Algebra zbiorów. Zbiory liczbowe. Elementy teorii mnogości

1.Pojęcie zbioru i należenie do zbioru jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Zbiór można nazywać też mnogość. Dział matematyki, który bada ogólne własności zbiorów nazywa się teorią mnogości. Twórcą teorii mnogości jest Georg Cantor. Pojęcia zbioru nie definiuje się w teorii mnogości, traktując je jako pojęcie pierwotne. Zbiory oznacza się wielkimi literami: $A,B,\ldots$, a ich elementy małymi literami: $a,b,\ldots$.

2.Przedmioty, które należą do danego zbioru, nazywamy jego elementami. Element a należy do zbioru A zapisujemy $a\in A$.

3.Element a nie należy do zbioru A, zapisujemy $a\notin A$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Zbiór zawierający tylko jeden element nazywamy zbiorem jednostkowym lub singletonem. Pojęcia zbioru pustego i jednostkowego są ważne, pozwalają często uprościć wypowiedzi i dowody twierdzeń.

Najczęściej zbiór określamy wymieniając wszystkie jego elementy, np. $\{2, 3,4,6,7\}$,

lub podając warunki, jakie spełniają elementy tego zbioru, np. $\{x\in R: 3<x<10\}$.

W obu przypadkach używamy zapisu nawiasu klamrowego $\{\ \}$. Ogólnie zbiór, którego wszystkimi elementami są $x_1,x_2,\ldots,x_n,$ oznaczamy $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

- Podział zbiorów ze względu na liczebność:
  zbiory skończone - zawierające ściśle określoną liczbę elementów (np. zbiór dzielników liczby 6)
- *zbiory nieskończone* - zawierające nieskończoną ilość elementów (np. zbiór liczb parzystych).

Zbiory skończone definiujemy najczęściej wymieniając wprost wszystkie jego elementy, natomiast w przypadku zbiorów nieskończonych zazwyczaj określamy warunek, który muszą spełniać wszystkie jego elementy.

Relacje między zbiorami

- Równość zbiorów

Zbiory A i B nazywamy równymi wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót.
$A = B \Leftrightarrow \forall_x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

- Inkluzja zbiorów (zawieranie się)

Jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem B i zapisujemy $A \subset B$. Wtedy A nazywamy podzbiorem B, zbiór B zaś nadzbiorem zbioru A. Symbol $\subset$ nazywamy znakiem inkluzji.
$A \subset B \Leftrightarrow \forall_x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Jeśli A nie jest podzbiorem B, piszemy $A \not\subset B$.

- Zbiory rozłączne

Zbiory, których iloczyn jest zbiorem pustym, nazywamy rozłącznymi.
$A \cap B = \emptyset$

- Iloczyn kartezjański

Zbiór $A \times B$ nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B jeśli:
$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}$

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi:

$0 \subset A$
$A \subset A$
jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$
jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$

Działania na zbiorach:

- suma zbiorów - zbiór elementów należących do zbioru A lub do zbioru B.
- iloczyn (przekrój, część wspólna) zbiorów - zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.
- różnica zbiorów A i B - zbiór elementów, które należą do zbioru A, lecz nie należą do zbioru B.
- różnica symetryczna zbiorów A i B - zbiór elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, ale nie należą do obu równocześnie.

- iloczyn kartezjański zbiorów *A* i *B* - zbiór wszystkich takich par, których pierwszy element należy do zbioru *A*, zaś drugi do *B*.
- zbiór potęgowy zbioru *X* - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru *X*

Omówienie działań na zbiorach:

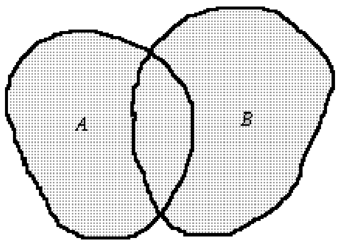
Suma zbiorów

Przez sumę zbiorów A i B rozumiemy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B i który innych elementów nie zawiera.

Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$. Z definicji sumy zbiorów wynika, że $x \in A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem co najmniej jednego ze zbiorów A lub B, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ lub $x \in B$.

Zamiast słowa lub piszemy symbol $\vee$. Przy tej umowie zapisujemy symbolicznie warunek konieczny i dostateczny na to, aby $x \in A \cup B$ w sposób następujący: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.

Sumę zbiorów $A \cup B$ można przedstawić graficznie jako obszar zacieniowany: suma zbiorów



Własności sumy zbiorów

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$0 \cup A = A$

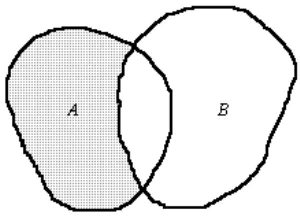
$A \cup A = A$

Różnica zbiorów

Różnicę zbiorów A i B nazywamy zbiór, złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$. Z definicji różnicy zbiorów wynika, że $x \in A \setminus B$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem zbioru A i nie jest elementem zbioru B.

Warunek konieczny i dostateczny na to, aby $x \in A \setminus B$ zapisujemy w sposób następujący: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.



Różnicę zbiorów $A \setminus B$ przedstawia graficznie obszar zacieniowany na rysunku

Różnica symetryczna zbiorów

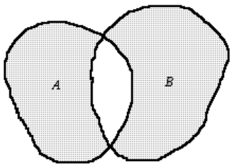
Różnicę symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór składający się z elementów należących do dokładnie jednego ze zbiorów A i B.

Inaczej różnica symetryczna zbiorów A i B, to zbiór elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, ale nie należą do obydwu naraz.

Różnica symetryczna zbiorów A i B jest oznaczana $A \div B$. Z definicji różnicy symetrycznej zbiorów wynika, że x jest elementem zbioru $A \div B$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest elementem zbioru A i nie jest elementem zbioru B lub gdy jest elementem zbioru B i nie jest elementem zbioru A.

Warunek konieczny i dostateczny na to, aby $x \in A \div B$ zapisujemy w sposób następujący:
$(x \in A \div B) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B))$.

Różnicę symetryczną zbiorów $A \backslash B$ można przedstawić graficznie jako obszar zacieniowany:



Dla różnicy symetrycznej zbiorów zachodzi $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

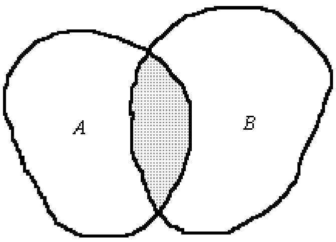
Iloczyn zbiorów

Iloczyn zbiorów A i B to jest część wspólna tych zbiorów, czyli zbiór zawierający tylko te elementy, które jednocześnie należą do zbioru A i do zbioru B.

Iloczyn zbiorów A i B nazywamy także ich częścią wspólną lub przekrojem i oznaczamy symbolicznie $A \cap B$. Z definicji iloczynu zbiorów wynika, że $x \in A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ i $x \in B$.

Zamiast spójnika *i* piszemy symbol $\wedge$. Korzystając z tego zapisujemy symbolicznie warunek konieczny i dostateczny na to, aby $x \in A \cap B$ w sposób następujący: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

Iloczyn zbiorów $A \cap B$ graficznie to obszar zacieniowany:



Własności iloczynu zbiorów

$A \cap B = B \cap A$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$0 \cap A = 0$
$A \cap A = A$

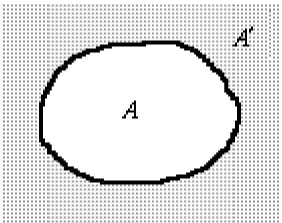
Przestrzeń. Dopełnienie zbioru

W algebrze zbiorów rozważamy zbiory, które są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru, który nazywamy przestrzenią.

Załóżmy, że X jest przestrzenią. Dopełnieniem zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór $X \setminus A$ i oznaczamy symbolem A'

A' jest zatem zbiorem tych wszystkich elementów przestrzeni X, które nie są elementami zbioru A. Jeżeli przestrzeń X jest ustalona, to z definicji dopełnienia zbioru wynika, że dla każdego $A \subset X$ i każdego $x \in X$ spełniony jest warunek $(x \in A') \Leftrightarrow (x \notin A)$.

Dopełnienie zbioru A' to graficznie - obszar zacieniowany:



Dopełnienie zbioru

Dla dowolnego podzbioru A przestrzeni X zachodzi:

$$X \cup A = X$$

$$X \cap A = A$$

$$X' = 0$$

$$0' = X$$

$$(A')' = A$$

Prawa rachunku zbiorów

przemienność sumy zbiorów	$A \cup B = B \cup A$
przemienność iloczynu zbiorów	$A \cap B = B \cap A$
łączność sumy zbiorów	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
łączność iloczynu zbiorów	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
rozdzielność iloczynu względem sumy zbiorów	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

rozdzielność sumy względem iloczynu zbiorów	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
prawa de Morgana dla zbiorów	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Moc zbioru jest to pewne uporządkowanie. Moc zbioru określa wielkość danego zbioru. Zbiory mają tę samą moc, gdy mają tyle samo elementów. Określeniem mocy zbioru jest liczba kardynalna tego zbioru. Liczba kardynalna zbioru skończonego jest równa liczbie jego elementów.

Równość mocy zbiorów określamy jako *równoliczność*.

Zbiory X i Y nazywamy *równolicznymi*, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa f: $X \to Y$ przekształcająca zbiór X na Y. Równoliczność zbiorów zapisujemy $X \sim Y$.

Dla dowolnych zbiorów X, Y, Z, zachodzi:

- $X \sim X$
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- $(X \sim Y) \wedge (Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$

Dane zbiory są równoliczne. można też określić, że zbiory te są równej mocy lub że mają tę samą liczbę kardynalną.

Pojęcie równoliczności pozwala zdefiniować pojęcia zbiorów skończonego i nieskończonego.

Zbiór nieskończony to zbiór, który jest równoliczny z pewnym swoim właściwym podzbiorem. Liczbę kardynalną nazywamy nieskończoną, gdy jest mocą pewnego zbioru nieskończonego.

Zbiór skończony, to zbiór, który nie jest nieskończony. Moc zbioru skończonego wyraża się zawsze pewną nieujemną liczbą całkowitą.

Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

- Zbiór przeliczalny

Zbiór A ≠ 0 jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zbiorem wyrazów pewnego ciągu nieskończonego, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja *f* przekształcająca zbiór wszystkich liczb naturalnych na zbiór *A*.

Zbiór przeliczalny jest to zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Zbiory przeliczalne nieskończone są równej mocy. Moc zbiorów przeliczalnych nieskończonych oznaczamy symbolem $\aleph_0$ (czytaj: alef zero).

Przykłady zbiorów przeliczalnych:

- podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym,
- suma dowolnej skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym,
- produkt kartezjański zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do ustalonego zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny,
- zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny.

<u>Zbiór nieprzeliczalny</u>

Zbiór nieprzeliczalny to zbiór, który nie jest przeliczalny.

Zbiór liczb rzeczywistych przedziału $<0, 1>$ jest zbiorem nieprzeliczalnym, gdyż nie istnieje ciąg o wyrazach z przedziału $<0, 1>$, taki że każda liczba rzeczywista z tego przedziału jest wyrazem ciągu.

Jeżeli zbiór *A* jest nieprzeliczalny i $A \subset B$, to *B* jest również zbiorem nieprzeliczalnym. Z twierdzenia tego wynika, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

Moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy <u>continuum</u> i oznaczamy symbolicznie $\mathfrak{C}$.

Zbiór wszystkich liczb niewymiernych jest zbiorem nieprzeliczalnym
Zbiór wszystkich liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

<u>Twierdzenie Cantora-Bernsteina</u>

Niech moc zbioru A równa jest n i moc zbioru B równa jest m. Liczba kardynalna n jest nie większa od liczby kardynalnej m, jeśli zbiór A jest równoliczny z podzbiorem zbioru B. Wówczas każdy zbiór mocy n jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru mocy m. Piszemy wtedy
$n \leq m$
Jeżeli $n < m$ i $n \neq m$, to mówimy, że liczba kardynalna n jest mniejsza od liczby kardynalnej m i piszemy
$n < m$

<u>Twierdzenie Cantora-Bernsteina</u>

Dla dowolnych liczb kardynalnych n, m:
Jeżeli $n \leq m$ i $m \leq n$, to $n = m$