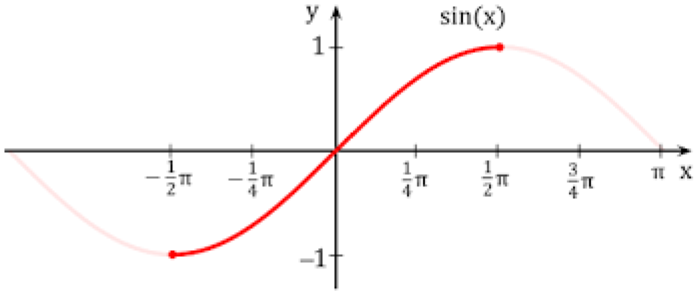
Funkcje cyklometryczne

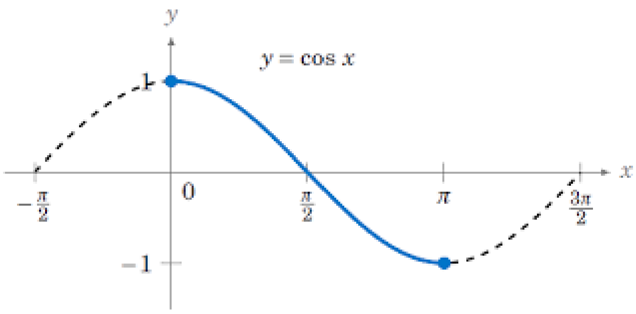
Funkcje cyklometryczne (nazwane też *funkcjami kołowymi*) są to **funkcje odwrotne** do funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów.

Wiadomo, że funkcje trygonometryczne rozpatrujemy na całym zbiorze R a także, że nie są to funkcje różnowartościowe.

Inaczej jest, gdy zmniejszymy ich dziedziny do pewnych przedziałów, tzn.



sin:<−π/2, π/2> ⟶ <−1,1>



cos:<0, π> ⟶ <−1,1>

tg:(−π/2, π/2) ⟶ R

ctg:(0,π) ⟶ R

W ten sposób określone funkcje będą różnowartościowe oraz będą posiadały funkcje odwrotne.

Omówienie funkcji cyklometrycznych

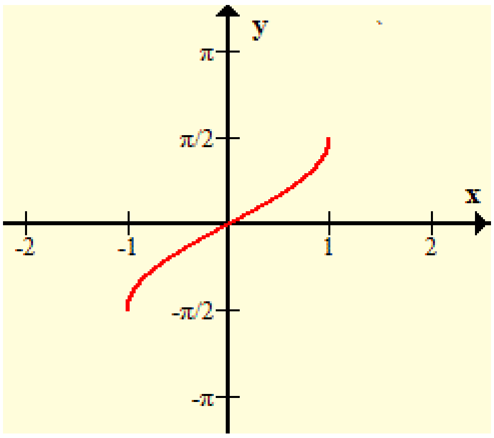
Definicja 1

Funkcję odwrotną do funkcji sinus określonej na przedziale

$\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ nazywamy funkcje arcus sinus i zapisujemy $y = \arcsin x$ gdzie $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- Dziedziną funkcji arc sin jest przedział <−1,1>, natomiast jej zbiorem wartości jest przedział <−π/2,π/2>.

- Wykres funkcji arc sin powstaje przez odbicie symetryczne względem prostej *y*=*x* wykresu zawężonej funkcji sin.



Zapis $y = \arcsin x$ oznacza

„y jest miarą kąta, którego sin = x"

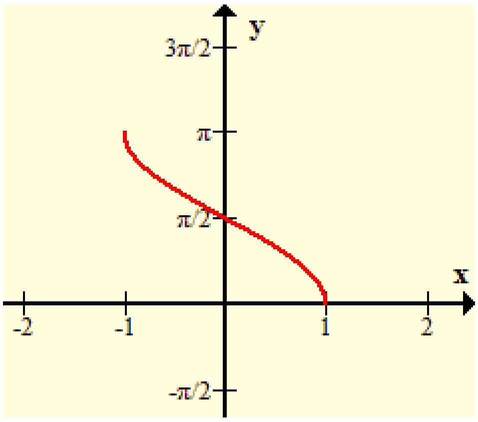
lub „y jest liczbą, której sin = x".

Definicja 2

Funkcję odwrotną do funkcji cosinus określonej w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$ nazywamy funkcją arcus cosinus i zapisujemy $y = \arccos x$ gdzie $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- Dziedziną funkcji arc cos jest przedział <−1,1>, natomiast zbiorem wartości tej funkcji jest przedział <0,π>.

- Wykres funkcji arc cos powstaje przez odbicie symetryczne względem prostej *y=x* wykresu zawężonej funkcji cos.

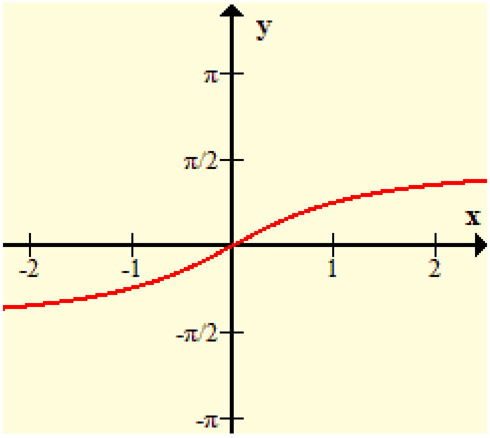


Definicja 3

Funkcję odwrotną do funkcji tangens określonej na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nazywamy funkcję arcus tangens i zapisujemy $y = arctg\, x$, gdzie $x \in R$.

- Dziedziną funkcji arc tg jest R, natomiast jej zbiorem wartości jest przedział (−π/2, π/2).

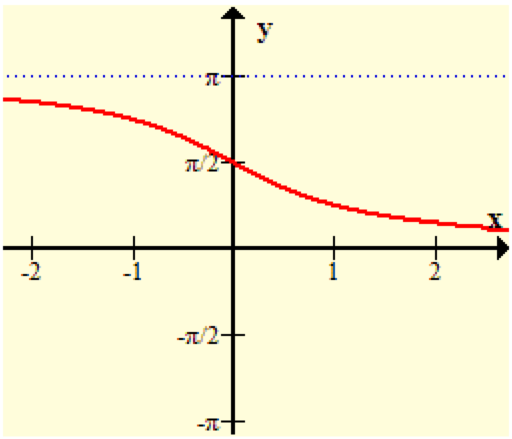
- Wykres funkcji arc tg powstaje przez odbicie symetryczne względem prostej y=x wykresu zawężonej funkcji tg.



Definicja 4

Funkcję odwrotna do funkcji cotangens określonej na przedziale $(0;\pi)$ nazywamy funkcję arcus cotangens i zapisujemy $y = arcctg\, x$, gdzie $x \in R$.

- Dziedziną funkcji arc ctg jest R, natomiast jej zbiorem wartości jest przedział (0,π).
- Wykres funkcji arc ctg powstaje przez odbicie symetryczne względem prostej *y*=*x* wykresu zawężonej funkcji ctg.



Zapis $y = \arcsin x$ oznacza

„y jest miarą kąta, którego sin = x"

lub „y jest liczbą, której sin = x".

Podstawowe związki dla funkcji cyklometrycznych:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctg\, x + arcctg\, x = \frac{\pi}{2}$$

Argumenty ujemne:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg } x$$
$$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg } x$$

PRZYKŁADY

Przykład 1.

Jaką liczbą jest $arcsin\frac{1}{2}$, $arcsin\frac{1}{2} = \alpha$, $sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \langle\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$,

$arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha$, $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$