Aide à la décision

Dragibus

Table des matières

1 Introduction **2**
- 1.1 Définition 2
- 1.2 Ensemble des contraintes 3

2 Optimisation monocritère **3**
- 2.1 Comptable 3
- 2.2 Responsable d'atelier 4
- 2.3 Responsable commercial 5
- 2.4 Responsable des stocks 5
- 2.5 Responsable du personnel 6

3 Programmation linéaire multicritère **7**
- 3.1 Matrice de Gain 7
- 3.2 Équilibrage inter-critères 8

4 Analyse multicritère **9**

1 Introduction

Dans le cadre de notre étude sur l'optimisation quantitative et qualitative pour le développement valorisé de vos produits, nous avons scindé votre problématique en trois sections. Dans un premier temps, nous étudierons objectivement les critères opérationnels proposés par vos cadres pour maximiser vos performances tant en matière de production qu'en qualité sur le long terme.
Ensuite, nous établissons la synergie entre les critères précédemment cités. Cela amène à une totale compréhension et une vision globale des solutions envisagées. Par cela, nous entendons placer un compromis pour chacun des responsables concernés.
La dernière partie consistera en l'étabissement d'une solution finale parmi celles proposées précédemment.

1.1 Définition

Nous définissons ici les notations que nous utiliserons dans la suite de ce rapport et exprimmons certaines notions sous forme de fonctions mathématiques.
Soit $E_M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ l'ensemble des machines.
Soit $E_{MP} = \{MP1, MP2, MP3\}$ l'ensemble des matières premières.
Soit $E_P = \{A, B, C, D, E, F\}$ l'ensemble des produits.
Soit B le bénéfice de l'entreprise.
Soit TTH le temps de travail hebdomadaire.
Soit $X(i)$ le nombre de produit $i \in E_P$ fait.
Soit $X = \{X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7)\}$ le vecteur définissant les quantités de chaque produit à fabriquer.
Soit $S(p)$ la quantité en stock de la matière première $p \in E_{MP}$.
Soit $TM(m)$ le temps d'utilisation de la machine $m \in E_M$.
Soit $G(i)$ le gain engendré par le produit i.
Soit $V(i)$ le prix de vente du produit i.
Soit $P(i)$ la perte engendrée par le produit i.
Soit $Q(i, p)$ la quantité de matière p nécessaire pour le produit i.
Soit $A(p)$ le prix d'achat de la matière p.
Soit $C(m)$ le cout de la machine m.
Soit $T(i, m)$ le temps d'usinage de la machine m pour le produit i.

$$\begin{aligned}
G(i) = &\quad V(i) \cdot X(i) \\
P(i) = &\quad X(i) \left(\sum_{p \in E_{MP}} A(p) Q(i,p) + \sum_{m \in E_M} C(m) T(i,m) \right) \\
B = &\quad \sum_{i \in E_P} G(i) - P(i) \\
TM(m) = &\quad \sum_{i \in E_P} X(i) T(i,m) \\
TTH = &\quad \sum_{m \in E_M} TM(m) \\
S(p) = &\quad \sum_{i \in E_P} X(i) Q(i,p)
\end{aligned}$$

1.2 Ensemble des contraintes

Cette section exprime sous forme mathématique les différentes contraintes inhérentes au fonctionnement de l'entreprise.

$$\begin{array}{rl} \forall i \in E_P, & X(i) > 0 \\ \forall m \in E_M, & TM(m) \in [0, 4800\text{min}] \\ & TTH \in [0, 4800\text{min}] \\ & B > 0 \\ & S(MP1) \in [0, 650] \\ & S(MP2) \in [0, 820] \\ & S(MP3) \in [0, 585] \end{array}$$

2 Optimisation monocritère

Dans cette partie, nous considérons un par un les différents critères retenus par les différents cadres de l'entreprise ADécision. Nous commençons par exprimer le problème sous forme d'un modèle mathématique. Il est possible de modéliser chacune des situations suivantes sous forme d'une fonction f de X à minimiser en respectant la condition $A.X \leq b$.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 & 12 \\ 12 & 1 & 11 & 0 & 10 & 15 \\ 2 & 10 & 5 & 4 & 13 & 7 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 10 & 25 \\ 5 & 5 & 13 & 12 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 28 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 650 \\ 820 \\ 585 \end{pmatrix}$$

2.1 Comptable

L'objectif du comptable est de maximiser les bénéfices de l'entreprise. Il suffit donc de maximiser la fonction de bénéfice définie précédemment.
$G(X) = X \cdot (28\ 20\ 30\ 37\ 45\ 22)^t$

$$\begin{array}{rl} \text{CoutAchat}(A) = & (1\ 2\ 1) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 13 \\ \text{CoutAchat}(B) = & (1\ 2\ 0) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 11 \\ \text{CoutAchat}(C) = & (1\ 1\ 3) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 13 \\ \text{CoutAchat}(D) = & (5\ 0\ 2) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 19 \\ \text{CoutAchat}(E) = & (0\ 2\ 6) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 20 \\ \text{CoutAchat}(F) = & (2\ 1\ 0) \cdot (3\ 4\ 2)^t = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll}
\text{CoupMachine}(A) = & (11\ 0\ 12\ 2\ 15\ 5\ 5)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{86}{60} \\
\text{CoupMachine}(B) = & (15\ 1\ 1\ 10\ 0\ 5\ 3)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{61}{60} \\
\text{CoupMachine}(C) = & (0\ 2\ 11\ 5\ 0\ 13\ 5)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{64}{60} \\
\text{CoupMachine}(D) = & (5\ 8\ 0\ 4\ 0\ 12\ 28)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{94}{60} \\
\text{CoupMachine}(E) = & (0\ 7\ 10\ 13\ 10\ 8\ 0)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{71}{60} \\
\text{CoupMachine}(D) = & (10\ 12\ 15\ 7\ 25\ 0\ 7)\cdot & \frac{1}{60}(2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1)^t = & \frac{123}{60}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
P(X) = & X \cdot \Big((13\ 11\ 13\ 19\ 20\ 10) + \frac{1}{60}(86\ 61\ 64\ 94\ 71\ 123)\Big)^t \\
= & X \cdot \frac{1}{60}(866\ 721\ 844\ 1234\ 1271\ 723)^t
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
B(X) = & G(X) - P(X) \\
= & X \cdot \frac{1}{60}(814\ 479\ 956\ 986\ 1429\ 597)^t \\
= & X \cdot (13.5667\ 7.98333\ 15.9333\ 16.4333\ 23.8167\ 9.95)^t
\end{array}$$

L'on détermine donc le vecter X maximisant les bénéfices selon les contraintes du problème en minimisant la fonction :

$$\begin{array}{rl}
f(X) = & -B(X) \\
= & X \cdot (-13.5667\ \ -7.98333\ \ -15.9333\ \ -16.4333\ \ -23.8167\ \ -9.95)^t
\end{array}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} A \cdot X \leq b \\ \quad 0 \leq X \end{cases}$$

L'on obtient le résultat suivant :
$X = (235.6250\ 98.3929\ 101.3393\ 22.6786\ 0\ 50.6280)$

Cela correspond à un bénéfice de 6473.2 €.

2.2 Responsable d'atelier

L'objectif du responsable atelier est de maximiser le nombre de produits fabriqués. Il faut donc minimiser la fonction suivante :

$$\begin{array}{rl}
f(X) = & -X(A) + -X(B) + -X(C) + -X(D) + -X(E) + -X(F) \\
= & X \cdot (-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1)^t
\end{array}$$

en respectant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} A \cdot X \leq b \\ \quad 0 \leq X \end{cases}$$

L'on obtient le résultat suivant : $X = (0\ 252.5\ 195.0\ 0\ 0\ 101.25)$

2.3 Responsable commercial

L'objectif du responsable commercial est d'équilibrer les quantités faites par famille de produits. La quantité de production des produits A, B et C doit être la même que celle des produits D, E et F :
$X(A) + X(B) + X(C) = X(D) + X(E) + X(F)$

La fonction a minimiser est donc celle représentant la différence de production des deux familles :
Si l'on souhaite maximiser la production tout en respectant la contrainte que nous nous sommes fixés précédemment, on réutilise la fonction f utilisée par le responsable d'atelier :
$f(X) = X \cdot (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$

On utilise alors le meme procédé qu'avec le responsabme d'atelier en ajoutant la contrainte précédemment trouvé représenté par l'équation :
$f_c(X) = 0, f_c(X) = X \cdot (1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ -1)^t$.

On trouve alors comme solution $X = (0\ 206.03\ 43.26\ 14.70\ 70.97\ 163.6)$

Si l'on souhaite maximiser les bénéfices tout en respectant l'objectif que nous nous sommes fixés précédemment, on réutilise la fonction f utilisée par le comptable. On trouve alors le meme X qu'avant.

On peut donc voir que, en maximisant le bénéfice, ou en maximisant le nombre de pièces produites, le fait d'égaliser le nombre de produits par famille fait converger les deux résultats. On trouve un bénéfice de 5893,8 unités d'argent, ce qui correspond à 91,05% du bénéfice maximal.

2.4 Responsable des stocks

Le responsable des stocks veut minimiser la taille des stocks, c'est à dire le nombre de produits ainsi que la quantité de matières premières stockée. On cherche également à garder un bénéfice positif permettant à l'entreprise de continuer sa croissance. On considère alors la taille de stock initial au début de la semaine de production plus l'espace que prendront les produits fabriqués.

La fonction à minimiser est donc la suivante :

$$\begin{aligned} f(X) = &\ 2 \cdot \textstyle\sum_{p \in E_{MP}} S(p) \\ = &\ 5X(A) + 6X(B) + 8X(D) + 9X(E) + 4X(F) \\ = &\ X \cdot (5\ 6\ 8\ 9\ 4)^t \end{aligned}$$

Le stock ne peut être négatif on le contraint donc à être supérieur à 0. Le minimum de cette fonction est alors 0. Or l'entreprise doit toujours pouvoir produire. Il est ainsi nécessaire de rajouter des contraintes afin d'avoir un résultat réaliste. On contraint le système en prenant alors d'autres critères. On peut maximiser le bénéfice ou la production par exemple. Nous avons choisi de traduire l'activité de l'entreprise grâce à son bénéfice.

La solution est considérée comme viable si le bénéfice est au moins supérieur à 70% du bénéfice total. On remarque un point d'inflection pour un stock de 407.2 unités correspondant à un bénéfice de 5742 unités d'argent (soit 88.7% du bénéfice maximum). Il n'est donc pas judicieux de chercher une solution avec un bénéfice plus élévé car cela entrainerait une augmentation beaucoup plus rapide des stocks.

On trouve alors : $X = (319.5453\ 0.3081\ 87.1207\ 0.0000\ 0.6821\ 0.0000)$

2.5 Responsable du personnel

L'objectif du responsable du personnel est de minimiser le temps d'utilisation des machines 1 et 5 pour l'ensemble de la production. Alors, il s'agit de minimiser la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f(X) = \quad & (TM1A + TM5A) \cdot X(A) \\ & +(TM1B + TM5B) \cdot X(B) \\ & +(TM1C + TM5C) \cdot X(C) \\ & +(TM1D + TM5D) \cdot X(D) \\ & +(TM1E + TM5E) \cdot X(E) \\ & +(TM1F + TM5F) \cdot X(F) \\ = \quad & 26X(A) + 15X(B) + 0X(C) + 5X(D) + 10X(E) + 35X(F) \\ = \quad & X \cdot (26\ 15\ 0\ 5\ 10\ 35)^t \end{aligned}$$

La table des temps de production d'un produit par machine nous montre, que le produit C n'a pas besoins des deux machines en question, ce qui signifie que la solution la plus simple est d'arreter la production des autres produits et de se concentrer sur la fabrication du produit C.
Une approche algorithmique confirme cette solution et nous donne le plan de production suivant : $X = (0\ 0\ 135.6644\ 0\ 0\ 0)$

Par contre, cette solution ne donne pas assez de bénéfice pour l'entreprise, il faut alors ajouter d'autres contraintes afin de trouver une vraie solution. Tenant en compte le bénéfice de l'entreprise, on souhaite ne pas souspasser 70% du bénéfice maximum. Si on considère cette nouvelle contrainte et qu'on calcule le montant des produits à fabriquer, on obtient le graphique (fig. 1).

Pour respecter les 70% du benefice maximum, l'entreprise doit fabriquer un total de 343.1 produits. Par contre, le deuxième graphique nous montre que la machine 5 n'est pas du tout utilisée jusqu'aux 89%. Puisqu'on souhaite utiliser les deux machines, on choisit un plan de production correspondant à 95,5% pour raison de changement de la dérivée de la fonction du temps d'utilisation de la machine 5 à ce point-là.

Donc le plan de production est le suivant :
$X = (168168.7394\ 184.0703\ 114.3787\ 36.5623\ 0.0000\ 0.0000)$

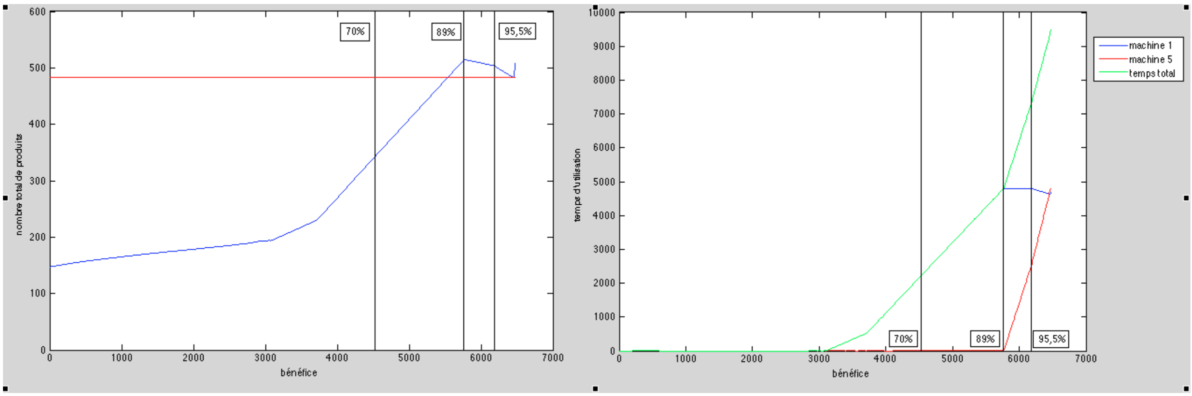

FIGURE 1 – Legende de l'image (à faire ?).

3 Programmation linéaire multicritère

3.1 Matrice de Gain

La matrice de gain, correspondant aux valeurs clés, prises dans le cas idéal de chaque responsable, est générée à partir des choix d'une programmation mono-critères.

Prenant les stratégies de production pour chaque responsable comme suit :

$$\begin{array}{rllllll}
X\text{comptable} = & & (235.625 & 98.3929 & 101.3393 & 22.6786 & 0 & 50.625) \\
X\text{commercial} = & & (0 & 206.03 & 43.26 & 14.7 & 70.97 & 163.61) \\
X\text{atelier} = & & (0 & 252.5 & 195 & 0 & 0 & 101.2500) \\
X\text{stocks} = & 10^{-16}. & (0.5614 & 0.2369 & 0.114 & 0.0365 & 0.0028 & 0.2099) \\
X\text{personnel} = & & (0 & 0 & 135.6644 & 0 & 0 & 0)
\end{array}$$

Et retenant les anciennes fonctions à optimiser, on trouve :

$$G = \begin{pmatrix} 6473.2 & 362.1 & 508.7 & 2563.7 & 9487.4 \\ 5893.8 & 0 & 498.6 & 2494.4 & 9600.0 \\ 6130.2 & 346.3 & 548.7 & 2585.0 & 7331.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2161.6 & 135.7 & 135.7 & 814.0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de cette matrice correspondent aux point de vues associés à chaque responsable, c'est à dire la valeur lui important, il peut s'agir d'euros ou d'unités produites, selon le responsable concerné. Les lignes quand à elles correspondent à des stratégies de production à suivre, prises pour chaque responsable, dans le même ordre que les colonnes.

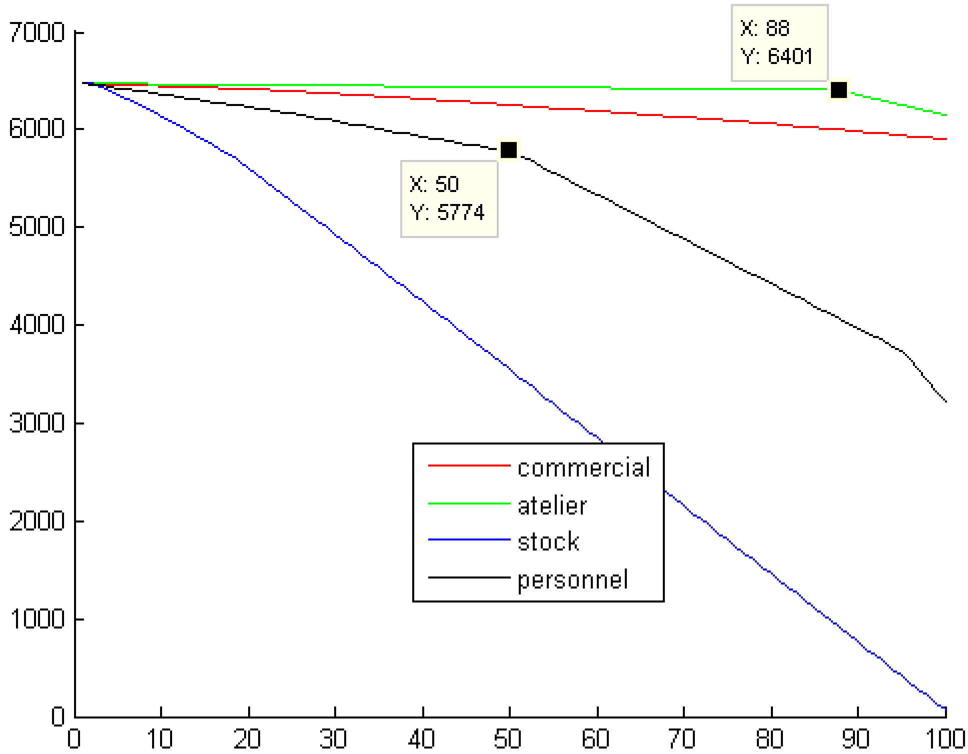

FIGURE 2 – Graphe représentant l'évolution du bénéfice (en euros) par rapport au pourcentage d'interpolation linéaire.

On remarque que les valeurs se trouvant sur la diagonale correspondent à des maximums/minimums, en l'occurence des optimums. Ceci confirme la validité de la matrice de gain, car chaque responsable se trouve dans "son" cas optimal à cet endroit.

3.2 Équilibrage inter-critères

En considérant le bénéfice comme variable "clé" intervenant dans ce problème, l'optimisation des solutions se fait en procédant à une interpolation linéaire entre le cas générant le plus de bénéfices, et le cas idéal pour chaque responsable.

Nous pouvons noter que les critères du responsable d'atelier et du responsable commercial n'influent pas énormément sur le bénéfice, contrairement au responsable des stocks, qui présente une corrélation linéaire avec la diminution du bénéfice. Nous remarquons que l'évolution du bénéfice en fonction du compromis pour les responsables d'atelier et du personnel démarre par une décroissance faible jusqu'à certaines valeurs de compromis "critiques" (respectivement

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

FIGURE 3 – Matrice de concordance (x4)

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 10 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

FIGURE 4 – Matrice de discordance (x10)

88% et 50%), ou la pente de dégression s'accroit.

De ce fait, nous ajusterons le compromis de ces derniers à ces valeurs limites, afin qu'ils soient satisfaits au maximum, sans engendrer une perte trop importante de bénéfice.

4 Analyse multicritère

Le but de cette analyse multi-critère est de déterminer la meilleure solution parmis les 8 solutions proposées dans la matrice des jugements qui nous a été donnée.

Comme nous souhaitons faire émerger une solution unique, la meilleure (et non pas classer les solutions les unes par rapport aux autres) grâce aux critères qui ont été retenus, nous allons utiliser la méthode de détermination Electre 1.

Dans un premier temps dans cette analyse multi-critère, nous avons considéré que tous les critères étaient de même poids.

Nous avons ainsi calculé les matrices de concordance et de discordance relatives à la matrice de jugement.

Nous avons par la suite testé différentes solutions que voici :

On fait varier les seuils de surclassement ainsi que :

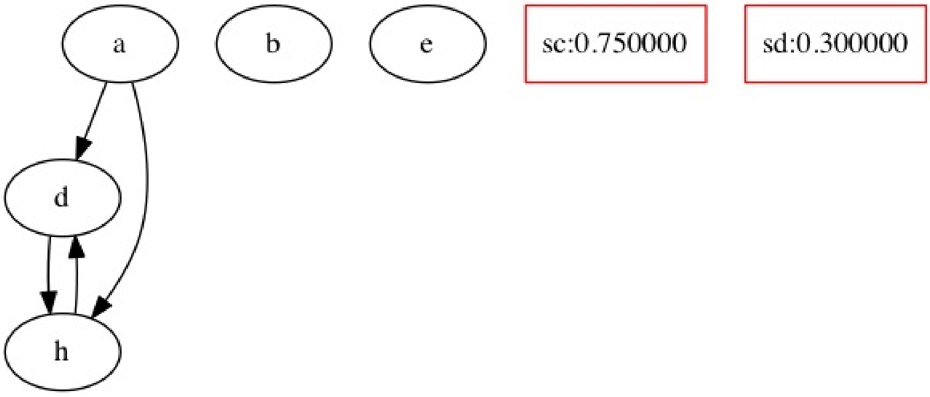

FIGURE 5 – Graphe de surclassement : sc = 3/4, sd = 3/10

Avec un seuil de concordance de 3/4 et un seuil de discordance de 3/10, on peut voir qu'il reste de nombreux liens à faire et donc que les seuils qui ont été pris sont trop restrictifs.

En prenant un seuil de concordance de 2/4 et un seuil de discordance de 5/10, on peut voir à l'inverse que trop de liens ont été créés, et la situation est inexploitable. Nous avons donc choisi des critères trop souples.

En prenant un seuil de concordance de 3/4 et un seuil de discordance de 5/10, on obtient un résultat plus correct cependant elle n'est pas exploitable car aucune solution ne se dégage clairement, notamment A et E. L'analyse sans pondération ne suffit donc pas, il va falloir aller plus loin et refaire la même démarche d'analyse approfondie.

Nous allons donc recommencer l'analyse en donnant les poids suivants aux critères :

- g1 (bénéfice) est de poids 4.
- g2 (gestion du stock) est de poids 1.
- g3 (équilibre commercial) est de poids 2.
- g4 (utilisation des machines 1 et 5) est de poids 2.

On met également en place de nouvelles échelles de jugement.
Les notes iront de 0 à 10 pour un poids fort (g1), de 2 à 8 pour un poids moyen (g3 et g4) et de 3 à 7 pour un poids faible (g2).

Nous effectuons donc un changement d'échelle sur les notes de la matrice de jugement :
Avec $x \in [a1, b1]$ l'élément de la matrice de jugement dans l'ancienne échelle.
$y \in [a2, b2]$ l'élément de la matrice de jugement dans la nouvelle échelle.
$y = x \cdot (b2 - a2)/(b1 - a1) + (a2 \cdot b1 - a1 \cdot b2)/(b1 - a1)$
De poids fort à poids moyen : $y = x \cdot (8 - 2)/10 + (2 \cdot 10 - 0)/10 = 0.6 \cdot x + 2$
De poids fort à poids faible :$y = x \cdot (7 - 3)/10 + (3 \cdot 10 - 0)/10 = 0.4 \cdot x + 3$

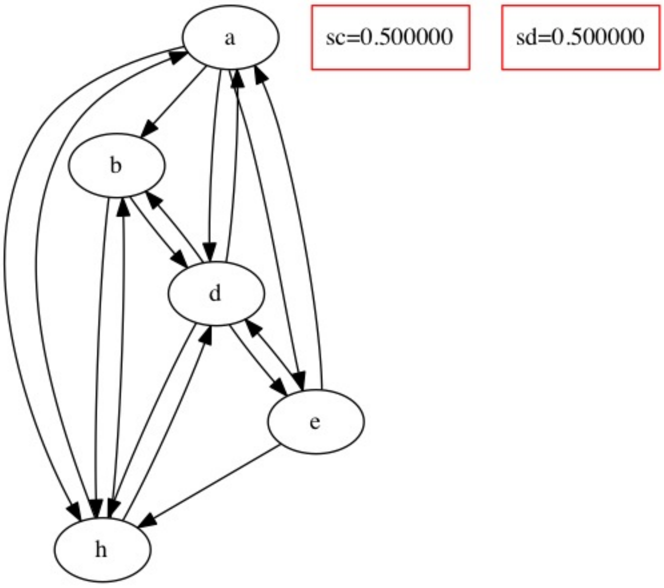

FIGURE 6 – Graphe de surclassement : sc = $5/4$, sd = $5/10$

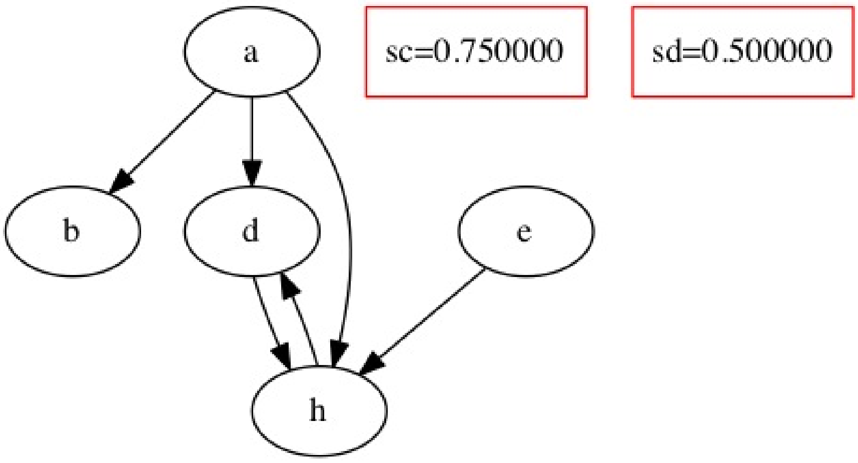

FIGURE 7 – Graphe de surclassement : sc = $3/4$, sd = $5/10$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4.6 & 7.4 & 3.8 \\ 3 & 5.8 & 5 & 4.4 \\ 5 & 5.4 & 3.2 & 7.4 \\ 3 & 5 & 6.2 & 4.4 \end{vmatrix}$$

FIGURE 8 – Nouvelle matrice de jugement

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

FIGURE 9 – Matrice de concordance (x9)

Cette transformation donne la nouvelle matrice de jugement :

Nous pouvons calculer les nouvelles matrices de concordance et de discordance :

Nous testons une nouvelle fois différentes solutions :

Comme lors de la première analyse, nous avons pris des seuils trop contraignants avec un seuil de concordance de 4/9 et un seuil de discordance de 1/10.

Lorsque nous choisissons un seuil de concordance de 5/9 et un seuil de discordance de 3/10, nous arrivons à une solution concluante.

L'analyse approfondie met en évidence que la solution A domine au final la solution E (avec les pondérations que nous avons retenues), et en même temps domine toutes les autres. La solution que nous retenons dans cette analyse multi-critère est donc la solution A.

$$\begin{vmatrix} 10 & 2.4 & 0.8 & 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 10 & 1.2 & 3.6 & 0.6 \\ 3 & 2.4 & 10 & 3 & 1.2 \\ 1.8 & 2.4 & 1.8 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 0.8 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

FIGURE 10 – Matrice de discordance (x10)

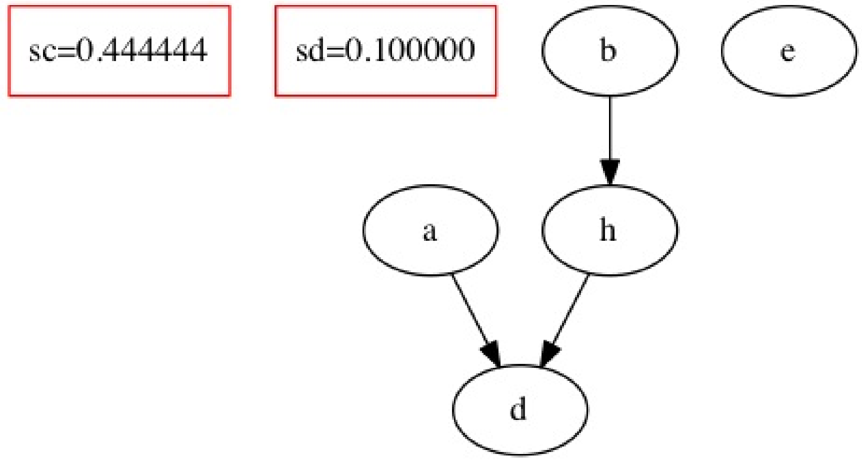

FIGURE 11 – Graphe de surclassement : sc $= 4/9$, sd $= 1/10$

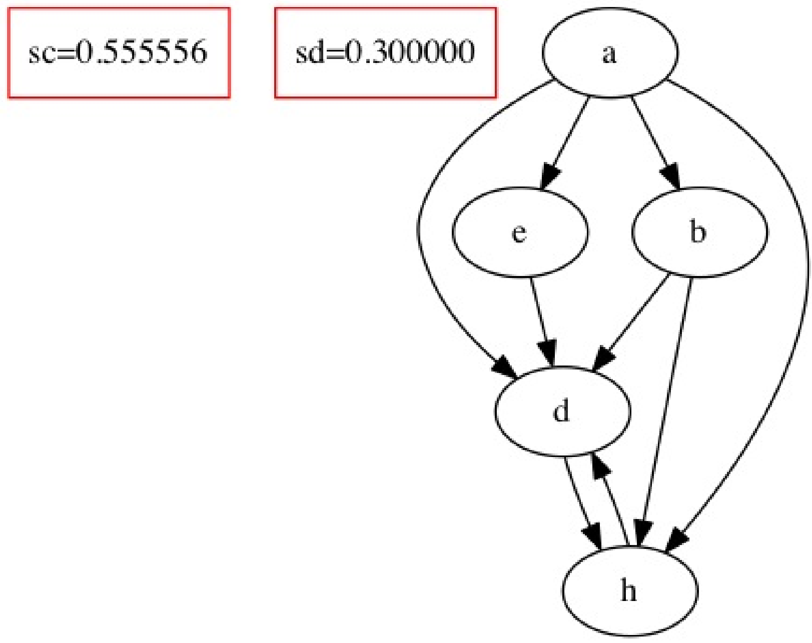

FIGURE 12 – Graphe de surclassement : sc $= 5/9$, sd $= 3/10$