Nelineární optimalizace a numerické metody

(MI–NON)

Magisterský program: Informatika

Obor: Teoretická informatika

Katedra: 18101 Katedra teoretické informatiky

Jaroslav Kruis

Evropský sociální fond

Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Diferenciální rovnice

- obyčejné diferenciální rovnice
- parciální diferenciální rovnice
  - eliptické
  - parabolické
  - hyperbolické

Karel Rektorys a spolupracovníci. *Přehled užité matematiky II.* Nakladatelství Prometheus, Praha, 7. vydání, 2000. ISBN 80-7196-181-7.

Obyčejné diferenciální rovnice

Definice. Nechť F je daná spojitá funkce $n+2$ proměnných.

Rovnice

$$F\left(x, u(x), \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu, $u(x)$ je neznámá funkce.

Příklad. Rovnice

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + x\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu. Je to nelineární rovnice.

Definice. Lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty je rovnice ve tvaru

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} u(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots a_1 \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} + a_0 u(x) = f(x)$$

Příklad. Rovnice

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + c \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + k u(t) = F \sin \omega t$$

je pohybová rovnice popisující vynucené tlumené kmitání hmoty. Je to rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic

- metoda konečných diferencí
- metoda konečných prvků
- metoda hraničních prvků
- metoda konečných objemů

Metoda konečných diferencí

Diferenční náhrady

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &\approx f(x) + \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}h + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}h^2 \\
f(x-h) &\approx f(x) - \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}h + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}h^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} &\approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}
\end{aligned}
$$

Obvykle se používá pravidelná sít' bodů, ve které platí $x_i = ih$, kde h je vzdálenost dvou sousedních uzlů. Z toho plyne značení $f_i = f(x_i)$. Diferenční náhrady lze proto psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} f_i}{\mathrm{d}x} &\approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \\ \frac{\mathrm{d}^2 f_i}{\mathrm{d}x^2} &\approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

Příklad. Metodou konečných diferencí řešte diferenciální rovnici

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f = 0$$

s okrajovými podmínkami $u(0) = 0$ a $\dfrac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x} = 0$. k a f jsou konstanty.

Řešení. Zadanou obyčejnou diferenciální rovnici lze vyřešit přesně. Dvojí integrací vychází

$$u(x) = -\frac{f}{k}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek. Tedy

$$
\begin{aligned}
u(0) = C_2 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad C_2 = 0 \\
\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = -\frac{f}{k}l + C_1 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad C_1 = \frac{fl}{k}
\end{aligned}
$$

Přesné řešení dané diferenciální rovnice je tedy

$$
u(x) = -\frac{f}{k}\frac{x^2}{2} + \frac{fl}{k}x
$$

Označení

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = 0 \\
u_1 &= u(h) = u(\frac{l}{2}) \\
u_2 &= u(2h) = u(l) \\
u_3 &= u(3h)
\end{aligned}
$$

Poznánka: u_0 plyne z první okrajové podmínky, u_3 je mimo řešenou oblast, získá se z druhé okrajové podmínky.

$$
\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2h}(u_3 - u_1) = 0 \quad u_3 = u_1
$$

Užitím diferenčních náhrad vychází

$$\begin{aligned}\frac{k}{h^2}(u_0 - 2u_1 + u_2) + f &= 0\\ \frac{k}{h^2}(u_1 - 2u_2 + u_3) + f &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{h^2}(-2u_1 + u_2) + f &= 0\\ \frac{k}{h^2}(2u_1 - 2u_2) + f &= 0\end{aligned}$$

Uzlové hodnoty

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 0 \\
u_1 &= \frac{3}{8}\frac{fl^2}{k} \\
u_2 &= \frac{1}{2}\frac{fl^2}{k}
\end{aligned}
$$

Operátory, funkcionály, extrémy funkcionálů

K. Rektorys. *Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky.* Academia Praha, 1999. ISBN 80-200-0714-8.

Definice. Množina V se nazývá lineární prostor (vektorový prostor, lineál) právě tehdy, když platí

- $\forall u, v \in V : u + v = v + u$
- $\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
- $\exists 0 \in V, \forall u \in V : u + 0 = 0 + u = u$
- $\forall u \in V : 1.u = u$
- $\forall u, v \in V, \forall \alpha \in R : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

- $\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in R : \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- $\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Definice. Lineární prostor je vybaven skalárním součinem, který se označuje (u, v), právě tehdy, když

- $\forall u, v \in V : (u, v) = (v, u)$
- $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$
- $\forall u \in V : (u, u) \geq 0$
- $\forall u \in V : (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Definice. Je-li prostor V vybaven skalárním součinem, norma prvku $u \in V$ je definována $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Definice. Je-li prostor V vybaven normou, metrika (vzdálenost) prvků $u, v \in V$ je definována $\rho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u, u)}$.

Definice. Posloupnost prvků $u_i \in V$ konverguje k prvku $u \in V$ právě tehdy, když $\lim_{i\to\infty} \varrho(u_i, u) = 0$.

Definice. Posloupnost prvků $u_i \in V$ se nazývá cauchyovská právě tehdy, když platí $\lim_{i\to\infty, j\to\infty} \varrho(u_i, u_j) = 0$.

Definice. Prostor V se nazývá úplný právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost $u_i \in V$ konverguje k nějakému prvku $u \in V$.

Definice. Úplný lineární prostor se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor.

Definice. Nechť jsou dány dvě množiny M_1, M_2. Operátor je zobrazení z M_1 do M_2 a píše se $v = Au$, kde $v \in M_2$ a $u \in M_1$. Množina M_1 se nazývá definiční obor operátoru, množina M_2 se nazývá obor hodnot.

Příklad. Nechť $M_1 = R^n, M_2 = R^m$. Matice $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ je operátor z M_1 do M_2 a platí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} \in R^n$ a $\boldsymbol{v} \in R^m$.

Příklad. Nechť je M_1 i M_2 množina všech nekonečněkrát diferencovatelných funkcí jedné proměnné. Derivace je operátor z M_1 do M_2 a platí $A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, čili $v = Au = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Definice. Operátor A se nazývá lineární právě tehdy, když pro každé prvky u, v z definičního oboru a pro libovolná čísla α, β platí

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

Operátory v Hilbertových prostorech

Definice. Množina M se nazývá hustá v D, jestliže ke každému bodu $u \in D$ lze najít posloupnost bodů $u_n \in M$, konvergující v D k u.

Příklad. Množina všech mnohočlenů je hustá v prostoru funkcí $L_2(G)$.

Definice. Lineární operátor definovaný na husté podmnožině D Hilbertova prostoru H se nazývá symetrický právě tehdy, když pro každou dvojici prvků $u, v \in D$ platí $(Au, v) = (u, Av)$.

Definice. Operátor se nazývá pozitivní ve svém definičním oboru D, je-li symetrický a platí-li pro všechny prvky z D nerovnost $(Au, u) \geq 0$, přičemž $(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Definice. Operátor se nazývá pozitivně definitní ve svém definičním oboru D, je-li symetrický a platí-li pro všechny prvky z D nerovnost $(Au, u) \geq C^2(u, u)$, kde $C > 0$ je konstanta (pro všechny prvky z D stejná).

Příklad. Nechť je dána obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f(x) = 0$$

kde $k > 0$ a $f(x)$ je daná funkce. Okrajové podmínky jsou $u(0) = 0, u'(l) = 0$.

Danou diferenciální rovnici lze přepsat s pomocí operátoru $A = -k\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ do tvaru

$$Au(x) = f(x)$$

Operátor A je definován na prostoru spojitých diferencovatelných funkcí splňujících okrajové podmínky.

Skalární součin (Au, v) má pro tento konkrétní případ tvar

$$
\begin{aligned}
(Au(x), v(x)) &= -\int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} v(x)\mathrm{d}x = \\
&= -\left[k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} v(x)\right]_0^l + \int_0^l k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \\
&= \left[k\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} u(x)\right]_0^l - \int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} u(x)\mathrm{d}x = (u, Av)
\end{aligned}
$$

Operátor je tedy symetrický.

Dále je vidět. že platí

$$\begin{aligned}(Au(x),u(x)) &= -\int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}u(x)\mathrm{d}x = \\ &= -\left[k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}u(x)\right]_0^l + \int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \geq 0\end{aligned}$$

Nyní je třeba ukázat, že platí $(Au,u)=0 \;\Leftrightarrow\; u=0$. Nechť tedy platí $(Au,u)=0$, tj.

$$(Au(x),u(x)) = \int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x = 0$$

Protože je u spojitá, plyne z předchozí rovnice, že $u = \mathrm{konst}$. Navíc musí funkce u splnit okrajové podmínky, takže $u = 0$. Operátor A je tedy pozitivní.

Ověření pozitivní definitnosti je náročnější a lze ho nalézt v literatuře.

Nechť je dán operátor $B = -k\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ na prostoru spojitých diferencovatelných funkcí. Okrajové podmínky nejsou brány nyní v úvahu. Operátor B je odlišný od operátoru A, i když mají stejný tvar. Liší se ale jejich definiční obory.

Skalární součin (Bu, v) má pro tento konkrétní případ tvar

$$
\begin{aligned}
(Bu(x), v(x)) &= -\int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}v(x)\mathrm{d}x = \\
&= -\left[k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}v(x)\right]_0^l + \int_0^l k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \\
&= -k\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}v(0) + k\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x}v(l) + \int_0^l k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
(u(x), Bv(x)) &= -\int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}u(x)\mathrm{d}x = \\
&= -\left[k\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}u(x)\right]_0^l + \int_0^l k\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \\
&= -k\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}x}u(0) + k\frac{\mathrm{d}v(l)}{\mathrm{d}x}u(l) + \int_0^l k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Obecně platí

$$-k\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}v(0)+k\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x}v(l)\neq -k\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}x}u(0)+k\frac{\mathrm{d}v(l)}{\mathrm{d}x}u(l)$$

Například pro $u(x)=x$ a $v(x)=x^2$ vychází

$$-k\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x}v(0)+k\frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x}v(l) = -k.1.0+k.1.l^2 = kl^2$$
$$-k\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}x}u(0)+k\frac{\mathrm{d}v(l)}{\mathrm{d}x}u(l) = -k.0.0+k.2l.l = 2kl^2$$

Operátor tedy není symetrický.

Funkcionály

Definice. Nechť je V prostor funkcí. Zobrazení z V do R se nazývá funkcionál.

Příklad. Nechť V je prostor všech reálných funkcí jedné proměnné integrovatelných na intervalu (a, b). Příkladem funkcionálu je určitý integrál $\Pi(f(x)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Příklad. Nechť V je prostor všech reálných funkcí jedné proměnné definovaných na intervalu (a, b). Příkladem funkcionálu je zobrazení $\Pi(f(x)) = f(c)$, tedy každé funkci $f(x) \in V$ je přiřazena její funkční hodnota v bodě $c \in (a, b)$.

Definice. Nechť je dán pozitivní operátor A na prostoru H.
Funkcionál definovaný pomocí skalárního součinu ve tvaru
$\Pi(u(x)) = (Au, u) - 2(u, f)$ se nazývá kvadratický funkcionál.

Definice. Nechť je funkcionál Π definován na podmnožině M lineárního normovaného prostoru V a nechť $f(x) \in M$ a $\varphi \in V$.
Limita

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(f(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)} = \mathrm{d}\Pi(f(x), \varphi(x)) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(\Pi(f(x) + s\varphi(x)) - \Pi(f(x)) \right)$$

se nazývá derivace funkcionálu Π podle $\varphi(x)$. Někdy se tato limita nazývá Gateauxova derivace, někdy variace funkcionálu.

Definice. Nechť je funkcionál Π definován na lineárním normovaném prostoru V. Funkcionál Π má v bodě $f(x)$ lokální minimum právě tehdy, když existuje okolí $U(f(x))$ funkce $f(x)$ takové, že pro všechny funkce $g(x)$ z $U(f(x)) - f(x)$ platí $\Pi(g(x)) > \Pi(f(x))$.

Věta. (Eulerova nutná podmínka pro extrém). Nechť má funkcionál Π definovaný na podmnožině M lineárního normovaného prostoru V v bodě $f(x) \in M$ lokální extrém. Pak $\mathrm{d}\Pi(f(x), \varphi(x)) = 0$ pro všechny funkce $\varphi(x) \in V$, pro které derivace existuje.

Příklad. Eulerova nutná podmínka pro funkcionál

$$\Pi(u(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l f(x)u(x)\mathrm{d}x$$

Funkcionál $\Pi(u(x))$ je definován pro funkce $u(x)$ integrovatelné na intervalu $(0, l)$, kde l je konstanta. k je konstanta, $f(x)$ je daná funkce integrovatelná na intervalu $(0, l)$.

Derivace funkcionálu má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(u(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\Pi(u(x)+s\varphi(x)) - \Pi(u(x))) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\left[\frac{1}{2}\int_0^l k\left\{\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2s\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} + s^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x -\right.\right.$$

$$\left. - \int_0^l f(x)(u(x)+s\varphi(x))\mathrm{d}x\right] -$$

$$\left. - \left[\frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x - \int_0^l f(x)u(x)\mathrm{d}x\right]\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(u(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)} = \int_0^l k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \int_0^l f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[k\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right]_0^l - \int_0^l k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^l f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^l \left(k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f(x)\right)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f(x) = 0$$

Metoda konečných prvků

Příklad. Metodou konečných prvků řešte diferenciální rovnici

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f = 0$$

s okrajovými podmínkami $u(0) = 0$ a $\dfrac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x} = 0$. k a f jsou konstanty.

Řešení. Zadanou obyčejnou diferenciální rovnici lze vyřešit přesně. Dvojí integrací vychází

$$u(x) = -\frac{f}{k}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek. Tedy

$$u(0) = C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = -\frac{f}{k}l + C_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{fl}{k}$$

Přesné řešení dané diferenciální rovnice je tedy

$$u(x) = -\frac{f}{k}\frac{x^2}{2} + \frac{fl}{k}x$$

Dříve bylo ukázano, že zadaná diferenciální rovnice

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + f = 0$$

je Eulerovou podmínkou pro extrém funkcionálu

$$\Pi(u(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l f(x)u(x)\mathrm{d}x$$

Funkcionál Π nabývá minimální hodnoty pro funkci $u(x)$, která řeší danou diferenciální rovnici. Řešení dané diferenciální rovnice a minimalizace příslušného funkcionálu vedou tedy ke stejnému cíli.

Minimalizace funcionálu se jeví výrazně snadnější než řešení diferenciální rovnice.

Minimalizace fukcionálu bude provedena pomocí aproximační funkce ve tvaru

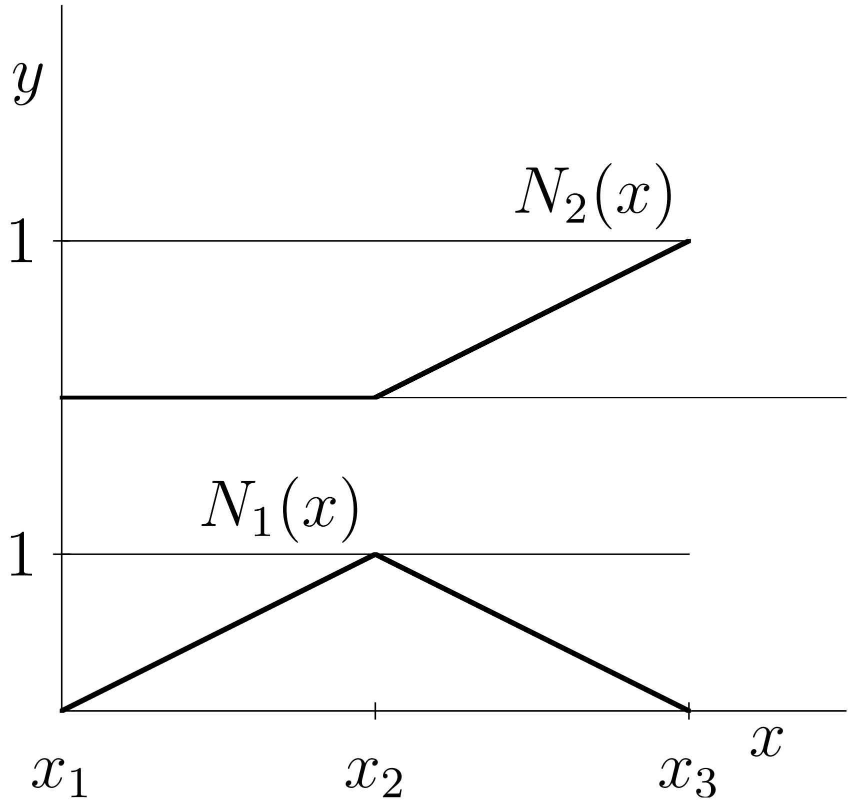
$$u(x) = N_2(x)d_2 + N_3(x)d_3$$

kde $N_2(x)$ a $N_3(x)$ jsou dané aproximační funkce a d_2 a d_3 jsou neznámé konstanty. Aproximační funkce má tvar lineární kombinace

$$u(x) = N_2(x)d_2 + N_3(x)d_3$$

Jednotlivé aproximační funkce mají tvar

$$\begin{aligned} N_2(x) &= \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in (x_1, x_2) \\ \dfrac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, & x \in (x_2, x_3) \end{cases} \\ N_3(x) &= \qquad \dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2}, \qquad x \in (x_2, x_3) \end{aligned}$$



y
$N_2(x)$
1
$N_1(x)$
1
x
x_1
x_2
x_3

Dosazení aproximace do funkcionálu vychází

$$\begin{aligned}\Pi(d_2, d_3) &= \frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\mathrm{d}N_2(x)}{\mathrm{d}x}d_2 + \frac{\mathrm{d}N_3(x)}{\mathrm{d}x}d_3\right)^2 \mathrm{d}x - \\ &- \int_0^l f(N_2(x)d_2 + N_3(x)d_3)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

jedná se o kvadratickou funkci dvou proměnných d_2 a d_3. Jednotlivé integrály mají tvar

$$\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}N_2(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{l}$$

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}N_2(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_3(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{l}$$

$$\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}N_3(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{l}$$

$$\int_0^l f N_2(x)\mathrm{d}x = \frac{fl}{2}$$

$$\int_0^l f N_3(x)\mathrm{d}x = \frac{fl}{4}$$

$$\Pi(d_2, d_3) \;=\; 2\frac{k}{l}d_2^2 - 2\frac{k}{l}d_2 d_3 + \frac{k}{l}d_3^2 - \frac{fl}{2}d_2 - \frac{fl}{4}d_3$$

Podmínky stacionarity

$$\frac{\partial \Pi(d_2, d_3)}{\partial d_2} \;=\; 4\frac{k}{l}d_2 - 2\frac{k}{l}d_3 - \frac{fl}{2} = 0$$

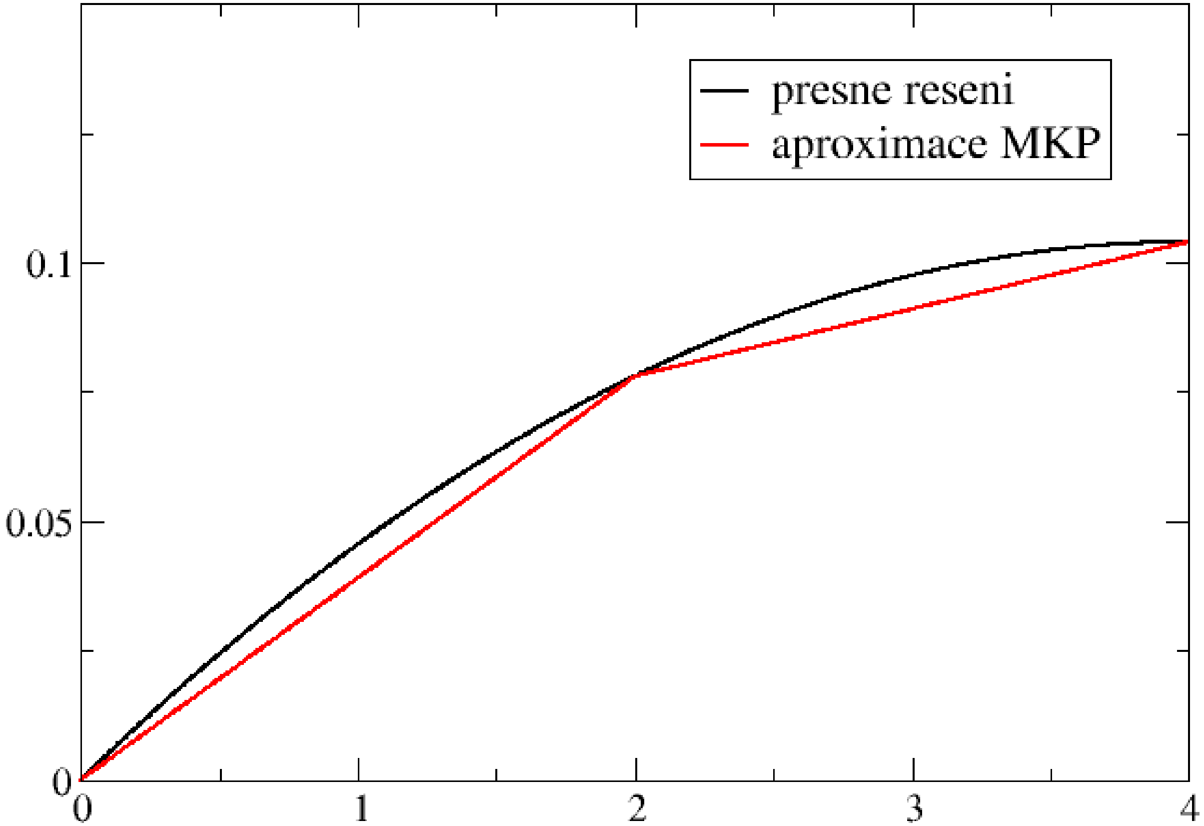
$$\frac{\partial \Pi(d_2, d_3)}{\partial d_3} \;=\; -2\frac{k}{l}d_2 + 2\frac{k}{l}d_3 - \frac{fl}{4} = 0$$

Maticový zápis soustavy algebraických rovnic

$$\begin{pmatrix} 4\frac{k}{l} & -2\frac{k}{l} \\ -2\frac{k}{l} & 2\frac{k}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fl}{4} \\ \frac{fl}{2} \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy rovnic je

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{3}{8}\frac{fl^2}{k} \\
d_3 &= \frac{1}{2}\frac{fl^2}{k}
\end{aligned}
$$


presne reseni
aproximace MKP
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4