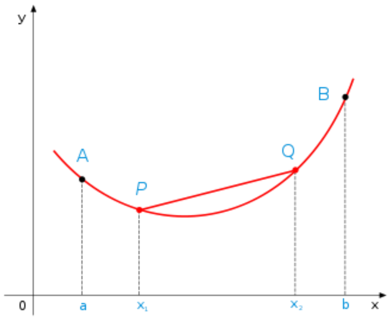
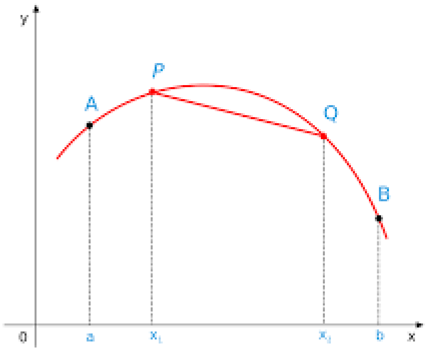
**Funkcja wklęsła i wypukła**

Funkcja jest wypukła w pewnym przedziale, jeżeli odcinek powstały z połączenia dowolnych dwóch punktów wykresu w tym przedziale, znajduje się nad jej wykresem. Rys.1




Rys.1

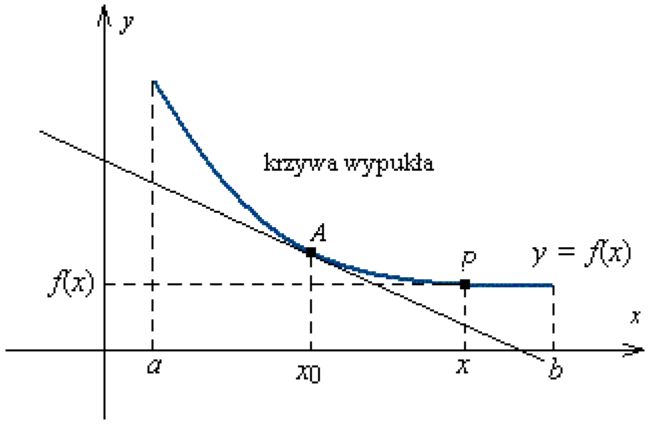
Funkcja jest wklęsła w pewnym przedziale, jeżeli odcinek powstały z połączenia dowolnych dwóch punktów wykresu w tym przedziale, znajduje się pod jej wykresem. Rys.2




Rys.2

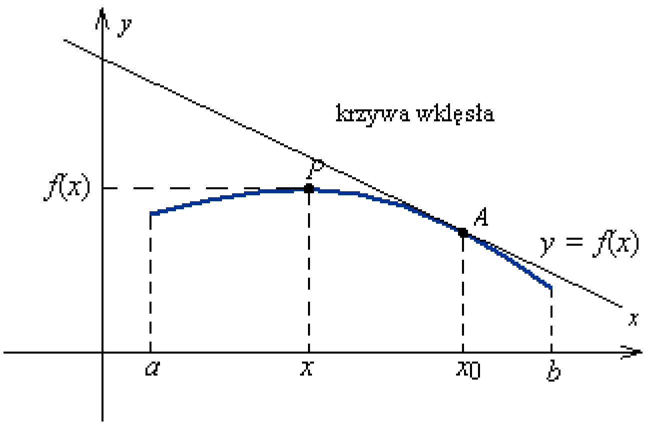
**Funkcja wypukła w zbiorze**

Jeżeli funkcja $f$ jest różniczkowalna (tzn. posiada pochodną) w przedziale $(a, b) \subset D_f$, to mówimy, że funkcja $f$ jest wypukła w przedziale $(a, b)$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a, b)$ styczna do wykresu tej funkcji w punkcie o odciętej $x_0$ jest położona pod tą krzywą.



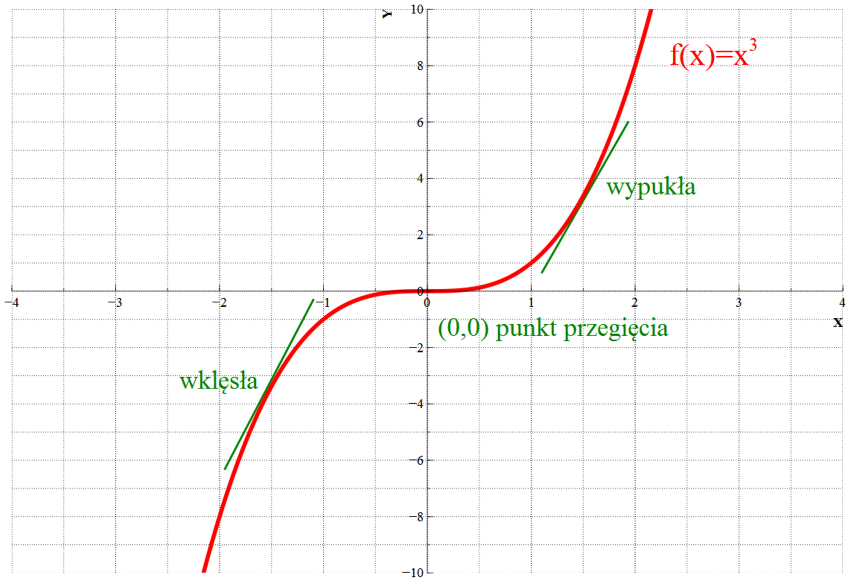

## Funkcja wklęsła w zbiorze

Jeżeli funkcja *f* jest różniczkowalna (tzn. posiada pochodną ) w przedziale $(a, b) \subset D_f$, to mówimy, że funkcja *f* jest wklęsła w przedziale $(a, b)$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a, b)$ styczna do wykresu tej funkcji w punkcie o odciętej $x_0$ jest połażona nad tą krzywą.




## Punkt przegięcia

Jeżeli z jednej strony punktu $x_0$ funkcja jest wypukła zaś z drugiej wklęsła, to $x_0$ nazywamy punktem przegięcia krzywej. Tak samo jak funkcję *f* , także krzywą $y = f(x)$ nazywamy odpowiednio krzywą wypukłą (wklęsłą).




Wypukłość funkcji geometrycznie oznacza, że dla każdego przedziału $< a, b> \subset X$ wykres funkcji $f$ w tym przedziale leży pod cięciwą (albo na samej cięciwie) przechodzącej przez punkty

$A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$.

Wklęsłość funkcji geometrycznie oznacza, że dla każdego przedziału $< a, b> \subset X$ wykres funkcji $f$ w tym przedziale leży nad cięciwą (albo na samej cięciwie) przechodzącej przez punkty

$A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$.

Funkcja liniowa jest jednocześnie wypukła i wklęsła.

**Miejsca zerowe funkcji**

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy tę wartość argumentu $x$, dla której zachodzi równość $f(x) = 0$.

Miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$ wyznaczamy rozwiązując równanie $f(x) = 0$, gdzie $x \in D_f$. Każde rozwiązanie powyższego równania należące do dziedziny, jest miejscem zerowym funkcji $f$.

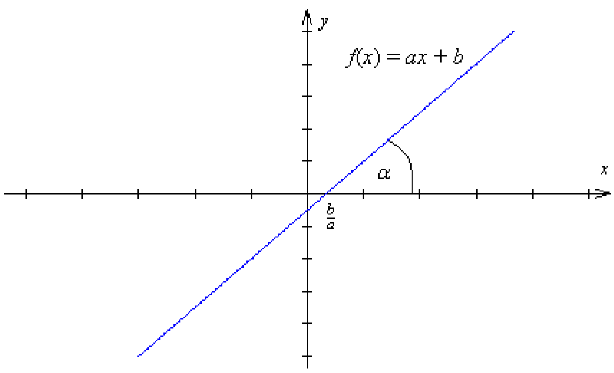
Można też określić miejsca zerowe jako punkty przecięcia się wykresu funkcji $f$ z osią $OX$ w prostokątnym układzie współrzędnych.

# Funkcja liniowa

Funkcję $f$ określoną wzorem $f(x)=ax+b$ dla $x \in R$,
gdzie $a, b \in R$ nazywamy *funkcją liniową*.
Liczbę $a$ nazywamy *współczynnikiem kierunkowym*, liczbę b nazywamy *wyrazem wolnym*.

Wykres funkcji liniowej
Wykresem funkcji liniowej $f$ określonej wzorem $f(x)=ax+b$ dla $x \in R$ jest linia prosta nachylona do osi $OX$ pod kątem $a$,

gdzie $a=tga$ i przecinająca oś $OY$ w punkcie $(0,b)$.




Miejsce zerowe funkcji liniowej
Miejsce zerowe funkcji to argument, dla którego dana funkcja przyjmuje wartość 0.

Interpretacją geometryczną miejsca zerowego jest odcięta punktu, w którym wykres funkcji przecina albo styka się z osią $OX$ w prostokątnym układzie współrzędnych.

Jeżeli funkcja $f(x)=ax+b$ nie jest funkcją stałą, to posiada ona dokładnie jedno miejsce zerowe określone wzorem $-b/a$,

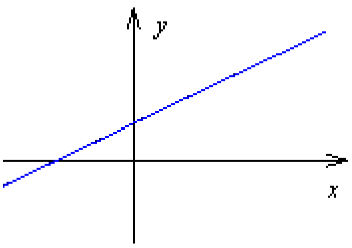
Jeżeli funkcja $f$ jest funkcją stałą, to albo nie posiada miejsc zerowych (dla $b \neq 0$), albo wszystkie jej argumenty są miejscami zerowymi (dla $b=0$).

Monotoniczność funkcji liniowej

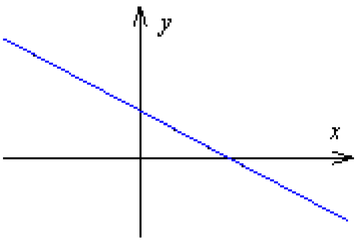
Monotoniczność funkcji liniowej zależy od współczynnika kierunkowego prostej $a$.

Jeżeli:
$a>0$, to funkcja jest rosnąca
$a<0$, to funkcja jest malejąca
$a=0$, to funkcja liniowa jest stała

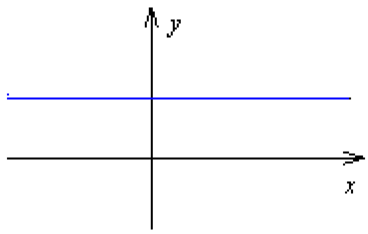
funkcja rosnąca




funkcja malejąca




funkcja stała




Własności oraz wykres funkcji liniowej postaci $y = ax + b$

Warunek równoległości i prostopadłości prostych.
Dane są dwie proste: $k,l$

$k$: $y=ax+b$
$l$: $y=cx+d$

- Warunek równoległości prostych
  Proste w układzie współrzędnych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych prostych są równe.
  $k||l \Leftrightarrow a=c$

  Warunek prostopadłości prostych
  Proste w układzie współrzędnych są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi $-1$.
  $k \perp l \Leftrightarrow a \cdot c = -1$

## Funkcja kwadratowa

Jeżeli $a \neq 0$, to funkcję $f$ określoną wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$ nazywamy *funkcją kwadratową*.
$a,b,c$ - współczynniki liczbowe funkcji kwadratowej,
$\Delta=b^2-4ac$ - wyróżnik funkcji kwadratowej.

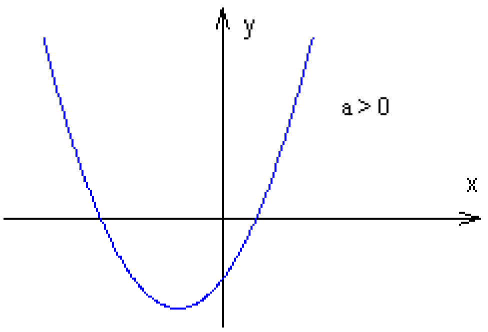
Dziedziną funkcji kwadratowej jest cały zbiór liczb rzeczywistych.
Zbiorem wartości funkcji dla $a>0$ jest przedział $y \in [-\Delta/4a, +\infty)$,
dla $a<0$ przedział $y \in (-\infty, -\Delta/4a]$.

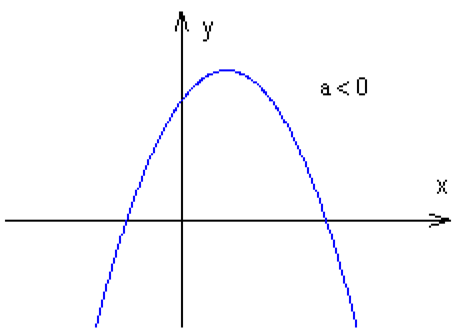
Wykres funkcji kwadratowej
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, o wierzchołku

$$W=(-b/2a, -\Delta/4a),$$

Gdy $a>0$, to ramiona paraboli są skierowane w górę i posiada ona minimum globalne, w przeciwnym przypadku skierowane są w dół i ma ona maksimum globalne.

Miejscem przecięcia wykresu funkcji kwadratowej z osią $OY$ jest punkt $(0,c)$.



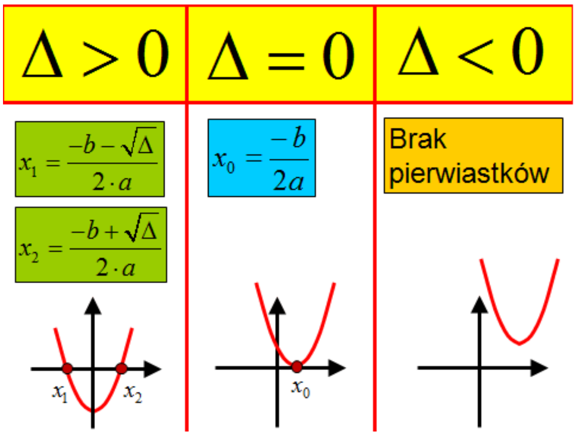




Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od wartości wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$.
Funkcja kwadratowa:
- posiada dwa miejsca zerowe dla $\Delta>0$

  $x_1, x_2$
- posiada jedno podwójne miejsce zerowe dla $\Delta=0$

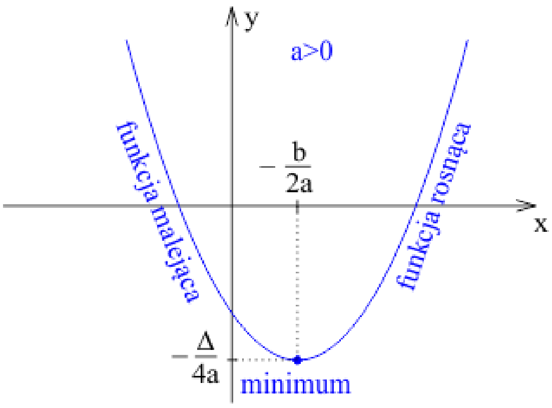
  $x_0$
- nie posiada miejsc zerowych dla $\Delta<0$




<u>Monotoniczność</u> funkcji kwadratowej

Funkcja kwadratowa w pewnym przedziale jest funkcją rosnącą, a w pewnym malejącą.

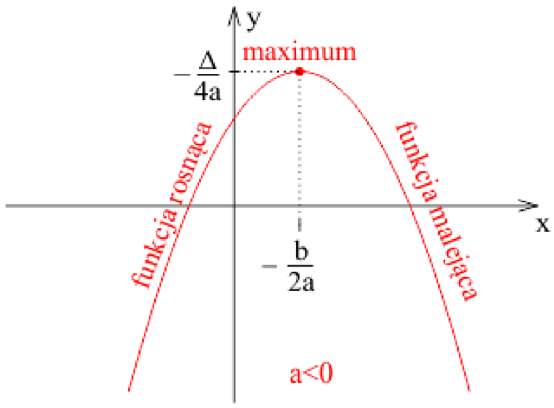
<u>Jeśli *a*>0 funkcja jest:</u>




- rosnąca dla $x \in (-\frac{b}{2a}, \infty)$

- malejąca dla $x \in (\infty, -\frac{b}{2a})$

<u>Jeżeli *a*<0 funkcja jest:</u>




- malejąca dla $x \in (-\frac{b}{2a}, -\infty)$

- rosnąca dla $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$

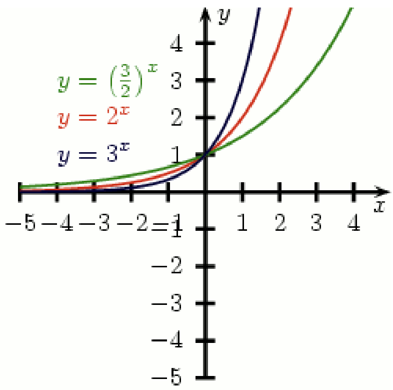
**<u>Funkcja wykładnicza</u>** o podstawie a>0 i a≠1, jest to funkcja określona wzorem:

$$f(x)=a^x$$

Funkcja wykładnicza każdej liczbie
rzeczywistej x przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą dodatnią $a^x$

- Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, natomiast
- zbiór wartości funkcji dla $a>0$ i $a\neq1$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Dla a=1 funkcja wykładnicza jest funkcją stałą o wzorze $f(x)=1$, czyli dla każdego $x$ funkcja przyjmuje wartość jeden.

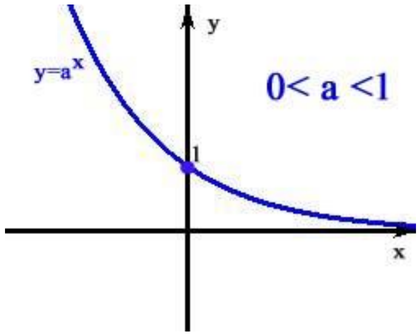



Wykres funkcji wykładnicze dla a>0 i a≠1

<u>Własności funkcji</u> wykładniczej dla, a>0 i a≠1

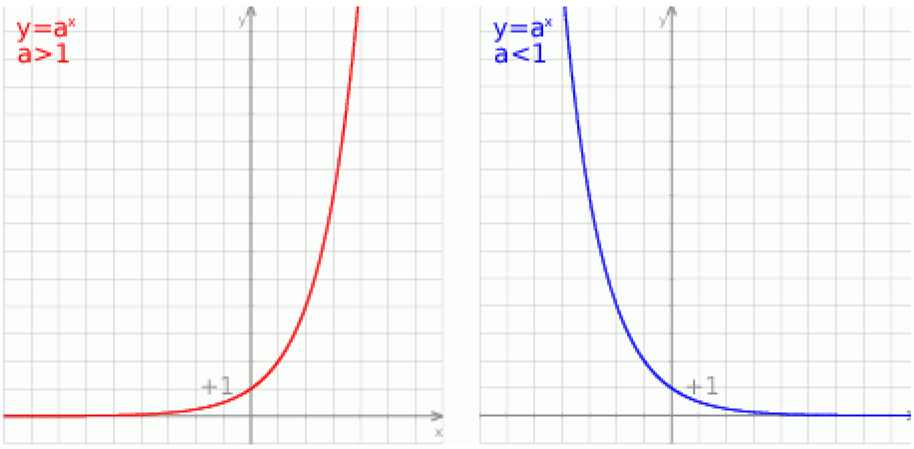
- Monotoniczność: funkcja wykładnicza <u>jest **rosnąca**</u>.
- Różnowartościowość: funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.
- Miejsca zerowe: funkcja wykładnicza nie posiada miejsc zerowych.
- Parzystość: funkcja wykładnicza nie jest parzysta.
- Nieparzystość: funkcja wykładnicza nie jest nieparzysta.
- Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie $f(x)>0$ dla $x\in R$

Własności funkcji wykładniczej o podstawie 0<a<1




- Dziedzina: R , zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiór wartości: R+ czyli liczby rzeczywiste dodatnie.
- Monotoniczność: funkcja wykładnicza jest **malejąca**.
- Różnowartościowość: funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.
- Miejsca zerowe: funkcja wykładnicza nie posiada miejsc zerowych.
- Parzystość: funkcja wykładnicza nie jest parzysta.
- Nieparzystość: funkcja wykładnicza nie jest nieparzysta.
- Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie $f(x)>0$ *dla* $x \in R$

Porównać dwa wykresy funkcji wykładniczych




**Funkcja logarytmiczna**

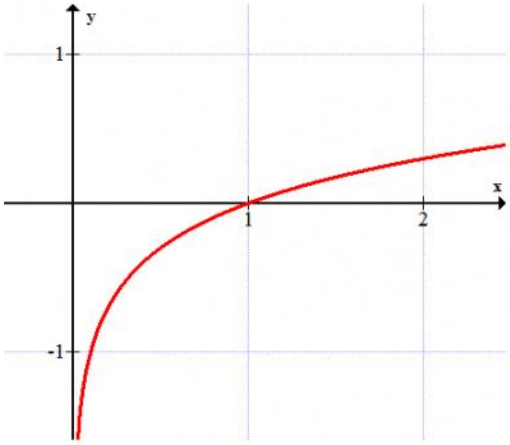
Funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$

Gdzie $a \in R^{+} \setminus \{ 1\}$,    $x \in R^{+}$
nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie $a$ .

Własności funkcji logarytmicznej:

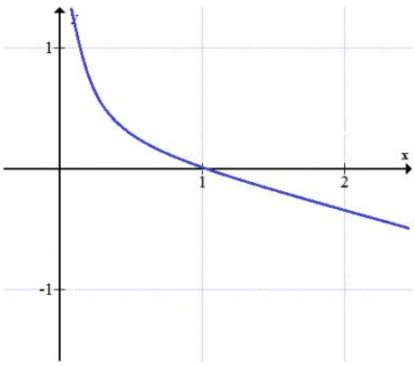
- Dziedzina: $(0,\infty )$
- Zbiór wartości: R .
- Miejsce zerowe to zawsze x=1 , niezależnie od podstawy .
- Monotoniczność:

- gdy, a>1 to funkcja logarytmiczna jest **rosnąca**




Rys. Wykres funkcji logarytmicznej dla a> 1

Gdy , a<1to funkcja logarytmiczna jest **malejąca**




Inne własności:

- funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa,
- funkcja logarytmiczna jest wypukła

Porównać wykres funkcji logarytmicznej  dla a>1 oraz a<1