

Nelinearna seizmička analiza stubova kontinualnog AB mosta

MILOŠ M. ČOKIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehnički nauka, Novi Sad

RADOMIR J. FOLIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

DORĐE Ž. LAĐINOVIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Stručni rad

UDC: 624.21.042.7

DOI: 10.5937/tehnika1704490C

Za proučavanje ponašanja konstrukcije mosta pod seizmičkim dejstvom, često se primenjuje Nelinearna statička analiza, poznata kao pushover metoda (NSPA). Pokazano je da je Metoda ekvivalentne linearizacije ELM, preporučena u FEMA 440, prikladna za analizu odgovora stubova mosta, različitih geometrijskih karakteristika, količine i rasporeda armature. Analiziran je most sa gornjim strojem sistema kontinualne grede sa tri polja, raspona 24+40+24 m. Poprečni presek je konstantne visine i sandučastog oblika od prethodno napregnutog betona. Kod analize srednjih stubova mosta, izloženih horizontalnom seizmičkom dejstvu, značajno je proučiti ponašanje ne samo u poprečnom, već i u podužnom pravcu ose mosta. Stubovi su dimenzionisani prema EN1992, deo 1 i deo 2. Seizmička analiza dejstva i opterećenje su odabrani prema EN 1998:2004. Primenjen je spektar odgovora tipa 1, za kategoriju tla B, a u analizu je uključeno i 20% saobraćajnog opterećenja. Analizom su obuhvaćene vrednosti pomeranja i duktilnosti stubova, a formirane su pushover krive koje opisuju ponašanje elemenata pod dejstvom zemljotresa za podužni i poprečni pravac.

Ključne reči: Nelinearna statička pushover analiza, FEMA 440, Metoda ekvivalentne linearizacije, seizmička dejstva, EN 1998:2004, stubovi mosta, Pushover krive, pomeranja, duktilnost

1. UVOD

Za seizmičku otpornost mostova, od prvostepenog značaja je adekvatno konceptualno projektovanje, što je šire analizirano u [15] uz uvažavanje opštih zahteva [5]. Šire razmatranje vezano za analizu i projektovanje primenom različitih metoda linearnih i nelinearnih analiza su predmet radova [12] do [16]. U ovim radovima su opisane savremene metode analiza, preporučene u aktuelnim dokumentima EN 1998 deo 1 i 2 (sa primenom u zemljama Evropske unije), i dokumentima FEMA i ATC (sa primenom u SAD), a u [12] i u Japanu, N. Zelandu i dr.

U pomenutih pet radova detaljno su opisane: metoda programiranog ponašanja (poznata kao metoda kapaciteta), nelinearne statička i dinamička metoda (korišćenje jednačina kretanja), ali najdetaljnije u [13].

U [14] metode zasnovana na pomeranja i na performansama zasnovane metode. U [14] su dati i primeri primene kod konstrukcija zgrada i mostova.

Poznato je da pod većim seizmičkim dejstvima delovi konstrukcije dostignu granice popuštanja (*yield*) pa se na pojedinim lokacijama formiraju plastični zglobovi (mesta disipacije energije unete zemljotresom). Ovaj fenomen se obuhvata primenom Metode programiranog ponašanja (*Capacity Design Method – CDM*). Ovaj metod pruža mogućnost projektovanja konstrukcije, tj. njenih elemenata tako da se predvidi i modelira ponašanje elemenata pri seizmičkom dejstvu. Zbog toga se kod nas za nju koristi termin metoda programiranog ponašanja. U njoj se unapred mogu odabrati mesta pojave plastičnih zglobova, a time i disipacija energije. Za razliku od konstrukcija zgrada okvirnih sistema u kojima je poželjno da se plastični zglobovi najpre formiraju na krajevima greda, a tek zatim u stubovima, kod mostova je obrnuto.

Naime, u njima se dopušta formiranje plastičnih zglobova u stubovima, u poslednje vreme i u temeljima, ali ne i u rasponskoj konstrukciji (deck). Zbog toga je od posebnog značaja analiza stubova mosta na seizmička dejstva da bi se dobio što realniji uvid u

Adresa autora: Miloš Čokić, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

e-mail: cokicmilos@gmail.com

Rad primljen: 29.03.2017.

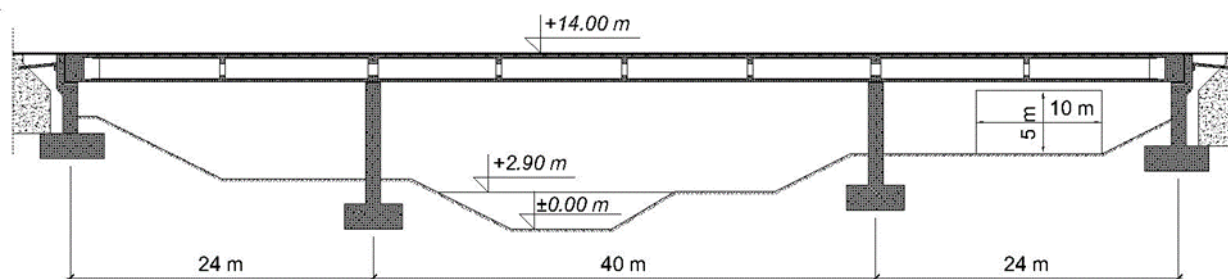
Rad prihvaćen: 30.06.2017.

njihovo ponašanje, naročito pod snažnim seizmičkim dejstvima.

U pomenutim radovima pokazano je da se izbor metode analize konstrukcije mostova zavisi od značaja objekta u saobraćajnom sistemu (potrebne tačnosti), vrste njegove konstrukcije (gornjeg i donjeg stroja i njihove veze) [12] i [15].

Posebno se javlja dilema kada je u praktične svrhe potrebno primeniti adekvatnu analizu koja je dovoljno tačna, a da nije isuviše komplikovana za proračun. Ipak, poslednjih godina u praktične svrhe sve više se preporučuje, a i primenjuje statička nelinearna analiza koja je kasnije više puta modifikovana zavisno od potrebne tačnosti i, kako je napred naglašeno, značaja objekta.

Nelinearna statička analiza, sa njenim modifikacijama šire tretirana je, sem napred pomenutih radova, u [6], [7] i [10], a i predmet su preporuka [3] i [8].



Slika 1 – Podužni presek mosta

Glavne elemente konstrukcije čine četiri armirano-betonska (AB) stuba sa svojim temeljima i prethodno napregnuta betonska greda, sandučastog poprečnog preseka konstantne visine sa prepustima, sa dijafragmama iznad stubova i u rasponima.

Detalji proračuna i ostala svojstva mosta su prikazani u radovima [1], [17]. Statički sistem mosta je prikazan na slikama 3a i 3b.

Analiza ponašanja stubova mosta pri seizmičkom dejstvu je izvršena na pet različitih proračunskih modela. U svih pet modela, usvojene su iste karakteristike materijala, kako za beton, tako i za armaturu i kablove za prethodno naprezanje.

Kvalitet betona i armature koji su ugrađeni u celu konstrukciju, je C35/45, odnosno RA 400/500. Karakteristike korišćenih materijala su nepromenljive u svih pet modela, da oni ne bi uticali na dobijene rezultate, već da se prouči uticaj različitih analiziranih modela na odgovor srednjih stubova mosta. Korišćeni su standardni konstitutivni modeli betona i čelika prema EN1998-2 [3] i model koji su predložili Mander i drugi [18].

Opterećenja uvrštena u proračun seizmičkog dejstva su: sopstvena težina konstrukcije i dodatno stalno opterećenje – dead load; opterećenje od kablova za

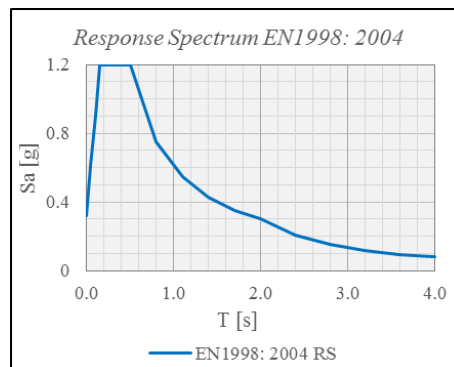
Detaljno prilagođavanje ove metode analizi konstrukcije mostova je objašnjeno u [9].

U ovom radu prikazani rezultati nelinearne analize stubova mosta na dejstvo zemljotresa. Za analizu je primenjena jedna od Metoda nelinearne statičke pushover analize (NSPA) – metoda ekvivalentne linearizacije, prema FEMA 440 [8], koja je integrisana u softverski paket koji je korišćen u analizi. Dejstva na most su uvedena prema EN 1998:2004. Analizirani most je prethodno sračunat i dimenzionisan prema EN 1992 - deo 1 i deo 2. Veći deo nelinearnih proračuna je obavljen korišćenjem programskog paketa [11]. To je urađeno da bi se pored vrednosti pomeranja stubova dobile, tj. konstruisale pushover krive i odredio kapacitet nosivosti stubova.

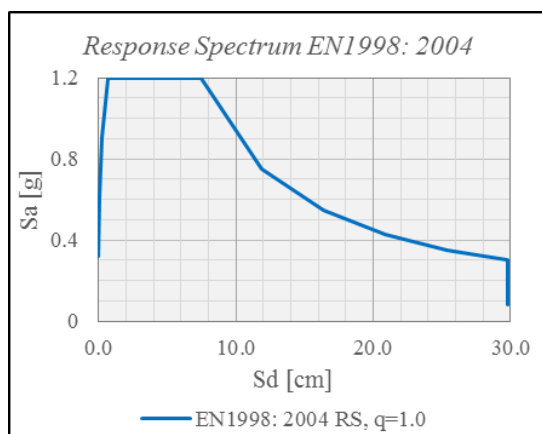
Predmet analize je prethodno napregnuti, armirano-betonski most sa tri raspona 24+40+24 metara, prikazan na slici 1.

prethodno naprezanje – prestress; saobraćajno opterećenje – traffic load i zemljotresno opterećenje – seismic load. Za razliku od [1], saobraćajno opterećenje je definisano prema EN1991-2 [2] pri čemu je korišćen model opterećenja 1 (Load Model 1 – LM1). Prema [3], za proračun seizmičkog dejstva na most, saobraćajno opterećenje koje je uključeno u analizu iznosi 20% jednako raspodeljenog saobraćajnog opterećenja za usvojeni model opterećenja LM1.

Pretpostavljeno je da se konstrukcija nalazi na lokaciji, na kojoj se merodavna dejstva seizmičkih uticaja određuju pomoću funkcije spektra odgovora – RS 2004 [3] (slike 2a i 2b).



Slika 2a – Usvojeni spektar odgovora, S_a-T

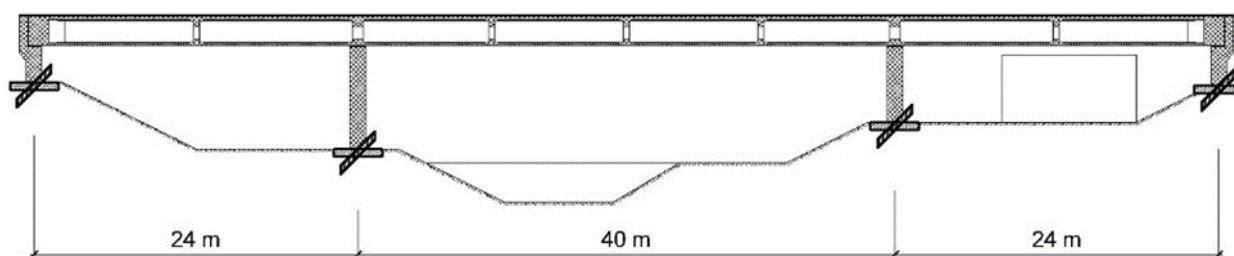
Slika 2b – Usvojeni spektar odgovora, S_a - S_d

Usvojen je tip 1 spektra odgovora koji je preporučen za područje istočne Evrope i za područja u

kojima se očekuju zemljotresi magnitude veće od 5.5 Rihtera. Takođe, pretpostavljeno je da se konstrukcija nalazi na tlu tipa B, odnosno na veoma gustom peščanom ili šljunkovitom tlu ili glinovitom tlu veće čvrstoće. Vrednost relativnog prigušenja (damping ratio) iznosi 0.05, prema [3]. Odnos horizontalnog ubrzanja tla iznosi $a_g/g \leq 0.4$, što odgovara IX stepenu MCS skale.

Prema [3], most može biti projektovan tako da se dozvoli da njegovo ponašanje pri seizmičkom dejstvu bude duktilno ili ograničeno duktilno [4-deo 2]. Ovakvo ponašanje karakteriše međuzavisnost horizontalne sile i pomeranja koje uzrokuje.

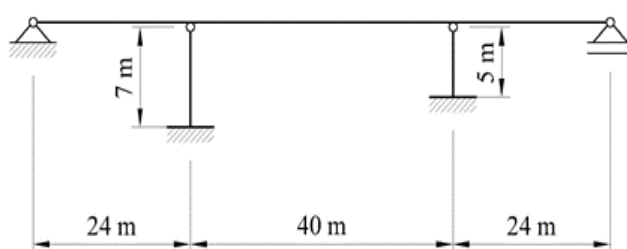
Faktor ponašanja (behaviour factor - q) se usvaja u zavisnosti od zahtevane duktilnosti sistema pri dejstvu zemljotresa.



Slika 3a – Statički sistem modela prema EN1998-2, prema [3]

Za svrhu proračuna i uporedne analize, kako je ranije naglašeno, izabrano je pet modela (M1-M5). Njihova međusobna razlika se ogleda u geometrijskim karakteristikama stubova i u količini ugrađene armature u njima. Poprečni preseki stubova za četiri modela (M1-M4) su pravougaonog oblika, dok je poprečni presek stubova u modelu M5 kružnog oblika.

Karakteristike stubova su prikazane u tabeli 1. Visina levog stuba, Stuba 1, od tla do vrha iznosi 7 m, a visina desnog stuba (Stuba 2) 5 m (slika 3b).



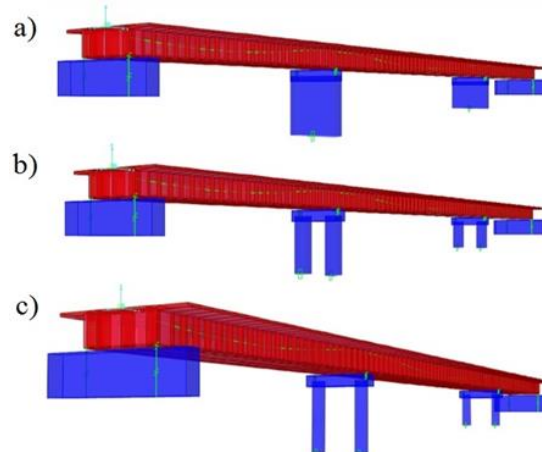
Slika 3b – Statički sistem konstrukcije

Dimenzije preseka stubova su smanjene radi usklađivanja sa potrebnim povećanjem faktora duktilnost q . Stub 1 (levi stub) i Stub 2 (desni stub) je u M1 zidni nosač.

Modeli stubova u M2-M5 se sastoje od dva vertikalna elementa (stuba) i osloničke grede, koji u poprečnom pravcu formiraju ram (slika 4), u

podužnom se ponašaju kao konzolni stubovi (*bent* na engleskom) (slika 3b).

Stubovi sa kružnim poprečnim presekom su usvojeni, jer su povoljniji za prihvatanje bi-aksijalnih momenata savijanja.



Slika 4 – Modeli mosta: a) M1; b) M2, M3, M4; c) M5

U tabeli 1, prikazane su geometrijske karakteristike preseka stubova i količina ugrađene armature.

Pojava plastičnih zglobova se dozvoljava u podnožju i vrhu stubova mostovskih konstrukcija, što je i usvojeno u proračunu. Pojava plastičnih zglobova u gornjem stroju, tj. rasponskoj konstrukciji nije dozvoljena.

Tabela 1. Geometrijske karakteristike AB stubova

Model	M1		M2		M3		M4		M5	
Dimenzije stubova u ramu:	S1	S2	S1	S2	S1	S2	S1	S2	S1	S2
Poprečni pravac: d [m]	6	6	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	Prečnik: D [m]	
Podužni pravac: b [m]	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
Ukupna pod. arm: A _a [cm ²]	739.9	739.9	443.3	643.4	344.8	468.0	212.9	294.5	235.6	274.9
Popr. arm: UØ [mm/e]	12/10	12/10	12/10	14/10	10/10	12/10	10/15	12/10	10/10	10/10
A _a /A _B [%]	1.03	1.03	1.32	1.91	1.03	1.39	0.63	0.88	1.04	1.22

Modeli stubova su dimenzionisani sa različitim faktorima ponašanja. Svi stubovi su dimenzionisani u skladu sa EN1992-1 i 2 [4] i EN1998 [3], prema kombinaciji za seizmičko dejstvo koja je data u EN1990 [5]:

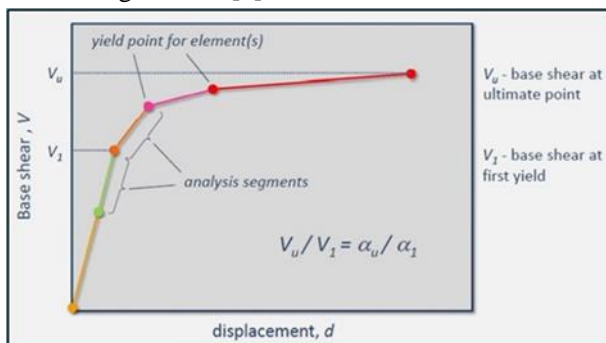
$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + A_{Ed} + \sum_{i \geq 1} \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \quad (1)$$

$$(\psi_{2,i} = 0.2)$$

2. PUSHOVER METODA

Metode proračuna konstrukcije na dejstvo seizmičkog opterećenja mogu se podeliti na statičke i dinamičke, dok proračunski modeli mogu opisivati linearno ili nelinearno ponašanje. Najbolji način za određivanje ponašanja konstrukcije izložene dejstvu zemljotresa predstavlja Nelinearna dinamička analiza (Nonlinear Dynamic Analysis – NDA), ali imajući u vidu kompleksnost primene ove metode, u poslednje dve decenije su se intenzivno razvijale metode proračuna zasnovane na Nelinearnoj statičkoj analizi (Nonlinear Static Analysis – NSA) [9] i [13].

Nelinearna statička pushover metoda predstavlja prihvatljivu alternativu kompleksnoj nelinearnoj dinamičkoj metodi proračuna, u kojoj se koriste jednačine kretanja. Primena pushover metode je znatno jednostavnija i omogućava uvid u globalno ponašanje konstrukcije, kao i uočavanje strukturnih slabosti konstruktivnog sistema [6].



Slika 5 – Pushover kriva i pripadajuće karakteristične tačke, prema [6]

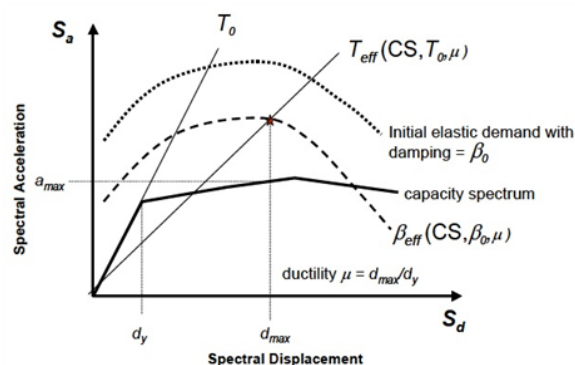
Pushover kriva je funkcija smičuće sile i pomerenja analiziranog sistema. Glavni princip pushover

metode predstavlja postepeno nanošenje horizontalnog opterećenja na konstrukciju, od nulte vrednosti do tačke zahtevanog pomeranja ili tačke kapaciteta (nosivosti), pri čemu se registruju tačke popuštanja strukture (slika 5) [8]. Neophodno je da zahtevano pomeranje bude manje od ukupnog kapaciteta nosivosti.

Metode se međusobno razlikuju, ali im je zajednički princip bilinearne aproksimacije pushover krive. Ono što ih takođe karakteriše je postupak primene, pri čemu se sistem sa više stepeni slobode kretanja (Multi-degree-of-freedom - MDOF) zamenjuje ekvivalentnim sistemom sa jednim stepenom slobode (Single-degree-of-freedom - SDOF) kako bi se odredio maksimalni kapacitet pomeranja SDOF sistema, na osnovu merodavnog spektra odgovora. Kasnije se upotrebom odgovarajućih koeficijenata korekcije, pomoću dobijenih pomeranja za SDOF sistem, mogu dobiti pomeranja za MDOF sistem. [7]

3. PRIMENA METODE EKVIVALENTNE LINEARIZACIJE PREMA FEMA 440

Pri određivanju kapaciteta pomeranja stubova, primenjena je Metoda ekvivalentne linearizacije (Equivalent Linearization Method – ELM) prema dokumentu FEMA 440, pri čemu je korišćena funkcija spektra odgovora prema EN1998-1 [3].



Slika 6 – Spektar odgovora ubrzanje-pomeranje (Acceleration-displacement response spectrum - ADRS) za ekvivalentni linearni sistem i pushover kriva, prema [8]

Metoda ekvivalentne linearizacije (ELM) je definisana u FEMA 440. Ona predstavlja modifikaciju

CSM (ATC-40). Pri primeni ekvivalentne linearizacije za modeliranje nelinearnog ponašanja SDOF sistema, maksimalno pomeranje se dobija pomoću ekvivalentnog linearnog sistema, korišćenjem vrednosti efektivnog perioda vibriranja T_{eff} i vrednosti efektivnog prigušenja β_{eff} [8].

U konvencionalnoj CSM (ATC-40), za određivanje tačke ciljnog pomeranja (performance point) se umesto efektivnog koristi sekantni period vibriranja. Posledicu usvajanja ove pretpostavke, predstavlja način određivanja vrednosti maksimalnog pomeranja, koje definiše presečna tačka krive kapaciteta konstrukcije (capacity curve) i krive zahteva (demand curve) za vrednost efektivnog prigušenja, u spektralno ubrzanje-spektralno pomeranje (Acceleration Displacement Response Spectrum – ADRS) formatu [8].

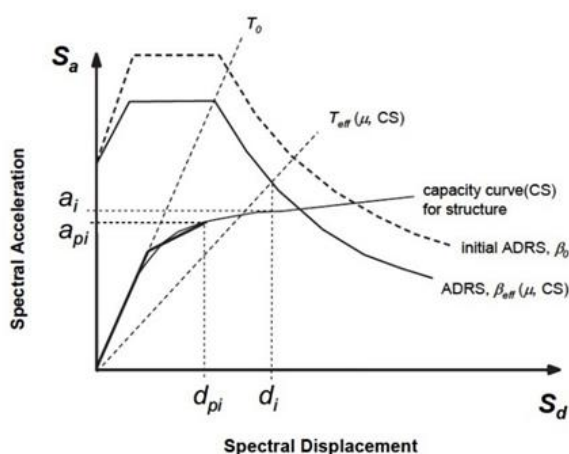
Ovo je korisno iz dva razloga: prvo, daje se bolji vizuelni uvid projektantu u odnos kapaciteta i pomeranja i drugo, postoji više postupaka za rešavanje ovog problema primenom ekvivalentne linearizacije, kod koje se postupak određivanja maksimalnog pomeranja zasniva na pronalaženju presečne tačke modifikovanog spektralnog ubrzanja-spektralnog pomeranja (Modified Acceleration Displacement Response Spectrum – MADRS) i krive kapaciteta (capacity curve).

U FEMA 440 je takođe uvršten i poboljšani postupak ekvivalentne linearizacije, odnosno poboljšane Metode ekvivalentne linearizacije (Equivalent Linearization Method – ELM), primenom MADRS [8].

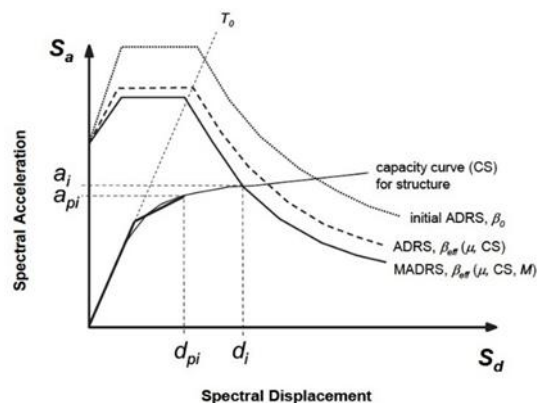
Rezultati dobijeni primenom ovog postupka mogu biti nepouzdati za visoke vrednosti duktilnosti (od 10 do 12) [8], koje se retko javljaju u praksi.

Postoje tri različita postupka (A, B, C) za primenu ove iterativne metode:

A) direktan iterativni postupak (slika 7),

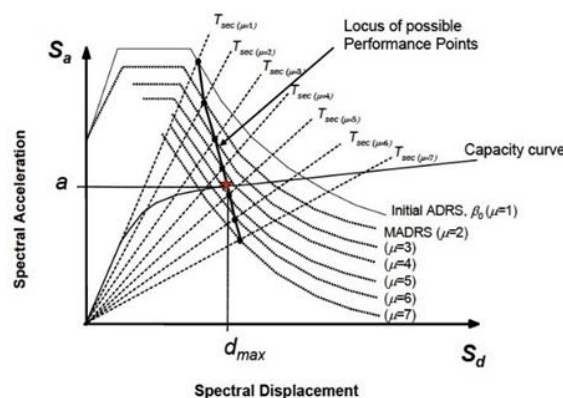


Slika 7 – Poboljšana ELM, postupak A, prema [8]
B) presek sa MADRS (slika 8) i



Slika 8 – Poboljšana ELM, postupak B [8]

C) presek krive definisane presečnim tačkama sekantnog perioda i MADRS za različite vrednosti duktilnosti i krivom kapaciteta konstrukcije (capacity curve) (Slika 9), prema [8].



Slika 9 – Poboljšana ELM, postupak C [8]

4. DISKUSIJA REZULTATA

Dijagrami *pushover* krivih za podužno i poprečno seizmičko dejstvo za pet modela stubova su prikazani na Slikama 10-13. Pri tome je korišćena ravnomerna (uniformna) raspodela opterećenja.

Uočljiv je obrazac ponašanja stubova, prema kojem se povećanjem faktora ponašanja q , povećava kapacitet pomeranja stubova i smanjuje smičuća sila koju oni mogu da prihvate. Usvojeni faktori ponašanja su u skladu sa EN1992 – deo 2 i prikazani su u priloženim dijagramima (slike 10 do 17).

Pojava plastičnih zglobova je predviđena u vrhu i podnožju svakog stuba. Stubovi su konzolni u podužnom pravcu za svih 5 modela, dok su u poprečnom pravcu konzolni samo kod prvog, a ramovski u preostala 4 modela. Pojava plastičnih zglobova nije predviđena na gredi rama.

Evidentna je krutost stubova u M1 za oba pravca, kao posledica usvojenog faktora ponašanja $q = 1.0$ (elastično), u poređenju sa ostalim modelima kod kojih je oblik krivih sličnog oblika, samo sa promenom

vredosti sile i pomeranja. Promena tangente *pushover* krivih javlja se u prvoj tački popuštanja elemenata (početak tečenja).

Za seizmičko dejstvo u podužnom pravcu promena je nagla, pa su *pushover* krive zapravo bi-linearne (slike 10 i 11), dok se vrednost tangente u poprečnom pravcu postepeno menja (slike 12 i 13). Razlika u obliku *pushover* krivih u podužnom i poprečnom pravcu se može objasniti time što se stubovi konstrukcije u podužnom pravcu ponašaju kao stubovi mosta (slika 3b), dok su u poprečnom pravcu stubovi ramovskog sistema, pa samim tim imaju i veću rezervu pre formiranja mehanizma loma.

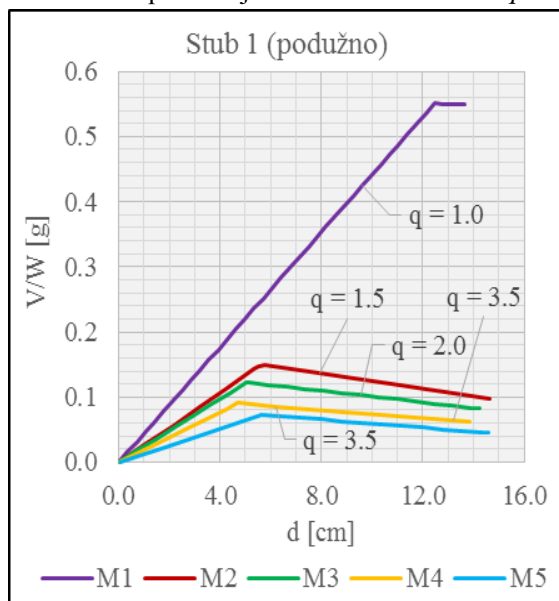
Na slikama 12. i 13. *pushover* krive u M5 imaju znatno veći kapacitet pomeranja stubova u poprečnom pravcu u odnosu na ostale modele, dok su ove vrednosti u podužnom pravcu slične vrednostima M3 i M4, pa čak i M2 kod Stuba 1.

Razlika elastičnih krutosti analiziranih stubova potiče od različite količine armature i geometrijskih karakteristika preseka.

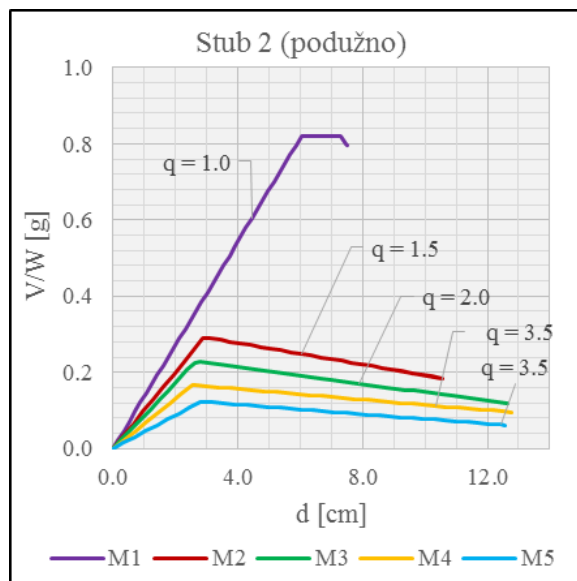
Negativna, post-elastična krutost, predstavlja odgovor sistema, nakon dostizanja maksimalnog kapaciteta nosivosti. Pri tome se smanjuje mogućnost prihvatanja smičuće sile i povećanja pomeranja sve do dostizanja granice kapaciteta, tj. gubitka nosivosti. Ova promena u podužnom pravcu je nagla, a u poprečnom pravcu postepena. Pri proračunu su uključeni uticaji drugog reda ($P-\Delta$ efekti).

Geometrijske karakteristike

Kako je napomenuto u uvodnom delu, geometrijske karakteristike stubova su redukovane da bi se uskladile sa zahtevanim povećanjem faktora duktilnosti q .



Slika 10 – Pushover kriva za Stub 1 za dejstvo zemljotresa u podužnom pravcu



Slika 11 – Pushover kriva za Stub 2 za dejstvo zemljotresa u podužnom pravcu

Vrednosti pomeranja i duktilnost stubova

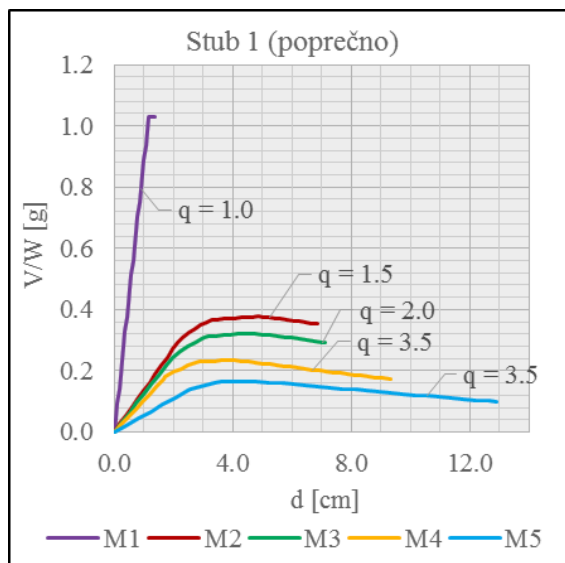
Na osnovu dobijenih vrednosti zahtevanih pomeranja stubova pri dejstvu zemljotresa (d_{demand}) i sa izračunatim pomeranjima na granici popuštanja (d_y), moguće je zaključiti da li će se čvorovi nosača za seizmičko dejstvo plastifikovati ili će ostati u elastičnoj oblasti. Pri tome je potrebno ispuniti uslov da zahtevano pomeranje bude manje od maksimalnog kapaciteta pomeranja stuba ($d_{\text{demand}} < d_{\text{cap.}}$).

Sa povećanjem vrednosti faktora ponašanja, $d_{\text{cap.}}$ će imati veću vrednost (slika 15). Isto pravilo se može primeniti na odnos između faktora q i d_{demand} (slika 14). To je posledica dimenzionisanja elemenata prema određenim uslovima (design conditions).

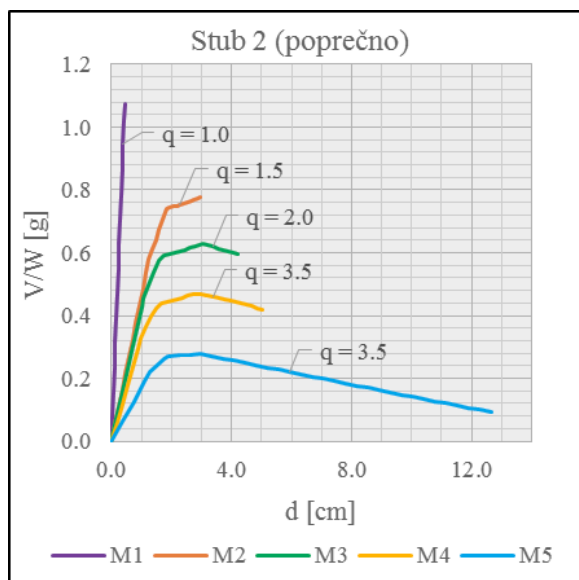
Vrednosti $d_{\text{cap.}}$ u poprečnom pravcu i vrednosti d_{demand} u oba pravca imaju isti poredak veličina među analiziranim modelima, gde važi ($d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5$) (Slike 14 i 15). Jedino je u slučaju $d_{\text{cap.}}$ u podužnom pravcu za Stub 1 ovaj odnos ($d_1 < d_4 < d_3 < d_5 < d_2$; $d_2 \approx d_5$), a za Stub 2 ($d_1 < d_2 < d_5 < d_3 < d_4$; $d_2 \approx d_3 \approx d_5$) (slika 15).

Pri analizi pomenutih pomeranja (d_{demand} i $d_{\text{cap.}}$) u poprečnom pravcu, primetna je značajnija razlika za model M1 prema M2 (zajedno sa M3 i M4) prema M5, nego što je to slučaj među modelima M2, M3 i M4 koji imaju isti oblik i dimenzije poprečnog preseka, ali različitu količinu armature.

U slučaju d_{demand} , ova razlika među modelima nije toliko izražena u podužnom pravcu, osim za M5. Vidljiva je ujednačenost pomeranja $d_{\text{cap.}}$ Stuba 1 u svim modelima u podužnom pravcu, dok kod Stuba 2 ona postoji za modele M3-M5, a pomeranja M1 i M2 su manja od njih.



Slika 12 – Pushover kriva za Stub 1 za dejstvo zemljotresa u poprečnom pravcu

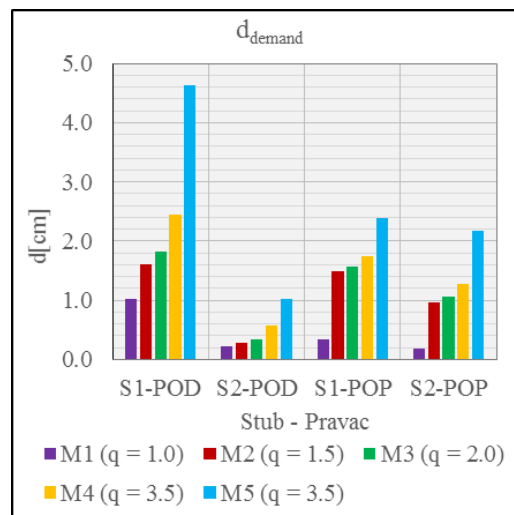


Slika 13 – Pushover kriva za Stub 2 za dejstvo zemljotresa u poprečnom pravcu

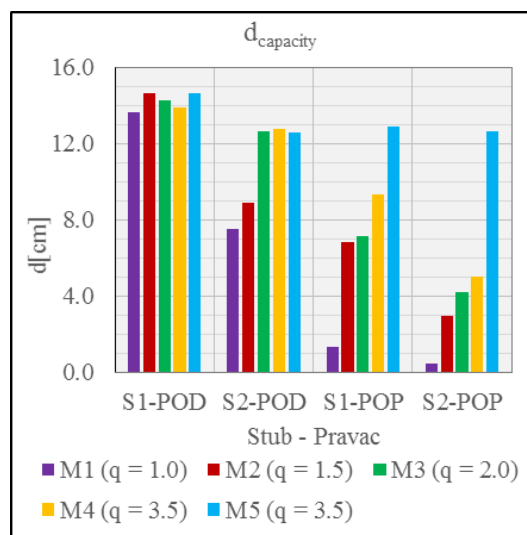
Na modelima M4 i M5 može se sagledati uticaj karakteristika poprečnog preseka stuba i količine armature, na veličinu zahtevanog i maksimalnog pomeranja za istu vrednost faktora ponašanja, kada je u pitanju analizirana konstrukcija.

Za oba stuba, u poprečnom pravcu, veličine zahtevanih pomeranja d_{demand} i maksimalnih pomeranja stubova d_{cap} , su kod M5 veće u odnosu na M4 – d_{demand} za 37.7% (Stub 1) i 71.1% (Stub 2), a d_{cap} za 38.3% (Stub 1) i 151.8% (Stub 2).

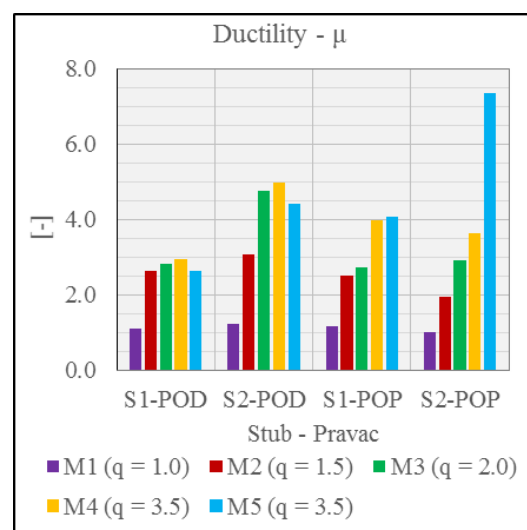
U podužnom pravcu su kod M5 vrednosti d_{demand} veće u odnosu na M4 za 89.0% (Stub 1) i 76.6% (Stub 2), dok su vrednosti d_{cap} kod M5 ujednačene sa M4, odnosno za 5.6% veće (Stub 1) i 1.6% manje (Stub 2) u odnosu na M4.



Slika 14 – Zahtevano pomeranje stubova



Slika 15 – Kapacitet pomeranja stubova

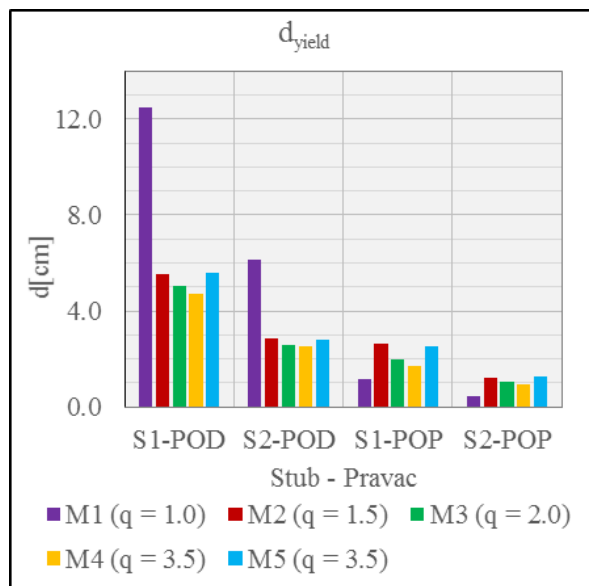


Slika 16 – Duktilnost stubova

Vrednosti duktilnosti oba stuba u oba pravca imaju rastući trend za M1-M4 ($\mu_1^{S1,S2} < \mu_2^{S1,S2} < \mu_3^{S1,S2} <$

$\mu_4^{S1,S2}$), dok se vrednosti u M5 razlikuju u odnosu na druge modele i u odnosu na stub i pravac seizmičkog dejstva (slika 16).

U poprečnom pravcu, duktilnost u M5 je malo veća nego u M4 za Stub 1 i značajno veća nego u M4 za Stub 2 ($\mu_4^{S1,S2} < \mu_5^{S1,S2}$), dok je u podužnom pravcu ($\mu_5^{S1,S2} < \mu_3^{S1,S2}$; $\mu_2^{S1} \approx \mu_5^{S1} < \mu_3^{S1}$; $\mu_2^{S2} < \mu_5^{S2} < \mu_3^{S2}$) (slika 16), što se može objasniti odnosom površine poprečnog preseka stuba i količine usvojene armature.



Slika 17 – Pomeranje stubova na granici tečenja

Veličine pomeranja stubova na granici tečenja (d_y) su prikazane na slici 17. U poprečnom pravcu, za Stub 1, odnos vrednosti d_y je ($d_{y,1}^{S1,S2} < d_{y,4}^{S1,S2} < d_{y,3}^{S1,S2} < d_{y,5}^{S1,S2} < d_{y,2}^{S1,S2}$) dok je za Stub 2 ($d_{y,1}^{S1,S2} < d_{y,4}^{S1,S2} < d_{y,3}^{S1,S2} < d_{y,2}^{S1,S2} < d_{y,5}^{S1,S2}$).

U podužnom pravcu, postoji opadajući trend za vrednosti u modelima M1-M4 ($d_{y,1}^{S1,S2} > d_{y,2}^{S1,S2} > d_{y,3}^{S1,S2} > d_{y,4}^{S1,S2}$), sa izraženom razlikom vrednosti u M1 prema M2, M3, M4.

Vrednosti u M5 su približno jednake vrednostima u M2 sa odstupanjem od okvirno $\pm 4\%$ u poprečnom i $\pm 2\%$ u podužnom pravcu ($d_{y,2}^{S1,LG} < d_{y,5}^{S1,LG}$; $d_{y,2}^{S2,LG} > d_{y,5}^{S2,LG}$; $d_{y,2}^{S1,TR} > d_{y,5}^{S1,TR}$; $d_{y,2}^{S2,TR} < d_{y,5}^{S2,TR}$).

U oba pravca, za oba stuba, postoji opadajući trend za modele M2-M4 ($d_{y,2} > d_{y,3} > d_{y,4}$) sa malom procentualnom razlikom u vrednostima pomeranja. Takođe, vrednosti pomeranja u M5 su približno jednake vrednostima iz M2, dok je uočljiva razlika ponašanja stubova u M1 u poprečnom i podužnom pravcu, gde pomeranje na granici tečenja u poprečnom pravcu ima izrazito manju vrednost, a u podužnom

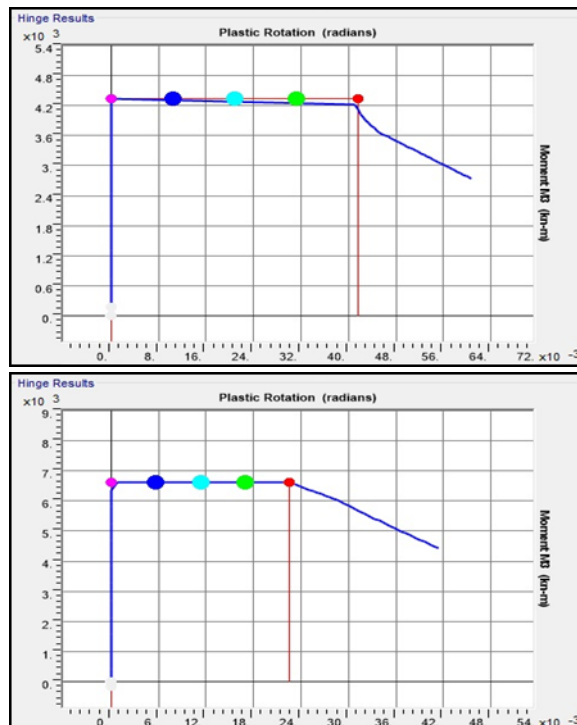
pravcu izrazito veću vrednost u odnosu na ostale modele.

Rezultati proračuna ukazuju na to, da do plastifikacije čvorova stubova dolazi u slučaju pomeranja u poprečnom pravcu za modele M4 i M5 Stuba 2, dok se u slučaju modela M4 Stuba 1 vrednosti d_y i d_{demand} poklapaju. To znači da će maksimalni elastični kapacitet Stuba 1 u M4 biti iskorišćen u slučaju zemljotresnog dejstva, ali da stub neće ući u zonu plastičnog ponašanja. Ostali stubovi mosta se, pri seizmičkom dejstvu, ponašaju elastično. To znači da će kapacitet post-elastičnog ponašanja stubova, u slučaju seizmičkog dejstva, biti iskorišćen samo u Stubu 2, modela 4 i 5 (M4 i M5), što je posledica dimenzionisanja elemenata prema većoj vrednosti faktora ponašanja u odnosu na ostale modele.

Odnos Momenat – Rotacija plastifikovanih čvorova

Na slikama 18-23 prikazani su dijagrami Momenat – Rotacija ($M-\phi$) sa naznačenim tačkama popuštanja i performansi za presek u kome se formiraju plastični zglobovi.

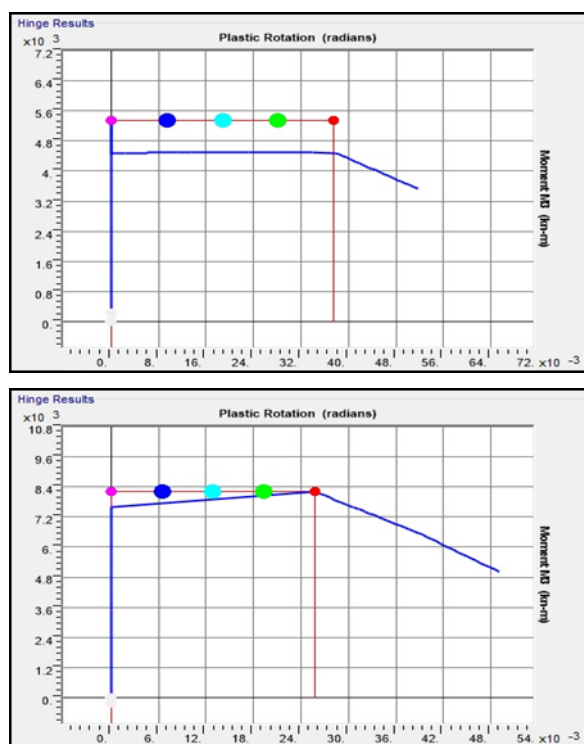
Na slici 18 se vidi blagi pad do dostizanja granice kapaciteta nosivosti vertikalnog elementa ramovskog stuba (eng. bent), dok je kod drugog vertikalnog elementa ramovskog stuba (slika 19) nosivost nakon plastifikacije ujednačena do dostizanja granice nosivosti.



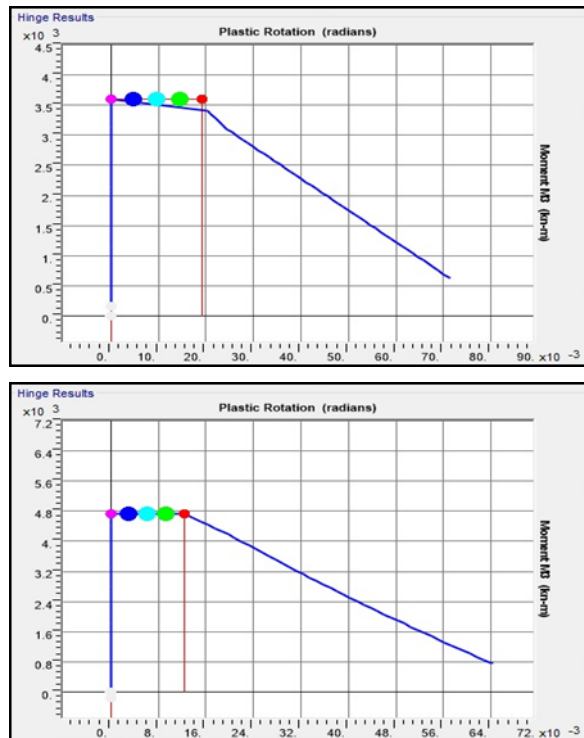
Slike 18 i 19 – $M-\phi$ dijagram za elemente Stuba 1 M4

Na slikama 20 i 21, registruje se preraspodela opterećenja sa jednog vertikalnog elementa ramovskog stuba na drugi, nakon dostizanja maksimalne nosivosti

u jednom od njih. U jednom od vertikalnih elemenata ramovskog stuba javlja se smanjenje nosivosti (slika 20), dok se u drugom javlja ojačanje (slika 21).



Slike 20 i 21 – M - ϕ dijagram za elemente Stuba 2 M4



Slike 22 i 23 – M - ϕ dijagram za elemente Stuba 2 M5

Na slici 22 evidentan je blagi pad do dostizanja granice kapaciteta nosivosti vertikalnog elementa ramovskog stuba, za razliku od drugog (slika 23) kod

koga je nosivost nakon pojave tečenja do dostizanja granice nosivosti ujednačena.

5. ZAVRŠNE NAPOMENE I ZAKLJUČCI

U ovom radu je razmatran odgovor stubova na seizmička dejstva u podužnom i poprečnom pravcu. Razmatrano je ponašanje analiziranih srednjih stubova mosta u zavisnosti od promene faktora ponašanja, na pet modela, ali i uz analize ostalih pokazatelja ponašanja mosta pod seizmičkim dejstvom.

U skladu sa različitim usvojenim vrednostima faktora ponašanja, usvojena su i različita rešenja stubova, čije se karakteristike razlikuju u svakom modelu (dimenzije poprečnog preseka stuba i količina usvojene armature), i to utiče na njihova svojstva nosivosti i pomeranja što je konstatovano u diskusiji rezultata. Stubovi u modelima M1-M3 su proračunati sa različitim faktorima ponašanja ($q_{M1} = 1.0$; $q_{M2} = 1.5$; $q_{M1} = 2.0$) pa se u njima nisu formirali plastični zglobovi, pri razmatranom zemljotresnom dejstvu. Ovi stubovi su projektovani sa većim koeficijentima sigurnosti, pa je ovakav rezultat posledica toga. U modelima M4 i M5, projektovanim sa faktorom ponašanja 3,5, javljaju se plastični zglobovi u vertikalnim elementima ramovskih stubova (eng. bent).

Registrovane su i diskutovane određene vrednosti dobijene nelinearnom pushover analizom kao što su: pomeranja, duktilnost i odnos momenat-krivina (M - ϕ), tj. preraspodele uticaja i pushover krive radi ocene kapaciteta stubova mosta.

Izvedena je komparativna analiza ponašanja stubova za svih pet modela iz aspekta veličina: pomeranja na granici kapaciteta; zahtevanih pomeranja i pomeranja na granici tečenja. Osim pomeranja, razmatrane su i razlike u vrednostima duktilnosti za analizirane modele. Priloženi su M - ϕ dijagrami i razmotren je odnos momenat-rotacija čvorova koji pri dejstvu zemljotresa dostižu svoju granicu elastičnog kapaciteta nosivosti (Stub 1 u M4) i prelaze u zonu plastičnog ponašanja (Stub 2 u M4 i M5), ali ne dostižu granicu svog plastičnog kapaciteta nosivosti.

Primetna je razlika u ponašanju stubova različitih geometrijskih karakteristika, pa je analizi donjeg stroja betonskih mostova potrebno posvetiti posebnu pažnju.

Ponašanje stubova mosta analizirano je u skladu sa metodologijom preporučenom u dokumentu FEMA 440, tj. korišćenjem Metode ekvivalentne linearizacije (ELM). U odnosu na nelinearnu dinamičku analizu (THA) njena tačnost procene performansi je manje pouzdana, naročito ako je izražena neregularnost konstrukcije mosta.

S obzirom na to da je analizirani most sa neznatnom razlikom visina stubova i relativno malim rasponima, imajući u vidu uporedne analize rezultata ovde

primenjene metode i THA [10], može se zaključiti da je ovde sprovedena analiza prihvatljiva za praksu.

Ipak, za tačniju analizu ponašanja stubova mosta, neophodno je sprovesti nelinearnu dinamičku analizu jednačina kretanja.

6. ZAHVALNOST

Ovaj rad je proistekao iz dela istraživačkog projekta TR 36043, koji je podržalo Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Autori se zahvaljuju na ovoj podršci.

LITERATURA

- [1] Čokić M, Petronijević P, Todorović M. S, Pecić N, Analiza vezane energije i emisije CO₂ pri izvođenju mostovske konstrukcije sa stanovišta održivosti, *Građevinski materijali i konstrukcije*, br. 2, 3-20 str, 2015.
- [2] EN1991: Actions on structures - Part 2: Traffic loads on Bridges, CEN, September 2003.
- [3] EN1998 - Part 1 & 2: Bridges, European Committee for Standardization (CEN), 2004/2005.
- [4] EN1992: Design of concrete structures - Part 1-1 & Part 2 : General rules and rules for buildings; Concrete Bridges, CEN, 2004/2005.
- [5] EN1990 - Basis of structural design, CEN, 2005.
- [6] Lang D. H, Seismic response estimation using non-linear static methods, *Indo-Norwegian Training Programme on Nonlinear Modelling and Seismic Response Evaluation of Structures*, Continuing Education Center, IIT Roorkee, December 14-16, 2014.
- [7] Manjula N. K, Nagarajan P, Madhavan Pillai T. M, A Comparison of Basic Pushover Methods, *International Refereed Journal of Engineering and Science (IRJES)*, ISSN (Online) 2319-183X, (Print) 2319-1821, Volume 2, Issue 5, pp. 14-19, May 2013.
- [8] FEMA 440 Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures, Prepared by: Applied Technology Council (ATC-55 Project), Prepared for: Department of Homeland Security, Federal Emergency Management Agency, Washington, D.C, June, 2005
- [9] Isaković T, Fischinger M, Pojednostavnjene nelinearne metode proračuna betonskih mostova, *Građevinar 61*, pp. 625-633, 2009.
- [10] Ger J, Cheng F. Y, Seismic Design Aids for Nonlinear Pushover Analysis of Reinforced Concrete and Steel Bridges, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012
- [11] CSiBridge 2016, *Introduction to CSiBridge*, Computers & Structures, Inc, 1978-2015
- [12] Folić R, Projektovanje seizmički otpornih betonskih mostova, *Građevinski materijali i konstrukcije*, br. 2, 41-65 str, 2008.
- [13] Ladinović Đ, Savremene metode seizmičke analize konstrukcija zgrada, *Građevinski materijali i konstrukcije*, br. 2, 66-74 str, 2008.
- [14] Fajfar P, Fischinger M, Isaković T, Metoda procjene seizmičkog ponašanja zgrada i mostova, *Građevinar 52*, 11, 663-671, 2000.
- [15] Folić R, Ladinović Đ, Nove metode analize i projektovanja mostova u seizmičkim područjima, *Tehnika*, vol. 58, br. 6, str. 9-23, , 2004.
- [16] Čosić M, Folić R, Brčić S, Pregled savremenih seizmičkih analiza i načina uvođenja prigušenja u njima, *Građevinski materijali i konstrukcije*, br. 1, 3-30 str, 2017.
- [17] Miloš Čokić, Betonski drumski most preko zadatog profila terena (idejno rešenje), Diplomski-master rad, mentor: D. Bajić, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2014.
- [18] Mander J., Priestley M, Park R, Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, ISS. 8, pp. 1804-1825, 1988.

SUMMARY

NONLINEAR SEISMIC ANALYSIS OF CONTINUOUS RC BRIDGE

Nonlinear static analysis, known as a pushover method (NSPA) is oftenly used to study the behaviour of a bridge structure under the seismic action. It is shown that the Equivalent Linearization Method – ELM, recommended in FEMA 440, is appropriate for the response analysis of the bridge columns, with different geometric characteristics, quantity and distribution of steel reinforcement. The subject of analysis is a bridge structure with a carriageway plate – a continuous beam with three spans, with the 24 + 40 + 24 m range. Main girder is made of prestressed concrete and it has a box cross section of a constant height. It is important to study the behaviour, not only in the transverse, but also in the longitudinal direction of the bridge axis, when analysing the bridge columns exposed to horizontal seismic actions. The columns were designed according to EN1992, parts 1 and 2. Seismic action analysis is conducted according to EN 1998: 2004 standard. Response spectrum type 1, for the ground type B, was applied and the analysis also includes 20% of traffic load. The analysis includes the values of columns displacement and ductility. To describe the behaviour of elements under the earthquake action in both – longitudinal and transverse direction, pushover curves were formed.

Key words: *Nonlinear Static Pushover Analysis, FEMA 440, Equivalent Linearization Method, seismic actions, EN 1998:2004, bridge columns, Pushover curves, displacements, dictility*

Odvajanje grede konačne dužine od Vinklerove nezatežuće podloge pri dejstvu sile na kraju grede

RATKO B. MARETIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

VALENTIN B. GLAVARDANOV, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

ALEKSANDAR S. OKUKA, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Originarni naučni rad

UDC: 624.072.2.042

DOI: 10.5937/tehnika1804479M

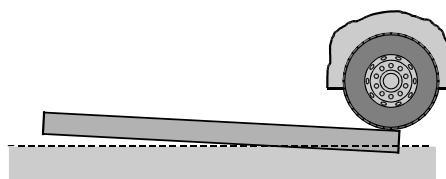
U radu se analizira savijanje grede konačne dužine postavljene na elastičnu podlogu nezatežućeg Vinklerovog tipa. Greda je opterećena konstantnim kontinualnim opterećenjem i silom na jednom kraju. Pokazano je da u slučaju da su zadovoljeni određeni parametri dolazi do delimičnog odvajanja grede od podloge. Do odvajanja može da dođe na jednoj strani grede ili u njenom središnjem delu. Formirane su nelinearne algebarske jednačine čije rešenje daje koordinate tačkaka odvajanja. Određeni su ugibi grede vodeći računa da na mestima odvajanja grede nema dejstva podloge. Na nekoliko primera su data poređenja elastične linije grede prema klasičnom i predloženom proračunu.

Ključne reči: nezatežuća Vinklerova podloga, greda

1. UVOD

Grede koje se oslanjaju na elastičnu podlogu predstavljaju model mnogih bitnih konstrukcija, kao što su temelji građevinskih objekata, železničke šine, putevi itd. Iako su svojstva tla, veoma često, elastoplastična, ipak postoje slučajevi kada je model elastične podloge prihvatljiv. Osim toga, na sličan način se mogu modelovati i ploveći objekti kao što su brodovi i splavovi. Zbog izuzetne važnosti ove teme, kao i tehničke primenljivosti, davno su se pojavili razni matematički modeli elastičnog tla, između ostalih i Vinklerov model, koji je i najjednostavniji. Prema Vinklerovom modelu, na gredu, usled interakcije sa podlogom, deluje kontinualno opterećenje koje je proporcionalno ugibu grede.

U pojedinim slučajevima, pri dejstvu nekog nesimetričnog opterećenja može doći do odvajanja grede od podloge i njenog izdizanja. Takva situacija može nastupiti, na primer, kada neko teško vozilo nagazi točkom na jedan kraj grede, kao što je to prikazano na slici 1.



Slika 1 – Odvajanje kraja grede od podloge pri dejstvu tereta na drugom kraju

Osnovni problem u tom slučaju što je prema Vinklerovom modelu, deo grede koji se odvojio od podloge i dalje opterećen od strane podloge i to opterećenjem koje gredu vuče ka sebi, što fizički nije tačno. Ovaj nedostatak je davno uočen pa se pojavio i model Vinklerove podloge prema kome između podloge i grede postoji samo pritisno dejstvo. Uobičajeno je da se ova podloga naziva nezatežuća Vinklerova podloga. U radovima [1]-[9] su razmatrani uticaji na savijanje i stabilnost grede na pomenutoj podlozi pri različitim opterećenjima. I pored toga što je ova oblast dobro proučena postoje mogućnosti za dodatna istraživanja.

U ovom radu je ispitan zajednički uticaj sile na jednom kraju grede i kontinualnog opterećenja, kada je ona postavljena na nezatežuću Vinklerovu podlogu. Određene su vrednosti parametara pri kojima dolazi do odvajanja grede od podloge i kakav to ima uticaj na pomeranja. Upoređena su dobijena rešenja sa onima koja ne uzimaju u obzir odvajanje. Na kraju, izveden je zaključak u kojoj su meri, rezultati dobijeni

Adresa autora: Ratko Maretić, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

e-mail: maretic@uns.ac.rs

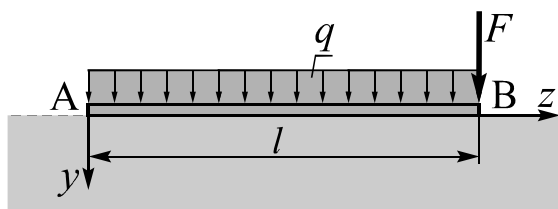
Rad primljen: 05.04.2018.

Rad prihvaćen: 02.07.2018.

korišćenjem klasične teorije, zaista ispravni i primenjivi.

2. POSTAVKA PROBLEMA

Posmatračemo gredu AB postavljenu na elastičnu podlogu nezatežućeg Vinklerovog tipa krutosti c , pri čemu je $[c] = 1 \text{ N/m}^3$, prikazanu na slici 2. Greda je konstantnog poprečnog preseka, koji ima vertikalnu osu simetrije čiji aksijalni moment inercije iznosi I , dok širina preseka sa donje strane, kojom se ostvaruje dodir sa podlogom, iznosi B . Dužina grede je l , dok je E modul elastičnosti materijala grede. Greda je opterećena konstantnim linijskim kontinualnim opterećenjem q , koje može biti težina grede i koncentrisanom silom F , koja deluje u tački B. Uvešćemo koordinatni sistem zAy , pri čemu je y osa usmerena prema dole.



Slika 2 – Geometrija grede i njeno opterećenje

Prema korišćenom modelu podloge, greda će, pored aktivnih opterećenja, biti sa donje strane strane, prema gore, opterećena kontinualnim opterećenjem

$$q_p = c B y, \quad (1)$$

tako da je diferencijalna jednačina savijanja grede

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} = q - c B y \quad (2)$$

Pošto ćemo razmatrati slučaj grede koja se, jednim svojim delom, odvojila od podloge i samim tim, ostala bez dejstva pritiska podloge (1), na tom delu je savijanje grede opisano diferencijalnom jednačinom

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} = q \quad (3)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (2) je

$$y = e^{kz} (A_1 \sin kz + A_2 \cos kz) + e^{-kz} (A_3 \sin kz + A_4 \cos kz) + \frac{q}{cb} \quad (4)$$

gde je uvedena oznaka

$$k = \sqrt[4]{\frac{cB}{4EI}} \quad (5)$$

dok su A_1, A_2, A_3 i A_4 integracione konstante.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3) je

$$y = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4 + \frac{1}{24} \frac{q z^4}{EI} \quad (6)$$

pri čemu su C_1, C_2, C_3 i C_4 odgovarajuće integracione konstante.

Da bi smanjili broj parametara koji utiču na savijanje grede, rešenja diferencijalnih jednačina su napisana u bezdimenzionalnoj formi. Ukoliko uvedemo bezdimenzionalne parametre

$$w = \frac{y}{l}, \quad x = \frac{z}{l}, \quad \lambda = kl, \quad Q = \frac{ql^3}{EI} \quad (7)$$

rešenje (4) prelazi u

$$w = e^{\lambda x} (\bar{A}_1 \sin \lambda x + \bar{A}_2 \cos \lambda x) + e^{-\lambda x} (\bar{A}_3 \sin \lambda x + \bar{A}_4 \cos \lambda x) + \frac{Q}{4\lambda^4} \quad (8)$$

dok će rešenje (6) biti

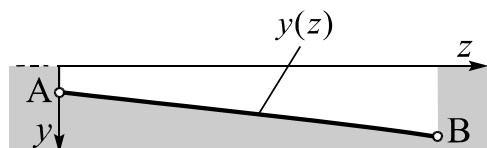
$$w = \bar{C}_1 z^3 + \bar{C}_2 z^2 + \bar{C}_3 z + \bar{C}_4 + \frac{1}{24} Q x^4, \quad (9)$$

pri čemu su uvedene i odgovarajuće bezdimenzionalne integracione konstante.

Da bi sračunali ugibe grede, potrebno je prvo odrediti da li uopšte dolazi do odvajanja grede od podloge. Zatim, ukoliko dolazi do odvajanja, treba odrediti na koji način. U vezi sa tim razlikovaćemo tri slučaja, koji će u nastavku biti posebno razmatrani.

3. SLUČAJ KADA SE GREDA NE ODVAJA OD PODLOGE

Ovaj slučaj zvaćemo klasični slučaj i on podrazumeva da je greda celom dužinom oslonjena na podlogu i da se od nje nije odvojila. Skica jednog takvog slučaja prikazana je na slici 3. Deformacija grede je tada opisana opštim rešenjem (4), odnosno (8).



Slika 3 – Greda se ne odvađa od podloge

Na osnovu uslova koje na krajevima štapa A i B zadovoljavaju moment savijanja i transverzalna sila, granični uslovi su

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dz^3}(0) &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dz^2}(l) &= 0, \quad -EI \frac{d^3 y}{dz^3}(l) = F \end{aligned} \quad (10)$$

Njihov bezdimenzionalni oblik je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2}(0) &= 0, & \frac{d^3 w}{dx^3}(0) &= 0, \\ \frac{d^2 w}{dx^2}(1) &= 0, & \frac{d^3 w}{dx^3}(1) &= -P \end{aligned} \quad (11)$$

pri čemu je

$$P = \frac{F l^2}{EI} \quad (12)$$

Nakon određivanja integracionih konstanti dobijamo da je bezdimenzionalni ugib dat sa

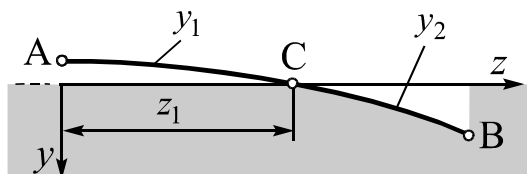
$$w = \frac{p_1 Q + p_2 P}{4\lambda^4(-2 + \cos 2\lambda + \operatorname{ch} 2\lambda)} \quad (13)$$

gde je

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + \cos 2\lambda + \operatorname{ch} 2\lambda, \\ p_2 &= e^{-(1+x)\lambda} (p_3 \cos \lambda x + p_4), \\ p_3 &= (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2\lambda x}) \cos \lambda - 2(e^{2\lambda} + e^{2\lambda x}) \sin \lambda \\ p_4 &= (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2\lambda x}) \sin \lambda \sin \lambda x. \end{aligned} \quad (14)$$

4. SLUČAJ KADA SE LEVA STRANA GREDE ODVAJA OD PODLOGE

Drugi slučaj savijanja grede podrazumeva da se njena leva strana, suprotna od kraja opterećenog silom, u izvesnoj meri odvoji od podloge. Sa C ćemo označiti tačku, sa nepoznatom koordinatom z_1 , u kojoj dolazi do odvajanja grede od podloge (videti skicu na Slici 4). U tom slučaju savijanje grede za $0 \leq z \leq z_1$ opisano je jednačinom (3) i rešenjem (6) odnosno (9), koje ćemo označiti sa y_1 i w_1 , dok je za $z_1 \leq z \leq l$, opisano jednačinom (2) i rešenjem (4) i (8), koje ćemo označiti sa y_2 odnosno w_2 .



Slika 4 – Greda se levom stranom odvaja od podloge

Granični uslovi u tačkama A i B su

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2}(0) &= 0, & \frac{d^3 y_1}{dz^3}(0) &= 0, \\ \frac{d^2 y_2}{dz^2}(l) &= 0, & -EI \frac{d^3 y_2}{dz^3}(l) &= F \end{aligned} \quad (15)$$

dok u tački C mora biti zadovoljeno da do odvajanja dolazi upravo na površi nedeformisane podloge kao i

da prelaz sa jedne na drugu krivu mora biti gladak. Na taj način dobijano uslove

$$\begin{aligned} y_1(z_1) &= 0, & y_2(z_1) &= 0, \\ \frac{dy_1}{dz}(z_1) &= \frac{dy_2}{dz}(z_1), & \frac{d^2 y_1}{dz^2}(z_1) &= \frac{d^2 y_2}{dz^2}(z_1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d^3 y_1}{dz^3}(z_1) = \frac{d^3 y_2}{dz^3}(z_1).$$

Bezdimenzionalni oblik ovih graničnih uslova je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1}{dx^2}(0) &= 0, & \frac{d^3 w_1}{dx^3}(0) &= 0, & \frac{d^2 w_2}{dx^2}(1) &= 0, \\ \frac{d^3 w_2}{dx^3}(1) &= -P, & w_1(s) &= 0, & w_2(s) &= 0, \\ \frac{dw_1}{dx}(s) &= \frac{dw_2}{dx}(s), & \frac{d^2 w_1}{dx^2}(s) &= \frac{d^2 w_2}{dx^2}(s), \\ \frac{d^3 w_1}{dx^3}(s) &= \frac{d^3 w_2}{dx^3}(s), \end{aligned} \quad (17)$$

gde je $s = z_1/l$.

Na osnovu ovih devet uslova određujemo osam integracionih konstanti, kao i koordinatu s . Imajući u vidu da se na osnovu graničnih uslova $(17)_1$ i $(17)_2$ dobija da je $\bar{C}_1 = 0$ i $\bar{C}_2 = 0$, iz graničnih uslova $(17)_3$, $(17)_4$, $(17)_8$ i $(17)_9$ se mogu odrediti konstante $\bar{A}_1 - \bar{A}_4$ u funkciji od s . Njihovom zamenom u uslov $(15)_6$ dobijamo nelinearnu algebarsku jednačinu po s . Ta jednačina se može svesti na oblik

$$g_1 + m g_2 = 0, \quad (18)$$

gde je

$$m = \frac{P}{Q} = \frac{F}{ql}, \quad (19)$$

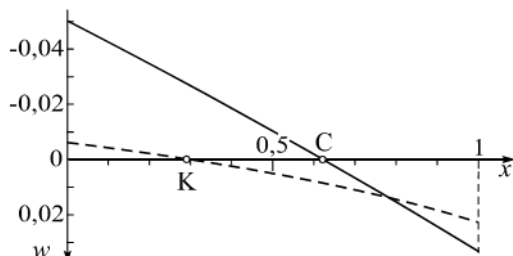
dok su izrazi g_1 i g_2 dati sa

$$\begin{aligned} g_1 &= -4e^{2(1+s)\lambda} + e^{4s\lambda}(s\lambda - 1)^2 + e^{4\lambda}(s\lambda + 1)^2 \\ &\quad - 2e^{2(1+s)\lambda}[(s^2\lambda^2 - 1)\cos 2(s-1)\lambda + 2s\lambda \sin 2(1-s)\lambda] \\ g_2 &= 4\lambda[(e^{(3+s)\lambda} - e^{(1+3s)\lambda})\cos((1-s)\lambda) \\ &\quad - (e^{(3+s)\lambda} + e^{(1+3s)\lambda})\sin((1-s)\lambda)] \\ g_2 &= 4\lambda\{e^{(3+s)\lambda}[\cos(1-s)\lambda - \sin(1-s)\lambda] \\ &\quad - e^{(1+3s)\lambda}[\cos(1-s)\lambda + \sin(1-s)\lambda]\} \end{aligned} \quad (20)$$

Kada smo odredili s , možemo odrediti i konačnu vrednost integracionih konstanti $\bar{A}_1 - \bar{A}_4$ i na kraju, na osnovu uslova $(17)_5$ i $(17)_7$ određujemo i preostale

konstante \bar{C}_3 i \bar{C}_4 . Važno je napomenuti da vrednost s zavisi samo od odnosa bezdimenzionalnih parametara P i Q , koji smo označili sa m .

Jedan tipičan slučaj odvajanja grede od podloge prikazan je na Slici 5. Bezdimenzionalni parametri su $\lambda=2$, $P=0,3$ i $Q=0,1$.



Slika 5 – Upoređenje deformacije grede za $\lambda=2$, $P=0,3$ i $Q=0,1$. Neprekidna linija – uticaj odvajanja, isprekidana linija - klasični proračun

Isprekidanom linijom je prikazano rešenje dobijeno na klasičan način funkcijom (13), dok je neprekidnom linijom prikazan ugib grede kod koje uzimamo u obzir uticaj odvajanja od podloge. Do odvajanja, prema klasičnom proračunu, dolazi u tački K, gde je $x_K=0,230$, dok u drugom slučaju do odvajanja dolazi u tački C ($x_C=0,622$). Osim toga, ugibi krajeva grede u prvom slučaju su $-0,0059$ i $0,0229$, dok su u drugom $-0,0506$ i $0,0336$.

Očigledno je da postoji velika razlika u ugibima i položaju mesta odvajanja na osnovu upoređenja ova dva proračuna. Prema tome, za pojedine vrednosti parametara, klasičan proračun daje neprecizne vrednosti ugiba.

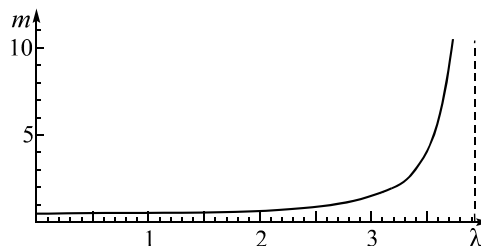
Da bi se stekla opštija slika o ovom problemu, u nastavku je određen uslov pri kojem dolazi do odvajanja grede od podloge. Sa Slika 4 i 5 možemo uočiti da postoje određene vrednosti parametara pri kojima tačka A (levi kraj) ima ugib jednak nuli, pri čemu je očuvan kontakt između grede i podloge. Promena vrednosti ovih parametara, a prvenstveno povećanje vrednosti sile F , dovešće do odvajanja. Zato je od interesa odrediti vrednosti parametara na samoj granici odvajanja. Pošto u tom slučaju još uvek nema odvajanja, iskoristićemo rešenje (13) kome ćemo nametnuti granični uslov

$$w(0) = 0 \quad (21)$$

Zadovoljavanjem (21) dolazimo do algebarskog izraza koji se može napisati u obliku

$$m = \frac{(2 - \cos 2\lambda - \operatorname{ch} 2\lambda) e^\lambda}{2\lambda [2e^\lambda \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda - (1 + e^{2\lambda}) \sin \lambda]} \quad (22)$$

On predstavlja graničnu vrednost parametra m , za zadato λ . Povećavanjem parametra m dolazi do odvajanja grede na način prikazan na slici 4.



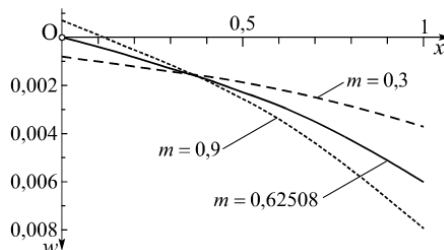
Slika 6 – Grafik veličine $m=P/Q$ u funkciji od λ dobijen na osnovu izraza (22)

Grafik funkcije (22) prikazan je na slici 6. Pošto je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} m = 0,5 \quad (23)$$

ova funkcija monotono raste od 0,5 do $\lambda = 3,9266$, gde ima asimptotu. Kada je $\lambda > 3,9266$, najniža vrednost m je veća od 80. To područje u ovom radu nije analizirano.

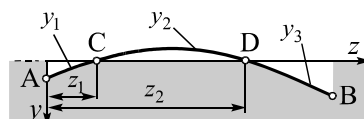
Proverićemo dobijene rezultate tako što ćemo odrediti elastične linije grede za $\lambda=2$, kada m ima vrednosti 0,3, 0,62508 (što je vrednost izračunata obrascem (22)) i 0,9. Ove linije, dobijene funkcijom (13), gde je usvojeno da je $Q=0,1$, i $P=0,1m$, prikazane su na slici 7. Slika potvrđuje zaključak da se će u slučaju da je $m > 0,62508$ levi kraj grede uzdići iznad podloge. Zato, elastična linija dobijena sa $m=0,9$, nije odgovarajuća, već se za određivanje njenog stvarnog oblika mora koristiti procedura objašnjenja u ovom odeljku.



Slika 7 – Promena izgleda elastične linije u zavisnosti od veličine $m = P/Q$ za $\lambda = 2$

5. SLUČAJ KADA SE SREDIŠNJI DEO GREDE ODVAJA OD PODLOGE

Treći slučaj oslanjanja grede na podlogu je prikazan na slici 8. Greda je u središnjem delu, između tačaka C i D odvojena od podloge, zbog čega je prestalo dejstvo podloge na gredu pa je u tom delu, gde je $z_1 \leq z \leq z_2$, savijanje grede opisano jednačinom (3) i rešenjem (6) odnosno (9), koje ćemo označiti sa y_2 i w_2 .



Slika 8 – Greda koja se središnjim delom odvaja od podloge

U delovima AC ($0 \leq z \leq z_1$), odnosno DB ($z_2 \leq z \leq l$), savijanje je opisano jednačinom (2) i rešenjem (4) i (8), koje ćemo označiti sa y_1 i w_1 , odnosno y_3 i w_3 . U rešenju y_3 ćemo integracione konstante A_i , $i=1,2,3,4$ preimenovati u B_i .

Granični uslovi u tačkama A i B su

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 y_1}{dz^3}(0) = 0, \\ \frac{d^2 y_3}{dz^2}(l) = 0, \quad -EI \frac{d^3 y_3}{dz^3}(l) = F \end{aligned} \quad (24)$$

Uslovi u tački C su isti kao uslovi (16) dok su u tački D

$$\begin{aligned} y_2(z_2) = 0, \quad y_3(z_2) = 0, \quad \frac{dy_2}{dz}(z_2) = \frac{dy_3}{dz}(z_2), \\ \frac{d^2 y_2}{dz^2}(z_2) = \frac{d^2 y_3}{dz^2}(z_2), \\ \frac{d^3 y_2}{dz^3}(z_2) = \frac{d^3 y_3}{dz^3}(z_2). \end{aligned} \quad (25)$$

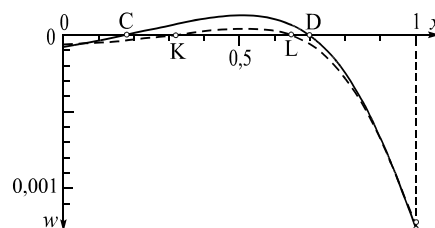
gde smo koristili $s=z_1/l$ i $f=z_2/l$. Bezdimenzionalni oblik graničnih uslova je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3}(0) = 0, \quad \frac{d^2 w_3}{dx^2}(1) = 0, \\ \frac{d^3 w_3}{dx^3}(1) = -P, \quad w_1(s) = 0, \quad w_2(s) = 0, \\ \frac{dw_1}{dx}(s) = \frac{dw_2}{dx}(s), \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2}(s) = \frac{d^2 w_2}{dx^2}(s), \\ \frac{d^3 w_1}{dx^3}(s) = \frac{d^3 w_2}{dx^3}(s), \\ w_2(f) = 0, \quad w_3(f) = 0, \\ \frac{dw_2}{dx}(f) = \frac{dw_3}{dx}(f), \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2}(f) = \frac{d^2 w_3}{dx^2}(f), \\ \frac{d^3 w_2}{dx^3}(f) = \frac{d^3 w_3}{dx^3}(f), \end{aligned} \quad (26)$$

Ovih 14 uslova omogućavaju da se odredi svih 12 integracionih konstanti i bezdimenzionalne koordinate s i f . Uslovi (26)₁₋₄, (26)₆₋₁₀ i (26)₁₁₋₁₄ su pogodni da se integracione konstante izraze kao funkcije od parametara s i f . Zadovoljavanjem preostala dva uslova (26)₅ i (26)₁₁, dobijamo sistem od dve nelinearne jednačine na osnovu koga možemo odrediti s i f . Te vrednosti se zatim zamenjuju u integracione konstante, čime dobijamo njihove konačne vrednosti, što omogućava da se nacrtaja elastična linija i odrede ugibi. Kao što smo videli u prethodnom slučaju i u ovom

koordinata odvajanja od podloge zavise od parametra m .

Odredićemo uticaj odvajanja od podloge na primeru prikazanom na slici 9, u kojem je usvojeno da je $\lambda=5$, $P=0,3$ i $Q=0,1$. Neprekidnom linijom je prikazan ugib grede kod koje uzimamo u obzir uticaj odvajanja od podloge. Do odvajanja dolazi u tačkama C i D, čije su koordinate $x_C=0,17566$ i $x_D=0,69547$. Isprekidanom linijom prikazano je rešenje dobijeno na klasičan način, korišćenjem funkcije (13). U ovom slučaju greda se odvajanja od tla u tačkama K i L sa koordinatama $x_K=0,31844$ i $x_L=0,64741$. Postoji očigledna razlika u visini uzdizanja iznad podloge, dok je, za date podatke, maksimalni ugib prema dole, u oba slučaja, vrlo sličan.



Slika 9 – Upoređenje deformacije grede za $\lambda=5$, $P=0,3$ i $Q=0,1$. Neprekidna linija – uticaj odvajanja, isprekidana linija – klasični proračun

Odredićemo pri kojim vrednostima parametara m i λ dolazi do odvajanja grede na način opisan u ovom odeljku. Odvajanje započinje tako što elastična linija grede u jednoj tački dodirne osu x . U toj tački, čiju ćemo bezdimenzionalnu koordinatu označiti sa t je zadovoljeno da su ugib i ugao nagiba tangente jednaki nuli, pa je

$$w(t) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(t) = 0, \quad (27)$$

gde je w dato sa (13). Ovi uslovi dovode do jednačina

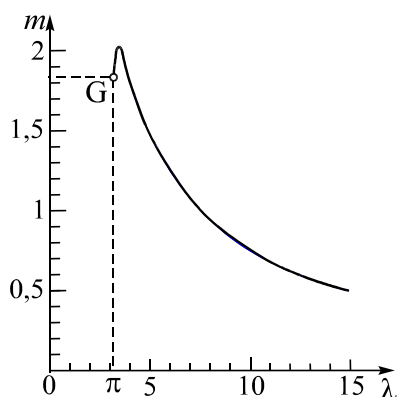
$$r_1 + m(r_2 + r_3) = 0, \quad (28)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \quad (29)$$

gde je

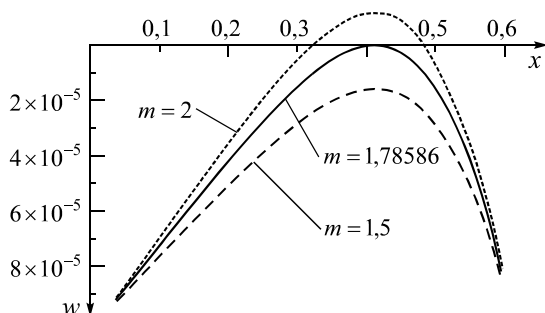
$$\begin{aligned} r_1 &= e^{-2\lambda}(1 - 4e^{2\lambda} + e^{4\lambda}) + 2\cos\lambda, \\ r_2 &= 2\lambda e^{-(1+t)\lambda} \cos t\lambda [(e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2t\lambda}) \cos\lambda - 2(e^{2\lambda} + e^{2t\lambda}) \sin\lambda], \\ r_3 &= 2\lambda e^{-(1+t)\lambda} (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2t\lambda}) \sin\lambda \sin t\lambda, \\ k_1 &= -(e^{2\lambda} + e^{2t\lambda}) \cos[(1+t)\lambda], \\ k_2 &= (1 + e^{2(1+t)\lambda}) \cos[(1-t)\lambda], \\ k_3 &= (e^{2\lambda} - e^{2t\lambda}) \sin[(1+t)\lambda], \\ k_4 &= (-1 + 2e^{2\lambda} - 2e^{2t\lambda} + e^{2(1+t)\lambda}) \sin[(1-t)\lambda]. \end{aligned} \quad (30)$$

Ukoliko zadamo λ , iz jednačine (29) možemo odrediti koordinatu t , a zatim iz (28) i vrednost m . Grafik parametra m , dobijen opisanim postupkom, prikazan je na slici 10.



Slika 10 – Grafik veličine $m=P/Q$ u funkciji od λ dobijen rešavanjem sistema jednačina (28) i (29)

Grafik započinje u tački $G(\pi, 1,83804)$, na početku ima blagi rast, a zatim monotonopada. Za vrednosti m koje su ispod prikazane linije je obezbeđeno da neće doći do odvajanja od podloge.

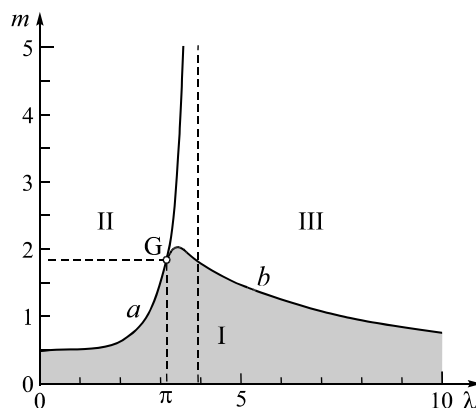


Slika 11 – Promena izgleda elastične linije u zavisnosti od veličine $m=P/Q$ za $\lambda=4$

Ilustrujemo ovaj zaključak jednim primerom. Neka je zadato da je $\lambda=4$. Iz sistema (28) i (29) se dobija $m=1,78586$. Na slici 11 je prikazana odgovarajuća elastična linija koja svoj minimum ima upravo na osi x . Ako je m manje od te vrednosti (na primer 1,5) neće doći do odvajanja od podloge, dok ako je veće (na primer 2), dolazi do odvajanja od podloge u središnjem delu grede.

Uloga tačke G i izgled grafika, prikazanog na slici 10, postaju jasni tek kada se on poveže sa grafikom koji je prikazan na slici 6. Ovaj potpuni grafik prikazan je na slici 12.

Linije a i b dele posmatranu površ grafika na tri oblasti koje su označene sa I, II i III. Ukoliko su vrednosti parametara λ i m takve da se odgovarajuća tačka nalazi u oblasti I (koja je zasivljena) neće biti odvajanja od podloge pa je elastična linija opisana na klasičan način, formulom (13).



Slika 12 – Potpuni grafik veličine $m = P/Q$ u funkciji od parametra λ

Ako parametar λ zadovoljava $0 \leq \lambda \leq \pi$ i ako je m iznad linije a (oblast II), doći će do odvajanja leve strane grede, pa se proračun mora vršiti na način objašnjen u odeljku 4. U slučaju da je $\pi \leq \lambda$ i m takvo da je odgovarajuća tačka iznad linije b (u oblasti III), doći će do odvajanja grede od podloge u središnjem delu, što znači da se proračun vrši prema postupku iz odeljka 5. Posebno je interesantan slučaj kada je $\pi \leq \lambda \leq 3,9266$. U zavisnosti od vrednosti parametra m , odnosno u kojoj oblasti se nalazi odgovarajuća tačka, moguća su sva tri slučaja. Najzad, postaje jasno da se tačka G nalazi na granicama između sve tri oblasti. Ona je specifična po tome što za parametre $\lambda=\pi$ i $m=1,83804$, koji predstavljaju njene koordinate, elastična linija prolazi kroz levi kraj grede i pri tome je u toj tački ugao nagiba tangente jednak nuli.

6. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da korišćenje klasičnog postupka određivanja ugiba nesimetrično opterećene grede na podlozi Vinklerovog tipa, može dovesti do značajnih grešaka.

Do odvajanja grede od podloge može doći na dva različita načina: može se odvojiti strana grede koji je nasuprot sili i može doći do odvajanja u središnjem delu grede. Određena je funkcija zavisnosti parametara m i λ koja definiše granice oblasti mogućih rešenja.

7. ZAHVALNICA

Ovaj rad je finansirao Fakultet tehničkih nauka iz Novog Sada, projekat 2018-54.

LITERATURA

- [1] Weitsman Y, On Foundations That React in Compression Only, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, No.4, pp. 1019-1030, 1970.
- [2] Kaschievt M. S, Mikhajlov K. A Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation, *Computers & Structures*, Vol. 55. No. 2. pp. 261-264. 1995.

- [3] Zhang Y, Murphy K. D, Response of a finite beam in contact with a tensionless foundation under symmetric and asymmetric loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 24-25, pp. 6745–6758, 2004.
- [4] Ma X, Butterworth J. W, Clifton G. C, Response of an infinite beam resting on a tensionless elastic foundation subjected to arbitrarily complex transverse loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 7, pp. 818–825, 2009.
- [5] Chen J. S, Wu H. H, Response of a Buckled Beam Constrained by a Tensionless Elastic Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 137, No. 6, pp. 383-389, 2011.
- [6] Nobíli A, Variational Approach to Beams Resting on Two-Parameter Tensionless Elastic Foundations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 79, No. 2, 021010, 2012.
- [7] Nobíli A, Variational Approach to Beams Resting on Two-Parameter Tensionless Elastic Foundations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 79, No. 2, 021010, 2012.
- [8] Nobili A, Superposition Principle for the Tensionless Contact of a Beam Resting on a Winkler or a Pasternak Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 139, No. 10, pp. 1470-1478, 2013.
- [9] Zhang L, Zhao M, New Method for a Beam Resting on a Tensionless and Elastic-Plastic Foundation Subjected to Arbitrarily Complex Loads, *International Journal of Geomechanics*, Vol. 16, No 4, 04015093, 2016.
- [10] Ioakimidis N. I, Derivation of conditions of complete contact for a beam on a tensionless Winkler elastic foundation with Mathematica, *Mechanics Research Communications*, Vol. 72, pp. 64-73, 2016.

SUMMARY

THE CONTACT SEPARATION OF A FINITE BEAM FROM THE TENSIONLESS WINKLER FOUNDATION DUE TO THE FORCE ACTING AT THE ONE BEAM END

In this paper, bending of a finite beam, positioned on the elastic foundation of tensionless Winkler type, is analysed. Beam is subjected to the two different types of load, concentrated vertical force acting at the one end in combination with the constant equally distributed continuous load action along its length. It is shown that in the case of satisfying some parameter values, the partial separation of beam from its foundation is possible. The separation can be displayed on the one side or in the middle region of the beam. The position of the points of separation is obtained as the solution of the system of nonlinear algebraic equations. In addition, deflections of the beam are calculated by taking into account the fact that in the region of the separation of the beam from its foundation, the influence of the foundation on the beam deflection does not exist. In a few examples, the beam elastic lines calculated in the classical manner and using the proposed method are compared.

Key words: Tensionless Winkler foundation, beam