関数論第2レポート問題その1 2025.11.16

以下の問題 1, 2 のうちから 1-2 題を選び解答しレポートとして提出せよ。

1. $D \subset \mathbb{C}$ を 単位円板とする。

1) $w = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ $(\theta \in \mathbb{R}, z_0 \in D)$ は D を D に写す 1 次分数変換である。D 内の C^1-級曲線 C が この変換によって、γ に写されたとする。この時、

$$\int_C \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_\gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2}.$$

を示せ。

2) $ds = \dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$ とする。ds による 2 点 $z_1, z_2 \in D$ の距離を

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_C \int_C \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

で定義する。ただし、inf は z_1, z_2 を結ぶ区分的 C^1-級曲線すべてにわたる下限である。ρ は距離の公理を満たすことを示せ。

3) w_0 を $0 < w_0 < 1$ を満たす実数とする。$\rho(0, w_0)$ を計算せよ。(実軸に沿った積分が最小になることを示せ。)

4) 任意の異なる 2 点 $z_1, z_2 \in D$ に対し、それぞれを 0 とある w_0 $(0 < w_0 < 1)$ に写す 1) の形の一次分数変換が存在することに注意して、$\rho(z_1, z_2)$ の定義において、 下限を与える曲線、すなわち、

$$\rho(z_1, z_2) = \int_{\gamma_*} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

となる曲線 γ_* が存在することを示せ。z_1, z_2 が D の直径上にない時、γ_* は $|z| = 1$ と直交する円弧の一部であることを示せ。

5) 講義内で示したこと (系 2.12) により、$f : D \to D$ 正則の時、

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}$$

が成り立つ。これより、任意の $z_1, z_2 \in D$ に対し、$\rho(f(z_1), f(z_2)) \le \rho(z_1, z_2)$ を示せ。

2. ガンマ関数が $\mathbb{C}$ に有理型に接続されることを講義で見た方法とは異なるやり方で見てみよう。

1)
$$f(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$
とおく。f は $\mathbb{C}$ 上の正則関数となることを示せ。

2) $Re(z) > 0$ の時、
$$g(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$
とおく。$Re(z) > 0$ の時、e^{-t} のマクローリン展開を利用することにより、
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} \tag{*}$$
となることを示せ。

3) $g_1(z)$ を $(*)$ の右辺の級数とする。$D_m := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < m\},\ m \in \mathbb{N}$ とおく。各 D_m 上で g_1 は 0 以下の整数を 1 位の極とする有理型関数であることを示せ。

4) $\{0, -1, -2, \dots\}$ を 1 位の極とする $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 G で、$Re(z) > 0$ では、$G(z) = g(z)$ となるものが一意に存在することを示せ。$\Gamma(z) = f(z) + g(z)$ $(Re(z) > 0)$ だから、$\Gamma(z)$ が $\mathbb{C}$ に有理型に接続されることがわかった。

3. 以下で関数が可積分というときは、定義域のルベーグ測度に関するものとする。

1) $D \subset \mathbb{R}^2$: 領域, $I \subset \mathbb{R}$: 有界閉区間とする。$D \times I$ 上の関数 $f(x, y, t)$ $((x, y) \in D, t \in I)$ は、各 $t \in I$ に対し、D 上 C^1 級、$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は $D \times I$ 上 局所有界 (i.e. 任意のコンパクト集合上で有界) とする。
$$F(x, y) := \int_I f(x, y, t) dt$$
と置く。このとき、
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, t) dt,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, t) dt$$
となることを示せ。特に、f が $D \times I$ 上局所有界で、$z = x + iy$ に関し正則がならば、F は正則となることを示せ。(最後の主張はモレラの定理を使っても証明できるが、今回はそれを用いない。)

2) $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上の局所有界な可測関数とする。

$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt$$

を f の (複素) ラプラス変換ということにする。$f(t)$ が $[0,\infty)$ 上可積分ならば、$\mathcal{L}f$ は $Re(z) > 0$ で正則となることを 1) を用いて示せ。また、$|f(t)| = O(e^{\alpha t})$ $(t \to \infty)$ ならば、 $\mathcal{L}f$ は $Re(z) > \alpha$ で正則となることを示せ。

3) f, g を $(0,\infty)$ 上の可積分、連続関数とする。任意の $t > 0$ に対して $f * g(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds$ と置く。まず、 $\mathcal{L}(f*g)(z) = \mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z)$ を示せ。これより、$f * g(t) = 0$ $(\forall t > 0)$ ならば $(0,\infty)$ 上で $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$ となることを示せ。ただし、講義で見たように $\mathcal{L}h = 0$ ならば、$h = 0$ であることは既知としてよい。

4) $s > 0, \nu > -1$ のとき、$\mathcal{L}t^\nu(s) = \Gamma(\nu+1)/s^{\nu+1}$ を示せ。

5) $a, b > 0$ とする。$f(t) = t^{a-1}, g(t) = t^{b-1}$ とすると、

$$f * g(t) = t^{a+b-1}B(a,b),\ \text{ただし、}B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$$

となることは容易にわかる。これと前問を利用して

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

を示せ。

以下は微分方程式への簡単な応用である。

6) $\mathcal{L}\sin t,\ \mathcal{L}\cos t,\ \mathcal{L}e^{\alpha t}$ を求めよ。

7) $f(t)$ は $[0,\infty)$ 上の関数で、

$$f'(t) + f(t) + \int_0^t f(u)du = \sin t\ (t > 0),\quad f(0) = 0$$

を満たす。f を求めよ。(両辺のラプラス変換を考えてみよ。6) の結果とラプラス変換の一意性を用いよ。)

注. 7) ではラプラス変換の一意性を用いたが、これによって $f(t)$ を計算した結果には $e^{zt}\mathcal{L}f(z)$ の留数が出てきていることに注意したい。それは次のような事情による。

今、$\mathcal{L}f$ は $\mathbb{C}$ で有理型関数となったとし、$\mathcal{L}f$ は $Re(z) > \alpha$ (≥ 0) で正則とする。　すなわち、この関数の特異点は $Re(z) \leq \alpha$ のみにあることに注意する。$z = x + iy$ とすると、

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}f(t)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-iyt}e^{-xt}\tilde{f}(t)dt$$

となり、$e^{-xt}\tilde{f}(t)$ のフーリエ変換の形をしている。ただし、$\tilde{f}(t)$ は f を $= 0$ $(t < 0)$ と拡張したものである。 講義で述べた様な (係数が異なるが) フーリエ逆変換ができれば、

$$e^{-xt}\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{iyt}\mathcal{L}f(x+iy)dy$$

となるから、$z = x + iy$ として、

$$f(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{x-iR}^{x+iR} e^{zt}\mathcal{L}f(z)dz$$

となるであろう。右辺の極限の中身は、積分路 $\{|z| = R\} \cap \{Re(z) \leq \alpha\}$ に沿った $e^{zt}Lf(z)$ の積分と、この積分路と線分 $\{z \,|\, z = x + iy,\ y \in [-R, R]\}$ に囲まれた領域内の $e^{zt}Lf(z)$ の留数が現れるだろう。$\{|z| = R\} \cap \{Re(z) \leq \alpha\}$ の積分が $R \to \infty$ で消えれば、留数が求めるものとなる。まとめると次のようになる。

[ラプラス変換の逆変換公式] f は上で述べたようなものとし、$\mathcal{L}f$ は $\mathbb{C}$ 上で有理型、$Re(z) > \alpha$ (> 0) で正則とする。$e^{zt}\mathcal{L}f(z)$ が有限個の極 $a_1, \ldots, a_n$ を持ち、$\sup_{\{|z|=R\}\cap\{Re(z)\leq\alpha\}} |e^{zt}\mathcal{L}f(z)| \to 0$ $(R \to \infty)$ ならば、

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \mathrm{Res}(a_j)\ (t > 0).$$