Wielomian. Funkcja wymierna.

Równania i nierówności

Def.

Jednomian jest to wyrażenie algebraiczne składające się z jednej liczby (współczynnika liczbowego) oraz ewentualnie jednej lub kilku literek (mogą być w różnych potęgach).

$5x$, $-32x^2$, $12a^5$, $-2xy$, $5x^2yz^3$

Wielomianem stopnia *n* zmiennej *x* nazywamy wyrażenie postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie:

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$

są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $n \in N$ oraz $a_n \neq 0$.

Funkcją wielomianową nazywamy funkcję, której wzór jest wielomianem.

Na funkcje wielomianowe często mówi się po prostu "wielomiany".

Funkcje wielomianowe często oznaczamy za pomocą literki W lub często stosowanymi literami są również: P, Q, R. Przykłady wielomianów zapisanych w postaci funkcji:

1. $W(x) = 3x-5$
2. $W(x) = -x^2+5x-1$
3. $P(x) = x^2-1$

Wartość liczbową wielomianu oblicza się dla danego argumentu.

Przykład:

Obliczyć wartość liczbową wielomianu:

$W(x) = x^2 + 3x - 6$ dla $x = 2$

$W(2)=2^2+3\cdot 2-6 = 4+6-6 = 4$

Def.

Stopień wielomianu jest to najwyższa potęga *x* w tym wielomianie.

Rozłożenie wielomianu na czynniki, polega na zapisaniu jego wzoru w postaci iloczynu nawiasów. Taki sposób zapisu wielomianu nazywamy postacią iloczynową.

Przykładowe wielomiany, zapisane w dwóch postaciach - ogólnej i iloczynowej:

Numer przykładu	Postać ogólna	Postać iloczynowa
1.	$W(x)=x^2-4$	$W(x)=(x-2)(x+2)$
2.	$W(x)=x^2-25$	$W(x)=(x-5)(x+5)$
3.	$W(x)=x^2-6x+9$	$W(x)=(x-3)^2$
4.	$W(x)=x^2+5x+6$	$W(x)=(x+2)(x+3)$
5.	$W(x)=x^2+x-30$	$W(x)=(x-5)(x+6)$
6.	$W(x)=x^3+x^2-4x-4$	$W(x)=(x-2)(x+2)(x+1)$

7.	$W(x)=x^3-2x^2-9x+18$	$W(x)=(x-2)(x+3)(x-3)$
8.	$W(x)=3x^3+4x^2-147x-196$	$W(x)=(x-7)(x+7)(3x+4)$
9.	$W(x)=x^3+4x^2-7x-10$	$W(x)=(x-2)(x+1)(x+5)$
10.	$W(x)=x^3-8$	$W(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$
11.	$W(x)=x^3+5x$	$W(x)=x(x^2+5)$
12.	$W(x)=x^4-16$	$W(x)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$
13.		
14.	W(x)=x2+1	nie istnieje
15.	W(x)=x2−x+5	nie istnieje

Podstawowe sposoby rozkładu wielomianu na czynniki:

- wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias,
- wzory skróconego mnożenia,
- deltę (Δ), pierwiastki równania kwadratowego
- grupowanie wyrazów.

Przykład:

$$x^3+4x^2+2x+8=x^2(x+4)+2(x+4)$$

$$x^3+4x^2+2x+8=x^2(x+4)+2(x+4)=(x+4)(x^2+2)$$

Krotność pierwiastka wielomianu, jest to potęga nawiasu, który zeruje dany pierwiastek. Odczytać pierwiastki i ich krotności z postaci iloczynowej jest bardzo łatwo:

$$W(x) = x^2(x-1)^3(x+5)(x-8)^{12}$$

$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = -5$	$x_4 = 8$
2-krotny	3-krotny	1-krotny	12-krotny

<u>Twierdzenie Bézout</u>

Wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian (x−a) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Funkcja wymierna

Jest to taka funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów. Czyli funkcję wymierną można zapisać w postaci ułamka, który ma w liczniku i mianowniku wielomiany.

Funkcję wymierną można zapisać w postaci:

$$f(x) = \frac{w(x)}{p(x)}$$

gdzie:

w(x) –jest to dowolny wielomian,
p(x) - wielomian niezerowy.

Dziedzina funkcji wymiernej *f(x)*: wyznaczamy miejsca zerowe (pierwiastki) wielomianu *p(x)*, a następnie wyrzucamy je z dziedziny, czyli ze zbioru liczb rzeczywistych.

<u>Przykład</u>

Wyznacz dziedzinę funkcji f(x) = $\frac{4x}{(x+1)(x+3)}$

<u>Rozwiązanie:</u>

Wyznaczamy miejsca zerowe wyrażenia z mianownika:

$$(x+1)(x+3)=0$$

$$x = -1 \lor x = -3$$

Zatem dziedziną funkcji f(x) jest zbiór: $R\backslash\{-3,-1\}$.

Przykłady funkcji wymiernych:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

Wielomian stopnia 0
(funkcja stała)

Wielomian 1-go stopnia
(funkcja liniowa)

2) $f(x) = \frac{2x-3}{x^3+x^2-x}$

Wielomian 1-go stopnia
(funkcja liniowa)

Wielomian 3-go stopnia

3) $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$

Wielomian 2-go stopnia
(funkcja kwadratowa)

Wielomian 1-go stopnia
(funkcja liniowa)

Równania kwadratowe i nierówności kwadratowe

W równaniach kwadratowych występuje znak równości (=).
W nierównościach występuje jeden ze znaków nierówności

(<, ≤, >, ≥).

Przykłady:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x - 8 < 0$$

równanie kwadratowe — nierówność kwadratowa

<u>Rozwiązania:</u>

Równanie kwadratowe może mieć jedno, dwa, lub zero rozwiązań.

Rozwiązaniem nierówności kwadratowej jest zazwyczaj przedział liczbowy.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -2 \qquad\qquad x \in (-2, 4)$$

dwa rozwiązania równania kwadratowego — przedział liczbowy będący rozwiązaniem nierówności kwadratowej

Rozwiąż nierówność $x^2+4x+3<0$

Rozwiązanie: Lewą stronę nierówności traktujemy jak funkcję kwadratową:

$$f(x)=x^2+4x+3$$

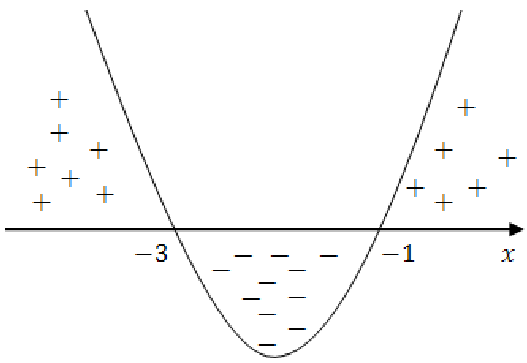
Wyznaczamy miejsca zerowe tej funkcji. Najpierw liczymy deltę:

$$\Delta = 4$$

Zatem miejsca zerowe, to:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -1$$

Należy naszkicować wykres funkcji *f(x)*



Z wykresu odczytujemy, że $x \in (-3,-1)$

Metoda rozwiązywania równań wielomianowych

- przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania, tak aby po prawej stronie zostało zero,
- rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników (np. metodą wyciągania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania wyrazów),
- przyrównujemy każdy nawias do zera,

- rozwiązujemy kilka prostych równań, otrzymując w rezultacie rozwiązania początkowego równania wielomianowego.

Przykład; Rozwiąż równanie $x^3 + 5x^2 = 2x+10$

Rozwiązanie: Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$

Rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników:

- wyciągamy wspólny czynnik przed nawias z pierwszych dwóch wyrazów
- oraz z ostatnich dwóch wyrazów:

$x^2(x+5) - 2(x+5) =$

$= (x+5)(x^2-2) =$

$= (x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

Teraz przyrównujemy każdy z nawiasów do zera:

$x+5 = 0 \quad \vee \quad x-\sqrt{2} = 0 \quad \vee \quad x+\sqrt{2} = 0$

i otrzymujemy ostatecznie rozwiązania:

$x = -5 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Przypomnienie

Definicja silni. Przykłady

Silnia liczby naturalnej *n* jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n*.

Silnię liczby naturalnej *n* oznaczamy symbolem *n!* (czytamy *en silnia*).
Mamy zatem:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

Przykłady i metody liczenia

$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

.

$10!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 9\cdot 10=3628800$

- Symbol silni pozwala w prosty i krótki sposób zapisywać długie iloczyny liczb.
- Zapisanie liczby przy wykorzystaniu silni jest korzystne dlatego, że daje nam informację z jakich czynników składa się dana liczba.
- Znajomość takiego rozkładu jest szczególnie przydatna przy skracaniu ułamków (gdy w liczniku i mianowniku ułamka występują silnie).

Silnia jest funkcją pozwalającą zapisać w skondensowany sposób wzory i zależności pojawiające się w różnych działach matematyki

- analiza matematyczna
- kombinatoryka

Liczba, która jest równa sumie silni swoich cyfr zapisu dziesiętnego, w języku angielskim nosi nazwę *factorion.* Istnieją tylko cztery liczby naturalne o tej własności: 1, 2, 145 i 40585.

Przykłady Oblicz $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$

Należy rozłożyć 10! w liczniku na iloczyn 8!·9·10
Więc można uprościć ułamek:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$$

Dwumian Newtona

Dwumianem Newtona nazywamy wzór:

$$(x+y)^n =$$
$$\binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

gdzie symbol $\binom{n}{k}$ oznacza współczynnik dwumianowy i jest obliczany ze wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Należy zauważyć, że $x^0=1$ oraz $y^0=1$, przy tym założeniu, że $x\neq 0$ i $y\neq 0$ oraz 0^0 jest nieoznaczone, więc można zapisać wzór dwumianowy prościej:

$$(x+y)^n =$$
$$= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Ze wzoru dwumianowego można wyprowadzać wzory skróconego mnożenia.

<u>Przykład</u>

$$(x+y)^3= \binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3 =$$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$