Tautologie - prawa klasycznego rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów.

Tautologia jest to wyrażenie, które jest zawsze prawdziwe.

Definicja tautologii w klasycznym rachunku zdań przedstawia się następująco:

- Wyrażenie W jest tautologią klasycznego rachunku zdań, wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym podstawieniu stałych za zmienne przechodzi w zdanie prawdziwe.

Prawo wyłączonego środka

Prawo wyłączonego środka jest to następująca tautologia:

$$p \vee (\sim p)$$

Dowodzi się ją metodą zero-jedynkową:

p	~p	p∨(~p)
1	0	1
0	1	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo wyłączonego środka jest tautologią.

Prawo sprzeczności

Prawo sprzeczności jest to następująca tautologia:

$$\sim(p \wedge (\sim p))$$

Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	~p	p∧(~p)	~(p∧(~p))
1	0	0	1
0	1	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo sprzeczności jest tautologią.

Prawo podwójnej negacji

Prawo podwójnej negacji jest to następująca tautologia:

$$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$$

Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
1	0	1	1
0	1	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo podwójnej negacji jest tautologią.

I prawo de Morgana

I prawo de Morgana jest to następująca tautologia:

$$(\sim(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$$

Głosi ona, że: Zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań $\sim(p \wedge q)$ jest równoważne alternatywie zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \vee (\sim q)$. Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$(\sim(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że I prawo de Morgana jest tautologią. Ostatnią kolumnę wypełnia się na podstawie kolumn: czwartej i siódmej.

II prawo de Morgana

II prawo de Morgana jest to następująca tautologia:

$$(\sim(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$$

Głosi ona, że: Zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań $\sim(p \vee q)$ jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \wedge (\sim q)$.
Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	p∨q	~(p∨q)	~p	~q	(~p)∧(~q)	(~(p∨q))⇔((~p)∧(~q))
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że II prawo de Morgana jest tautologią.
Ostatnią kolumnę wypełnia się na podstawie kolumn: czwartej i siódmej.

Prawo odrywania

Prawo odrywania jest to następująca tautologia:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

Głosi ona, że: Jeśli prawdziwe są implikacja $p \Rightarrow q$ oraz jej poprzednik p, to również jej następnik q jest zdaniem prawdziwym.

Implikacja dwóch zdań p i q jest fałszywa tylko wtedy, gdy zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q jest fałszywe, czyli gdy z prawdy wynika fałsz. Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	p⇒q	p∧(p⇒q)	(p∧(p⇒q))⇒q
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo odrywania jest tautologią. Ostatnią kolumnę wypełniliśmy na podstawie kolumn: czwartej i drugiej.

Prawo negacji implikacji

Prawo negacji implikacji jest to następująca tautologia:

$$(\sim(p\Rightarrow q))\Leftrightarrow(p\wedge(\sim q))$$

Głosi ona, że:
Zaprzeczenie implikacji dwóch zdań $\sim(p\Rightarrow q)$ jest równoważne koniunkcji $p\wedge(\sim q)$.

Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim(p\Rightarrow q)$	$\sim q$	$p\wedge(\sim q)$	$(\sim(p\Rightarrow q))\Leftrightarrow(p\wedge(\sim q))$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo negacji implikacji jest tautologią.

Ostatnią kolumnę wypełniliśmy na podstawie kolumn: czwartej i szóstej.

Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy

Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy jest to następująca tautologia:

$$(p\wedge(q\vee r))\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$$

Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	r	q∨r	p∧(q∨r)	p∧q	p∧r	(p∧q)∨(p∧r)	(p∧(q∨r))⇔((p∧q)∨(p∧r))
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy jest tautologią.

Ostatnią kolumnę wypełniliśmy na podstawie kolumn: piątej i ósmej.

Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji

Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji jest to następująca tautologia:

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

Dowodzimy ją metodą zero-jedynkową:

p	q	r	q∧r	p∨(q∧r)	p∨q	p∨r	(p∨q)∧(p∨r)	(p∨(q∧r))⇔((p∨q)∧(p∨r))
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, zatem udowodniliśmy, że prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji jest tautologią.
Ostatnią kolumnę wypełniliśmy na podstawie kolumn: piątej i ósmej.

Kwantyfikatory

W rachunku zdań tworzy się formuły zdaniowe, które mogą oznaczać różne zdania w zależności od interpretacji zmiennych zdaniowych wchodzących w ich skład.

W rachunku kwantyfikatorów przy pomocy symboli oznaczających funkcje zdaniowe, symbolu równości, kwantyfikatorów, spójników logicznych, zmiennych i nawiasów tworzy się wyrażenia oznaczające nowe funkcje zdaniowe lub zdania. Wyrażenia takie nazywamy formułami rachunku kwantyfikatorów, lub krótko formułami.

Kwantyfikator ogólny, jest to kwantyfikator oznaczający, że dane twierdzenie (funkcja zdaniowa) jest prawdziwe dla dowolnej wartości zmiennej.

Kwantyfikatorami nazywamy zwroty:

- **dla każdego**
- **istnieje takie.**

Kwantyfikator ogólny, symbol $\forall$ (albo $\bigwedge$) i czytamy:

- dla każdego.

Kwantyfikator szczegółowy symbol $\exists$ (albo $\bigvee$) i czytamy:

- istnieje takie

Pod kwantyfikatorem zawsze umieszczamy parametr, którego ma dotyczyć dany kwantyfikator.

Przykłady

1. Wyrażenie $\underbrace{\forall}_{x\in R}$ czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych.*

2. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{n\in N}$ czytamy: *dla każdego* n *należącego do zbioru liczb naturalnych.*

3. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x>2}$ czytamy: *dla każdego* x *większego od dwóch.*

4. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x\in R\ x<0}$ czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych i jednocześnie mniejszego od zera.*

5. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\in R}$ czytamy: *istnieje taki* x *należący do zbioru liczb rzeczywistych.*

6. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\epsilon(-1,1)}$ czytamy: *istnieje taki* x *należący do przedziału* $(-1,1)$.

Za kwantyfikatorem zawsze umieszczamy wyrażenie, którego ma dotyczyć dany kwantyfikator.

<u>Przykłady cd.</u>

1. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R} \; x^2 \geq 0$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych R wyrażenie* x^2 *jest większe lub równe zero.*

Powyższe zdanie jest zdaniem prawdziwym.

2. Natomiast zdanie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R} \; x^2 \geq 5$$

jest nieprawdziwe, bo np. dla x=2 mamy $x^2=4<5$.

3. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{k\in Z} \; \frac{k(k+1)}{2}$$

czytamy: *dla każdego* k *należącego do zbioru liczb całkowitych wyrażenie* k(k+1) *jest podzielne przez* 2.

4. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{n\in N} \; n+1>0$$

czytamy: *dla każdego* n *należącego do zbioru liczb naturalnych wyrażenie* n+1 *jest dodatnie.*

5. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x\in R \wedge x<0} \; x^3 <0$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych i jednocześnie mniejszego od zera wyrażenie* x^3 *jest ujemne.*

6. Wyrażenie:

$$\underbrace{\exists}_{x\in R} \; 2x+5=6$$

czytamy: *istnieje taki* x *należący do zbioru liczb rzeczywistych, dla którego spełnione jest równanie* 2x+5=6. (czyli $x=\frac{1}{2}$)

7. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\in(-1,1)} x^2=0$

czytamy: *istnieje taki* x *należący do przedziału* $(-1,1)$ *dla którego* $x^2=0$. (czyli x=0)

8. Wyrażenie:

$$\underbrace{\exists}_{n\in N} \frac{n}{21}$$

czytamy: *istnieje n należący do zbioru liczb naturalnych taki, że n jest podzielny przez* 21. (czyli n∈{21,42,63,...})

Kwantyfikatory często stosuje się w bardziej złożonych zdaniach.

Przykłady cd

1. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R\ y\in R} x^2+y^2\geq 0$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych oraz* y *należącego do zbioru liczb rzeczywistych, wyrażenie* x^2+y^2 *jest większe lub równe zero.*

2. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R} \underbrace{\exists}_{y\in R} x+y=100$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych istnieje* y *należący do zbioru liczb rzeczywistych taki, że wyrażenie* x+y *jest równe* 100.