Nelineární optimalizace a numerické metody

(MI–NON)

Magisterský program: Informatika

Obor: Teoretická informatika

Katedra: 18101 Katedra teoretické informatiky

Jaroslav Kruis

Evropský sociální fond

Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Parciální diferenciální rovnice

Definice. Nechť je dána oblast Ω v m-rozměrném prostoru. Dále nechť F je daná spojitá funkce mnoha proměnných. Rovnice

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_m}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial {x_m}^n}\right) = 0$$

se nazývá parciální diferenciální rovnice n-tého řádu (n je nejvyšší derivace v rovnici).

Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$
\begin{aligned}
a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} + \ldots + a_{1m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_m} &+ \\
a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \ldots + a_{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_m} &+ \\
&\vdots \\
a_{m1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\,\partial x_1} + a_{m2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\,\partial x_2} + \ldots + a_{mm}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_m}^2} &+ \\
b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + b_m\frac{\partial u}{\partial x_m} &+ u + c = 0
\end{aligned}
$$

Koeficienty a_{ij} lze uspořádat do matice $\boldsymbol{A}$ a koeficienty b_i do vektoru $\boldsymbol{b}$.

Lineární parciální diferecniální rovnice druhého řádu se nazývá

- eliptická právě tehdy, když je matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní, (všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou kladná),
- parabolická právě tehdy, když je matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně semidefinitní a není pozitivně definitní a zároveň hodnost matice $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ je n,
- hyperbolická právě tehdy, když je jedno vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ je záporné a všechna zbylá jsou kladná.

Příklad. Laplaceova rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Potřebné vektory a matice mají tvar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ splňují podmínku

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| == \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0\ .$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Matice $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, Laplaceova rovnice je tedy eliptická.

Rovnice

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

je též eliptická.

Příklad. Rovnice vedení tepla má tvar

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Potřebné vektory a matice mají tvar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ splňují podmínku

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| == \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda = 0$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

Matice $\boldsymbol{A}$ je pozitivně semidefinitní, hodnost matice $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ je 2, rovnice vedení tepla je tedy parabolická. Rovnice

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} = 0$$

je též parabolická.

Příklad. Rovnice kmitání struny má tvar

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Potřebné vektory a matice mají tvar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ splňují podmínku

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| == \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 1$$

Matice $\boldsymbol{A}$ má jedno vlastní číslo záporné, ostatní jsou kladná, rovnice kmitání struny je tedy hyperbolická. Rovnice

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$

je též hyperbolická.

Metoda konečných diferencí

Diferenční náhrady ve 2D

Pro derivace funkcí jedné proměnné byly odvozeny diferenční náhrady

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h_x,y)-f(x-h_x,y)}{2h_x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h_x,y)-2f(x,y)+f(x-h_x,y)}{h_x^2}$$

Proto ve směru y platí

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \approx \frac{f(x,y+h_y)-f(x,y-h_y)}{2h_y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{f(x,y+h_y)-2f(x,y)+f(x,y-h_y)}{h_y^2}$$

V případě pravidelné sítě uzlů s krokem h_x ve směru osy x a h_y ve směru osy y lze psát pro souřadnice bodů $(x, y) = (ih_x, jh_y)$. Derivace mají tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h_x} \\
\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h_x^2} \\
\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_y} \\
\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} &\approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h_y^2}
\end{aligned}
$$

Pro smíšené derivace platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y}\right) \approx \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_y}\right) = \\
&= \frac{1}{2h_y}\left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2h_x} - \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2h_x}\right) = \\
&= \frac{1}{4h_x h_y}(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1})
\end{aligned}
$$

Příklad. Metodou konečných diferencí řešte Poissonovu rovnici (eliptickou parciální diferenciální rovnici) na oblasti

$\Omega = \langle 0; 6\rangle \times \langle 0; 4,5\rangle$

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 12x - 9y$$

s okrajovou podmínkou $u(\Gamma) = 0$.

Z okrajové podmínky plyne, že

$$u_{1,1} = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{4,2} = u_{4,3} = u_{4,4} =$$
$$= u_{3,4} = u_{2,4} = u_{1,4} = u_{1,3} = u_{1,2} = 0$$

$$\frac{1}{2^2}(u_{3,2} - 2u_{2,2} + u_{1,2}) + \frac{1}{1,5^2}(u_{2,3} - 2u_{2,2} + u_{2,1}) = f_{2,2}$$
$$\frac{1}{2^2}(u_{3,3} - 2u_{2,3} + u_{1,3}) + \frac{1}{1,5^2}(u_{2,4} - 2u_{2,3} + u_{2,2}) = f_{2,3}$$
$$\frac{1}{2^2}(u_{4,2} - 2u_{3,2} + u_{2,2}) + \frac{1}{1,5^2}(u_{3,3} - 2u_{3,2} + u_{3,2}) = f_{3,2}$$
$$\frac{1}{2^2}(u_{4,3} - 2u_{3,3} + u_{2,3}) + \frac{1}{1,5^2}(u_{3,4} - 2u_{3,3} + u_{3,2}) = f_{3,3}$$

Všechny předcházející rovnice byly vynásobeny devíti a jejich nový tvar je

$$
\begin{aligned}
-12,5u_{2,2} + 4u_{2,3} + 2,25u_{3,2} + 0u_{3,3} &= -225\\
4u_{2,2} - 12,5u_{2,3} + 0u_{3,2} + 2,25u_{3,3} &= -225\\
2,25u_{2,2} + 0u_{2,3} - 12,5u_{3,2} + 4u_{3,3} &= -225\\
0u_{2,2} + 2,25u_{2,3} + 4u_{3,2} - 12,5u_{3,3} &= -225
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} -12,5 & 4 & 2,25 & 0 \\ 4 & -12,5 & 0 & 2,25 \\ 2,25 & 0 & -12,5 & 4 \\ 0 & 2,25 & 4 & -12,5 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -225 \\ -225 \\ -225 \\ -225 \end{pmatrix}
$$

Řešením soustavy rovnic vycházejí uzlové hodnoty

$$\begin{pmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Metoda konečných prvků

Eulerova podmínka pro extrém jednoho funkcionálu

Necht' je dán funkcionál na oblasti Ω s hranicí Γ a necht' platí $u(\Gamma) = 0$. Funkcionál má tvar

$$\Pi(u(x,y)) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \|\mathrm{grad}\, u(x,y)\|^2 - u(x,y) f(x,y) \right) \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 - u(x,y) f(x,y) \right) \mathrm{d}\Omega$$

Eulerova podmínka

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(u)}{\mathrm{d}\varphi} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + s\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + s\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -(u+s\varphi)f\right)\mathrm{d}\Omega\right] - \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - uf\right)\mathrm{d}\Omega\right]\right) =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi f\right)\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}n_y\varphi\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi + \varphi f\right)\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\right)\varphi\mathrm{d}\Omega = 0$$

Eulerova podmínka pro extrém funckcionálu má tedy tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = \Delta u(x, y) + f(x, y) = 0$$

pro každý bod oblasti Ω a platí-li Dirichletova okrajová podmínka $\forall x \in \Gamma : u(x) = 0$, kde Γ je hranice oblasti Ω.

Trojúhelníkový prvek pro Poissonovu rovnici

Nechť je dán trojúhelník T, jehož vrcholy mají souřadnice (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Neznámá funkce $u(x, y)$ je na T aproximována

$$u(x, y) = N_1(x, y)d_1 + N_2(x, y)d_2 + N_3(x, y)d_3$$

kde d_1, d_2, d_3 jsou neznámé uzlové hodnoty a $N_1(x, y)$, $N_2(x, y)$, $N_3(x, y)$ jsou bázové funkce. Každá z nich má tvar

$$N_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$$

Jedná se o rovnice roviny.

První aproximační funkce $N_1(x, y)$ musí splňovat tyto tři podmínky

$$
\begin{aligned}
N_1(x, y) &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 1 \\
N_1(x, y) &= a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 = 0 \\
N_1(x, y) &= a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 = 0
\end{aligned}
$$

Předcházející soustavu lze psát také ve tvaru

$$
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Podobné soustavy platí i pro druhé dvě funkce N_2, N_3.

Souhrnně lze tedy psát

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matici lze nalézt přímo

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Lze dokázat, že

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2S$$

kde S je obsah trojúhelníku.

Koeficienty v bázových funkcích mají tedy tvar

$$a_1 = \tfrac{y_2 - y_3}{2S} \quad b_1 = \tfrac{x_3 - x_2}{2S} \quad c_1 = \tfrac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2S}$$
$$a_2 = \tfrac{y_3 - y_1}{2S} \quad b_2 = \tfrac{x_1 - x_3}{2S} \quad c_2 = \tfrac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2S}$$
$$a_3 = \tfrac{y_1 - y_2}{2S} \quad b_3 = \tfrac{x_2 - x_1}{2S} \quad c_3 = \tfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2S}$$

Derivace bázových funkcí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3) = b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3
\end{aligned}$$

Funkce f je také aproximována ve tvaru $f = N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3$, kde $f_1 = f(x_1, y_1)$, $f_2 = f(x_2, y_2)$, $f_3 = f(x_3, y_3)$, tedy jsou to hodnoty funkce f ve vrcholech trojúhelníku. Dosazením aproximace do funkcionálu vychází kvadratická funkce proměnných d_1, d_2, d_3 ve tvaru

$$\Pi = \int_T \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - uf \right) \mathrm{d}T =$$

$$= \int_T \left(\frac{1}{2}(a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3)^2 + \frac{1}{2}(b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3)^2 - \right.$$

$$\left. - (N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3)(N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3) \right) \mathrm{d}T$$

Derivace podle proměnných d_1, d_2, d_3 mají tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial d_1} &= Sa_1(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) + Sb_1(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - \\
&- \int_T N_1(N_1f_1 + N_2f_2 + N_3f_3)\mathrm{d}T = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial d_2} &= Sa_2(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) + Sb_2(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - \\
&- \int_T N_2(N_1f_1 + N_2f_2 + N_3f_3)\mathrm{d}T = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial d_3} &= Sa_3(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) + Sb_3(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - \\
&- \int_T N_3(N_1f_1 + N_2f_2 + N_3f_3)\mathrm{d}T = 0
\end{aligned}
$$

V literatuře lze nalézt vztah

$$\int_T N_1^k N_2^l N_3^m \mathrm{d}T = \frac{k!\, l!\, m!}{(k+l+m+2)!}\, 2S$$

kde S je obsah trojúhelníku.

$$\int_T N_1^2 \mathrm{d}T = \frac{2!\, 0!\, 0!}{(2+0+0+2)!}\, 2S = \frac{S}{6}$$

$$\int_T N_1 N_2 \mathrm{d}T = \frac{1!\, 1!\, 0!}{(1+1+0+2)!}\, 2S = \frac{S}{12}$$

$$\int_T N_1 N_3 \mathrm{d}T = \frac{1!\, 0!\, 1!}{(1+0+1+2)!}\, 2S = \frac{S}{12}$$

Na jednom prvku o obsahu S tedy platí

$$S \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 & a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{S}{12} \begin{pmatrix} 2f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f_1 + f_2 + 2f_3 \end{pmatrix}$$

Příklad. Metodou konečných prvků řešte Poissonovu rovnici (eliptickou parciální diferenciální rovnici) na oblasti
$\Omega = \langle 0; 6\rangle \times \langle 0; 4,5\rangle$

$$\Delta u(x,y) + f = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + f(x,y) =$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 2x^2 - 2y^2 + 12x + 9y = 0$$

s okrajovou podmínkou $u(\Gamma) = 0$.

Hodnoty funkce f v uzlech sítě

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 10,125 \quad f_3 = 0$$

$$f_4 = 18 \quad f_5 = 28,125 \quad f_6 = 18$$

$$f_7 = 0 \quad f_8 = 10,125 \quad f_9 = 0$$

Hodnoty neznámé funkce u v uzlech sítě s ohledem na okrajové podmínky

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0$$

$$u_4 = 0 \quad u_5 = d \quad u_6 = 0$$

$$u_7 = 0 \quad u_8 = 0 \quad u_9 = 0$$

$$5,1,4 \qquad a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{3}{2S} \qquad k_{11} = \left(\frac{3}{2S}\right)^2 S = \frac{2{,}25}{S}$$

$$5,2,1 \qquad a_1 = \frac{2{,}25}{2S} \qquad b_1 = 0 \qquad k_{11} = \left(\frac{2{,}25}{2S}\right)^2 S = \frac{1{,}265\ 625}{S}$$

$$5,3,2 \qquad a_1 = \frac{2{,}25}{2S} \qquad b_1 = 0 \qquad k_{11} = \left(\frac{2{,}25}{2S}\right)^2 S = \frac{1{,}265\ 625}{S}$$

$$5,6,3 \qquad a_1 = 0 \qquad b_1 = -\frac{3}{2S} \qquad k_{11} = \left(\frac{3}{2S}\right)^2 = \frac{2{,}25}{S}$$

$$5,4,7 \qquad a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{3}{2S} \qquad k_{11} = \left(\frac{3}{2S}\right)^2 S = \frac{2{,}25}{S}$$

$$5,7,8 \qquad a_1 = -\frac{2{,}25}{2S} \qquad b_1 = 0 \qquad k_{11} = \left(\frac{2{,}25}{2S}\right)^2 S = \frac{1{,}265\ 625}{S}$$

$$5,8,9 \qquad a_1 = -\frac{2{,}25}{2S} \qquad b_1 = 0 \qquad k_{11} = \left(\frac{2{,}25}{2S}\right)^2 S = \frac{1{,}265\ 625}{S}$$

$$5,9,6 \qquad a_1 = 0 \qquad b_1 = -\frac{3}{2S} \qquad k_{11} = \left(\frac{3}{2S}\right)^2 = \frac{2{,}25}{S}$$

$$
\begin{array}{ll}
1 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_1 + f_4) = 6,1875\,S \\
2 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_2 + f_1) = 5,53125\,S \\
3 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_3 + f_2) = 5,53125\,S \\
4 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_6 + f_3) = 6,1875\,S \\
5 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_4 + f_7) = 6,1875\,S \\
6 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_7 + f_8) = 5,53125\,S \\
7 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_8 + f_9) = 5,53125\,S \\
8 & f = \frac{S}{12}(2f_5 + f_9 + f_6) = 6,1875\,S
\end{array}
$$

Obsah každého trojúhelníku v síti je $S = \frac{1}{2} 3.2,25 = 3,375$.
Sečtením všech příspěvků vychází

$$4,1\bar{6}d = 158,203\,125 \quad \Rightarrow \quad d = 37,968\,75$$

Přesné řešení je $u(3; 2,25) = 45,5625$. Chyba je způsobena velmi hrubou sítí.