Kwantyfikatory

W rachunku zdań tworzy się formuły zdaniowe, które mogą oznaczać różne zdania w zależności od interpretacji zmiennych zdaniowych wchodzących w ich skład.

W rachunku kwantyfikatorów przy pomocy symboli oznaczających funkcje zdaniowe, symbolu równości, kwantyfikatorów, spójników logicznych, zmiennych i nawiasów tworzy się wyrażenia oznaczające nowe funkcje zdaniowe lub zdania. Wyrażenia takie nazywamy formułami rachunku kwantyfikatorów, lub krótko formułami.

Kwantyfikator ogólny, jest to kwantyfikator oznaczający, że dane twierdzenie (funkcja zdaniowa) jest prawdziwe dla dowolnej wartości zmiennej.

Kwantyfikatorami nazywamy zwroty:

- **dla każdego**
- **istnieje takie.**

Kwantyfikator ogólny, symbol ∀ (albo ⋀) i czytamy:

- dla każdego.

Kwantyfikator szczegółowy symbol ∃ (albo ⋁) i czytamy:

- istnieje takie

Pod kwantyfikatorem zawsze umieszczamy parametr, którego ma dotyczyć dany kwantyfikator.

Przykłady

1. Wyrażenie $\underbrace{\forall}_{x \in R}$ czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych.*

2. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{n \in N}$ czytamy: *dla każdego* n *należącego do zbioru liczb naturalnych.*

3. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x>2}$ czytamy: *dla każdego* x *większego od dwóch.*

4. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x\in R\ x<0}$ czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych i jednocześnie mniejszego od zera.*

5. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\in R}$ czytamy: *istnieje taki* x *należący do zbioru liczb rzeczywistych.*

6. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\epsilon(-1,1)}$ czytamy: *istnieje taki* x *należący do przedziału* (−1,1).

Za kwantyfikatorem zawsze umieszczamy wyrażenie, którego ma dotyczyć dany kwantyfikator.

<u>Przykłady cd.</u>

1. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R}\ x^2\geq 0$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych R wyrażenie* x^2 *jest większe lub równe zero.*

Powyższe zdanie jest zdaniem prawdziwym.

2. Natomiast zdanie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R}\ x^2\geq 5$$

jest nieprawdziwe, bo np. dla x=2 mamy $x^2=4<5$.

3. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{k\in Z}\ \frac{k(k+1)}{2}$$

czytamy: *dla każdego* k *należącego do zbioru liczb całkowitych wyrażenie* k(k+1) *jest podzielne przez* 2.

4. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{n\in N} \; n+1>0$$

czytamy: *dla każdego* n *należącego do zbioru liczb naturalnych wyrażenie* n+1 *jest dodatnie.*

5. Wyrażenie: $\underbrace{\forall}_{x\in R \wedge x<0} \; x^3<0$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych i jednocześnie mniejszego od zera wyrażenie* x^3 *jest ujemne.*

6. Wyrażenie:

$$\underbrace{\exists}_{x\in R} \; 2x+5=6$$

czytamy: *istnieje taki* x *należący do zbioru liczb rzeczywistych, dla którego spełnione jest równanie* 2x+5=6. (czyli $x=\frac{1}{2}$)

7. Wyrażenie: $\underbrace{\exists}_{x\in(-1,1)} \; x^2=0$

czytamy: *istnieje taki* x *należący do przedziału* $(-1,1)$ *dla którego* $x^2=0$. (czyli x=0)

8. Wyrażenie:

$$\underbrace{\exists}_{n\in N} \frac{n}{21}$$

czytamy: *istnieje n należący do zbioru liczb naturalnych taki, że n jest podzielny przez* 21. (czyli n∈{21,42,63,...})

Kwantyfikatory często stosuje się w bardziej złożonych zdaniach.

<u>Przykłady cd</u>

1. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R\ y\in R} x^2+y^2\geq 0$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych oraz* y *należącego do zbioru liczb rzeczywistych, wyrażenie* x^2+y^2 *jest większe lub równe zero.*

2. Wyrażenie:

$$\underbrace{\forall}_{x\in R} \underbrace{\exists}_{y\in R} x+y=100$$

czytamy: *dla każdego* x *należącego do zbioru liczb rzeczywistych istnieje* y *należący do zbioru liczb rzeczywistych taki, że wyrażenie* x+y *jest równe* 100.