalne i osobliwe oraz ustalić własności takie jak monotoniczność czy okresowość.

Wykresem funkcji *f* nazywamy zbiór tych wszystkich punktów

$P = (x, y)$ płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek

$y = f(x)$ dla $x \in X$.



Własności funkcji

Równość funkcji
Dwie funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe dziedziny i dla tych samych argumentów przyjmują równe wartości.

Ogólne własności funkcji

Funkcja na …

- Funkcja może odwzorowywać zbiór X w Y lub
- przekształcać zbiór X na zbiór Y.

Różnica pomiędzy tymi dwoma pojęciami jest zasadnicza.

- Funkcja odwzorowuje zbiór X w Y, jeśli jej wartości należą do zbioru Y,
- funkcja przekształca zbiór X na Y, jeśli jej zbiór wartości jest równy zbiorowi Y.

Funkcja $f: X \to Y$ przekształca zbiór X na zbiór Y, jeżeli przeciwdziedzina $f(X)$ tej funkcji pokrywa się ze zbiorem Y, czyli gdy $f(X) = Y$.

Funkcja różnowartościowa

Funkcja różnowartościowa (iniekcja) jest to funkcja, która dla dowolnych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości.

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy różnowartościową, jeśli dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości.

Określając różnowartościowość funkcji f sprawdzamy, czy spełniony jest warunek $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ przy założeniu $x_1 - x_2 \neq 0$.
Wniosek:

Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa, to każda prosta $y = m$ (gdzie $m \in R$) ma co najwyżej jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f.

Przekształcenia różnowartościowe zbioru X na zbiór X nazywamy *permutacjami zbioru X.*

Liczba wszystkich przekształceń zbioru n-elementowego na zbiór n-elementowy jest równa $n!$ Symbol $n!$ (czytaj: *n silnia*) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Więc liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$

Funkcja wzajemnie jednoznaczna

Funkcję $f\colon X \to Y$, która jest jednocześnie "na" i różnowartościowa nazywamy wzajemnie jednoznaczną (bijekcją).

Funkcja ta jest więc odwzorowaniem swojej dziedziny na zbiór wartości.

Bijekcja przekształca wszystkie elementy obu zbiorów w stosunku jeden do jednego, czyli każdemu elementowi dziedziny odpowiada dokładnie jeden element obrazu, a każdemu elementowi obrazu odpowiada dokładnie jeden element przeciwobrazu.

Funkcja jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja do niej odwrotna, wtedy również i ona jest bijekcją.

Funkcja odwrotna

Funkcję $g\colon Y \to X$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji

$f\colon X \to Y$, jeżeli $Y = f(X)$, $X = g(Y)$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi równość: $g(f(x)) = x$.
Funkcję odwrotną do f oznaczamy przez f^{-1}.

Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją różnowartościową odwzorowującą zbiór X na zbiór Y.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ gdzie } y \in Y,\ x \in X.$$

Jeżeli funkcja $g\colon Y \to X$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f\colon X \to Y$, to spełnione są następujące warunki:

- f przekształca X na Y i g przekształca Y na X,
- $(g(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y)$ dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$,
- funkcje f i g są różnowartościowe.

Z definicji funkcji odwrotnej można wyciągnąć taki wniosek. Jeżeli funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f, to funkcja f jest funkcją odwrotną do funkcji g.
Zachodzi więc następująca równość: $(f^{-1})^{-1} = f$. Dla każdej funkcji różnowartościowej f: $X \rightarrow Y$ przekształcającej X na Y istnieje dokładnie jedna funkcja odwrotna.

Funkcja odwracalna

Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną f^{-1}, to funkcję f nazywamy funkcją odwracalną.

Wniosek: Jeżeli obrazem wykresu funkcji f: $X \rightarrow Y$ w symetrii względem prostej $y = x$ jest wykres funkcji przekształcającej pewien podzbiór X w Y, to funkcja f jest odwracalna. Geometryczne będzie to oznaczać, że układ współrzędnych na płaszczyźnie odbity został względem prostej $y = x$.

Superpozycja funkcji

Niech dane będą funkcje f: $X \rightarrow Y$ i g: $Y \rightarrow Z$. Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje wówczas dokładnie jeden element $z \in Z$, taki że $z = g(f(x))$.

Funkcje f i g wyznaczają więc nową funkcję h: $X \rightarrow Z$ określoną w następujący sposób: $h(x) = g(f(x))$ dla każdego $x \in X$. Funkcję h nazywamy *superpozycją* lub *złożeniem funkcji* f i g i oznaczamy symbolem $g \circ f$.

Niech dane będą funkcje: f: $X \rightarrow Y$ i g: $Y \rightarrow Z$.

Funkcję h spełniającą warunek: $h(x) = g(f(x))$, dla każdego $x \in X$ nazywamy superpozycją (złożeniem) funkcji f i g. Funkcję f przyjęto nazywać funkcją wewnętrzną, g zaś funkcją zewnętrzną funkcji h.

Dla dowolnych funkcji f: $X \rightarrow Y$ i g: $Y \rightarrow Z$:

-jeżeli f przekształca X na Y i g przekształca Y na Z to $g \circ f$ przekształca X na Z,

-jeżeli f i g są różnowartościowe, to $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową,

-jeżeli f i g są różnowartościowe i przekształcają odpowiednio zbiory X i Y na Y i Z, to zachodzi równość;

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Podstawowe własności funkcji liczbowych

Funkcja f: $X \to Y$, gdzie $X \subset R$ i $Y \subset R$ nazywamy funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej.

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej odgrywają szczególnie ważną rolę w matematyce i jej zastosowaniach. Podstawowe własności tych funkcji przedstawione są poniżej.

Funkcja okresowa

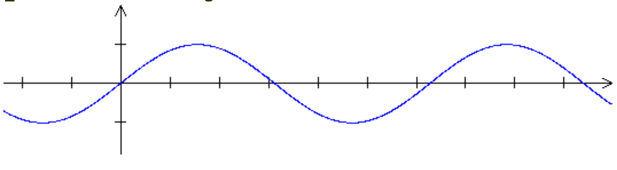
Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest funkcją okresową o okresie t, jeśli istnieje taka liczba $t \neq 0$, która dodana do dowolnej dopuszczalnej wartości argumentu nie zmienia wartości funkcji tzn.

$$f(x + t) = f(x).$$

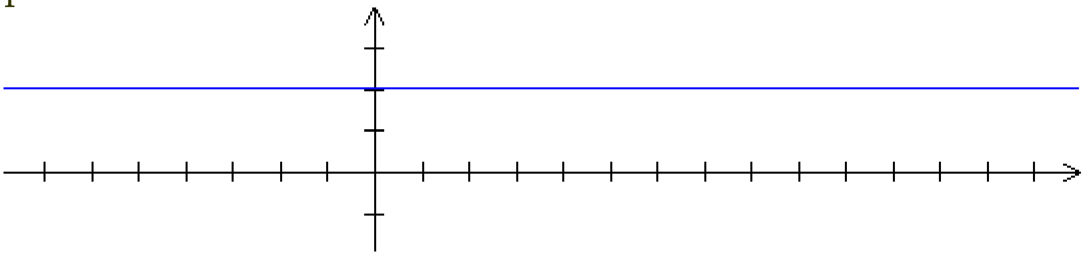
Najmniejszą liczbę dodatnią o tej własności (jeżeli istnieje) nazywamy okresem podstawowym (zasadniczym) funkcji.

Okresowość funkcji badamy sprawdzając, czy istnieje liczba $t \neq 0$, dla której $f(x + t) = f(x)$, gdzie x należy do dziedziny funkcji.

Przykłady:
Przykładami funkcji okresowych są funkcje trygonometryczne oraz funkcja stała. Funkcja $y = \sin x$ jest okresowa o okresie podstawowym 2π.



2. Funkcja $y = 2$ jest okresowa, ale okresu podstawowego nie posiada.



Funkcja monotoniczna

Mówimy, że funkcja f jest monotoniczna w przedziale, jeśli posiada w nim jedną z czterech własności:

- jest rosnąca,
- jest malejąca,
- jest nierosnąca,
- jest niemalejąca.

Funkcja rosnąca

Funkcję f nazywamy **rosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest implikacja

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcja malejąca

Funkcję f nazywamy **malejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest implikacja

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja nierosnąca

Funkcję f nazywamy **nierosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest implikacja

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funkcja niemalejąca

Funkcję f nazywamy **niemalejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest implikacja

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Funkcja stała

Funkcję f nazywamy **stałą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcje rosnące i malejące są różnowartościowe (różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji). O obu tych funkcjach mówimy, że są ściśle monotoniczne,

Funkcje nierosnące i niemalejące nazywamy monotonicznymi w szerszym sensie.

Twierdzenie
Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $A \subset D_f$ ma pochodną dodatnią w całym przedziale A, to jest w tym przedziale rosnąca.

Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $A \subset D_f$ ma pochodną ujemną w całym przedziale A, to jest w tym przedziale malejąca.

Wniosek

Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a, b) \subset D_f$ jest w tym przedziale rosnąca, to jej pochodna $f'(x)$ przyjmuje wartość nieujemną, dla każdego $x \in (a, b)$.

Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a, b) \subset D_f$ jest w tym przedziale malejąca, to jej pochodna $f'(x)$ przyjmuje wartość niedodatnią, dla każdego $x \in (a, b)$.

Określanie monotoniczności

Aby określić monotoniczność funkcji:

- Badamy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$, przy założeniu, że $x_1 - x_2 > 0$, gdzie $x_1, x_2 \in A$ i $A \subset D_f$,

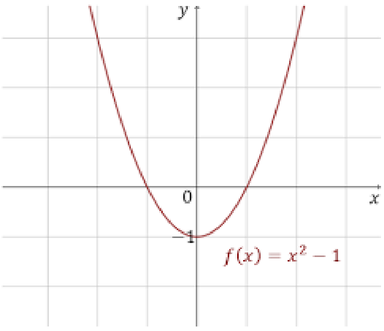
- Korzystamy z różniczkowego kryterium badania monotoniczności funkcji w zbiorze A (tzw. wnioski z twierdzenia Lagrange'a):
  - jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest stała w przedziale (a, b).
  - jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).
  - jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).

Funkcja parzysta i nieparzysta

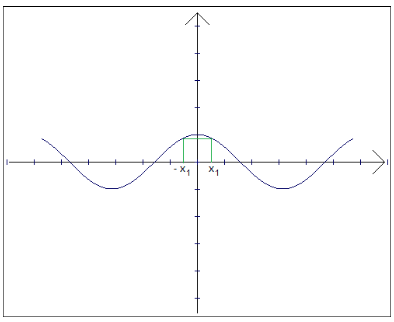
Funkcje parzyste i nieparzyste to funkcje, które zachowują symetrię względem znaku argumentu.

Funkcja parzysta

Funkcję f nazywamy funkcją parzystą, jeśli dla każdego x należącego do dziedziny funkcji, $-x$ również należy do dziedziny oraz $f(-x) = f(x)$.



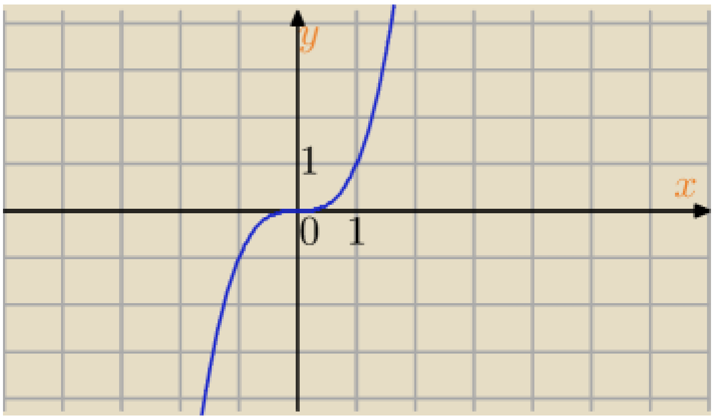
Funkcja f jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D_f jest symetryczny względem zera oraz oś OY jest osią symetrii wykresu tej funkcji. Przykład – funkcja parzysta.



Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

Funkcja nieparzysta

Funkcję f nazywamy funkcją nieparzystą, jeśli dla każdego x należącego do dziedziny funkcji, $-x$ również należy do dziedziny oraz $f(-x) = -f(x)$.



Funkcja f jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D_f jest symetryczny względem zera oraz punkt $O = (0, 0)$ jest środkiem symetrii wykresu tej funkcji.

Dziedzina funkcji parzystych i nieparzystych jest symetryczna, tzn. jeżeli x należy do dziedziny, to $-x$ również.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Jeśli 0 należy do dziedziny nieparzystej funkcji f, to $f(0) = 0$ czyli wykres funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Przykłady, funkcje parzyste
- funkcja stała,
- funkcja trygonometryczna cosinus,
- wartość bezwzględna,
- funkcja potęgowa o parzystym wykładniku,
- wielomiany zawierające niezerowe współczynniki tylko przy parzystych potęgach zmiennej.

Przykłady; funkcje nieparzyste

- funkcja liniowa której wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych, $y=x$
- funkcja potęgowa o nieparzystym wykładniku,

- funkcje trygonometryczne sinus i tangens,
- wielomiany zawierające niezerowe współczynniki tylko przy nieparzystych potęgach zmiennej.

Jedynymi funkcjami będącymi jednocześnie parzystymi i nieparzystymi są funkcje stałe równe tożsamościowo zeru.

Funkcja ograniczona

Funkcję *f*, której zbiór wartości jest ograniczony, nazywa się funkcją ograniczoną, czyli taką, której wszystkie wartości należą do pewnego przedziału ograniczonego. , np. *sinx, cosx*

Funkcja ograniczona z dołu

Funkcję f nazywamy ograniczoną z dołu, jeśli istnieje taka liczba $m \in R$, że dla każdej liczby $x \in D_f$ spełniona jest nierówność

$f(x) \geq m$, przykład $y=x^2$

Funkcja ograniczona z góry

Funkcję f nazywamy ograniczoną z góry, jeśli istnieje taka liczba $M \in R$, że dla każdej liczby $x \in D_f$ spełniona jest nierówność

$f(x) \leq M$ przykład: $y = - x^2$

Funkcja ograniczona

Funkcję f nazywamy ograniczoną, jeśli istnieją takie liczby m, $M \in R$, że dla każdej liczby $x \in D_f$ spełniona jest nierówność

$m \leq f(x) \leq M$. Przykład $y= sinx$,

Przykład Funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ są ograniczone, bo ich wartości zawarte są w przedziale <-1, 1>.

Funkcją nieograniczoną nazywa się funkcję, która nie jest ograniczona, czyli funkcję, której zbiór wartości nie zawiera się w żadnym przedziale. Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są ograniczone.

Wszystkie wielomiany stopnia niezerowego są nieograniczone.