Nelineární optimalizace a numerické metody

(MI–NON)

Magisterský program: Informatika
Obor: Teoretická informatika
Katedra: 18101 Katedra teoretické informatiky

Jaroslav Kruis

Evropský sociální fond

Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Integrace v čase

V případě časově závislých diferenciálních rovnic dojde prostorovou diskretizací k vytvoření soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{d}(t)}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

pro úlohy s prvními časovými derivacemi a

$$\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{d}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{d}(t)}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

pro úlohy s druhými časovými derivacemi.

Matice mají tvar $\boldsymbol{K}\in R^{n\times n},\boldsymbol{C}\in R^{n\times n},\boldsymbol{M}\in R^{n\times n}$, vektory jsou $\boldsymbol{d}(t)\in R^n,\boldsymbol{f}(t)\in R^n$.

Soustava diferenciálních rovnic se řeší v časových krocích. $\boldsymbol{d}_k$ označuje řešení soustavy rovnic v čase t_k, tedy $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{d}(t_k)$. Podobně $\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{f}(t_k)$.

Je-li časový krok konstantní a má-li velikost Δt, lze psát $t_k = k\Delta t$.

Řešení rovnic prvního řádu

Zobecněné lichoběžníkové pravidlo

Předpokládá se, že v čase t_k jsou známé všechny hodnoty. Vektor $\boldsymbol{d}$ v čase t_{k+1}, který je označen $\boldsymbol{d}_{k+1}$, má tvar

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t_k \boldsymbol{v}_{k+\alpha}$$

kde $\boldsymbol{v}_{k+\alpha}$ je vektor prvních časových derivací ve tvaru

$$\boldsymbol{v}_{k+\alpha} = (1-\alpha)\boldsymbol{v}_k + \alpha \boldsymbol{v}_{k+1}$$

Dosazením předcházejících vztahů do soustavy rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{k+1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1}$$

zapsané v čase t_{k+1} vychází soustava lineárních algebraických rovnic ve tvaru

$$(\boldsymbol{C} + \Delta t_k \alpha \boldsymbol{K})\, \boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{d}_k + \Delta t_k (1-\alpha) \boldsymbol{v}_k\right)$$

Jejím řešením se získá $\boldsymbol{v}_{k+1}$ a nový vektor $\boldsymbol{d}_{k+1}$ pak vychází ze vztahu

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t_k ((1-\alpha)\boldsymbol{v}_k + \alpha \boldsymbol{v}_{k+1})$$

Pokud je $\alpha = 0$, přechází soustava rovnic do tvaru

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{d}_k + \Delta t_k \boldsymbol{v}_k\right)$$

která je výhodná v případě, že je matice $\boldsymbol{C}$ diagonální.

Inicializace: sestavení matic $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{C}$ vektor $\boldsymbol{d}_0$ se nastaví podle počátečních podmínek   vektor $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$
Iterace $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ sestavení $\boldsymbol{f}_{k+1}$ pomocný vektor $\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{d}_k + \Delta t_k (1-\alpha)\boldsymbol{v}_k\right)$ výpočet matice $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{C} + \Delta t_k \alpha \boldsymbol{K}$ řešení soustavy $\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{p}_{k+1}$ výpočet $\boldsymbol{v}_{k+\alpha} = (1-\alpha)\boldsymbol{v}_k + \alpha \boldsymbol{v}_{k+1}$ výpočet $\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t_k \boldsymbol{v}_{k+\alpha}$

Řešení rovnic druhého řádu

Newmarkova metoda

uzlové hodnoty

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t \boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2 (1-2\beta)\boldsymbol{a}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2 2\beta \boldsymbol{a}_{k+1} \ ,$$

první časové derivace

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \Delta t (1-\gamma)\boldsymbol{a}_k + \Delta t \gamma \boldsymbol{a}_{k+1} \ .$$

V předchozích rovnicích jsou β a γ konstanty metody. Pro stabilní chování metody se volí $\beta = 0,25$ a $\gamma = 0,5$. Protože jsou všechny veličiny v čase t_k známé, je výhodné zavést pomocné proměnné pro neznámé

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t \boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2 (1 - 2\beta)\boldsymbol{a}_k$$

a pro první časové derivace

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \Delta t (1 - \gamma)\boldsymbol{a}_k \ .$$

S jejich pomocí má aproximace uzlových hodnot v čase t_{k+1} tvar

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{d}}_k + \Delta t^2 \beta \boldsymbol{a}_{k+1}$$

a aproximace prvních časových derivací je

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{v}}_k + \Delta t \gamma \boldsymbol{a}_{k+1} \ .$$

Po dosazení předcházejících výrazů do soustavy diferenciálních rovnic zapsané v čase t_{k+1} vychází

$$(\boldsymbol{M} + \Delta t \gamma \boldsymbol{C} + \Delta t^2 \beta \boldsymbol{K})\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} - \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{d}}_{k+1} \ ,$$

uzlové hodnoty

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t \boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2 (1-2\beta)\boldsymbol{a}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2 2\beta \boldsymbol{a}_{k+1} \ ,$$

první časové derivace

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \Delta t(1-\gamma)\boldsymbol{a}_k + \Delta t \gamma \boldsymbol{a}_{k+1} \ .$$

Algoritmus Newmarkovy metody

Inicializace

vektory $\boldsymbol{d}_0$ a $\boldsymbol{v}_0$ se určí z počátečních podmínek

$$\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{0}$$

nastavení parametrů $\beta = 0,25, \gamma = 0,5$

Iterace $k = 0, 1, 2, \ldots$

prediktor $\tilde{\boldsymbol{d}}_{k+1} = \boldsymbol{d}_k + \Delta t \boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta t^2(1-2\beta)\boldsymbol{a}_k$

prediktor $\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \Delta t(1-\gamma)\boldsymbol{a}_k$

sestavení pravé strany $\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{f}_{k+1} - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} - \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{d}}_{k+1}$

sestavení matice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \Delta t \gamma \boldsymbol{C} + \Delta t^2 \beta \boldsymbol{K}$

výpočet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{p}_{k+1}$

výpočet prvních derivací $\boldsymbol{v}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{v}}_k + \Delta t \gamma \boldsymbol{a}_{k+1}$

výpočet hodnot $\boldsymbol{d}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{d}}_k + \Delta t^2 \beta \boldsymbol{a}_{k+1}$

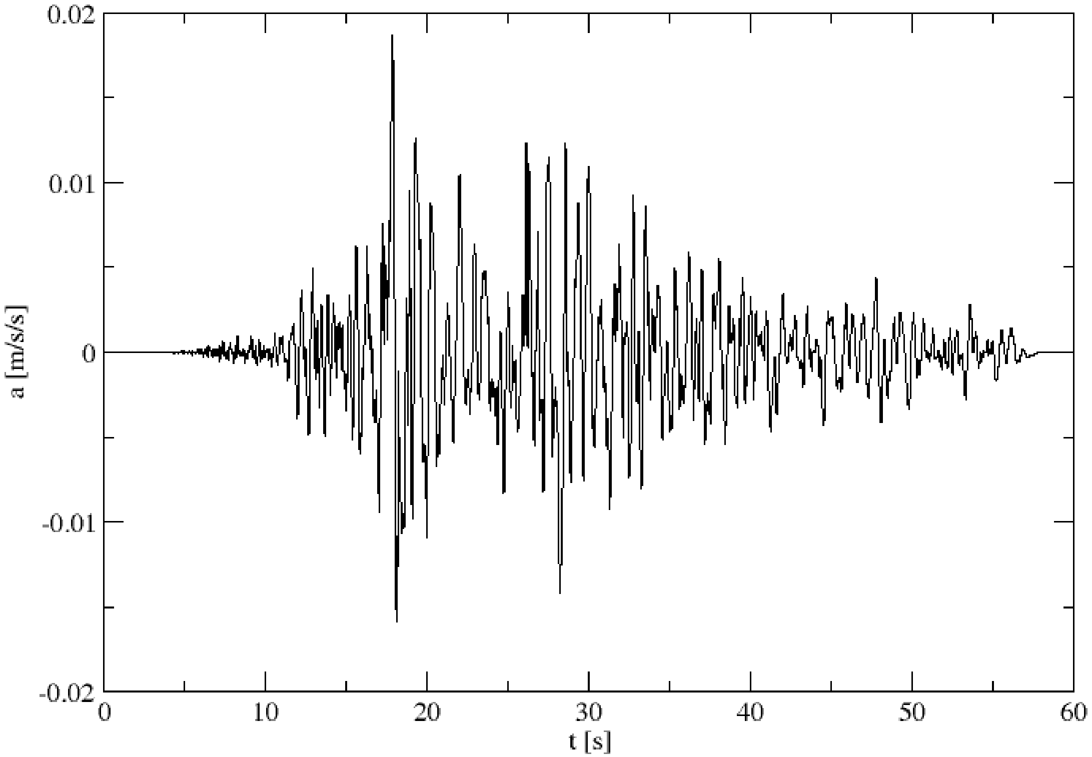
Příklad z praxe - zemětřesení

Typickým příkladem, kdy je nutné řešit diferenciální rovnice numericky je odezva konstrukce na zemětřesení. Odezva konstrukce se řídí pohybovou rovnicí ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{d}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{d}(t)}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

Pravé strana je dána akcelerogramem (průběhem zrychlení v čase), jehož typický průběh je na následujícím obrázku.

Akcelerogram



Výchylka vybraného bodu konstrukce