**Wprowadzenie**

Liczby zespolone są rozszerzeniem liczb rzeczywistych R. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem C (ang. *complex number*).

W zbiorze liczb rzeczywistych nie można wyciągać pierwiastków z liczb ujemnych. W zbiorze liczb zespolonych można wyciągać pierwiastki z liczb ujemnych.
Pierwiastek z liczby ujemnej jest tzw. liczbą urojoną i zapisujemy go za pomocą jednostki urojonej *i.*

Liczbę *i* definiujemy tak: (literka *i* - to jednostka urojona)

$$i^2 = -1$$

Definicja liczby zespolonej

Liczbą zespoloną nazywamy liczbę postaci:

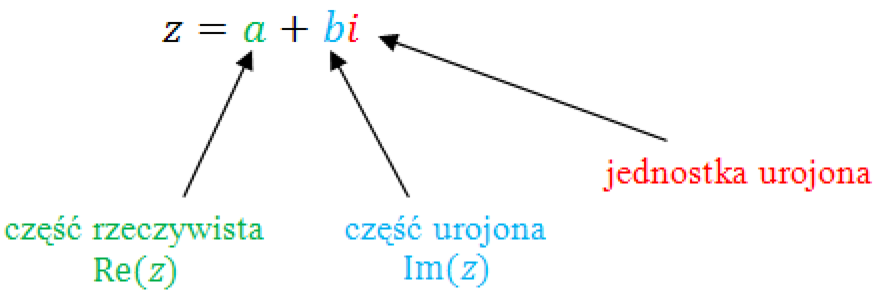
$$a + i\,b$$

*gdzie:* $a,b \in R$ *oraz*

*a* - część rzeczywista liczby zespolonej
*b* - część urojona liczby zespolonej

Liczbę zespoloną *a+ib* można rozważać jako uporządkowaną parę: *(a,b)*

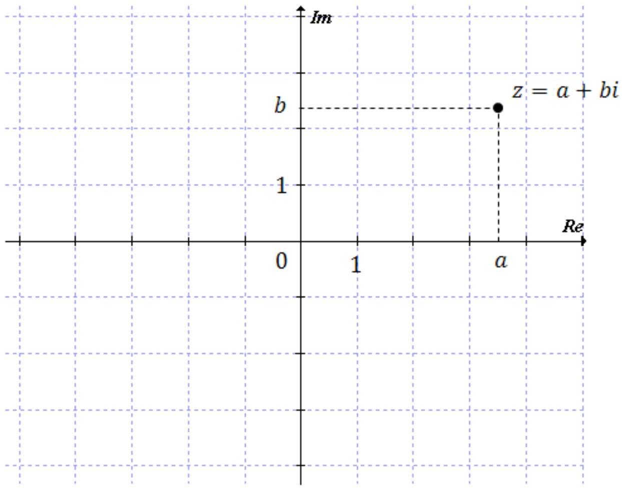
Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną *z=a+bi.* Wówczas mamy:



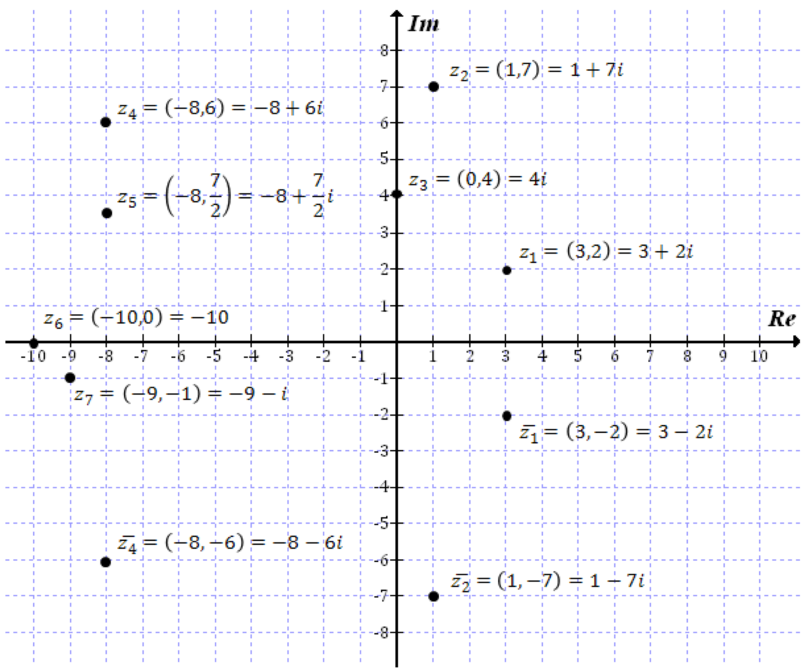

Uwaga odnośnie zapisu części rzeczywistej i urojonej.

- Część rzeczywistą liczby zespolonej z oznaczamy symbolem: Re(z) (ang. Real).
- Część urojoną liczby zespolonej z oznaczamy symbolem: Im(z) (ang. Imaginary).

Możemy interpretować liczby zespolone jako punkty na płaszczyźnie. Na osi x-ów będziemy zaznaczać część rzeczywistą liczby zespolonej, a na osi y-ów część urojoną.

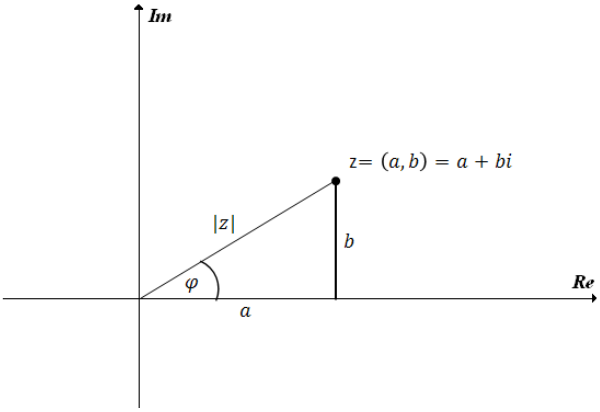



Przykłady kilku liczb zespolonych zaznaczonych w układzie współrzędnych:




W układzie współrzędnych zaznaczono również liczby sprzężone do $z_1$, $z_2$ oraz $z_4$, czyli $\overline{z_1}$ $\overline{z_2}$ $\overline{z_4}$. Są one odbiciami symetrycznymi względem osi x-ów.

Zaznaczymy teraz jeden ogólny punkt na płaszczyźnie zespolonej i określimy dla niego kilka własności.




Odległość liczby zespolonej *z=a+bi* od początku układu współrzędnych, wyraża się wzorem:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (z tw. Pitagorasa).Jest to po prostu <u>moduł</u> tej liczby z. Kąt między osią Re, a półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych i przechodzącą przez punkt *z* oznaczamy φ.

Miarę kąta φ będziemy wyrażać w radianach (a nie w stopniach) zatem można napisać, że $\varphi \in R$.

Liczbę $\varphi$ nazywamy <u>argumentem</u> liczby *z* i oznaczamy *argz*. czyli *argz*=$\varphi$ . Na podstawie rysunku otrzymujemy:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A stąd

$$a = |z|\cos\varphi$$

$$b = |z|\sin\varphi$$

Można zatem zapisać, że:

$$z = a + bi = |z|\cos\varphi + (|z|\sin\varphi)i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Wzór : $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest to <u>postać trygonometryczna</u> liczby zespolonej *z=a+bi*.

Wniosek:

możemy przedstawić jedną liczbę zespoloną na trzy różne sposoby:

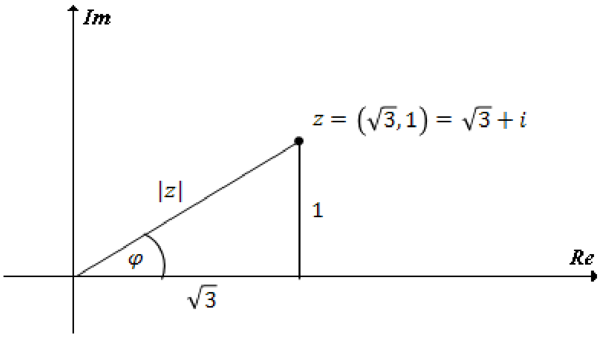
- w postaci ogólnej *z=a+bi,*
- jako punkt *(a,b)* na płaszczyźnie,
- w postaci trygonometrycznej $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Zaletą postaci trygonometrycznej jest to, że umożliwia w łatwy sposób potęgowanie liczb zespolonych w prosty sposób.

Zadanie; Dla liczby zespolonej $z$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od zaznaczenia liczby $z$ w układzie współrzędnych:




Obliczamy moduł z twierdzenia Pitagorasa:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

argument, korzystając z definicji sinusa: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Zatem: $\varphi = 30° = \frac{\pi}{6}$ czyli $\arg z = \frac{\pi}{6}$

Teraz zapisujemy postać trygonometryczną, podstawiając do wzoru wyliczone wartości: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Możemy jeszcze sprawdzić, że obliczając wartości liczbowe funkcji trygonometrycznych w powyższym wzorze, otrzymamy wyjściową postać ogólną:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

## Potęgowanie liczb zespolonych. Wzór de Moivre'a

Liczby zespolone z, w ∈C, o argumentach odpowiednio: $\alpha$ i $\beta$, Możemy zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

Obliczymy teraz iloczyn tych liczb zapisanych w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|w|(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ &= |z||w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta) = \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) - \sin\alpha\sin\beta) = \\ &= |z||w|\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\big) = \\ &= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika ze wzorów trygonometrycznych na
- cosinus sumy kątów oraz na
- sinus sumy kątów.

Przy mnożeniu dwóch liczb zespolonych z,w∈C otrzymujemy liczbę zespoloną, której:

- moduł jest iloczynem modułów liczb $z$ oraz $w$,
- argument jest sumą argumentów liczb $z$ oraz $w$.

Wynika stąd wzór de Moivre'a: Dla dowolnej liczby $z \in C$ zachodzi wzór: $(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

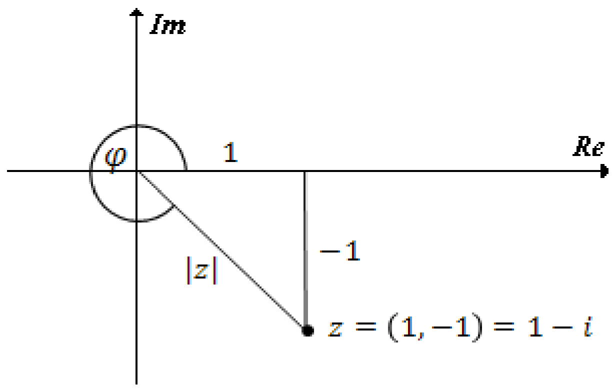
Przy pomocy tego wzoru można podnosić liczby zespolone do dowolnie dużych potęg.

Przykład

Dana jest liczba $z=1-i$. Oblicz $z^{100}$.

Rozwiązanie:

Zapiszemy liczbę zespoloną $z=1-i$ w postaci trygonometrycznej. W układzie współrzędnych:




Obliczamy moduł:

$$|z|=\sqrt{2}$$

Obliczamy argument: $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Kąt φ leży w IV ćwiartce układu współrzędnych, zatem: $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

Argument można było również odczytać z układu współrzędnych. Widać, że $\varphi=3\cdot 90^\circ+45^\circ=315^\circ$.

Zapiszmy teraz liczbę $z=1-i$ w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyliczymy, że:

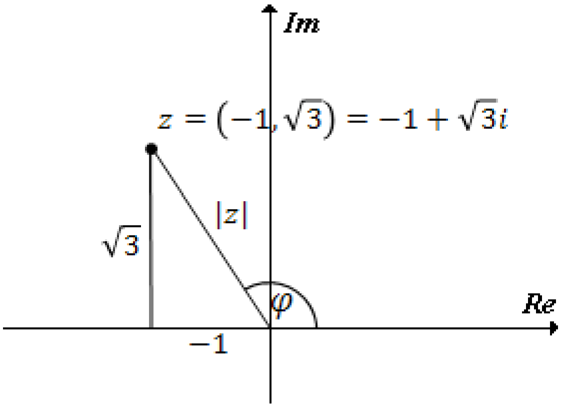
$$z^{100} = |z|^{100}(\cos 100\varphi + i\sin 100\varphi) = \left(\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\left(100\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(100\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{50}(\cos 175\pi + i\sin 175\pi) = 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{50}(-1 + i\cdot 0) = -2^{50}$$

Przykład

Dana jest liczba $z$. Oblicz $z^{67}$.

Rozwiązanie:
Liczba $z$ w układzie współrzędnych:




Obliczamy moduł: $|z|=2$

Obliczamy argument: $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Kąt φ leży w II ćwiartce układu współrzędnych, zatem: $\varphi = \frac{2}{3}\pi$

Argument można było również odczytać z układu współrzędnych. Widać, że $\varphi=90^\circ+30^\circ=120^\circ$.

Zapiszmy teraz liczbę $z$ w postaci trygonometrycznej:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Stosując wzór de Moivre'a obliczamy, że:

$$z^{67} = |z|^{67}(\cos 67\varphi + i\sin 67\varphi) = 2^{67}\left(\cos\left(67\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(67\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{67}\left(\cos\frac{134\pi}{3} + i\sin\frac{134\pi}{3}\right) = 2^{67}\left(\cos\left(44\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(44\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{67}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2^{67}\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{66} + 2^{66}\sqrt{3}\,i$$