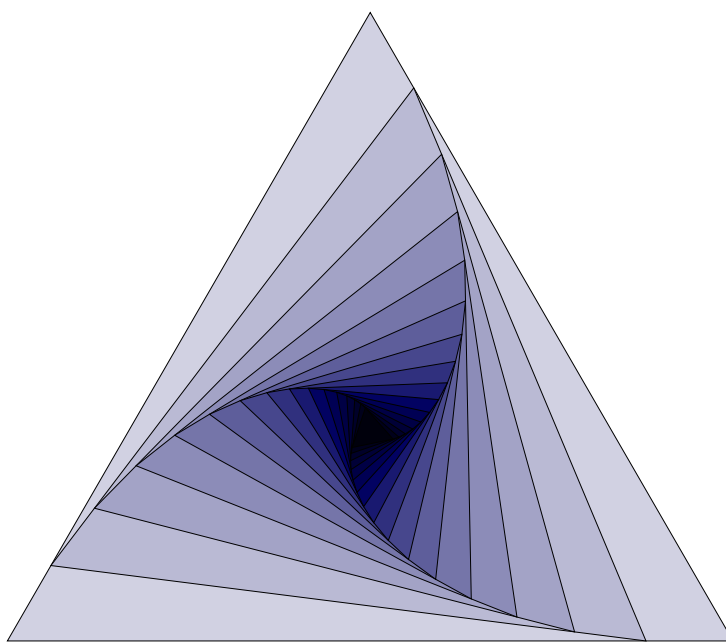


2006-2020 年考研数学一真题解答

向禹 ◎ 著

第一版



yuxtech.github.io

目 次

1 2006 年考研数学一	1 5 2010 年考研数学一	39
一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	39
二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	41
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 4	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 43	
2 2007 年考研数学一	10 6 2011 年考研数学一	48
一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	48
二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	50
三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分. 14	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 51	
3 2008 年考研数学一	21 7 2012 年考研数学一	56
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	56
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	58
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 24	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 59	
4 2009 年考研数学一	29 8 2013 年考研数学一	65
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	65
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	67
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 33	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 68	

9 2014 年考研数学一	74	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	104
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	74	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	105
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	76	13 2018 年考研数学一	111
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	78	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	111
10 2015 年考研数学一	84	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	113
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	84	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	114
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	86	14 2019 年考研数学一	121
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	87	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	121
11 2016 年考研数学一	93	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	123
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	93	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	124
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	95	15 2020 年考研数学一	131
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	96	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	131
12 2017 年考研数学一	102	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	134
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	102	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	136

1 2006 年考研数学三

一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-1)^n \ln(\frac{n+1}{n})} = e^0 = 1.$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$, 则 $f'''(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 等式两边对 x 求导得 $f''(x) = e^{f(x)} f'(x) = e^{2f(x)}$, 再次求导得 $f'''(x) = 2e^{2f(x)} f'(x) = 2e^{3f(x)}$, 又 $f(2) = 1$, 故 $f'''(2) = 2e^{3f(2)} = 2e^3.$

3. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 对 $z = f(4x^2 - y^2)$ 两边进行微分得

$$dz = f'(4x^2 - y^2) d(4x^2 - y^2) = f'(4x^2 - y^2)(8x dx - 2y dy),$$

因此 $dz|_{(1,2)} = f'(0)(8dx - 2dy) = 4dx - 2dy.$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 是二阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由条件可得

$$B(A - E) = 2E \Rightarrow |B(A - E)| = |2E| \Rightarrow |B| |A - E| = 2^2 = 4,$$

因为 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $|B| = 2.$

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $ES^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 样本方差是总体方差的无偏估计, 即

$$\begin{aligned} ES^2 &= D(X) = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-|x|} dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx \right)^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 0 = 2. \end{aligned}$$

二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ()
- A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$ C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$

解 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0$, $\Delta x > 0$, 即 $0 < dy < \Delta y$, 选 A.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则 ()
- A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 B. $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 D. $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在
9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可取反例 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

10. 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是 ()
- A. $C[y_1(x) - y_2(x)]$ B. $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
- C. $C[y_1(x) + y_2(x)]$ D. $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

解 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解, 则它的通解为 $Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$, 故原方程的通解为 $y = y_1(x) + Y = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$, 选 B.

11. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ()

- A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
 C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解 令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases},$$

那么当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0 \neq 0, \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

注意到 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 于是 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 选 D.

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

- A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
 B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
 C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
 D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

解 注意到 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s,$$

因此 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 选 A.

13. 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行的 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第

2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

- A. $C = P^{-1}AP$ B. $C = PAP^{-1}$ C. $C = P^TAP$ D. $C = PAP^T$

解 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PAP^{-1},$$

因此选 B.

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1)$, 则必有 ()

A. $\sigma_1 < \sigma_2$ B. $\sigma_1 > \sigma_2$ C. $\mu_1 < \mu_2$ D. $\mu_1 > \mu_2$
 解 将 X, Y 标准化, 则 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1), \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1)$, 那么

$$P(|X - \mu_1| < 1) = P\left(\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1,$$

$$P(|Y - \mu_2| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1.$$

因此 $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1) \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1 < \sigma_2$, 选 A.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 7 分)

设 $f(x, y) = \frac{y}{1 + xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$, 求

(1) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

解 (1) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{1 + xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}, x > 0$.

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x}{x \arctan x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x^2}{x \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x^2}{x^2} = \pi. \end{aligned}$$

16.(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} \, dx \, dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

解 化为先对 x 后对 y 的累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y^2 - xy} \, dx \, dy &= \int_0^1 \sqrt{y} \, dy \int_0^y \sqrt{y - x} \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(-\frac{2}{3}(y - x)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{x=0}^y \, dy \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

17.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

证 令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in (0, \pi)$, 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi, \quad f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = \cos x + x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

因此当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x) > f'(\pi) = 0$, 则 $f(x)$ 单调增加, 于是当 $0 < a < b < \pi$ 时, $f(b) > f(a)$, 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

18.(本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(1) 求 L 的方程;

(2) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

解 (1) 设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 由题意得

$$y' - \frac{y}{x} = ax,$$

因此 $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = a, \frac{y}{x} = ax + C, y = ax^2 + Cx$. 再由 $f(1) = 0$ 知 $C = -a$, 故曲线 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$ ($x \neq 0$).

(2) 曲线 L 与直线 $y = ax$ ($a > 0$) 所围成的平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |ax - (ax^2 - ax)| dx \\ &= a \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}a = \frac{8}{3} \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

解 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)} \bigg/ \frac{x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x^2,$$

令 $x^2 < 1$ 得 $-1 < x < 1$, 即幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时, 对应的级数也收敛, 因此收敛域为 $[-1, 1]$. 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)} = 2xS_1(x),$$

而

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x, S_1(0) = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt \\ &= t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

由于级数在 $x = \pm 1$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处均连续, 所以

$$S(x) = 2xS_1(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), x \in [-1, 1].$$

20.(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$. 问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

解 记以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量的矩阵为 A , 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

于是当 $|A| = 0$ 即 $a = 0$ 或 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

当 $a = 0$ 时, 显然 α_1 是一个极大无关组, 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

当 $a = -10$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

由于此时 A 有三阶非零子式 $\begin{vmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -400$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为极大无关组,

且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \mathbf{0}$, 即 $\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.

21.(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 与对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;

(3) 求 A 及 $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 因为 A 的各行元素之和为 3, 即有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 A 的特征值, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, α_1, α_2 是矩阵 A 的属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 A 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$;

特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T, k_1, k_2$ 不全为零.

(2) 先对 α_1, α_2 进行施密特正交化,

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化得 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 令}$$

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{A}$.

(3) 由 (2) 知 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{A}$, 那么 $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{A} - \frac{3}{2} \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{A} - \frac{3}{2} \mathbf{E} \right) \mathbf{Q}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A} - \frac{3}{2} \mathbf{E} \right)^6 &= \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{A} - \frac{3}{2} \mathbf{E} \right)^6 \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^6 \mathbf{Q} \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^6 \mathbf{Q}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} = \left(\frac{3}{2} \right)^6 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

22.(本题满分 13 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维

随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\text{Cov}(X, Y)$;

(3) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

解 (1) Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$. 当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$. 当 $0 < y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X < 0) + P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1$, 因此 Y 的概率密度 $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$, 其中

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4}, E(X^2) = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{5}{6}, \\ E(X^3) &= \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

因此 $\text{Cov}(X, Y) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$.

(3)

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right) \\ &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2\right) = P\left(-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \text{ 其中 } \theta \text{ 是未知参数 } (0 < \theta < 1), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

1), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数.

(1) 求 θ 的矩估计;

(2) 求 θ 的最大似然估计.

解 (1) 总体均值为 $\bar{X} = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1 - \theta)x dx = \frac{3}{2} - \theta$, 令样本均值 $\bar{X} = \frac{3}{2} - \theta$,

解得 $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$, 即 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$.

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N},$$

取对数得 $\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta)$, 令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

2 2007 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

解 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln \left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}, \\ \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 &\sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &\sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

因此选 B.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$
D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$

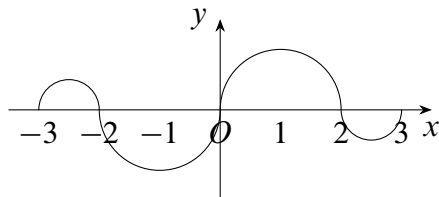
解 A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0) = 0$. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则

$$f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x) = |x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

3. 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) =$

$\int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是 ()



第3题图

- A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
 C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

解 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2) = \frac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆的面积之差, $F(3) = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = -\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ()

- A. $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$ B. $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$
 C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx$

解 积分区域 $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y < 1$, 也可表示为

$$0 \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi,$$

因此 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$, 选 B.

5. 设某商品的需求函数为 $Q = 160 - 2P$, 其中 Q, P 分别表示需求量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是 ()

- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

解 商品需求弹性的绝对值为 $\left| \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \right| = \left| \frac{-2P}{160-2P} \right| = 1 \Rightarrow P = 40$, 选 D.

6. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y = x$, 选 D.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ()

- A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

解 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ()

- A. 合同, 且相似 B. 合同, 但不相似
C. 不合同, 但相似 D. 既不合同, 也不相似

解 由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 A 的特征值为 0, 3, 3, 而 B 的特征值为 0, 1, 1, 从而 A 与 B 合同而不相似, 选 B.

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次设计射击命中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ()

- A. $3p(1-p)^2$ B. $6p(1-p)^2$ C. $3p^2(1-p)^2$ D. $6p^2(1-p)^2$

解 “第 4 次射击恰好第 2 次命中” 表示第 4 次射击命中目标, 前 3 次中只有 1 次命中目标, 因此所求的概率为 $C_3^1 p^2 (1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$, 选 C.

10. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ()

- A. $f_X(x)$ B. $f_Y(y)$ C. $f_X(x)f_Y(y)$ D. $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

解 因为 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 故 X 与 Y 相互独立, 于是 $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, 因此选 A.

二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 2^x 是比 x^3 高阶的无穷大, 而 $\sin x + \cos x$ 有界, 根据无穷小乘以有界量为无穷小知原极限为 0.

12. 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $y = (2x+3)^{-1}$, $y' = -1 \cdot 2(2x+3)^{-2}$, $y'' = -1 \cdot (-2)2^2(2x+3)^{-3}$, 归纳可知 $y^{(n)} = (-1)^n n! 2^n (2x+3)^{-n-1}$, 从而 $y^{(n)}(0) = \frac{1}{3} (-1)^n n! \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

13. 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$, 于是有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x^2} f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) - y \left(\frac{1}{x} f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2 \right) = -\frac{2y}{x} f'_1 + \frac{2x}{y} f'_2.$$

14. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 令 $y = xu$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程得

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{1}{2} u^3,$$

变量分离解得 $\frac{1}{u^2} = \frac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$, 代入 $y|_{x=1} = 1$ 得 $C = 1$. 因此 $y^2 = \frac{x^2}{\ln|x| + 1}$,

注意到 $y(1) > 0$, 因此特解为 $y = \frac{|x|}{\sqrt{\ln|x| + 1}}.$

15. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 直接计算可得 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(A^3) = 1$.

16. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

解 这是一个几何概型, 设 x, y 为所取的两个数, 则样本空间 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$, 记

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2} \right\}.$$

于是所求概率为 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3}{4}$, 其中 S_A, S_Ω 分别表示 A 与 Ω 的面积.

三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

解 原方程两边对 x 求导得

$$y' \ln y - 1 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2 + \ln y},$$

因此 $y'(1) = \frac{1}{2}$. 上式两边再对 x 求导得

$$y'' = -\frac{1}{(2 + \ln y)^2} \frac{y'}{y} = -\frac{y'}{y(2 + \ln y)^2}.$$

在点 $(1, 1)$ 处, $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$, 且 y'' 在 $(1, 1)$ 附近连续, 因此 $y'' < 0$ 在此点的邻域内成立, 所以 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近是凸的.

18. (本题满分 11 分)

设二元函数

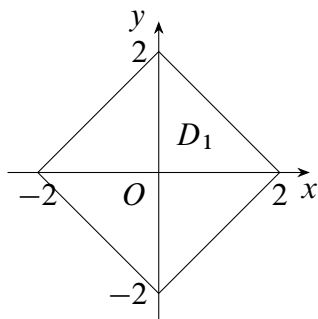
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2 \end{cases},$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

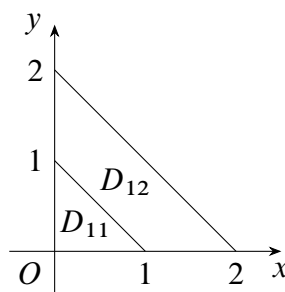
解 区域 D 如图 (1) 所示, 它关于 x, y 轴对称, $f(x, y)$ 关于 x, y 均为偶函数, 得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成如图 (2) 所示的两部分: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, 其中

$$D_{11} : |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad D_{12} : 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

于是 $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$, 其中

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

19.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

证 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 由题意有 $F(a) = F(b) = 0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad g(x_2) = M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

若 $x_1 = x_2$, 令 $c = x_1$, 则 $F(c) = 0$.

若 $x_1 < x_2$, 因 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0$, $F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$, 从而存在 $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$, 使得 $F(c) = 0$.

在区间 $[a, c], [c, b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 有 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

20.(本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x - 1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解 令 $t = x - 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} &= \frac{1}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{1}{(t - 3)(t + 2)} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{t - 3} - \frac{1}{t + 2} \right) = -\frac{1}{15} \frac{1}{1 - \frac{t}{3}} - \frac{1}{10} \frac{1}{1 + \frac{t}{2}} \\ &= -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{15} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] (x - 1)^n. \end{aligned}$$

其收敛区间满足 $|x - 1| < 3, |x - 1| < 2$, 即收敛区间为 $(-1, 3)$.

21.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解 因为方程 (??)、(??) 有公共解, 将 (??)、(??) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 \bar{A} 进行初等行变换得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是当 $a = 1$ 时, 有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组 (??) 有解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1, 0, 1)^T$, 所以 (??)、(??) 的公共解为 $k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.

当 $a = 2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组 (??) 有唯一解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (??) 的解为 $(0, 1, -1)^T$, 即 (??)、(??) 的公共解为 $(0, 1, -1)^T$.

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 B .

解 (1) 由 $A\alpha_1 = \alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = \alpha_1, A^5\alpha_1 = \alpha_1$, 故

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 \\ &= A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1. \end{aligned}$$

因此 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 及 A 的三个特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 得 B 的 3 个特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$.

设 α_2, α_3 为 B 的属于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵, 因此 α_1 与 α_2, α_3 正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0.$$

所以 α_2, α_3 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

其基础解系为 $(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$, 故可取 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 即 B 的全部特征向量为 $k_1(1, -1, 1)^T, k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 $k_1 \neq 0, k_2, k_3$ 不全为零.

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求 $P(X > 2Y)$;

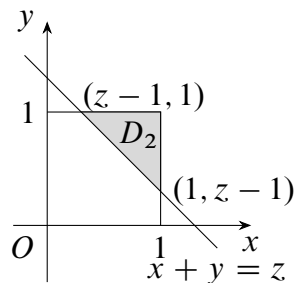
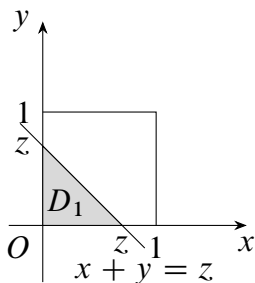
(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

$$\text{解 (1) } P(X > 2Y) = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2 - x - y) dx = \frac{7}{24}.$$

(2) 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;



$$0 \leq z < 1$$

$$1 \leq z < 2$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^z dy \int_0^{z-y} (2-x-y) dx = z^2 - \frac{1}{3}z^3;$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (2-x-y) dx =$$

$$1 - \frac{1}{3}(2-z)^3;$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$. 故 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

24.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 θ ($0 < \theta < 1$) 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

解 (1) 总体均值

$$E(X) = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}(1+\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}.$$

样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 令 $\bar{X} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$, 解得 $\theta = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$, 即 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

$$(2) E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2] = 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right], \text{ 而}$$

$$E(X^2) = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6},$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\theta^2 - \frac{1}{12}\theta + \frac{5}{48}.$$

故 $E(4\bar{X}^2) = 4\left(\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right) = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+5}{12n} \neq \theta^2$, 所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

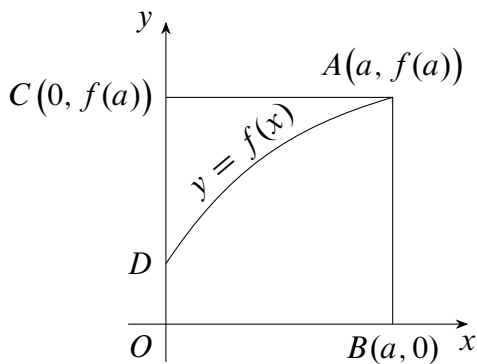
3 2008 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x = 0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 ()
 A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 无穷间断点 D. 震荡间断点

解 由洛必达法则知 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 因此 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点, 选 B.

2. 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于 ()



第 2 题图

- A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积 B. 梯形 $ABOD$ 的面积
 C. 曲边三角形 ACD 的面积 D. 三角形 ACD 的面积

解 由分部积分知

$$\int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x df(x) = af(a) - \int_0^a f(x) dx,$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积, $\int_0^a f(x) dx$ 为曲边三角形 ACD 的面积, 选 C.

3. 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ()

- A. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都存在
 B. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在
 C. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在
 D. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都不存在

解 由偏导数的定义得

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{0^2+y^4}} - 1}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y - 0} = 0,$$

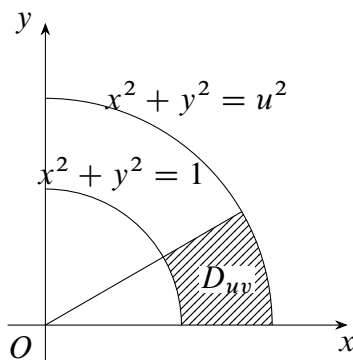
而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x^2+0^4}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sqrt{x^2+0^4}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1.$$

因此 $f'_x(0,0)$ 不存在, 选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,

则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$ ()



第 4 题图

- A. $vf(u^2)$
 B. $\frac{v}{u}f(u^2)$
 C. $vf(u)$
 D. $\frac{v}{u}f(u)$

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$, 选 A.

5. 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则 ()
- A. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆
 B. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆
 C. $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆
 D. $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

解 因为 $A^3 = O$, 所以 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3 = 0$, 即 $\lambda = 0$. 因此 $E - A$ 和 $E + A$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ()

A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, 则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$,

记 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0,$$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, 正负关系指数相同, 选 D.

7. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()

A. $F^2(x)$ B. $F(x)F(y)$
C. $1 - [1 - F(x)]^2$ D. $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

解 由分布函数的定义可得 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(\max\{X, Y\} \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq x) = F(x)F(x) = F^2(x), \end{aligned}$$

选 A.

8. 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()

A. $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ B. $P\{Y = 2X - 1\} = 1$
C. $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ D. $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

解 由于 X, Y 都服从正态分布, 且 $\rho_{XY} = 1$, 所以一定存在常数 a, b 使得 $P(Y = aX + b) = 1$, 且 $a > 0$. 那么有 $E(Y) = aE(X) + b$, 即 $1 = 0 + b, b = 1$. 再由 $4 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2$ 可知 $a = 2$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$ _____.

解 由条件知 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \Rightarrow c^2 + 1 = \frac{2}{c}, c = 1$.

10. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$, 则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx =$ _____.

解 由题意知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{\frac{1}{x} + x}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2}$, 所以 $f(t) = \frac{t}{t^2 - 2}$, 于是

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

11. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____.

解 $\iint_D (x^2 - y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 2\pi r dr = \frac{\pi}{2}$.

12. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

解 由 $xy' + y = (xy)' = 0$ 知 $xy = C$, 代入 $y(1) = 1$ 知 $C = 1$, 所以方程的解为 $y = \frac{1}{x}$.

13. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 2, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4A^{-1} - E| =$ _____.

解 A^{-1} 的特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, $4A^{-1} - E$ 的特征值为 3, 1, 1, 因此 $|4A^{-1} - E| = 3$.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____.

解 因为 $X \sim P(1)$, 所以 $EX = DX = 1$, 于是 $EX^2 = (EX)^2 + DX = 2$, $P(X = EX^2) = P(X = 2) = \frac{1}{2e}$.

15. (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\sin x - x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{\sin x - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$.

(1) 求 dz ;

(2) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x - y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 (1) 在方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 两边求全微分得

$$2x dx + 2y dy - dz = \varphi'(x + y + z) \cdot (dx + dy + dz),$$

$$\text{解得 } dz = \frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} dx + \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} dy.$$

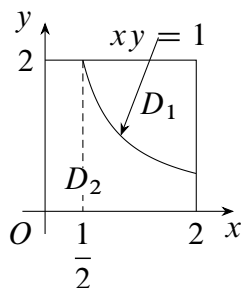
$$(2) u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} - \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} \right) = \frac{2}{\varphi' + 1}, \text{ 于是}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2\varphi'' \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x})}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi'' \cdot (1 + \frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'})}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi'' \cdot (1 + \varphi' + 2x - \varphi')}{(\varphi' + 1)^3}.$$

17.(本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

解 曲线 $xy = 1$ 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2 , 于是



第 18 题图

$$\begin{aligned} \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy &= \iint_{D_1} \max\{xy, 1\} dx dy + \iint_{D_2} \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - x \int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

证 (1) 对任意的 x , 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{积分中值定理}) \\
&= \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).
\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 令 $g(x) = G(x+2) - G(x) = 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^x f(t) dt$, 则

$$g'(x) = 2f(x+2) - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0,$$

因此 $g(x)$ 为常函数, $g(x) = g(0) = 2 \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0$, 即 $G(x+2) = G(x)$, 这说明 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r = 0.05$, 并依年复利计算, 某基金会希望通过存款 A 万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, \dots , 第 n 年提取 $(10 + 9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

解 设 A_n 为第 n 年的提现值, 则 $A_n = \frac{10 + 9n}{(1+r)^n}$, 故 A 至少应为

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + 9n}{(1+r)^n} \\
&= 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+r)^n} = 200 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{1+r} \right)^n.
\end{aligned}$$

注意到 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$, 所以

$S\left(\frac{1}{1+r}\right) = S\left(\frac{1}{1.05}\right) = 420$, 故至少应存入 $200 + 9 \times 420 = 3980$ 万元存款.

20.(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 从第 2 行开始, 第 k 行减去上一行的 $\frac{k}{k+1}$ 倍, $k = 2, 3, \dots, n$, 可得

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}$$

$$= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n}{n-1}a \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.$$

(2) 由克拉默法则知当 $a \neq 0$ 时, $|A| \neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 容易得到 $r(A) = r(A \mathbf{b}) = n-1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $\mathbf{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, \dots, 0)^T, k \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

解 (1) 设存在数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \quad (1)$$

用 A 左乘 (1) 两边, 并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \quad (2)$$

(1) - (2), 得

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$. 代入 (1) 得 $k_2\alpha_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\alpha_2 \neq \mathbf{0}$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 (1) 知 P 为可逆矩阵, 从而 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X=i) = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$, Y 的概

率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$.

(1) 求 $P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right)$;

(2) 求 Z 的概率密度.

解 (1)

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) &= P\left(X + Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) = P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X + Y \leq z, X = -1) + P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z + 1, X = -1) + P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leq z + 1)P(X = -1) + P(Y \leq z)P(X = 0) + P(Y \leq z - 1)P(X = 1) \\ &= \frac{1}{3}[P(Y \leq z - 1) + P(Y \leq z) + P(Y \leq z + 1)] \\ &= \frac{1}{3}[F_Y(z + 1) + F_Y(z) + F_Y(z - 1)], \end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z + 1) + f_Y(z) + f_Y(z - 1)] =$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(S^2) \\ &= (E\bar{X})^2 + D(\bar{X}) - \frac{1}{n} E(S^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2, \end{aligned}$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 由于 \bar{X} 与 S^2 独立, 则有

$$\begin{aligned} DT &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2) \\ &= \frac{1}{n^2} D(\sqrt{n}\bar{X})^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} D[(n-1)S^2] \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

4 2009 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 无穷多个

解 显然 $f(x)$ 的间断点为所有整数, 且 $x=0, x=\pm 1$ 为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ()
A. $a=1, b=-\frac{1}{6}$ B. $a=1, b=\frac{1}{6}$ C. $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ D. $a=-1, b=\frac{1}{6}$

解 首先当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) = x^2 \ln(1-bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

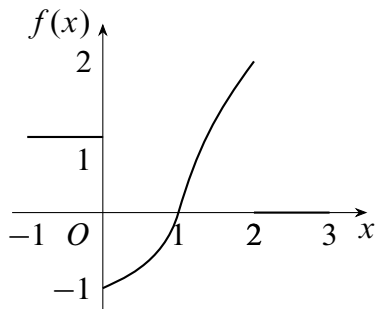
$$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3)\right) = (1-a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3),$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $1-a=0, \frac{a^3}{6}=-b$, 因此 $a=1, b=-\frac{1}{6}$, 选 A.

3. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是 ()
A. $(0, 1)$ B. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ D. $(\pi, +\infty)$

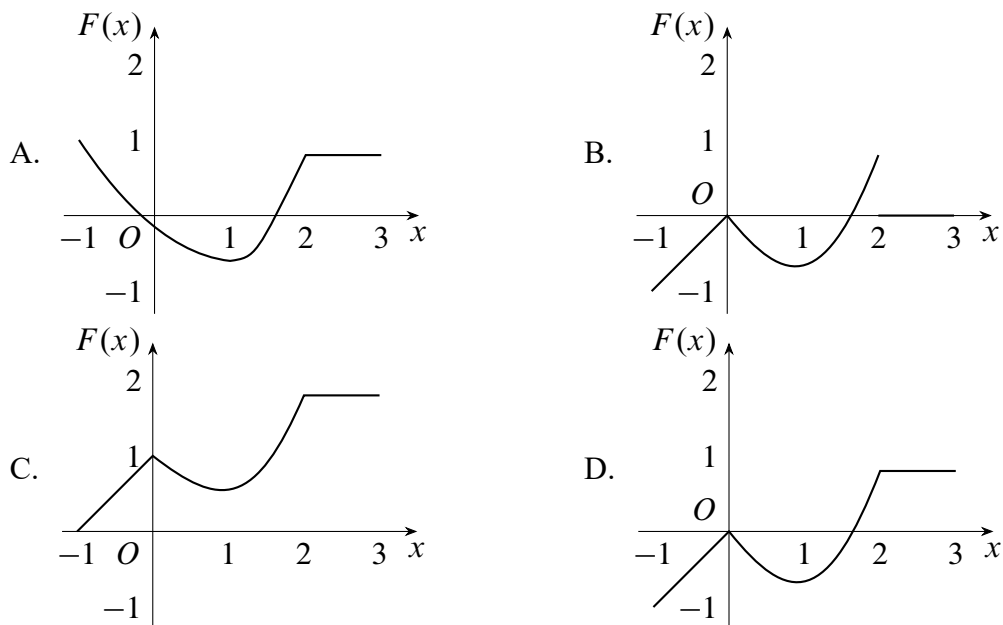
解 令 $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \ln x$, 则当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{\sin x - 1}{x} \leq 0$, 因此 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(1) = 0$, 因此当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时 $f(x) < 0$, 选 A.

4. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示,



第 4 题图

则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为 ()



解 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$ 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

5. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

- A. $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

解 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. 设 A, P 均为 3 阶矩阵, $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为 ()

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1 - e^{\cos x - 1})}{\frac{1}{3}x^2} = 3e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{3e}{2}.$

10. 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = (x + e^y)^x \left[\ln(x + e^y) + \frac{x}{x + e^y} \right]$, 所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2 \ln 2 + 1.$

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$


解 记 $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2[e^{n+1} - (-1)^{n+1}]}{(n+1)^2[e^n - (-1)^n]} = e$, 因此幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}.$

12. 设某产品的需求函数 $Q = Q(p)$, 对其价格 p 的弹性 $\varepsilon_p = 0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元.

解 收益函数 $R = pQ$, 则 $\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp}$. 由题意有 $\varepsilon_p = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = 0.2$, 因此 $p \frac{dQ}{dp} = -0.2Q$, 于是 $\frac{dR}{dp} = -0.2Q + Q = 0.8Q$. 代入 $Q = 10000$. 可知当价格增加 1 元会使产品收益增加 8000 元.

13. 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 相似矩阵有相同的迹, 则 $\text{tr}(\alpha\beta^T) = 3 = \text{tr}(\beta^T\alpha) = \beta^T\alpha = 1 + k$, 因此 $k = 2$.

 提示: 当矩阵 A 与 B 可以互乘时, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 矩阵 AB 与 BA 的所有非零特征值及其重数都相同.

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $ET = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 $ET = E(\bar{X} - S^2) = E\bar{X} - E(S^2) = np - np(1-p) = np^2.$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. 由于

$$A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2)\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right),$$

$$B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 0,$$

$$C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = e,$$

所以 $AC - B^2 = -2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) < 0$, 且 $A > 0$, 所以 $f(x, y)$ 的唯一极小值为 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

16.(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \ (x > 0)$.

解 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}} > 1$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, 于是

$$\begin{aligned} \int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)} + C \\ &= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) \\ &\quad - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + C. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

解 方法一 积分区域可表示为 $D = \left\{(r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2(\cos \theta + \sin \theta)\right\}$, 故

$$\iint_D (x-y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\
&= \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

方法二 作换元 $u = x - 1, v = y - 1$, 则 $dx = du, dy = dv$, 积分区域化为 $D_1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$, 于是

$$\iint_D (x - y) dx dy = \iint_{D_1} (u - v) du dv = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr = -\frac{8}{3}.$$

18.(本题满分 11 分)

- (1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
- (2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)(\delta > 0)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, 则

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \left(f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \right) - \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \right) \\
&= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,
\end{aligned}$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x f'(\xi)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = A.$$



提示: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(本题满分 10 分)

设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t(t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

解 旋转体的体积为 $V = \pi \int_1^t f^2(x) dx$, 曲边梯形的面积为 $S = \int_1^t f(x) dx$, 由题意可知

$$V = \pi t S \Rightarrow \pi \int_1^t f^2(x) dx = \pi t \int_1^t f(x) dx \Rightarrow \int_1^t f^2(x) dx = t \int_1^t f(x) dx.$$

上式两边对 t 求导得 $f^2(t) = \int_1^t f(x)dx + tf(t)$, 令 $t = 1$ 可得 $f(1) = 1$. 继续对 t 求导得 $2f(t)f'(t) = f(t) + f'(t) + tf'(t)$, 化简可得 $(2f(t) - t)f'(t) = 2f(t)$, 这是 t 关于 y 的一阶线性方程 $\frac{dt}{dy} + \frac{1}{2y}t = 1$, 解得 $t = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$. 由 $f(1) = 1$ 可知 $C = \frac{1}{3}$, 因此 $t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$, 该曲线的方程为 $2y + \frac{1}{\sqrt{y}} - 3x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解 (1) 对增广矩阵 (A, ξ_1) 作初等行变换得

$$(A \ \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $x = (0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1-2k)^T, k$ 为任意常数.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{对增广矩阵 } (A^2, \xi_1) \text{ 作初等行变换得}$$

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是方程组 $A^2x = \xi_1$ 的通解为 $x_1 = -\frac{1}{2}u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k, u, v 有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 A 的特征值为两正一零, 显然 $a-2 < a < a+1$, 因此必有 $a = 2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求条件概率 $P(X \leq 1|Y \leq 1)$.

解 (1) X 的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x e^{-y} dy, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2) Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{+\infty} e^{-x} dx, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

因此条件概率

$$P(X \leq 1, Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x, y) dx dy}{\int_0^1 e^{-y} dy}$$

$$= \frac{\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x} dy}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1}.$$

23.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X = 1|Z = 0)$;

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

解 (1) $P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{C_{26}^{11} \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}.$

(2) 由题意知 X, Y 的所有可能取值均为 0, 1, 2.

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}, \quad P(X = 0, Y = 1) = 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(X = 1, Y = 0) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2, Y = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 0.$$

因此 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

5 2010 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.


1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 $a =$ ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} (1 - e^x) + a e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + a = -1 + a = 1$ 可得 $a = 2$, 选 C.

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()

- A. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ B. $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$
 C. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ D. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

解 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次方程的解, 则 $\lambda + \mu = 1$, 而 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是对应的齐次方程的解, 则 $\lambda - \mu = 0$, 因此 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

 提示: 如果 y_1, y_2, \dots, y_n 是非齐次方程的 n 个解, 则线性组合 $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1$, $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0$,

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$. 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 处取极大值的一个充分条件是 ()
 A. $f'(a) < 0$ B. $f'(a) > 0$ C. $f''(a) < 0$ D. $f''(a) > 0$

解 首先有题意有 $g(x_0) = a, g'(x_0) = 0, g''(x_0) < 0$, 要想 $f(g(x))$ 在 x_0 处取极大值, 首先 $[f(g(x))]'|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0) = 0$, 它的一个充分条件是 $[f(g(x))]''|_{x=x_0} < 0$, 即

$$[f''(g(x))g'^2(x) + f'(g(x))g''(x)]|_{x=x_0} = f'(a)g''(x_0) < 0,$$

而 $g''(x_0) < 0$, 因此 $f'(a) > 0$, 选 B.

4. 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ()
 A. $g(x) < h(x) < f(x)$ B. $h(x) < g(x) < f(x)$

C. $f(x) < g(x) < h(x)$

D. $g(x) < f(x) < h(x)$

解 由洛必达法则知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{10}}} \right)^{10} = 0$, 因此当 x 充分大时, $f(x) < g(x) < h(x)$, 选 C.

5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ()

A. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$

B. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$

C. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$

D. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$

解 由题意有 $m = r(E) = r(AB) \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$, 因此 $r(A) = m \leq n$, 同理 $r(B) = m \leq n$, 选 A.

6. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解 由 $A^2 + A = O$ 知 A 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 -1 . 又 $r(A) = 3$, 所以 A 的特征值为 $-1, -1, -1, 0$, 且 A 为实对称矩阵, 则它相似于 $\text{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$, 选 D.

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P(X = 1) =$ ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2} - e^{-1}$

D. $1 - e^{-1}$

解 $P(X = 1) = F(1) - F(1-) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$, 选 C.

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足} \quad ()$$

A. $2a + 3b = 4$

B. $3a + 2b = 4$

C. $a + b = 1$

D. $a + b = 2$

解 $f(x)$ 需要满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^3 f_2(x) dx = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1$, 即 $2a + 3b = 4$, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

解 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 原方程两边对 x 求导得 $e^{x+y} (1 + y') = x \sin x^2 + \int_0^x \sin t^2 dt$,

代入 $x = y = 0$ 得 $y' = -1$, 即 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1$.

10. 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则

G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 _____.

解 所求旋转体的体积为 $V = \pi \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \pi \arctan(\ln x) \Big|_e^{+\infty} = \frac{\pi^2}{4}$.

11. 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

解 由收益弹性的定义知 $\frac{ER}{Ep} = \frac{p dR}{R dp} = 1 + p^3$, 解此变量分离的方程得 $\ln R = \frac{1}{3}p^3 + \ln p + C$, 代入 $R(1) = 1$ 得 $C = -\frac{1}{3}$, 因此收益函数 $R(p) = pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

12. 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

解 由条件有 $\begin{cases} y(-1) = -1 + a - b + 1 = 0 \\ y''(-1) = -6 + 2a = 0 \end{cases}$, 解得 $a = b = 3$.

13. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

解 $|A + B^{-1}| = |A(B + A^{-1})B^{-1}| = |A||B + A^{-1}||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$.

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本. 记统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $ET =$ _____.

解 $E(T) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = EX_1^2 = (EX_1)^2 + DX_1 = \mu^2 + \sigma^2$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 先取对数利用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x} \frac{1 - \ln x}{x^2}}}{\frac{1}{x} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \cdot \frac{\ln x}{x}} = -1,$$

因此原极限为 e^{-1} .

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 围成.

解 显然积分区域是关于 x 轴对称的, 记 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$ 为 D 在第一象限的部分, 则所求二重积分为

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy + \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy \\ &= 2 \int_0^1 \left[\frac{(1+y^2)^2 - 4y^4}{4} + \frac{3}{2}y^2(1+y^2 - 2y^2) \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1+2y^2-3y^4) + 3y^2(1-y^2) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

解 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$, 令

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 由前三个方程消去参数 λ 可得 $\frac{y}{2x} = \frac{2+2z}{2y} = \frac{y}{z}$, 代入第四个方程

求得四个驻点为 $P_1 = (1, -\sqrt{5}, 2)$, $P_2 = (1, \sqrt{5}, 2)$, $P_3 = (-1, -\sqrt{5}, -2)$, $P_4 = (-1, \sqrt{5}, -2)$, 此时 $u(P_1) = u(P_4) = -5\sqrt{5}$, $u(P_2) = u(P_3) = 5\sqrt{5}$. 当 $\lambda = 0$ 时, 不难得到另外两个驻点为 $P_5 = (-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $P_6 = (2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, 此时 $u(P_5) = u(P_6) = 0$. 因此函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值分别为 $5\sqrt{5}$ 和 $-5\sqrt{5}$.

18.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

解 (1) 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \ln(1+t) < t$, 所以 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \int_0^1 |\ln^n t \ln(1+t)| dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt$. 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = - \int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3).$$

(1) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f(\eta) = f(0)$;

(2) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证 (1) 令 $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, 则由拉格朗日中值定理知存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $F(2) - F(0) = 2F'(\eta)$, 即 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$, $f(\eta) = f(0)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值和最大值分别为 m 和 M , 则 $m \leq \frac{f(2) + f(3)}{2} \leq M$,

因此由介值定理知存在 $\zeta \in [2, 3]$ 使得 $f(\zeta) = \frac{f(2) + f(3)}{2} = f(\eta)$. 根据罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, \zeta)$ 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 进一步存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 2)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a ;

(2) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

解 (1) 因为方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 当 $\lambda = 1$ 时, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 方程组无

解, 因此 $\lambda = 1$ 舍去. 当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(A, b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix},$$

因为方程组 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.

(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时, $\bar{A} = (A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此方程组 $Ax = b$ 的

通解为 $x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k(1, 0, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(1) 求矩阵 A ;

(2) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 二次型 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 因此矩阵 A 的特征值为 $1, 1, 0$, 于是 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$, 且矩阵 Q 的第三列就是属于特征值 0 的特征向量. 设 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则 $x_1 + x_3 = 0$, 解得 $\xi_1 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T$ 为 A 的属于特征值 1 的连个正交的单位特征向量, 于

是可取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 此时有 $Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$, 于是

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 A 的特征值为 1, 1, 0, 所以 $A + E$ 的特征值为 2, 2, 1, 且 $A + E$ 为实对称矩阵, 所以 $A + E$ 为正定矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2 - x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}.$$

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个. 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(1) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $\text{Cov}(X, Y)$.

解 (1) 由题意可知

$$P(X=0, Y=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, P(X=0, Y=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, P(X=1, Y=0) = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{5},$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}, P(X=1, Y=2) = 0.$$

因此随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
$P(Y=j)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

(2) 由 (X, Y) 的分布可计算得 $EX = \frac{1}{3}, EY = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{15}$, 于是 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}$.

6 2011 年考研数学三


一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ()
A. $k = 1, c = 4$ B. $k = 1, c = -4$ C. $k = 3, c = 4$ D. $k = 3, c = -4$

解 利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) \right) = 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3,$$

因此 $k = 3, c = 4$, 选 C.

 提示: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3 \sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()
A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

解 注意到 $f(0) = 0$, 利用导数定义得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0), \end{aligned}$$

因此选 B.

3. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛
B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛
D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

解 收敛的级数任意加括号后的级数仍然收敛, A 选项正确; B 选项不正确, 反例可取 $u_n = (-1)^n$; C 选项不正确, 反例可取 $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$; D 选项不正确, 反例可取 $u_n = 1$, 因此选 A.

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是 ()

A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

解 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

5. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第一行

得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

A. $P_1 P_2$ B. $P_1^{-1} P_2$ C. $P_2 P_1$ D. $P_2 P_1^{-1}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系知 $AP_1 = B$, $P_2 B = E$, 所以 $A = BP_1^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 选 D.

6. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为 ()

A. $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$
 B. $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$
 C. $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$
 D. $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

解 首先 A 不是零矩阵, 因此齐次线性方程组 $Ax = 0$ 至多只有两个线性无关的解. 因为 η_1, η_2, η_3 是方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, 所以 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 于是方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$. 且 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$ 仍然是方程组 $Ax = \beta$ 的解, 因此方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$, 选 D.

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ()

A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_2(x)F_1(x)$
 C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

解 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)] dx = F_1(x)F_2(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度, 其他都不满足, 选 D.



提示: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x)$, $2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有 ()

A. $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

B. $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

C. $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

D. $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

解 $ET_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \lambda, ET_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n} EX_n = \lambda + \frac{\lambda}{n} > ET_1, DT_1 =$

$\frac{DX}{n} = \frac{\lambda}{n}, DT_2 = D\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + D\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{DX}{n-1} + \frac{DX}{n^2} = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2} > DT_1$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

解 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{3x}{3t}} = xe^{3x}$, 于是 $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$.

10. 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

解 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y} \ln(1+\frac{x}{y})}$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{1/y}{1+x/y} \right], \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{-x/y^2}{1+x/y} \right], \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)} = 2 \ln 2 + 1, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)} = -1 - 2 \ln 2$, 从而 $dz|_{(1,1)} = (1 + 2 \ln 2)(dx - dy)$.

11. 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

解 原方程两边对 x 求导得 $\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y'$, 代入 $x = 0, y = 0$ 得 $y'(0) = -2$, 因此曲线在 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = -2x$.

12. 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴选项所成的旋转体的体积为_____.

解 利用旋转体的体积公式得 $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}$.

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩为 1, \mathbf{A} 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为_____.

解 由题意 $r(\mathbf{A}) = 1$, 因此 \mathbf{A} 至少有两个特征值是 0, 由于 \mathbf{A} 的各行元素之和为 3, 即

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 因此 } 3 \text{ 也是 } \mathbf{A} \text{ 的特征值, 则 } \mathbf{A} \text{ 的相似标准形为 } \text{diag}\{3, 0, 0\},$$

因此二次型 f 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $3y_1^2$.

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

解 由条件知 X, Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 于是 $E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = \mu((EX)^2 + D(X)) = \mu(\mu^2 + \sigma^2) = \mu^3 + \mu\sigma^2$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$, $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x + \sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8}(2\sin x)^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1}$.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(xy, yg(x)) \cdot y + f'_2(xy, yg(x)) \cdot g'(x) \cdot y$, 所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = y f'_1(y, y)$.

故

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1} &= \frac{d}{dy} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} \right) \Big|_{y=1} = \frac{d}{dy} [y f'_1(y, y)] \Big|_{y=1} \\ &= [f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y))] \Big|_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

解

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) d(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - 2 \int \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

证明方程 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

证 令 $f(x) = 4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$, 则

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2} \begin{cases} > 0, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ = 0, & x = \pm\sqrt{3} \\ < 0, & x < -\sqrt{3} \text{ 或 } x > \sqrt{3} \end{cases}.$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 内单调递减, 在 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 内单调递增. 极小值 $f(-\sqrt{3}) = 0$, 极大值 $f(\sqrt{3}) = 0$, 且 $f(+\infty) = -\infty$, 因此由零点定理知存在 $x_0 \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 使得 $f(x_0) = 0$. 因此 $f(x)$ 恰有两个根 $x = \sqrt{3}$ 和 $x = x_0$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足 $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy =$

$\iint_{D_t} f(t) dx dy$, $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 因为

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy &= \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy \\ &= \int_0^t [f(t) - f(x)] dx = tf(t) - \int_0^t f(x) dx \\ &= \iint_{D_t} f'(t) dx dy = \frac{1}{2} t^2 f'(t), \end{aligned}$$

等式两边对 x 求导得 $f'(t) + \frac{2}{t-2}f(t) = 0$, 解此变量分离的方程得 $f(t) = \frac{C}{(t-2)^2}$.

由 $f(0) = 1$ 得 $C = 4$, 所以 $f(x)$ 的表达式为 $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}, 0 \leq x \leq 1$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 (1) 首先有 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

因此 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能被 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示等价于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 于是 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$, 所以 $a = 5$.

(2) 对增广矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

21.(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 A .

解 (1) 由条件知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且它对应的特征向量为 $k_1(1, 0, -1)^T, k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向

量为 $k_2(1, 0, 1)^T, k_2 \neq 0$. 再由 $r(A) = 2$ 知 0 也是 A 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases},$$
 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0, 1, 0)^T, k_3 \neq 0$.

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = A$, 因此

$$\begin{aligned} A &= PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$.

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

解 (1) 由于 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 所以 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$, 即 $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$, 于是

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 1, Y = -1) = P(Y = -1) - P(X = 0, Y = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0) - P(X = 1, Y = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{3}.$$

因此二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $Z = XY$ 的取值只有 $-1, 0, 1$, 且由 (X, Y) 的概率分布不难得到 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 0, E(XY) = 0, \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 因此 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = 0$.

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0, x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的三角形区域.

(1) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 (1) (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 所以 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^{2-x} dy, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2) 因为 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{2-y} dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2(1 - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

所以在 $Y = y (0 \leq y < 1)$ 时, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2 - 2y}, & y < x < 2 - y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

7 2012 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 所以直线 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x = -1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()
A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^n(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^nn!$

解 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)] = (-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r dr =$ ()

- A. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
B. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$
C. $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
D. $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

解 积分区域为 $\{(r, \theta) | 2\cos\theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 化为直角坐标即 $\{(x, y) | 2x \leq$

$x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 此时先对 y 后对 x 的累次积分为 $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy,$

选 B.

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则 ()

A. $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ C. $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛可得 $\alpha > \frac{3}{2}$, 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛可知 $1 \leq \alpha < 2$, 因此 $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, 选 D.

5. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ()

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 显然可得 $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 选 C.

6. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P(X^2 + Y^2 \leq$

1) = ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{4}$

解 X, Y 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 设区域 $D =$

$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 于是 $P(X^2 + Y^2 < 1) = \iint_D f(x, y) dx dy =$

$\frac{\pi}{4}$, 选 D.

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为 ()

A. $N(0, 1)$ B. $t(1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $F(1, 1)$

解 由条件得 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 于是 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与

$\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}$ 都服从标准正态分布, 且相互独立, 因此 $\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}} = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim$

$t(1)$, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$ _____.

解 先取对数用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(-\sin x - \cos x) \tan x} = -\sqrt{2},$$

因此原极限为 $e^{-\sqrt{2}}$.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=e}$ _____.

解 首先有

$$y = f(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln f(x), & f(x) \geq 1 \\ 2f(x) - 1, & f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \ln x \right), & x \geq e^2 \\ \ln x - 1, & 1 \leq x < e^2 \\ 2(2x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

因此 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=e} = (\ln x - 1)' \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$.

11. 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

解 由题意知当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 1$ 时, $f(x, y) = 2x - y + 2 + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$, 由此可得 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 2, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)} = -1$, 故 $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$.

12. 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为_____.

解 利用定积分可求得此平面图形的面积为 $S = \int_0^1 (4x - x) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx = 4 \ln 2$.

13. 设 α 为 3 为单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为_____.

解 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为 $\alpha^T\alpha, 0, 0$, 即 $1, 0, 0$. 则 $E - \alpha\alpha^T$ 也可以对角化, 且它的特征值为 $0, 1, 1$, 因此 $r(E - \alpha\alpha^T) = 2$.

14. 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) =$ _____.

解 由 A 与 C 互不相容可知 $P(AC) = P(ABC) = 0$, 于是

$$P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)} = \frac{1/2}{1 - 1/3} = \frac{3}{4}.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

解 积分区域可以写为 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, \sqrt{x} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$, 则

$$\begin{aligned}\iint_D e^x xy dx dy &= \int_0^1 x e^x dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} y dy = \int_0^1 x e^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} e^x (x-1)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件).

- (1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元);
- (2) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各位多少时可使总成本最小? 求最小总成本;
- (3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本, 并解释其经济意义.

解 (1) 由题意知 $C'_x(x, y) = 20 + \frac{x}{2}$, 对 x 积分得 $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + \varphi(y)$, 再对 y 求导得 $C'_y(x, y) = \varphi'(y) = 6 + y$, 于是对 y 积分得 $\varphi(y) = 6y + \frac{y^2}{2} + C$, 所以 $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + C$. 又 $C(0, 0) = 10000$, 所以 $C = 10000$, $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + 10000$.

(2) 若 $x + y = 50$, 则 $y = 50 - x (0 \leq x \leq 50)$, 代入到成本函数中得

$$C(x) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6(50 - x) + \frac{1}{2}(50 - x)^2 + 10000 = \frac{3}{4}x^2 - 36x + 11550.$$

令 $C'(x) = \frac{3}{2}x - 36 = 0$ 得 $x = 24$, 不难得知这就是 $C(x)$ 的最小值点. 此时 $y = 26$, 最小成本为 $C(24, 26) = 11118$.

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本为 $C'_x(24, 26) = 32$, 其经济意义为在要求总产量为 50 件条件下, 当甲产品为 24 件时, 若甲产品的产量再增加一件, 则总成本将增加 32 万元.

18.(本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

证 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x) \geq 0, x \in [0, 1)$ 即可. 首先有 $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$, 且 $\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$, 因此 $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$. 而 $f(0) = 0$, 则有 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$, 证毕.

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

解 (1) 微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 故方程的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 将 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$ 代入方程 $f''(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $f(x) = e^x$.

(2) 由 (1) 得到曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, \quad y'' = 2e^{x^2} (1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x,$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, y = 0$. 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此点 $(0, 0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

20.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 因为 $r(A) = r(A^T A) = 2$, 对矩阵 A 作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $a = -1$.

(2) 由 $a = -1$ 可得 $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 故矩阵 $A^T A$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是 $A^T A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $A^T A x = 0$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$;

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 解方程组 $(2E - A^T A)x = 0$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = 6$ 时, 解方程组 $(6E - A^T A)x = 0$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$.

令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则在正交变换 $x = Qy$ 下, 原二次型化为标准形 $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.

解 (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵 (A, β) 作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, \beta) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解当且仅当 $r(A) = r(A, \beta) < 4$, 因此 $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$, 此时方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X = 2Y)$

(2) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

解 (1) 由 (X, Y) 的概率分布知 $P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}$.

(2) 由 (X, Y) 的概率分布知 X, Y, XY 的概率分布分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

所以 $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 1, E(Y^2) = \frac{5}{3}, D(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{3}$, 于是 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \text{Cov}(X - Y) = \text{Cov}(X, Y) - D(Y) = -\frac{2}{3}$.

23.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$.

(1) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(2) 求 $E(U + V)$.

解 (1) X, Y 的分布函数均为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 且 X, Y 相互独立, 于是 V 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) = P(\min\{X, Y\} \leq v) = 1 - P(\min\{X, Y\} > v) \\ &= 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - [1 - F(v)]^2 \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

因此 V 的概率密度为 $f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

(2) 由于 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 所以 $U + V = X + Y$, 则 $E(U + V) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2$.

8 2013 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小量, 则下列式子错误的是 ()

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$
C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

解 容易判断 A, B, C 都是对的, 而 $o(x) + o(x^2) = o(x)$, 错误的选 D.

2. 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 由 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 知 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, \pm 1$. 且

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \infty.\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 的可去间断点是 $x = 0, 1$, 选 C.

3. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 则 ()

A. $I_1 > 0$ B. $I_2 > 0$ C. $I_3 > 0$ D. $I_4 > 0$

解 根据对称性可知 $I_1 = I_3 = 0$, 而当 $x \in D_2$ 时, $y - x > 0$, 因此 $I_2 = \iint_{D_2} (y - x) dx dy > 0$.

0. 当 $x \in D_4$ 时, $y - x < 0$, $I_4 < 0$, 选 B.

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ()

A. 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

- B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$
- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在
- D. 若存在常数 $p > 1$, 是 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

解 A 选项中 a_n 不一定趋于 0, A 不对. B 选项可取反例 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$,

B 不对. C 选项可取反例 $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n} (n \geq 2)$, 则对任意 $p > 1$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n} = +\infty$, C 不对. D 选项中存在正数数 a , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = a$, 那么当

$n \rightarrow \infty$ 时, a_n 为 $\frac{1}{n^p}$ 的同阶或高阶无穷小, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 选 D.

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则 ()

- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

解 对一个矩阵 A 右乘一个可逆矩阵 B 就是对 A 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 C , 因此矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ()

- A. $a = 0, b = 2$
- B. $a = 0, b$ 为任意常数
- C. $a = 2, b = 0$
- D. $a = 2, b$ 为任意常数

解 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的特征值为 $2, b, 0$, 而 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda ((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2)$,

因此当且仅当 $a = 0$ 时, A 的特征值为 $2, b, 0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P(-2 \leq X_i \leq 2) (i = 1, 2, 3)$, 则 ()

- A. $p_1 > p_2 > p_3$ B. $p_2 > p_1 > p_3$ C. $p_3 > p_1 > p_2$ D. $p_1 > p_3 > p_2$

解 利用正态分布的性质可得

$$\begin{aligned} p_1 &= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1, \\ p_2 &= \Phi\left(\frac{2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1, \\ p_3 &= \Phi\left(\frac{2-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right) = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right). \end{aligned}$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到 $p_1 > p_2 > p_3$, 选 A.

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

则 $P(X+Y=2) =$ ()

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

解 利用 X, Y 的独立性得

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=-1) \\ &= P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=0) + P(X=3)P(Y=-1) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

选 C.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) =$ _____.

解 由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公切线知 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 则由导数定义得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) \stackrel{x=\frac{n}{n+2}}{\underset{x \rightarrow 1^-}{=}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x} f(x) = -2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -2f'(1) = -2.$$

10. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} =$ _____.

解 当 $x=1, y=2$ 时, $z=2$. 方程 $(z+y)^x = xy$ 两边分别对 x 求偏导得

$$(z+y)^2 \left(\ln(z+y) + \frac{x}{z+y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = y,$$

代入 $x=1, y=2, z=2$ 可得 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2 - 2\ln 2$.

11. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= -\int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Big|_1^{+\infty} = \ln 2.\end{aligned}$$

12. 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 则方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

13. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 可知 $A^T = -A^*$, 于是 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A^*| = -|A|^2$, 因此 $|A| = 0$ 或 -1 . 又 A 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 于是 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$, 所以 $|A| = -1$.

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解

$$\begin{aligned}E(Xe^{2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} dx = 2e^2.\end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用泰勒公式得

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(1 + 2^2 + 3^2)x^2\right) + o(x^2) \sim 7x^2,\end{aligned}$$

因此 $a = 7, n = 2$



提示: 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$ 是不能直接得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{nax^{n-1}} = 1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n (1 - \cos a_k x)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$.

16.(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

解 利用旋转体的体积公式得

$$V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}, V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y = 10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$.

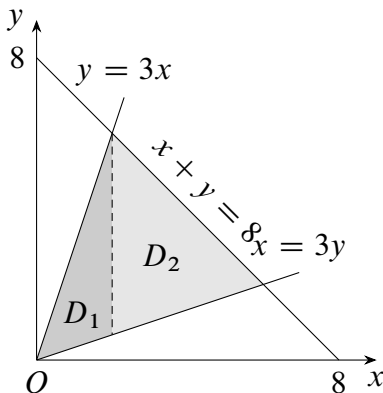
17.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

解 积分区域可分为两部分

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{3} \leq y \leq 3x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, \frac{x}{3} \leq y \leq 8 - x \right\}.$$



第 17 题图

则

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy \\
 &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\
 &= \int_0^2 x^2 \left(3x - \frac{x}{3}\right) dx + \int_2^6 x^2 \left(8 - x - \frac{x}{3}\right) dx \\
 &= \frac{416}{3}.
 \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1000}$ (p 为单价, 单位: 元; Q 是销量, 单位: 件). 已知产销平衡, 求:

(1) 该商品的边际利润;

(2) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济利益;

(3) 使得利润最大的定价 p .

解 (1) 商品的利润函数为 $L = pQ - (20Q + 60000) = 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 60000$, 边际利润为 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500}$.

(2) 当 $p = 50$ 时, 边际利润为 20, 其经济意义为当 $p = 50$ 时, 销售第 10001 件商品时所获得的利润为 20 元.

(3) 令 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500} = 0$ 得 $Q = 20000$, 此时 $p = 60 - \frac{Q}{1000} = 40$, 显然这是使得二次函数取得最大值的点, 因此使得利润最大的定价 $p = 40$.

19.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. 证明:

(1) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;

(2) 对 (1) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

证 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ 可知存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时, $f(x) > 1$ 都成立. 即存在 $x_0 > 0$ 使得 $f(x_0) > 1$ 成立, 因此由连续函数介值定理知存在 $a \in [0, x_0]$ 使得 $f(a) = 1$.

(2) 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (0, a)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{1}{a}$.

20.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

解 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AC - CA = B$ 得方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases}. \quad (*)$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

由此可知当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组 (*) 无解. 当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 方程组 (*) 有解, 且此时方程组的通解为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时存在矩阵 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ 使得 $AC - CA = B$.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

证 (1) 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(\mathbf{x}^T\alpha)(\alpha^T\mathbf{x}) + (\mathbf{x}^T\beta)(\beta^T\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

且 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(2) 因为 α, β 正交且均为单位向量, 所以

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha,$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta,$$

故 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是矩阵 A 的特征值. 又 A 的秩 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 即 A 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3 = 0$ 也是 A 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

22.(本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 再给定 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 求 $P(X > 2Y)$.

解 (1) 由 X 的边缘分布知当 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 时, $f(x, y) = 0$. 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因此求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) Y 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx \\ &= \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$(3) P(X > 2Y) = \iint_{x>2Y} f(x, y)xy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 总体均值 $E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$, 令 $E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 因此 θ

的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$.

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 令 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} =$

$\frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$ 得 $\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$, 所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$.

9 2014 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ()

A. $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ B. $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ C. $a_n > a - \frac{1}{n}$ D. $a_n < a + \frac{1}{n}$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \neq 0$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

即 $|a| - \varepsilon < |a_n| < |a| + \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ 可知 A 正确而 B 错误, C 可取反例 $a_n = a - \frac{1}{n}$,

D 可取反例 $a_n = a + \frac{1}{n}$, 选 A.

2. 下列曲线中有渐近线的是 ()

A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin \frac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 从而直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线.

3. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是 ()

A. $a = 0$ B. $b = 1$ C. $c = 0$ D. $d = \frac{1}{6}$

解 利用 $\tan x$ 的麦克劳林展开式知当 $x \rightarrow 0$ 时, $p(x) - \tan x = a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 因此 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 因此错误的选 D.

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

A. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ B. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
C. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ D. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

解 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$. 故当 $f''(x) > 0$ 时, $F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处取到, 而 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$, 选 D.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ()

- A. $(ad - bc)^2$ B. $-(ad - bc)^2$ C. $a^2d^2 - b^2c^2$ D. $b^2c^2 - a^2d^2$

解 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2,$$

选 B.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

解 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\alpha_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$

从而 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关, 不一定有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 如取反例 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0)^T$, 因此选 A.

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$ ()
A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

解 由 A, B 相互独立可得

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A) - 0.5P(A) = 0.5P(A) = 0.3, \end{aligned}$$

所以 $P(A) = 0.6, P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.5P(A) = 0.2$, 选 B.

8. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 ()

A. $N(0, 1)$ B. $t(1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $F(1, 1)$

解 首先 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $X_3 \sim N(0, \sigma^2)$, 因此 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{X_3}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

则 $\frac{X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 且 $X_1 - X_2$ 与 X_3 独立, 故 $\frac{(X_1 - X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{X_3^2/\sigma^2}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|} \sim t(1)$, 选

C.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格), 则该商品的边际收益为_____.

解 由 $Q = 40 - 2p$ 得 $p = \frac{40 - Q}{2}$, 于是收益函数为 $R = pQ = \frac{(40 - Q)Q}{2}$, 边际收益为 $\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$.



提示: 边际收益的定义是收益对销售量 Q 的导数, 而不是对价格 p 的导数.

10. 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

解 画出积分区域图不难得到区域 D 的面积为 $S = \int_0^1 dy \int_{-y}^0 dx + \int_1^2 dy \int_{-\frac{1}{y}}^0 dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

11. 设 $\int_0^a xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.

解 由条件得 $\int_0^a xe^{2x} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} \Big|_0^a = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, 因此 $a = \frac{1}{2}$.

12. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx =$ _____.

解

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx &= \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x} dx - \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} dy - \int_0^1 (1 - y) e^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (1 - y) e^{y^2} dy = \int_0^1 ye^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{2}. \end{aligned}$$

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

解 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4 - a^2 \geq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 2$.

14. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

解 由条件得

$$\begin{aligned} E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cn E(X^2) \\ &= cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = \frac{2cn}{3\theta^2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{\theta}^{2\theta} = \frac{5cn}{2} \theta^2 = \theta^2, \end{aligned}$$

因此 $c = \frac{2}{5n}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.


15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$

解 当 $t > 0$ 时, $t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t > t^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) - t = \frac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \bigg/ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

 **提示:** 事实上, 洛必达法则适用于 $\frac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

解 积分区域关于直线 $y = x$ 对称, 利用轮换对称性与极坐标可得

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin(\pi r) dr \\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(e^x \cos y) e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y) e^x \cos y.
\end{aligned}$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x \cos y) e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y] e^{2x},$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u) = 4f(u) + u$, 此方程的通解为 $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$. 由 $f(0) = f'(0) = 0$ 得 $C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0$, 解得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$, 故 $f(u) = \frac{1}{16} (e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

解 令 $a_n = (n+1)(n+3)$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, 所以幂级数的收敛半径为 $R = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left(\frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' + \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3-x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(1) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$

解 (1) 因为 $0 \leq g(x) \leq 1$, 所以 $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = x - a, x \in [a, b].$

(2) 令 $F(x) = \int_a^x f(t) g(t) dt - \int_a^{a+\int_a^x g(u)du} f(t) dt$, 则

$$F'(x) = f(x)g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u) du\right)g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u) du\right]g(x).$$

由 (1) 知 $a + \int_a^x g(t)dt \leq a + x - a = x$, 而 $f(x)$ 单调增加, 所以 $F'(x) \geq 0$, 这说明

$F(x)$ 单调增加. 又 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geq 0$, 即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

解 (1) 对矩阵 A 作初等行变换得 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则方

程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\alpha = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(2) 对矩阵 $(A \ E)$ 作初等行变换得

$$(A \ E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $E = (e_1, e_2, e_3)$, 则 $Ax = e_1$ 的通解为 $x = (2, -1, -1, 0)^T + k_1\alpha, k_1 \in \mathbb{R}$;

$Ax = e_2$ 的通解为 $x = (6, -3, -4, 0)^T + k_2\alpha, k_2 \in \mathbb{R}$; $Ax = e_3$ 的通解为 $x =$

$(-1, 1, 1, 0)^T + k_3\alpha, k_3 \in \mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha) = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & -4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

解 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 A 可对角化的充要条件是 $\text{tr}(A) \neq 0$. 且当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, A 的相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$.

证 由于 $r(A) = 1$, 所以方程组 $Ax = 0$ 有且只有 $n - 1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 A 的 $n - 1$ 重特征值, 且它只有 $n - 1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 A 的最后一个特征值就是 $\text{tr}(A)$. 当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 A 可对角化, 且其相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$. 若 $\text{tr}(A) = 0$, 则 0 是 A 的 n 重特征值, 但只有 $n - 1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(A) = r(B) = 1, \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = n$ 可知 A 与 B 都相似于对角阵 $\text{diag}\{n, 0, \dots, 0\}$, 故 A 与 B 相似.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY .

解 (1) 由分布函数定义得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X = 1)P(Y \leq y|X = 1) + P(X = 2)P(Y \leq y|X = 2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq y|X = 1) + \frac{1}{2}P(Y \leq y|X = 2) \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, & y \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$(2) Y \text{ 的概率密度为 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2, \text{ 因此} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}.$$

23.(本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{2}{3}$,

且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(1) 求 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $P(X + Y \leq 1)$.

解 (1) 由条件可得 $E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, 且 $E(XY) =$

$P(X = 1, Y = 1)$, 所以 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{9}{2} \left(P(X = 1, Y = 1) - \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2}$,

于是 $P(X = 1, Y = 1) = \frac{5}{9}$. 由此以及 X, Y 的边缘分布即可得 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$(2) P(X + Y \leq 1) = 1 - P(X + Y > 1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

10 2015 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是 ()

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

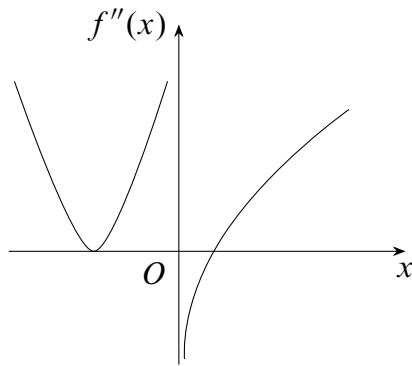
B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

解 一个数列收敛的充要条件是它的任意子列都收敛于同一个极限, 因此 A 和 C 都对. 对于选项 B, 子列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 刚好是 $\{x_n\}$ 奇数子列和偶数子列, 这两个子列收敛于同一个极限, 也能说明 $\{x_n\}$ 收敛. 但是 D 选项中少了子列 $\{x_{3n+2}\}$ 的收敛性, 得不到 $\{x_n\}$ 收敛, 错误的选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ()



第 2 题图

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y = f''(x)$ 在 $x > 0$ 时与 x 轴的交

点, $x < 0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

3. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \quad ()$$

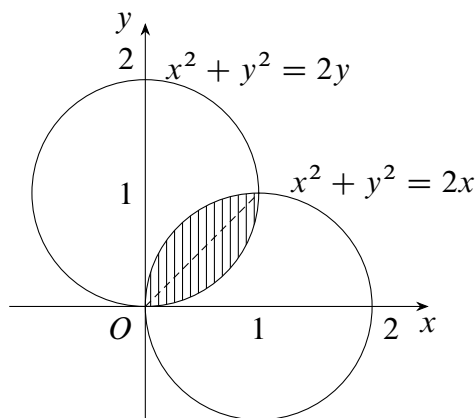
A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

C. $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

D. $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

解 积分区域如图. 如果化为直角坐标系下 X 型区域的累次积分, 积分区域可表示为



第 3 题图

$$0 \leq x \leq 1, 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2},$$

那么累次积分为 $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$, 但是 $f(x, y)$ 在区域的上下部分的积分不一定相等, 所以不能写成其中一半区域积分的两倍, C 和 D 都是不对的. 如果化为极坐标, 代入 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可知上下两个圆的方程分别为 $r = 2 \sin \theta, r = 2 \cos \theta$, 因此正确答案选 B.

4. 下列级数中发散的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

解 A 选项由比值法有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{1}{3}$, 故 A 选项收敛, B 选项中 $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 也收敛, C 选项中 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln(2n)}$ 是发散的, D 选项由比值法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

所以 D 选项也收敛, 选 C.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有

无穷多解的充分必要条件为 ()

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

解 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \ b) < 3$, 利用初等行变换得

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 2 , $d = 1$ 或 2 , 选 D.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 ()

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 A , 由题意知 $P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由初等变

换与初等矩阵的关系知 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$, 于是

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= C^T (P^T A P) C \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 选 A.

7. 设 A, B 为任意两个随机事件, 则 ()

- A. $P(AB) \leq P(A)P(B)$ B. $P(AB) \geq P(A)P(B)$
 C. $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ D. $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$

解 注意到 $P(AB) \leq P(A), P(AB) \leq P(B)$, 因此 $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$, 选 C.

8. 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$, 则 $E[X(X + Y - 2)] =$ ()

- A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

解 由条件可得

$$\begin{aligned} E[X(X + Y - 2)] &= E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X) \\ &= D(X) + (EX)^2 + E(X)E(Y) - 2E(X) = 5, \end{aligned}$$

选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

解 利用洛必达法则得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = -\frac{1}{2}$.

10. 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

解 由条件 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t)dt$, 求导得 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + 2x^2 f(x^2)$, 故 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t)dt = 1, \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$, 则 $f(1) = 2$.

11. 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

解 令 $x = y = 0$ 可得 $z(0, 0) = 0$, 原方程两边同时求全微分得

$$e^{x+2y+3z} (dx + 2dy + 3dz) + xydz + yzdx + xzdy = 0.$$

令 $x = y = z = 0$ 得 $(dx + 2dy + 3dz)|_{(0,0)} = 0$, 即 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

解 由题意知 $y(0) = 3, y'(0) = 0$. 微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 所以微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 代入 $y(0) = 3, y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 1$, 故 $y = 2e^x + e^{-2x}$.

13. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

解 A 的特征值为 $2, -2, 1$ 则 $B = A^2 - A + E$ 的特征值为 $3, 7, 1$, 因此 $|B| = 21$.

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P(XY - Y < 0) =$ _____.

解 由 $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$ 知 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$, 且 X, Y 相互独立, 所以

$$\begin{aligned} P(XY - Y < 0) &= P((X - 1)Y < 0) = P(X - 1 > 0, Y < 0) + P(X - 1 < 0, Y > 0) \\ &= P(X > 1)P(Y < 0) + P(X < 1)P(Y > 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1 + x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \ln(1 + x) + bx \sin x = x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3) \\ &= (1 + a)x + \left(b - \frac{a}{2} \right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x) = kx^3$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1 + a = 0, b - \frac{a}{2} = 0, k = \frac{a}{3}$, 解得 $a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$.



提示: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 是无法直接

得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x + y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

解 区域 D 关于 y 轴对称, 则由对称性得

$$\begin{aligned} \iint_D x(x + y) dx dy &= \iint_D x^2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cdot 2 \cos^2 t \, dt - \frac{2}{5} \quad (x = \sqrt{2} \sin t) \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \, dt - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \, du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

为实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, P 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 ($\eta > 0$).

(1) 证明定价模型为 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$;

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - P$, 试由 (1) 中的定价模型确定此商品的价格.

解 (1) 由于利润函数 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = PQ - C(Q)$, 两边对 Q 求导得

$$\frac{dL}{dQ} = P + Q \frac{dP}{dQ} - C'(Q) = P + Q \frac{dP}{dQ} - MC.$$

当且仅当 $\frac{dL}{dQ} = 0$ 时, 利润 $L(Q)$ 最大. 又由于 $\eta = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$, 故当 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ 时, 利润最大.

(2) 由于 $MC = C'(Q) = 2Q = 3(40 - P)$, 则 $\eta = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$, 代入 (1) 中的定价模型, 得 $P = \frac{2(40 - P)}{1 - \frac{40 - P}{P}}$, 解得 $P = 30$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 此切线与 x 轴交点为 $(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0)$. 根据题设条件可知 $\frac{1}{2} \frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)} \cdot |f(x_0)| = 4$, 即 $y = f(x)$ 满足方程 $y' = \frac{1}{8} y^2$, 解得 $y = -\frac{8}{8C + x}$. 因为 $f(0) = 2$, 所以 $C = -\frac{1}{2}$, 故 $f(x) = \frac{8}{4 - x}$.

19.(本题满分 10 分)

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

解 (1) 因为函数 $u(x), v(x)$ 可导, 记 $f(x) = u(x)v(x)$, 则在任意点 x_0 处有

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0) + u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} u(x) + v(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &= u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

由 x_0 的任意性知 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

(2) $f'(x) = u'_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x) \cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x) \cdots u'_n(x)$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

解 (1) 因为 $|A| = O$, 所以 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0$, 所以 $a = 0$.

(2) 由 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ 得 $(E - A)X(E - A^2) = E$. 由 (1) 知

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

21.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 由于矩阵 A 与矩阵 B 相似, 所以 $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

(2) 由 (1) 知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 由 A 与 B 相似知 $|\lambda E - A| =$

$|\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)x = 0$, 得线性无关特征向量 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T, \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(5E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$.

取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 为对角阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY .

解 (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为 $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$,

则 Y 的概率分布为 $P(Y = k) = C_{k-1}^1 \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{k-2} \frac{1}{8} = (k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2, k = 2, 3, \dots$.

(2) Y 的数学期望为 $E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 16$, 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, -1 < x < 1.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 由于总体 $X \sim U[\theta, 1]$, 故总体均值 $E(X) = \frac{\theta+1}{2}$, 令 $E(X) = \bar{X}$ 得 $\theta = 2\bar{X} - 1$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$.

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

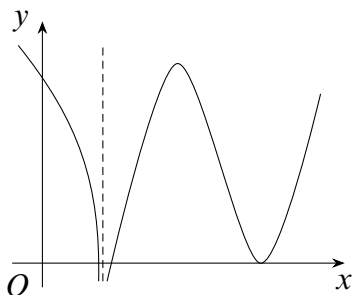
$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

当 $\theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, 显然 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增, 则当 $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 最大, 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

11 2016 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()



第 1 题图

- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
 B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
 C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
 D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

解 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中 $y = f'(x)$ 的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()

- A. $f'_x - f'_y = 0$ B. $f'_x + f'_y = 0$ C. $f'_x - f'_y = f$ D. $f'_x + f'_y = f$

解 由 $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$ 得 $f'_x(x, y) = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}$, $f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x-y)^2}$, 故 $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x-y} = f(x)$, 选 D.

3. 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} \, dx dy$ ($i = 1, 2, 3$), 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

则 ()

A. $J_1 < J_2 < J_3$ B. $J_3 < J_1 < J_2$ C. $J_2 < J_3 < J_1$ D. $J_2 < J_1 < J_3$

解 注意到被积函数 $\sqrt[3]{x-y}$ 当 $x > y$ 时为正, 当 $x < y$ 时为负, 画图比较三个积分区域易知选 B.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ()

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与 k 有关

解 注意到

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| &\leq \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

由正项级数比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ 绝对收敛, 选 A.

5. 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

A. A^T 与 A^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似

D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

解 由 A 与 B 相似知存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$, 因此

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P,$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, 则

A 与 B 相似, 但 $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ 与 $B + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 不相似.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则 ()

- A. $a > 1$ B. $a < -2$ C. $-2 < a < 1$ D. $a = 1$ 或 $a = -2$

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$. 由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 即正负特征值个数分别为 1, 2, 因此 $\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$, 即 $-2 < a < 1$, 选 C.

7. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则 ()

- A. $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$ B. $P(A|\bar{B}) = 1$ C. $P(A \cup B) = 1$ D. $P(B|A) = 1$

解 由条件得 $0 = P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\bar{B})$, 于是 $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = 1$, 选 A.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$ ()

- A. 6 B. 8 C. 14 D. 15

解

$$\begin{aligned} D(XY) &= E(X^2Y^2) - (EXY)^2 = (EX^2)(EY^2) - (EX)^2(EY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EX)^2(EY)^2 = 14. \end{aligned}$$

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

解 原极限存在, 且分母趋于 0, 所以分子趋于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin 2x = 0$, 利用等价无穷小替换得

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6.$$

10. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

解 利用定积分定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} = \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1.$$

11. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

解 原方程两边分别对 x, y 求偏导数得

$$\begin{cases} z + (x+1)z'_x = 2xf(x-z, y) + x^2(1-z'_x)f'_1(x-z, y) \\ (x+1)z'_y - 2y = x^2(-z'_y f'_1(x-z, y) + f'_2(x-z, y)) \end{cases}.$$

代入 $x=0, y=1, z=1$ 可得 $z'_x(0,1)=-1, z'_y(0,1)=2$, 因此 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

12. 设 $D = \{(x, y) | |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____.

解 设 D_1 是 D 在第一象限的部分, 根据对称性可得

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_1} x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{3} - \frac{2}{3e}. \end{aligned}$$

13. 行列式 $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$ _____.

解 直接按照第一列展开得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \end{aligned}$$

14. 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰为 4 的概率为_____.

解 4 次取球总的取法数为 $3^4 = 81$, 要想取 4 次结束, 则前 3 次刚好只取到了两种颜色, 第 4 次取到了第三种颜色, 因此所求概率为 $p = \frac{C_3^2 C_3^1 \times 2}{81} = \frac{2}{9}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解 首先有 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} \right)$, 其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x - 1 + 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - 2 \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (x - \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{\frac{1}{3}}$.

16.(本题满分 10 分)

设某商品最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

解 (1) 由弹性的计算公式 $\eta = \left| \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right|$ 可知 $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{-p}{120 - p}$, 分离变量解方程得到 $Q = C(p - 120)$, 其中 C 为任意常数. 又商品的最大需求量为 1200 件, 则 $p = 0$ 时 $Q = 1200$, 因此 $C = -10$, 则 $Q = 10(120 - p)$.

(2) 收益函数 $R(p) = pQ = \frac{Q(1200 - Q)}{10} = 120Q - \frac{Q^2}{10}$, 边际收益为 $R'(Q) = 120 - \frac{Q}{5}$. 当 $p = 100$ 时, $Q = 200$, 此时边际收益为 $R'(200) = 80$, 其经济意义为当单价为 100 万元时, 需求量每增加 1 件, 收益将增加 80 万元.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解 首先

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases},$$

于是 $f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$. 当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) = 2x > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, 令 $f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$, 且 $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, 因此 $x = \frac{1}{2}$ 是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故 $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

解 首先有 $\int_0^x f(x-t)dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x f(u)du$, 因此原方程化为

$$\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt + e^{-x} - 1.$$

上式两边求导得 $f(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x} = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$. 注意到此方程右边可导, 从而继续求导得 $f'(x) = f(x) + e^{-x}$, 且 $f(0) = -1$, 解此一阶线性微分方程得 $f(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解 记 $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(2n-1)x^2}{(n+1)(2n+1)} \right| = x^2$. 令 $x^2 < 1$ 得 $-1 < x < 1$, 因此幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$. 且当 $x = \pm 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2 \ln 2, \end{aligned}$$

因此幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n}, \end{aligned}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2)$, 而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} = 2 \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

因此原幂级数的和函数为 $S(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2), & x \in (-1, 1) \\ 2 \ln 2, & x = \pm 1 \end{cases}$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $AX = B$

无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

解 对方程的增广矩阵 (A, B) 作初等行变换得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq -2 \text{ 时, } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{此时方程 } AX = B \text{ 有唯一解, 且 } X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a+2}{a-4} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 此时方程}$$

$$AX = B \text{ 有无穷多解, 且 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_1-1 & k_2-1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \text{ 其}$$

中 k_1, k_2 为任意常数.

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, 由于 } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 此}$$

时方程 $AX = B$ 无解.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解 (1) 首先由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$ 知 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程组 $(-E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$.

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程组 $(-2E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_2 = (1, 2, 0)^T$.

当 $\lambda_3 = 0$ 时, 解方程组 $Ax = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (3, 2, 2)^T$.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$, 所以

$$\begin{aligned} A^{99} &= (P\Lambda P^{-1})^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由 $B^2 = BA$ 知 $B^{100} = BA^{99} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 即 $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$, $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$, $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$.

(1) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

解 (1) (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) 对 $0 < t < 1$, 有

$$P(U \leq 0, X \leq t) = P(X > Y, X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^x 3 dy = \frac{3}{2}t - t^3,$$

$$P(U \leq 0) = P(X > Y) = \frac{1}{2}, P(X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = 2t^{\frac{3}{2}} - t^3.$$

由于 $P(U \leq 0, X \leq t) \neq P(U \leq 0)P(X \leq t)$, 所以 U 与 X 不独立.

(3)

$$\begin{aligned} F(z) &= P(U + X \leq z) = P(U + X \leq z, U = 0) + P(U + X \leq z, U = 1) \\ &= P(X \leq z, X > Y) + P(1 + X \leq z, X \leq Y) \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数.

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.

解 (1) T 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) = P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t) \\ &= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3} dx\right)^3, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^9}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases}. \end{aligned}$$

因此 T 的概率密度为 $f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) 令 $E(aT) = \int_0^\theta at \frac{9t^2}{\theta^9} d\theta = \frac{9}{10}a\theta = \theta$, 解得 $a = \frac{10}{9}$.

12 2017 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

A. $ab = \frac{1}{2}$ B. $ab = -\frac{1}{2}$ C. $ab = 0$ D. $ab = 2$

解 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2},$$

选 A.

2. 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是 ()

A. (0, 0) B. (0, 3) C. (3, 0) D. (1, 1)

解 由 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$ 可得四个驻点 (0, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 1). 令 $A =$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 - 2x - 2y$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$, 在四个驻点处分别考虑判别式 $AC - B^2$ 的正负, 只有在 $(x, y) = (1, 1)$ 处有 $AC - B^2 = 3 > 0$, 且 $A = C = -2 < 0$, 因此 (1, 1) 为极大值点. 其他选项都不满足, 选 D.

3. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) \cdot f'(x) > 0$, 则 ()

A. $f(1) > f(-1)$ B. $f(1) < f(-1)$
C. $|f(1)| > |f(-1)|$ D. $|f(1)| < |f(-1)|$

解 由 $f(x)f'(x) > 0$ 可知 $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) > 0$, 因此 $f^2(x)$ 单调递增, 有 $f^2(1) > f^2(-1)$, 即 $|f(1)| > |f(-1)|$, 选 C.

4. 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛, 则 $k =$ ()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

解 利用泰勒公式可得知当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - k \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n} + \frac{k}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

因此当且仅当 $1 + k = 0$ 即 $k = -1$ 时原级数收敛, 选 C.

5. 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ()

- A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解 矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的秩为 1, 它有 $n - 1$ 个特征值为 0, 第 n 个特征值为 $\lambda = \text{tr}(\alpha\alpha^T) = \|\alpha\|^2 = 1$, 因此 $E - \alpha\alpha^T$ 有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 A.

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- A. A 与 C 相似, B 与 C 相似 B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似
C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似 D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

解 注意到 A, B 的特征值都是 2, 2, 1, 要判断 A, B 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda = 2$ 的情形即可. 对矩阵 A 有 $r(2E - A) = 1$, 因此 A 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 A 与 C 相似. 对矩阵 B , 有 $r(2E - B) = 2$, 它是不可对角化的, B 与 C 不相似, 选 B.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 ()

- A. A 与 B 相互独立 B. A 与 B 互不相容
C. AB 与 C 相互独立 D. AB 与 C 互不相容

解 $A \cup B$ 与 C 相互独立 $\Leftrightarrow P((A \cup B)C) = P(A \cup B)P(C)$, 由题意有

$$\begin{aligned}P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC), \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(ABC), \\ P(A \cup B)P(C) &= (P(A) + P(B) - P(AB))P(C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C),\end{aligned}$$

因此得到 $P(ABC) = P(AB)P(C)$, 选 C.

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是 ()

- A. $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布
- B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布
- C. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布
- D. $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

解 对选项 B 有 $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$, $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, $\frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, B 不正确, 选项 A, C, D 都是基本结论, 都正确, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 利用定积分的区间对称性和几何意义可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = \frac{\pi^3}{2}.$$

10. 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 首先齐次差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 0$ 的通解为 $Y_t = C \cdot 2^t$. 设非齐次方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的一个特解为 $t_t = At \cdot 2^t$, 代入方程可得 $A = \frac{1}{2}$, 因此差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y_t = C \cdot 2^t + t \cdot 2^{t-1}$, C 为任意常数.

11. 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 总成本为 $C(Q) = Q(1 + e^{-Q})$, 因此边际成本为 $C'(Q) = 1 + e^{-Q}(1 - Q)$.

12. 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1 + y)e^y dy$, $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 容易知道 $df(x, y) = ye^y dx + x(1 + y)e^y dy = d(xye^y)$, 因此 $f(x, y) = xye^y + C$, 再由 $f(0, 0) = 0$ 知 $C = 0$, 因此 $f(x, y) = xye^y$.

13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 依题意知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 所以

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = r(A) = 2.$$

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = -2) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 3) = b$, 若 $EX = 0$, 则 $DX = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由分布律的归一性可知 $\frac{1}{2} + a + b = 1$. 而 $EX = -2 \times \frac{1}{2} + a + 3b = 0$, 所以 $a = b = \frac{1}{4}$. 从而 $EX^2 = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$, $DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{9}{2}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

解 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du$, 故原极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

解 直接化为累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2+y^4} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

解 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^2) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 内有实根, 求 k 的范围.

解 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, 方程 $f(x) = k$ 有实根的充要条件是 k 在 $f(x)$ 的值域内. 求导得

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + (x+1)\ln^2(1+x)}{x^2(x+1)\ln^2(1+x)},$$

令 $g(x) = -x^2 + (x+1)\ln^2(1+x)$, 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x + \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x), \\ g''(x) &= -2 + \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} = \frac{-2x + 2\ln(1+x)}{1+x}, \end{aligned}$$

因此 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, $g'(x) < g'(0) = 0$, 故 $g(x)$ 也在 $(0, 1)$ 内单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减. 而 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{\ln 2} - 1, \frac{1}{2}\right)$.

19.(本题满分 10 分)

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, \dots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1;

(2) 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0, x \in (-1, 1)$, 并求 $S(x)$ 的表达式.

解 (1) 由递推关系可得 $(n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1}$, 即 $(n+1)(a_{n+1} - a_n) = -(a_n - a_{n-1})$, 因此

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1}) = \dots = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1 - a_0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

于是 $a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow e^{-1}$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 这说明原幂级数的收敛半径就是 1.

(2) 因为 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $a_1 = 0$, 所以

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n + a_{n-1}) x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= x S'(x) + x S(x).
 \end{aligned}$$

所以有 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$, 且 $S(0) = a_0 = 1$, 解此微分方程得 $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}, x \in (-1, 1)$.

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明: $r(A) = 2$;

(2) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程 $Ax = \beta$ 的通解.

解 (1) 由于矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 因此 A 与对角阵 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(A) \geq 2$. 又 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 说明 A 的列向量组线性相关, 故 $r(A) \leq 2$, 因此 $r(A) = 2$.

(2) 因为 $r(A) = 2$, 所以 $Ax = 0$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 可知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, 即方程组 $Ax = 0$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 而

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 进而方程组 $Ax = \beta$ 的通

解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

解 首先二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 故 A 一定有零特征值, 所以 $|A| = 0$, 解得 $a = 2$.

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$ 可知 A 的三个特征值为

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0.$$

解方程组 $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_1 = -3$ 的一个单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_2 = 6$ 的一个单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_3 = 0$ 的一个单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

因此 $\mathbf{Q} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, Y 的概

率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y \leq EY)$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 (1) 首先有 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 y \cdot 2ydy = \frac{2}{3}$, 于是

$$P(Y \leq EY) = P\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) = \int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy = \frac{4}{9}.$$

(2) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(Y + X \leq z | X=0)P(X=0) + P(Y + X \leq z | X=2)P(X=2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq z | X=0) + \frac{1}{2}P(Y + 2 \leq z) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z-2) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z-2). \end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z-2) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ z-2, & 2 < z < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

23.(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做了 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计参数 σ .

- (1) 求 Z_1 的概率密度;
- (2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;
- (3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

解 (1) 由 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 可知 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$ 独立同分布, 设 Z_1 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z_i \leq z) = P(|X_i - \mu| \leq z) = P\left(-\frac{z}{\sigma} \leq \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

则 Z_1 的概率密度为

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 设 \bar{Z} 为样本均值, 令

$$\bar{Z} = E(Z_1) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

由此可知 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 对应的样本值为 z_1, z_2, \dots, z_n , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(z_i) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2}, & z_1, z_2, \dots, z_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $z_1, z_2, \dots, z_n > 0$ 时, 取对数得 $\ln L(\sigma) = \frac{n}{2} \ln \frac{2}{\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$, 令

$$\frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0,$$

解得 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}$, 故 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$.

13 2018 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是 ()

A. $f(x) = |x| \sin |x|$

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos |x|$

D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

解 A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_-(0) = \frac{1}{2}$, 选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则 ()

A. 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

B. 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

解 考虑 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0, 1]$ 上进行积分可得 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, 选 D.

3. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()

A. $M > N > K$ B. $M > K > N$ C. $K > M > N$ D. $N > M > K$

解 利用对称性可以计算 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K > \pi = M > N$.

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量, 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 ()

A. $C'(Q_0) = 0$

B. $C'(Q_0) = C(Q_0)$

C. $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$

D. $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$

解 平均成本 $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$, $\bar{C}' = \frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2}$. 产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 $\bar{C}'(Q_0) = 0$, 可得 $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$, 选 D.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda E - A$ 的秩相等, 即 $E - A$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则 ()

A. $r(A \ A B) = r(A)$

B. $r(A \ B A) = r(A)$

C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$

D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

解 对于 A, 有 $(A \ A B) = A (E \ B)$, 且 $(E \ B)$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(A \ A B) = r(A)$,

即选 A. B 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C 错误, $r(A \ B) \geq \max\{r(A), r(B)\}$,

反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$, 则 $P(X < 0) =$ ()

A. 0.2

B. 0.3

C. 0.4

D. 0.6

解 由 $f(1+x) = f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 0.3,$$

于是 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.5 - 0.3 = 0.2$, 选 A.

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2},$$

则 ()

$$A. \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sigma}} \sim t(n)$$

$$B. \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sigma}} \sim t(n-1)$$

$$C. \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$$

$$D. \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1)$$

解 首先由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 可知 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$. 而样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 满足的分布为 $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且样本均值与

样本方差独立, 根据 t 分布的定义知 $\frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是 _____.

解 计算可得 $y' = 2x + \frac{2}{x}$, $y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$, 由此得曲线的拐点坐标 $(1, 1)$. 曲线在拐点处切线的斜率为 $y'|_{x=1} = 4$, 故切线方程为 $y = 4x - 3$.

10. $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$ _____.

解 令 $\arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} = t$, 则 $e^x = \cos t$, $dx = -\frac{\sin t}{\cos t} du$, 原积分化为

$$-\int t \cos t \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\int t \sin t dt = t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + C,$$

带回原变量得原不定积分为 $e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$.

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是 _____.

解 根据二阶差分的定义可得

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

由 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 得 $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$. 先求齐次方程的通解, 齐次差分方程的特征方程 $\lambda - 2 = 0$, 齐次方程通解为 $Y = C \cdot 2^x$. 由于 1 不是特征根, 于是假设原差分方程的特解为 $y_x^* = A$, 代入非齐次方程知特解为 $y_x^* = -5$, 于是原方程的通解为 $y_x = C \cdot 2^x - 5$.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$), 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ _____.

解 在等式 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$ 两边除以 Δx , 并令 $\Delta x \rightarrow 0$ 得 $f'(x) = 2xf(x)$, 解得 $f(x) = Ce^{x^2}$. 由 $f(0) = 2$ 得 $C = 2$, 于是 $f(1) = 2e$.

13. 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为 _____.

解 由题意得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性

无关, 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 P 是可逆矩阵, 因此矩阵 A 与矩阵

B 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 B 的实特征值为 2, 即 A 的实特征值为 2.

14. 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则 $P(AC|A \cup B) = \underline{\hspace{1cm}}$.

解 直接计算得 $P(AC|A \cup B) = \frac{P[(AC) \cup (ABC)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(AC)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{1}{3}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

解 直接利用泰勒公式得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(ax + b) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(a-1)x + a + b + \frac{b}{x} + (ax + b)o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b)o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, 所以 $\begin{cases} a-1=0 \\ a+b=2 \end{cases}$, 解得 $a = b = 1$.

16. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D x^2 dx dy.$$

解 直接化成累次积分计算可得

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} dy \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 (\sqrt{3(1-x^2)} - \sqrt{3}x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{3(1-x^2)} dx - \sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{32} \pi - \frac{\sqrt{3}}{16}.
\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

¹将长为 2m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形,三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在,求出最小值.

解 设分成的三段依次为 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{z}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$, 首先求驻点. 由

$$\text{方程} \begin{cases} f'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ f'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \\ f'_z = \frac{\sqrt{3}}{18}z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{可得} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases}, \text{并且黑塞矩阵 } Hf = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18} \right\}$$

正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right) \left(4\pi + 16 + \frac{36}{\sqrt{3}}\right) \geq (x + y + z)^2 = 4$,

$$\text{因此当 } \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{16} = \frac{z}{12\sqrt{3}} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2.$$

18.(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n .

解 首先 $\left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{1+x}\right)' = \cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2}$, 而当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1}, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

¹此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

. 求导得

$$\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.$$

$$\text{比较系数可得 } a_n = \begin{cases} 2k+2, & n=2k+1 \\ \frac{(-4)^k}{(2k)!} - (2k+1), & n=2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$) 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \geq 0$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x e^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

解 (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
. 对其系数矩阵进行初等

行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = c(-2, -1, 1)^T$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Qx.$$

其中 \mathbf{Q} 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵 \mathbf{P} .

解 (1) 由于矩阵 \mathbf{A} 可经过初等列变换化为矩阵 \mathbf{B} , 因此 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a = 2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, k_1, k_2, k_3 为任意常数. 注意到 \mathbf{P} 是可

逆矩阵, 因此 $|\mathbf{P}| \neq 0$, 这要求 $k_2 \neq k_3$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

解 (1) 直接计算可知 $E(X) = 0, E(X^2) = 1$, 而 $Y \sim P(\lambda), E(Y) = \lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) \\ &= E(X^2)E(Y) - (EX)^2E(Y) = \lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned}P(Z = k) &= P(X = 1)P(Z = k|X = 1) + P(X = -1)P(Z = k|X = -1) \\ &= P(X = 1)P(Y = k) + P(X = -1)P(Y = -k) \\ &= \frac{1}{2}P(Y = k) + \frac{1}{2}P(Y = -k).\end{aligned}$$

当 $k = 1, 2, 3, \dots$ 时, $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!};$

当 $k = 0$ 时, $P(Z = 0) = P(Y = 0) = e^{-\lambda};$

当 $k = -1, -2, -3, \dots$ 时, $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = -k\} = \frac{\lambda^{-k} e^{-\lambda}}{2(-k)!}.$

因此综上所述可得

$$P(Z = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^{|k|} e^{-\lambda}}{2|k|!}, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{-\lambda}, & k = 0 \end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

解 (1) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 对应的样本值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = 2^{-n} \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma) = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|$. 令 $\frac{d \ln L}{d \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$,

解得 $\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E(|X|) = \sigma,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = 2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma}) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{1}{n} (E(X^2) - (E|X|)^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

14 2019 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -4)$ B. $(4, +\infty)$ C. $\{-4, 4\}$ D. $(-4, 4)$

解 令 $f(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \pm 1$. 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$. 因此有极大值 $f(-1) = 4 + k$, 极小值 $f(1) = k - 4$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 要想原方程有 3 个不同的实根, 则有 $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, 解得 $-4 < k < 4$, 选 D.

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()

A. 1, 0, 1 B. 1, 0, 2 C. 2, 1, 3 D. 2, 1, 4

解 从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 因此 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = e^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = ce^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

解 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 故它的通项趋于零, 则存在 $M > 0$ 使得 $\left| \frac{v_n}{n} \right| \leq M$, 因此

$|u_nv_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right| \leq M|nu_n|$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛,

选 B. 对于 A 和 C 选项, 可取反例 $u_n = \frac{1}{n^3}, v_n = (-1)^n$; 对于 D 选项, 可取反例 $u_n = \frac{1}{n^3}, v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

5. 设 A 是四阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(A^*) =$ ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 由于方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(A) = 2$, 因此 $r(A^*) = 0$

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为 ()
 A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

解 由 $A^2 + A = 2E$ 可知矩阵 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 因此 $\lambda = 1$ 或 -2 . 再由 $|A| = 4$ 可知 A 的特征值为 $-2, -2, 1$. 因此二次型 $x^T Ax$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

7. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 ()
 A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
 C. $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ D. $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

解 显然 $P(A) = P(B)$ 等价于 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$, 即 $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A = B = \Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B = \bar{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ()
 A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关
 C. 与 μ, σ^2 都有关 D. 与 μ, σ^2 都无关

解 由条件可知 $X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$, 因此

$$\begin{aligned} P\{|X - Y| < 1\} &= P\left\{\left|\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1, \end{aligned}$$

此概率与 μ 无关, 与 σ^2 有关, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n =$ _____.

解 首先 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, 因此原极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} = e^{-1}$.

10. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为_____.

解 先求二阶导数

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

令 $y'' = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = \pi$. 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$ 时 $y'' < 0$, 当 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 时 $y'' > 0$. 因此 $(0, 2)$ 不是拐点, $(\pi, -2)$ 是拐点, 选 C.

11. 已知 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ _____.

解 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x) dx &= - \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 \sqrt{1+t^4} dt = - \int_0^1 \sqrt{1+t^4} dt \int_0^t x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \sqrt{1+t^4} dt = -\frac{1}{18} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1-2\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

12. 以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0)$ 为_____.

解 由需求弹性公式可得

$$\begin{aligned} \eta_{AA} &= \left| \frac{P_A}{P_B} \frac{\partial Q_A}{\partial P_A} \right| = \left| \frac{P_A}{500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2} (-2P_A - P_B) \right| \\ &= \frac{P_A (2P_A + P_B)}{500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2}, \end{aligned}$$

代入 $P_A = 10, P_B = 20$ 得 $\eta_{AA} = 0.4$.

13. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $a =$ _____.

解 对增广矩阵作初等行变换得

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{pmatrix},$$


因此当 $a = 1$ 时, $r(A) = r(A, b) = 2 < 3$, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P(F(X) > E(X) - 1) =$ _____.

解 首先 $E(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}$. 再令 $Y = F(X)$, 则当 $y \leq 0$ 时, $P(Y \leq y) = 0$; 当 $y \geq 1$ 时, $P(Y \leq y) = 1$ (注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0 < y < 1$ 时,

$$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

因此 $Y = F(X) \sim U(0, 1)$, $P(F(X) > E(X) - 1) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

 提示: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X) \sim U(0, 1)$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

解 首先有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2)$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (x + 1)e^x$. 而在 $x = 0$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 于是 $f'(x) = \begin{cases} x^{2x}(2 + 2 \ln x), & x > 0 \\ \text{不存在}, & x = 0. \text{ 当 } x < -1 \\ (x + 1)e^x, & x < 0 \end{cases}$

或 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $-1 < x < 0$ 或 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$. 由单调性可知

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$ 和 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$ 是极小值, $f(0) = 1$ 是极大值.

16.(本题满分 10 分)

已知 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= y - f'_1 - f'_2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1 + f'_2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -f''_{11} - f''_{12} - f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= 1 - f''_{11} + f''_{12} - f''_{21} + f''_{22} = 1 - f''_{11} + f''_{22}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -f''_{11} + f''_{12} + f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22}.\end{aligned}$$

代入即可得 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11}(x+y, x-y) - f''_{22}(x+y, x-y)$.

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 由条件可得 $(e^{-\frac{x^2}{2}}y)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(y' - xy) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $e^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x} + C$. 再由 $y(1) = \sqrt{e}$ 可知 $C = 0$, 因此 $y = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 xe^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

18.(本题满分 10 分)

¹求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)} |\sin(n\pi+t)| dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}.\end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

19.(本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

¹此题源自2012年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解 (1) 当 $0 < x < 1$ 时, $x^n \sqrt{1-x^2} > x^{n+1} \sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n (x^2-1) + x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n - x^{n-1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{n-1}{n+1} a_{n-2}, \end{aligned}$$

因此 $\frac{n+2}{n+1} a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n = 2, 3, \dots$).

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

20.(本题满分 11 分)

已知向量组 (I) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$, (II) $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}$, $\beta_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由于向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(A) = r(B) = r(A, B)$. 对矩阵 (A, B) 作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2-5 & a-1 & -7-a & a^2-9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 & 1 - a & a^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

因此当 $a = 1$ 时, $r(A) = r(B) = r(A, B) = 2$, 两个向量组等价. 当 $a = -1$ 时, $r(A) = 2 \neq r(A, B) = 3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a \neq \pm 1$ 时, $r(A) = r(B) = 3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a \neq -1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$, 当 $a = 1$ 时, 由初等行变换得 $(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

解得 $\beta_3 = (3 - 2k)\alpha_1 + (-2 + k)\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}.$

当 $a \neq \pm 1$ 时, $(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$ 此时有 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3.$

21.(本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B.$

解 (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases},$$

解得 $x = 3, y = -2.$

(2) B 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 $2, -1, -2.$

对矩阵 B , 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 由方程 $(2E - B)x = 0$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$;

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 由方程 $(-E - B)x = 0$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1 = (-1, 3, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 由方程 $(-2E - B)x = 0$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1 = (0, 0, 1)^T.$

取 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ 则 $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{2, -1, -2\}.$

同理对矩阵 A , 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$ 则 $P_2^{-1}AP_2 =$

$\text{diag}\{2, -1, -2\}$. 故

$$\mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_2 \Rightarrow (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^{-1})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^{-1}) = \mathbf{B},$$

因此当取

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

时, 则有 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

解 (1) X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. 由 X, Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(XY \leq z | Y = -1) P(Y = -1) + P(XY \leq z | Y = 1) P(Y = 1) \\ &= pP(-X \leq z | Y = -1) + (1 - p)P(X \leq z | Y = 1) \\ &= pP(X \geq -z) + (1 - p)P(X \leq z) \\ &= p(1 - F_X(-z)) + (1 - p)F_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ 1 + (1 - p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ (1 - p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\text{Cov}(X, Z) = E(XZ) - EX \cdot EZ = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY = DX \cdot EY = 1 - 2p,$$

因此当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\text{Cov}(X, Z) = 0$, 即 $\rho_{XZ} = 0$. 因此 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{Z \leq \frac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}, Z \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \neq P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right),$$

因此对任意 $p \in (0, 1)$, X, Z 不独立.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A ;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

解 (1) 由概率密度的归一性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{A}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1, \end{aligned}$$

得 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 对应的观测值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu$ 时, 取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left[\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$, 令

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0,$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

15 2020 年考研数学三

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} =$ ()
 A. $b \sin a$ B. $b \cos a$ C. $b \sin f(a)$ D. $b \cos f(a)$

解 利用拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \xi \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \cos a.$$

2. 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x - 2)}$ 的第二类间断点的个数为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解 显然, 所有的间断点为 $x = -1, 0, 1, 2$, 其中 $x = -1, 1, 2$ 都是无穷间断点, 而 $x = 0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 则 ()
 A. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数 B. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数
 C. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数 D. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数

解 易知 $\cos f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是偶函数, 所以 $\cos f(x) + f'(x)$ 是偶函数, 那么 $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数, 选 A.

4. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - 2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x + 1)^{2n}$ 的收敛区间为 ()
 A. $(-2, 6)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-5, 3)$ D. $(-17, 15)$

解 由题意知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 4, 那么它逐项积分以后的幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径仍为 4. 那么幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x + 1)^{2n}$ 的收敛区间满足 $(x + 1)^2 < 4 \Rightarrow -3 < x < 1$, 选 B.

5. 设四阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x = 0$ 的通解为 ()

- A. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ B. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$
C. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ D. $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

解 因为 A 不可逆, 所以 $A^*A = |A|E = O$, 因此 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $A^*x = 0$ 的解, 且 $r(A^*) \leq 1$. 而 $A_{12} \neq 0$ 说明 $A^* \neq O$. 且 A 中对应的三列 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的, 即 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $A^*x = 0$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

6. 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为 ()

- A. $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ B. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
C. $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ D. $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

解 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12},$$

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

解 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) = \frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}\bar{C}) &= P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{B \cup C}) - P(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= 1 - P(B \cup C) - [1 - P(A \cup B \cup C)] = P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C) \\ &= \frac{7}{12} - P(B) - P(C) + P(BC) = \frac{1}{6}, \\ P(\bar{A}B\bar{C}) &= \frac{7}{12} - P(A) - P(C) + P(AC) = \frac{1}{6}, \\ P(\bar{A}\bar{B}C) &= \frac{7}{12} - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

因此 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, 选 D.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

解 首先有 (X, Y) 服从二维正态分布, $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 4)$. 而

$$(X, X+Y) = (X, Y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $(X, X+Y)$ 也服从二维正态分布. 且 $E(X+Y) = 0, D(X+Y) = DX + DY + 2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 3$, 所以 $X+Y \sim N(0, 3)$, 于是 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$. 又

$$\text{Cov}(X, X+Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = DX + \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 0,$$

因此 X 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 独立, 选 C. 而 $\text{Cov}(X, X-Y) \neq 0$, 所以 $X, X-Y$ 不独立.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} =$ _____.

解 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,\pi)} = \pi - 1, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,\pi)} = -1$, 因此 $dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1)dx - dy$.

10. 曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 点 $(0, -1)$ 处的切线方程为_____.

解 原方程两边对 x 求导得 $1 + y' + e^{2xy}(2y + 2xy') = 0$, 代入 $x = 0, y = -1$ 得 $y' = 1$, 所以曲线在 $(0, -1)$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

11. 设产量为 Q , 单价为 P , 厂商成本函数为 $C(Q) = 100 + 13Q$, 需求函数为 $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$, 则厂商取得最大利润时的产量为_____.

解 由 $Q = \frac{800}{P+3} - 2$ 可知 $P = \frac{800}{Q+2} - 3$, 则利润函数为

$$L(Q) = \left(\frac{800}{Q+2} - 3\right)Q - (100 + 13Q).$$

令 $\frac{dL(Q)}{dQ} = \frac{1600}{(Q+2)^2} - 16 = 0 \Rightarrow Q = 8$, 且 $\frac{d^2L(Q)}{dQ^2} = -\frac{3200}{(Q+2)^3} < 0$, 因此 $Q = 8$ 时, 取得最大利润.

12. 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \left| \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right. \right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为_____.

解 $V = 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = \pi \left(\ln(1+x^2) - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right).$

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14. 随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$, Y 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由题意知 Y 的取值为 0, 1, 2, 且

$$P(Y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = 3n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{7}, \\ P(Y = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{8^n} = \frac{4}{7}, \\ P(Y = 2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{8^n} = \frac{2}{7}.$$

所以 $EY = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}.$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设 a, b 为常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a, b 的值.

解 直接利用等价无穷小得

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e &= e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} - e = e \left(e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} - 1 \right) \\ &\sim e \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = e \left[n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 \right] \\ &= -\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{e}{2n}. \end{aligned}$$

因此 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

解 (1) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, 通解为 $y = e(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, 代入 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 因此 $f(x) = e^{-x} \cos 2x$.

(2) 直接计算得

$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{5} \left(-e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x \right) \Big|_{n\pi}^{+\infty} = \frac{1}{5} e^{-n\pi}.$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{5(e^\pi - 1)}.$$

18.(本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy,$$

计算 $\iint_D xf(x, y) dx dy$.

解 令 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + Ax$, 两边在区域 D 上积分可得

$$\begin{aligned} A &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D y\sqrt{1-x^2} dx dy + \iint_D Ax dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} y\sqrt{1-x^2} dx dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \\ &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分. 于是 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D xf(x, y) dx dy &= \iint_D x \left(y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x \right) dx dy \\ &= \frac{3\pi}{16} \iint_D x^2 dx dy = \frac{3\pi}{16} \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr \\ &= \frac{3\pi^2}{128}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;
- (2) 若对任意 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

证 (1) 设 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)| = |f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$, 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x - x_0} \right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \right| = \frac{M}{2 - x_0}.$$

注意到

$$|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2-x_0} \geq \frac{2M}{\sqrt{x_0(2-x_0)}} \geq 2M,$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)| \geq M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \geq 1$; $|f'(\xi_2)| = \frac{M}{2-x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \leq 1$. 于是只能 $x_0 = 1$, 即 $|f(1)| = M$.

$$M = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq \int_0^1 M dx = M,$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)| \equiv M, x \in [0, 1]$. 而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1) = 0$, 因此 $M = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 Q .

解 (1) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = B, Q$ 为正交矩阵. 因为 A, B

相似, 所以 $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+4 = a+b \\ 1 \times 4 = ab \end{cases}, a \geq b \Rightarrow a = 4, b = 1.$

(2) 易知 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 方程组 $(0E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (2, 1)^T$, 方程组 $(0E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_1 = (1, -2)^T$; 当 $\lambda_2 = 5$ 时, 方程组 $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (1, -2)^T$, 方程组 $(5E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_2 = (2, 1)^T$. 令 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}.$$

所以 $B = P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = (P_1 P_2^{-1})^{-1} A P_1 P_2^{-1}$, 且

$$P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ¹.

¹事实上这里的正交矩阵 Q 不是唯一的, 这与 P_1 和 P_2 的取法有关.

21.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

(1) 证明: P 是可逆矩阵;

(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

解 (1) 由题意 α 是非零向量, $A\alpha \neq k\alpha$, 所以 $A\alpha, \alpha$ 线性无关, 即 $P = (A\alpha, \alpha)$ 为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 B 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 A 的特征值也是 $2, -3$, 所以 A 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

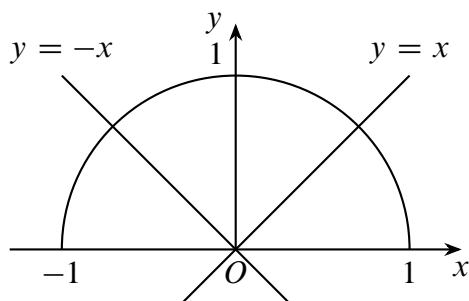
设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) : 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0 \\ 0, & X - Y \leq 0 \end{cases}, \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(2) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

解 (1) 如图, 不难得知



第 22 题图

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = P(X - Y \leq 0, X + Y \leq 0) = P(Y \geq X, Y \leq -X) = \frac{1}{4},$$

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) = P(X - Y \leq 0, X + Y > 0) = P(Y \geq X, Y > -X) = \frac{1}{2},$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) = P(X - Y > 0, X + Y \leq 0) = P(Y < X, Y \leq -X) = 0,$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X - Y > 0, X + Y > 0) = P(Y < X, Y > -X) = \frac{1}{4}.$$

因此 (Z_1, Z_2) 的联合分布为

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(2) 由 (Z_1, Z_2) 的联合分布律可得边缘分布律为

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

于是 $E(Z_1) = \frac{1}{4}, E(Z_2) = \frac{3}{4}, D(Z_1) = D(Z_2) = \frac{3}{16}, E(Z_1 Z_2) = \frac{1}{4}$, 因此 Z_1, Z_2 的相关系数为

$$\rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}.$$

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

- (1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;
- (2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

解 (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$\begin{aligned} P(T > t) &= 1 - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, \\ P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} = e^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}. \end{aligned}$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} e^{-(\frac{t}{\theta})^m} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m + n \ln m + (m-1) \ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm \ln \theta$,

令

$$\frac{d \ln(\theta)}{d\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}}$.