1. Funkcje trygonometryczne

Korzystając z wzoru Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

można przedstawić funkcje trygonometryczne:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

2. Funkcje hiperboliczne

funkcje zmiennej rzeczywistej lub zespolonej określone są następująco:

- **sinus hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{sh} x$)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **cosinus hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{ch} x$)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- **tangens hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{th} x$ lub $\tanh x$)

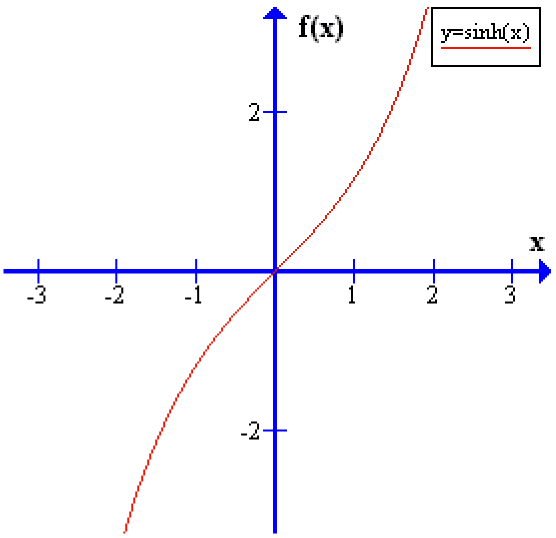
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **cotangens hiperboliczny**: (oznaczany również $\operatorname{cth} x$ lub $\coth x$)

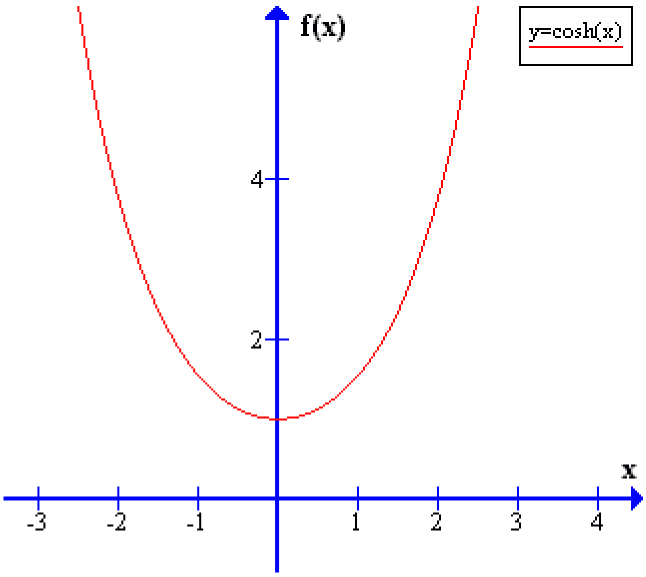
$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

3. Wykresy funkcji hiperbolicznych

Wykres funkcji sinh(x):

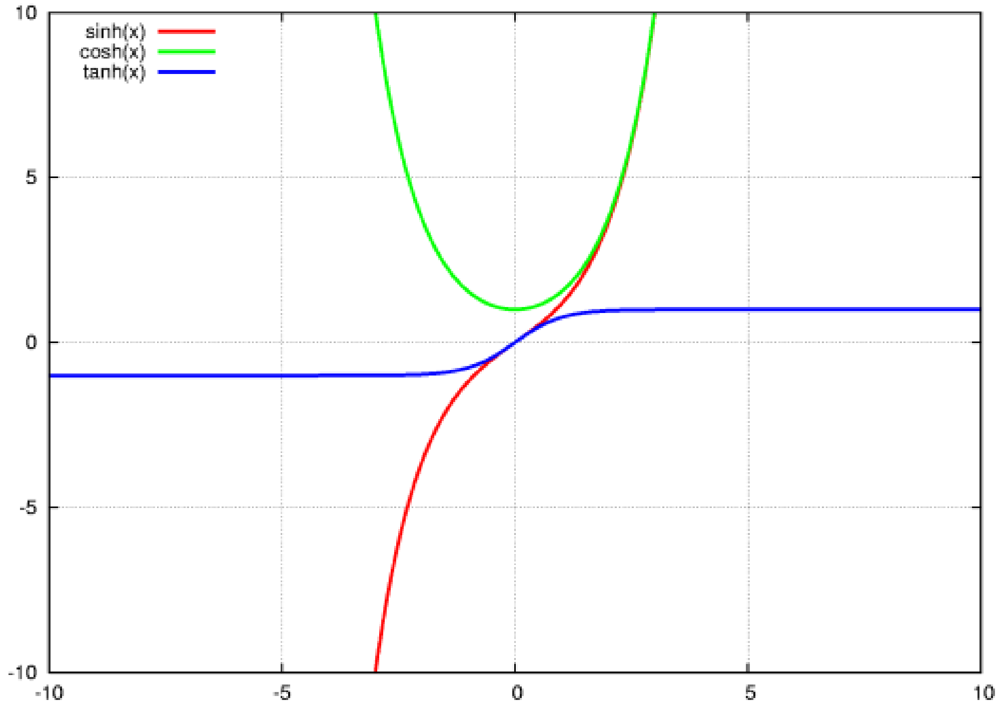


Wykres funkcji cosh(x)



ma kształt linii łańcuchowej.

Wykresy funkcji sinh(x), cosh(x), tanh(x)



4. Pochodne funkcji hiperbolicznych

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\operatorname{tgh}'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \operatorname{tgh}^2(x)$$

$$\operatorname{ctgh}'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \operatorname{ctgh}^2(x)$$

5. **Wzór jedynkowy:**

- Zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych postaci (cos x, sin x) jest okręgiem.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- Zbiór punktów o współrzędnych postaci (cosh(x), sinh(x)) wyznacza hiperbolę.

- Wynika to z tożsamości, znanej jako jedynka hiperboliczna:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Wnioski

Gdy równanie charakterystyczne równania różniczkowego ma dwa pierwiastki rzeczywiste λ_1 i λ_2, jak w poniższych przypadkach *I* i *II*, rozwiązania równania wyrażają się przez funkcje hiperboliczne. Są to funkcje monotoniczne, a zatem nie ma drgań.

Przypadek *I* i *II* to tzw. Rozwiązania aperiodyczne.

***Przypadek I* (Δ> 0)**

Równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste λ_1 i λ_2. Zatem każda z funkcji

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego. Są to rozwiązania szczególne.

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

***Przypadek II* (Δ= 0)**

Równanie ma podwójny pierwiastek rzeczywisty λ_0. Można sprawdzić (wstawiając do równania), że oprócz funkcji

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t}$$

również funkcja $$x_2(t) = te^{\lambda_0 t}$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego. W tym przypadku rozwiązanie ogólne ma

postać: $$x(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t e^{\lambda_0 t}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.