# 第一届(2009)全国大学生数学竞赛预赛试卷

**一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）**

1．计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________，其中区域 $D$ 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成三角形区域。

2．设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则 $f(x)=$________；

3．曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是________；

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 $f$ 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________。

**二、（本题满分 5 分）**求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 $n$ 是给定的正整数。

**三、（本题满分 15 分）**设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

**四、（本题满分 15 分）**已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 $D$ 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\mathrm{d}x\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$。

**五、（本题满分 10 分）**已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

**六、（本题满分 10 分）**设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点。当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$。试确定 $a,b,c$，使此图形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小。

**七、（本题满分 15 分）**已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n=1,2,\cdots)$，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

**八、（本题满分 10 分）**求 $x\to 1^-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

# 第一届(2010)全国大学生数学竞赛决赛试卷

一、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1．求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$。

2．计算 $\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma$ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$ 的上侧，$a>0$。

3．现要设计一个容积为 $V$ 的一个圆柱体的容器。已知上下两底的材料费为单位面积 $a$ 元，而侧面的材料费为单位面积 $b$ 元。试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

4． 已知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ 内满足 $f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$。

二、求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

1． $\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$；　　2． $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0$。

三、（本题满分 10 分） 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导，$f(1)=0, f'(1)=2$，求 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$。

四、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，无穷积分 $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛。 求 $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx$。

五、（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$。证明：(1) 存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

六、(本题满分 14 分) 设 $n>1$ 为整数，$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}\right)dt$。证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内至少有一个根。

七、(本题满分 12 分) 是否存在 $R^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$？若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明。

八、(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x\in[0,\infty)$，当自然数

$n \to \infty$ 时 $f(x+n) \to 0$。证明：函数序列 $\{f(x+n): n=1,2,...\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

# 第二届(2010)全国大学生数学竞赛预赛试卷

**一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）**

1. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.。

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$。

3. 设 $s>0$，求 $I=\int_0^{\infty} e^{-sx}x^n dx (n=1,2,\cdots)$。

4. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}, g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

5. 求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离。

**二、（本题满分 15 分）**设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$f''(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0, \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0,$ 且存在一点 $x_0$，使得 $f(x_0)<0$。证明：

方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根。

**三、（本题满分 15 分）**设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases} (t>-1)$ 所确定，且

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$ 有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 出相切,

求函数 $\psi(t)$。

**四、（本题满分 15 分）**设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 证明：（1）当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛；

（2）当 $\alpha\le 1$ 且 $s_n\to\infty(n\to\infty)$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散。

**五、（本题满分 15 分）**设 $l$ 是过原点、方向为 $(\alpha,\beta,\gamma)$，（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，

均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，其中（$0<c<b<a$, 密度为 1）绕 $l$ 旋转。

（1）求其转动惯量；（2）求其转动惯量关于方向 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 的最大值和最小值。

六、(本题满分 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 $C$ 上，曲线积分 $\oint_c \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数。(1) 设 $L$ 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1,$ 证明 $\oint_c \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0;$ (2) 求函数 $\varphi(x)$；(3) 设 $C$ 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_c \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$。

# 第二届(2011)全国大学生数学竞赛决赛试卷

一、计算下列各题（每题 5 分，共 15 分）

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；　　2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$；

3.　已知 $\begin{cases} x=\ln\left(1+e^{2t}\right) \\ y=t-\arctan e^t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

二、(本题满分 10 分) 求方程 $\left(2x+y-4\right)dx+\left(x+y-1\right)dy=0$ 的通解。

三、(本题满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x$=0 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为 0，证明：存在唯一一组实数 $k_1,k_2,k_3$，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f\left(h\right)+k_2f\left(2h\right)+k_3f\left(3h\right)-f\left(0\right)}{h^2}=0。$$

四、(本题满分 15 分) 设 $\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$，$\Gamma$ 为 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 的交线，求椭球面 $\Sigma_1$ 在 $\Gamma$ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

五、(本题满分 16 分) 已知 $S$ 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z\ge 0$）取上侧，$\Pi$ 是 $S$ 在 $P\left(x,y,z\right)$ 点处的切平面，$\rho\left(x,y,z\right)$ 是原点到切平面 $\Pi$ 的距离，$\lambda,\mu,\nu$ 表示 $S$ 的正法向的方向余弦。计算：

(1) $\iint\limits_S \frac{z}{\rho\left(x,y,z\right)}dS$；　　(2) $\iint\limits_S z\left(\lambda x+3\mu y+\nu z\right)dS$。

六、（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且 $|f'(x)|<mf(x)$，其中 $0<m<1$。任取实数 $a_0$，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}),n=1,2,\cdots$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛。

七、（本题满分 15 分）是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\le 1$？请说明理由。

# 第三届（2011）全国大学生数学竞赛预赛试卷

一、计算题（满分 24 分，每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$ .

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ .

3. 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$.

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

二、（本题满分 16 分，每小题 8 分）

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=a$；

2. 如果存在正整数 $p$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$ .

三、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 $x_0$，使得 $f'''(x_0)=3$ .

四、（本题满分 15 分）在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 $\rho$，在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 $m$ 的质点，求射线对该点的引力.

五、（本题满分 15 分） 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ .

六、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 连续，$a,b,c$ 为常数，$\Sigma$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，

记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} f\left(ax+by+cz\right)dS$．求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du$ ．

# 第三届（2012）全国大学生数学竞赛决赛试卷

**一、计算下列各题（本题满分 30 分，每小题 6 分）**

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{1}{2}x-\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$

（3）设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_x^2 f_{yy}-2f_x f_y f_{xy}+f_y^2 f_{yy}=0$ 且 $f_y\neq 0$，$y=y(x,z)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数．求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

（4）求不定积分 $I=\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

（5）求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积

**二、（本题满分 13 分）**讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}dx$ 的敛散性，其中 $\alpha$ 是一个实常数.

**三、（本题满分 13 分）**设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微，并且满足:存在 $M>0$，使得 $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$(k=1,2,\cdots)$，且 $f(\dfrac{1}{2^n})=0$，$(n=1,2,\cdots)$ 求证：在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$

**四、（本题满分16分，第1小题6分，第2小题10分）**

设$D$为椭圆形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ $(a>b>0)$，面密度为 $\rho$ 的均质薄板；$l$为通过椭圆焦点 $(-c,0)$（其中 $c^2=a^2-b^2$）垂直于薄板的旋转轴.

1. 求薄板$D$绕$l$旋转的转动惯量$J$;
2. 对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

**五、（本题满分 12 分）**设连续可微函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)=0$ 有连续的偏导数）唯一确定，$L$ 为正向单位圆周．试求：$I=\oint\limits_L(xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$

**六、（本题满分 16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分）**

(1) 求解微分方程 $\begin{cases} y' - xy = xe^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(2) 如 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{1+n^2x^2} f(x)dx = \dfrac{\pi}{2}$

# 第四届（2012）全国大学生数学竞赛预赛试卷

**一、（本题满分 30 分，每小题 6 分）**

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n!\right)^{\frac{1}{n^2}}$ ；

2. 求通过直线 $L:\begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 $\pi_1,\pi_2$，使其中一个平面过点 $\left(4,-3,1\right)$ ；

3. 已知函数 $z = u\left(x,y\right)e^{ax+by}$, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$，确定常数 $a$ 和 $b$，使得函数 $z = z\left(x,y\right)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$ ；

4. 设函数 $u = u\left(x\right)$ 连续可微，$u\left(2\right) = 1$，且 $\int\left(x+2y\right)udx + \left(x+u^3\right)udy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u\left(x\right)$；

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$ .

**二、（本题满分 10 分）**计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx$

**三、（本题满分 10）**求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解，精确到 0.001.

**四、（本题满分 12 分）**设函数 $y = f\left(x\right)$ 的二阶可导，且 $f''\left(x\right) > 0, f\left(0\right) = 0, f'\left(0\right) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3 f\left(u\right)}{f\left(x\right)\sin^3 u}$，其中 $u$ 是曲线 $y = f\left(x\right)$ 上点 $p\left(x, f\left(x\right)\right)$ 处的切线在 $x$ 轴上的截距.

**五、（本题满分 12 分）**求最小实数 $C$，使得满足 $\int_0^1\left|f\left(x\right)\right|dx = 1$ 的连续函数 $f\left(x\right)$ 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx \le C$

**六、（本题满分 12 分）**设 $f\left(x\right)$ 为连续函数，$t > 0$. 区域 $\Omega$ 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面

$x^2+y^2+z^2=t^2\left(t>0\right)$所围起来的部分．定义三重积分

$F\left(t\right)=\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求导数$F'\left(t\right)$

七、（本题满分 14 分）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$为正项级数

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

# 第四届(2013)全国大学生数学竞赛决赛试卷

一、(25 分)简答下列各题

1. 计算 $\lim\limits_{x\to0+}\left[\ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln(ax)}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$，$(a>0)$

2. 设$f(u,v)$具有连续偏导数，且满足$f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求

   $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解。

3. 求在$[0,+\infty)$上的可微函数$f(x)$，使$f(x)=e^{-u(x)}$，其中$u(x)=\int_0^x f(t)dt$。

4. 计算不定积分$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$

5. 过直线$\begin{cases}10+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程。

二、(15 分）设曲面$\Sigma: z^2=x^2+y^2$，$1\le z\le 2$，其面密度为常数$\rho$，求在原点处的质量为 1 的质点和$\Sigma$之间的引力（记引力常数为$G$）。

三、(15 分）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可导，$f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\right]$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

四、(15 分)　设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$\left|f(x)\right|<1$，又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证：在$(-2,2)$内至少存在一点$\xi$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$。

五、(15 分) 求二重积分$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left|x^2+y^2-x-y\right|dxdy$

六、(15 分) 若对于任何收敛于零的序列$\{x_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$都是收敛的，试证明：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛。

# 第五届（2013）全国大学生数学竞赛预赛试卷

**一. 解答下列各题（每小题 6 分共 24 分，要求写出重要步骤）**

1. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

2. 证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$不是绝对收敛的

3. 设函数$y=y(x)$由$x^3+3x^2y-2y^3=2$确定，求$y(x)$的极值。

4. 过曲线$y=\sqrt[3]{x}\,(x\ge 0)$上的点 A 作切线，使该切线与曲线及$x$轴所围成的平面图形的面积

为$\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标。

**二.**（满分 12）计算定积分$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

**三.**（满分 12 分）设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数$f''(0)$，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明 ：级

数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛。

**四.**（满分 12 分）设$|f(x)|\le\pi, f'(x)\ge\pi>0\,(a\le x\le b)$，证明$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\le\frac{2}{m}$

五、（满分 14 分）设$\Sigma$是一个光滑封闭曲面，方向朝外。给定第二型的曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)dydz+\left(2y^3-y\right)dzdx+\left(3z^3-z\right)dxdy$。试确定曲面$\Sigma$，使积分 I 的值最小，并求该最小值。

**六.**（满分 14 分）设$I_a(r)=\oint_C\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)^a}$，其中$a$为常数，曲线 C 为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，

取正向。求极限$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)$

七.（满分 14 分）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和。

# 第五届（2014）全国大学生数学竞赛决赛试卷

一. 解答下列各题（每小题 7 分，共 28 分，要求写出重要步骤）

1. 计算积分$\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dtdx$.

2. 设 $f(x)$ 是[0, 1]上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)dx=1$，求一个这样的函数 $f(x)$ 使积分 $I=\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)dx$ 取得最小值.

3. 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数，$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，记 $\Gamma$ 在 $xoy$ 面上的投影曲线为 S，求 S 上过点 $(x_0,y_0)$ 的切线方程.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中 $a$ 为常数，矩阵 $B$ 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 $E$ 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $Rank\left(A+B\right)=3$，试求常数 $a$ 的值.

二.（12 分）设 $f(x)\in C^4\left(-\infty,+\infty\right)$, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 $\theta$ 是与 $x,h$ 无关的常数，证明 $f(x)$ 是不超过三次的多项式.

三.（12 分）设当 $x>1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件：$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$，且 $f(0)=1$，试证：当 $x\geq 0$ 时，有 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$.

四.（10 分）设 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1,\right\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上有连续二阶偏导数，若对任何 $x,y$ 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$，且 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\leq A$. 证明 $I\leq\frac{A}{4}$.

五.（12 分）设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$，有向曲面 $\Sigma_t$ 是圆柱体

$x^2+y^2\le t^2$，$0\le z\le 1$的表面，方向朝外，记第二型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma_t} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，

求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

六．（12 分）设$A,B$为两个 n 阶正定矩阵，求证$AB$正定的充要条件是$AB=BA$.

七．（12 分）假设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径是 1，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，且$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A$，证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛于常数$A$。

## 第六届（2014）全国大学生数学竞赛预赛试卷

**一．填空题（满分 30 分，每小题 6 分）**

1. 已知$y_1=e^x$和$y_2=xe^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该方程是____________；

2. 设有曲面$S:z=x^2+2y^2$和平面$L:2x+2y+z=0$，则与$L$平行的$S$的切平面方程是__；

3. 设函数$y=y(x)$由方程$x=\int_1^{y-x}\sin^2(\dfrac{\pi t}{4})dt$所确定，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________；

4. 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______________；

5. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$_____________；

**二．（本题满分 12 分）**设$n$为正整数，计算$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{d}{dx}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|dx$。

**三．（本题满分 14 分）**设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数$A,B$使得$|f(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，证明对任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\dfrac{B}{2}$。

**四．（本题满分 14 分）**（1）设有一球缺高为$h$，所在球半径为$R$。证明该球缺的体积为$\dfrac{\pi}{2}(3R-h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh$。

（2）设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P:x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$。记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$。

**五．（本题满分 15 分）**设$f$在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

六．（本题满分 15 分）设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$。

# 第一届(2009)全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

一、填空题

1．$\underline{\dfrac{16}{15}}$； 2． $\underline{f(x)=3x^2-\dfrac{10}{3}}$； 3．$\underline{2x+2y-z-5=0}$； 4． $\underline{\dfrac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}}$。

二、解： 原式

$$=\lim_{x\to}(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n})^{\frac{n}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\frac{e}{x}}$$

$$=e^{e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{nx}}=e^{e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}=e^{e\frac{1+2+\cdots+n}{n}}=e^{\frac{n+1}{2}e}。$$

三、 解：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 和函数 $f(x)$ 连续知， $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

因 $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ ， 故 $g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$ ， 因 此 ， 当 $x\neq0$ 时 ，

$g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，故 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)=0$

当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\dfrac{f(x)}{x}$，

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2},$$

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}[-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{f(x)}{x}]=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}。$$

这表明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、证明： 因被积函数的偏导数连续在 $D$ 上连续，故由格林公式知

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^{\sin y})-\dfrac{\partial}{\partial y}(-ye^{-\sin x})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^{-\sin y})-\dfrac{\partial}{\partial y}(-ye^{\sin x})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

而 $D$ 关于 $y=x$ 是对称的，即知 $\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

因此$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\mathrm{d}x$。

（2）因$e^t + e^{-t} = 2(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots) \ge 2(1+t^2)$

故$e^{\sin x} + e^{-\sin x} \ge 2+\sin^2 x = 2+\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{5-\cos 2x}{2}$

由$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\mathrm{d}x = \iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

知$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\iint_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \frac{1}{2}\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\iint_D (e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \pi\int_0^{\pi}(e^{-\sin x}+e^{\sin x})\mathrm{d}x \ge \pi\int_0^{\pi}\frac{5-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\pi^2$

即$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\mathrm{d}x \ge \frac{5}{2}\pi^2$。

**五、解：** 设$y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是二阶常系数线性非齐次微分方程$y'' + by' + cy = f(x)$的三个解，则$y_2 - y_1 = e^{-x} - e^{2x}$和$y_3 - y_1 = e^{-x}$都是二阶常系数线性齐次微分方程$y'' + by' + cy = 0$的解，因此$y'' + by' + cy = 0$的特征多项式是$(\lambda-2)(\lambda+1)=0$，而$y'' + by' + cy = 0$的特征多项式是$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$，因此二阶常系数线性齐次微分方程为$y'' - y' - 2y = 0$，由$y_1'' - y_1' - 2y_1 = f(x)$和$y_1' = e^x + xe^x + 2e^{2x}$，$y_1'' = 2e^x + xe^x + 4e^{2x}$知，

$f(x) = y_1'' - y_1' - 2y_1 = xe^x + 2e^x + 4e^{2x} - (xe^x + e^x + 2e^{2x}) - 2(xe^x + e^{2x}) = (1-2x)e^x$

二阶常系数线性非齐次微分方程为$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$。

**六、解：** 因抛物线$y = ax^2 + bx + 2\ln c$过原点，故$c=1$，于是

$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2+bx)\mathrm{dt} = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}$，即$b = \frac{2}{3}(1-a)$。而此图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积$V(a) = \pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\mathrm{dt} = \pi\int_0^1 (ax^2 + \frac{2}{3}(1-a)x)^2\mathrm{dt}$

$= \pi a^2\int_0^1 x^4\mathrm{dt} + \pi\frac{4}{3}a(1-a)\int_0^1 x^3\mathrm{dt} + \pi\frac{4}{9}(1-a)^2\int_0^1 x^2\mathrm{dt}$

$= \frac{1}{5}\pi a^2 + \pi\frac{1}{3}a(1-a) + \pi\frac{4}{27}(1-a)^2$，即$V(a) = \frac{1}{5}\pi a^2 + \pi\frac{1}{3}a(1-a) + \pi\frac{4}{27}(1-a)^2$，

令$V'(a) = \frac{2}{5}\pi a + \pi\frac{1}{3}(1-2a) - \pi\frac{8}{27}(1-a) = 0$，得$54a + 45 - 90a - 40 + 40a = 0$，即$4a+5=0$，又$V''(-\frac{5}{4}) = \frac{4}{135}\pi > 0$，因此$a = -\frac{5}{4}$，$b = \frac{3}{2}$，$c=1$时体积最小。

七、解： $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$，即 $y'-y=x^{n-1}e^x$，由一阶线性非齐次微分方程公式知 $y=e^x(C+\int x^{n-1}\mathrm{d}x)$，即 $y=e^x(C+\frac{x^n}{n})$， 因此 $u_n(x)=e^x(C+\frac{x^n}{n})$。

由 $\frac{e}{n}=u_n(1)=e(C+\frac{1}{n})$ 知， $C=0$ ， 于是 $u_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$ 。下面求级数的和：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}$， 则

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}e^x+\frac{x^ne^x}{n})=S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}e^x=S(x)+\frac{e^x}{1-x}$， 即 $S'(x)-S(x)=\frac{e^x}{1-x}$，

由一阶线性非齐次微分方程公式知 $S(x)=e^x(C+\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x)$， 令 $x=0$，得 $0=S(0)=C$，

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和 $S(x)=-e^x\ln(1-x)$ 。

八、解： 令 $f(t)=x^{t^2}$，则因当 $0<x<1$， $t\in(0,+\infty)$ 时， $f'(t)=2tx^{t^2}\ln x<0$，故 $f(t)=x^{t^2}=e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调减。因此

$$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\le f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(t)\mathrm{d}t=1+\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$$

即 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\le1+\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$， 又 $\sum_{n=0}^{\infty}f(n)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$， $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x}}{-1}=1$，

$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以，当 $x\to1^-$ 时，

与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量是 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ 。

# 第一届(2010)全国大学生数学竞赛决赛试卷(答案)

一、1．解： $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})(\frac{k\pi}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ 。

2．解：将分片后投影到相应坐标平面上化为二重积分逐片计算。

$I_1=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}dydz=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}d\theta=-\frac{2}{3}\pi a^3$，其中 $D_{yz}$ 为 $yoz$ 平面上的半圆： $y^2+z^2\le a^2,z\le0$ 。

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z^2+a^2)dxdy=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]^2dxdy=\frac{\pi a^3}{6}$$，其中 $D_{xy}$ 为 $xoy$ 平面上的半圆：$x^2+y^2\le a^2$。因此 $I=I_1+I_2=-\frac{1}{2}\pi a^3$。

3．解：设圆柱容器的高为 $h$，上下底的径为 $r$，则有 $V=\pi r^2 h$，或 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，所需费用 $F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}$，显然，费用最少，应有 $F'(r)=4a\pi r-\frac{2bV}{r^2}=0$，即 $r^3=\frac{bV}{2a\pi}$，这时高与底的直径之比为 $\frac{h}{2r}=\frac{V}{2\pi r^3}=\frac{a}{b}$。

4．解：由 $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]$ 得

$$I=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]}(令u=\frac{\pi}{4}-x)=-\sqrt{2}\int\frac{du}{\cos u[1+2\sin^2 u]}$$

$$=-\sqrt{2}\int\frac{d\sin u}{\cos^2 u[1+2\sin^2 u]}(令t=\sin u)=-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)[1+2t^2]}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}[\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{2dt}{1+2t^2}]=-\frac{\sqrt{2}}{3}[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t]+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1+\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}-x)}\right|-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x))+C$$

二、1．解：$I=\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e)=e\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1)=e\lim\limits_{n\to\infty}[n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n]$

$$=e\lim_{n\to\infty}[n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n]=-\frac{e}{2}。$$

2．解：$I=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3})^{\frac{3}{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}\cdot\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}-3}{3}\cdot n}$

$$=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}]}=e^{\frac{1}{3}[\ln a+\ln b+\ln c]}=\sqrt[3]{abc}。$$

三、解：由题意 $\lim\limits_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to1}\frac{f(y)}{y-1}=f'(1)=2$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}=2$，

故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}}{1+\frac{x\tan x}{x^2}}=\frac{1}{2}。$$

四、解：设$l=\int_0^{\infty} f(x)dx$，并令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，此时$F'(x)=f(x)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=l$。

对于任意的$y>0,\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=\frac{1}{y}\int_0^y xdF(x)=\frac{1}{y}xF(x)\Big|_{x=0}^{x=y}-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx$

$$=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx$$

故$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=\lim\limits_{y\to+\infty}[F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx]=l-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\int_0^y F(x)dx}{y}$

$$=l-\lim_{y\to+\infty}\frac{\int_0^y F(x)dx}{y}(\text{洛比达法则})=l-\lim_{y\to+\infty}F(y)=l-l=0。$$

五、证明：(1)令$F(x)=f(x)-x,$则在上连续$[0,1]$上连续，且$F(\frac{1}{2})F(1)<0$，由零点定理知存在$\xi\in(\frac{1}{2},1)$使得$F(\xi)=0$即$f(\xi)=\xi$。

(2)令$G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则$G(0)=G(\xi)=0$，故存在存在$\eta\in(0,\xi)$使得$G'(\eta)=0$，

即$G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f'(\eta)-\eta]=0$，即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

六、证明：因为对任意的$t>0$，$e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!})<1$，故有

$F(\frac{n}{2})=\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\frac{n}{2}$。下面只需证明$F(n)>\frac{n}{2}$即可。

$$F(n)=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}\right)dt=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}\right)de^{-t}$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^n}{n!}\right)+\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)dt$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^n}{n!}\right)+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)+\cdots+$$

$$1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-e^{-n}$$

记 $a_i=\dfrac{n^i}{i!}$，那么 $a_0=1<a_1<a_2<\cdots<a_n$。观察下面的方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^n}{n!})$$

基于上述观察，可得

$$F(n)>n+1-\frac{(n+2)}{2}(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^n}{n!})>n+1-\frac{n+2}{2}=\frac{n}{2}$$ 。证毕。

**七、解：** 不存在。解法一：假设存在 $R^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$。考虑方程 $f(f(x))=x$。即 $1+x^2+x^4-x^3-x^5=x$，$(x-1)(1+x^2+x^4)=0$，此方程有唯一实根 $x=1$，即 $f(f(x))$ 有唯一不动点 $x=1$。下面说明 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的不动点。事实上，令 $f(1)=t$，则 $f(t)=f(f(1))=1$，$f(f(t))=f(1)=1$，因此 $t=1$。记 $g(x)=f(f(x))$，$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$，则 $g'(1)=[f'(1)]^2\ge 0$。另一方面，$g'(x)=2x+4x^3-3x^2-5x^4$，从而 $g'(1)=-2$。矛盾。

解法二：首先，不存在 $x_k\to+\infty$，使得 $f(x_k)$ 有界，否则 $f(f(x_k))=1+{x_k}^2+{x_k}^4-{x_k}^3-{x_k}^5$ 有界，矛盾。因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，从而由连续函数的介值性有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$。若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=-\infty$，矛盾。若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to-\infty}f(y)=+\infty$，矛盾。因此无论哪种情况都不可能。

八、证明：由于 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ $(x_1\ge 0,x_2\ge 0)$。取一个充分大的自然数 $m>\dfrac{1}{\delta}$，并在 $[0,1]$ 中取 $m$ 个点：$x_1=0<x_2<\cdots<x_m=1$，其中 $x_j=\dfrac{j}{m}(j=1,2,\cdots,m)$。这样，对

于每一个 $j$，$\left|x_{j+1}-x_j\right|=\dfrac{1}{m}<\delta$，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对于每一个 $x_j$，存在一个 $N_j$ 使得 $\left|f(x_j+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要 $n>N_j$，这里的 $\varepsilon$ 是前面给定的。令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$，那么 $\left|f(x_j+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要 $n>N$，其中 $j=1,2,\cdots,m$。设 $x\in[0,1]$ 是任意一点，这时总有一个 $x_j$ 使得 $x\in[x_j,x_{j+1}]$。由于 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续及 $\left|x-x_j\right|<\delta$ 可知，$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}(\forall n=1,2,\cdots)$。另一方面，我们已经知道 $\left|f(x_j+n)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要 $n>N$，这样，由后面证得的两个式子就得到 $\left|f(x+n)\right|<\varepsilon$，只要 $n>N$，$x\in[0,1]$。注意到这里的 $N$ 的选取与点 $x$ 无关，这就证实了函数序列 $\{f(x+n):n=1,2,...\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

# 第二届(2010)全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

一、1. 解： $x_n=(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})/(1-a)$

$$=(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})/(1-a)=\cdots=(1-a^{2^{n+1}})/(1-a)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})/(1-a)=1/(1-a)$$。

2. 解： $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x}$，令 $x=\dfrac{1}{t}$，则原式 $=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-1}{t^2}}=e^{\frac{-1}{2}}$。

3. 解：

$$I_n=\int_0^\infty e^{-sx}x^ndx=(-\frac{1}{s})\int_0^\infty x^nde^{-sx}=(-\frac{1}{s})[x^ne^{-sx}\big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-sx}dx^n]=$$
$$\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx}x^{n-1}dx=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n(n-1)}{s^2}I_{n-2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}$$
。

4. 解：因为 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，所以 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}f'(\dfrac{1}{r}),\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^6}f''(\dfrac{1}{r})+\dfrac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\dfrac{1}{r})$，

由对称性知 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r^4}f''(\dfrac{1}{r})+\dfrac{1}{r^3}f'(\dfrac{1}{r})$。

5. 解：直线 $l_1$ 的对称式方程为 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(4,-2,-1)$，故 $\vec{a}\times\vec{b}=(-1,1,-6)$，两直线上的定点分别为 $P_1=(0,0,0)$，$P_2=(2,1,3)$，

$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$，由向量的性质知，两直线的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right|=\left|\frac{-2+1-18}{\sqrt{1+1+36}}\right|=\sqrt{\frac{19}{2}}$。

二、解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$ 知，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$，又 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调增加，又由拉格朗日中值定理知，当 $x>a$ 时，$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)>f'(a)(x-a)$，$\xi>a$，即 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$，故当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，从而存在 $b>a>x_0$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$。同理存在 $d<x_0$，使得 $f(d)>0$。在 $[x_0,b],[d,x_0]$ 上应用零点定理知至少存在两点 $x_1\in(x_0,b),x_2\in(d,x_0)$，使得 $f(x_1)=0,f(x_2)=0$。下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根。用反证法。假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 $x_1,x_2$，$x_3$，且 $x_1<x_2<x_3$。对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别应用罗尔定理，则各至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。对 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理知，至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\eta)=0$，与已知矛盾。综上所述，$f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根。

三、解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dx)}{dx}=\frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}。$$

又 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，整理得 $\Psi''(t)-\frac{1}{1+t}\Psi'(t)=3(1+t)$，记 $u=\Psi'(t)$，则 $u'(t)-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$，解得 $u=(1+t)(3t+C_1)$。由 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 出相切得，$\psi(1)=\frac{3}{2e}$，$\psi'(1)=\frac{2}{e}$，所以 $u(1)=\Psi'(1)=\frac{2}{e}$，从而 $C_1=\frac{1}{e}-3$。$\Psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$，再由 $\psi(1)=\frac{3}{2e}$ 求得 $C_2=2$，于是 $\Psi(t)=t^3+\frac{1}{2e}t^2+(\frac{1}{e}-3)t+2 \quad (t>-1)$。

四、 解：令 $f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$。将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上用拉格朗日中值定理，

存在$\xi \in (S_{n-1}, S_n)$，$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$，即$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$。

（1）当$\alpha>1$时，$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{1}{\xi}a_n \ge (\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$。显然$\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\}$的前项和有界，从而收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛。

（2）当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，$S_n$单调递增，所以

$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k} \ge \dfrac{1}{S_{n+p}}\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k=\dfrac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\dfrac{S_n}{S_{n+p}}$，因为$S_n \to +\infty$，对任意的$n$，存在$n \in N$，$\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k} \ge \dfrac{1}{2}$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散。当$\alpha<1$时，$\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}} \ge \dfrac{a_n}{S_n}$，由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散。

**五、解**：（1）设旋转轴$l$的方向向量为$\vec{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭圆内任意一点$P(x,y,z)$的径向量为$\vec{r}$，则点$P(x,y,z)$到旋转轴$l$的距离的平方为

$$d^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx$$

$$\because \iiint\limits_{\Omega} xydV=\iiint\limits_{\Omega} yzdV=\iiint\limits_{\Omega} zxdV=0$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2dV=\int_{-c}^{c} z^2dz \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} dxdy=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})z^2dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

由轮换对称性，$\iiint\limits_{\Omega} x^2dV=\dfrac{4}{15}\pi a^3bc,\iiint\limits_{\Omega} y^2dV=\dfrac{4}{15}\pi ab^3c$

由转动惯量的定义

$$I=\iiint\limits_{\Omega} d^2dV=(1-\alpha^2)\frac{4}{15}\pi a^3bc+(1-\beta^2)\frac{4}{15}\pi ab^3c+(1-\gamma^2)\frac{4}{15}\pi abc^3$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2]$$

（2）考虑目标函数$V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$在约束$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$下的条件极值。设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)，$$

令 $L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0$，$L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0$，$L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0$，

$L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$，解得极值点为 $Q_1=(\pm1,0,0,a^2)$，$Q_2=(0,\pm1,0,b^2)$，$Q_3=(0,0,\pm1,c^2)$，比较可知，绕 $z$ 轴的转动惯量最大，为 $J_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2+c^2)$，绕 $x$ 轴的转动惯量最小，为 $J_{\min}=\dfrac{4abc\pi}{15}(b^2+c^2)$。

六、解：(1) 设 $\oint_L\dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I$，闭曲线 $L$ 由 $L_i,i=1,2$ 组成，设 $L_0$ 为不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0\cup L_1^-$ 和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i,i=1,2$，由曲线积分的性质和题设条件知

$$\oint_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I-I=0$$

(2) 令 $P=\dfrac{2xy}{x^4+y^2},Q=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$，由（1）知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$，代入可得

$$\varphi'(x)(x^4+y^2)-\varphi(x)4x^3=2x^5-2xy^2$$

上式将两边看做 y 的多项式，整理得 $y^2\varphi'(x)+\varphi'(x)x^4-\varphi(x)4x^3=y^2(-2x)+2x^5$

由此可得 $\varphi'(x)=-2x$，$\varphi'(x)x^4-\varphi(x)4x^3=2x^5$，解得：$\varphi(x)=-x^2$。

(3) 设 $D$ 为正向闭曲线 $C_a:x^4+y^2=1$ 所围区域，由 (2) 知 $\oint_C\dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\dfrac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$。由格林公式和对称性知

$$\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xydx-x^2dy=\iint_D(-4x)dxdy=0。$$

# 第二届(2011)全国大学生数学竞赛决赛试卷(答案)

一、1. 解：$e^{-\frac{1}{3}}$；　　2. 解：$I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}]=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln 2$；

3. 解：$\frac{1}{4}[-2e^{-4t}+e^{-3t}-2e^{-2t}+e^{t}]$。

二、解：设 $P=2x+y-4, Q=x+y-1$，则 $Pdx+Qdy=0$。

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1, \therefore Pdx+Qdy=0$ 是一个全微分方程，设 $dz=Pdx+Qdy$，

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore$ 该曲线积分与路径无关，

$$\therefore z=\int_0^x (2x-4)dx+\int_0^y (x+y-1)dy=x^2-4x+xy+\frac{1}{2}y^2-y$$。

三、证明：由极限的存在性：$\lim_{h\to 0}\left[k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)\right]=0$

即 $\left[k_1+k_2+k_3-1\right]f(0)=0$，又 $f(0)\neq 0$，$\therefore k_1+k_2+k_3=1$①

由洛比达法则，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}=0$$

由极限的存在性得 $\lim_{h\to 0}\left[k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)\right]=0$

即 $(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)=0$，又 $f'(0)\neq 0$，$\therefore k_1+2k_2+3k_3=0$②

再次使用洛比达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f''(h)+4k_2 f''(2h)+9k_3 f''(3h)}{2}=0$$
$$\therefore (k_1+4k_2+9k_3)f''(0)=0 \because f''(0)\neq 0$$

$\therefore k_1+4k_2+9k_3=0$③

由①②③得 $k_1,k_2,k_3$ 是齐次线性方程组 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+4k_2+9k_3=0\end{cases}$ 的解，因其系数行列式等于 2，

不等于 0，所以存在唯一的一组实数存在唯一一组实数 $k_1,k_2,k_3$，使得

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0$。

四、解：设 $\Gamma$ 上任一点 $M(x,y,z)$，令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，则

$F_x^{'}=\dfrac{2x}{a^2},F_y^{'}=\dfrac{2y}{b^2},F_z^{'}=\dfrac{2z}{c^2},\therefore$ 椭球面 $\Sigma_1$ 在 $\Gamma$ 上点 $M$ 处的法向量为：

$\vec{t}=\left(\dfrac{x}{a^2},\dfrac{y}{b^2},\dfrac{z}{c^2}\right),\therefore\Sigma_1$ 在点 M 处的切平面为 $\Pi$：

$\dfrac{x}{a^2}(X-x)+\dfrac{y}{b^2}(Y-y)+\dfrac{z}{c^2}(Z-z)=0$。

原点到平面 $\Pi$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$，令 $G(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}$，则

$d=\dfrac{1}{\sqrt{G(x,y,z)}}$。现在求 $G(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}$，在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，

$z^2=x^2+y^2$ 下的条件极值，令

$$H(x,y,z)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\lambda_2\left(x^2+y^2-z^2\right)$$

则由拉格朗日乘数法得：

$$\begin{cases}H_x^{'}=\dfrac{2x}{a^4}+\lambda_1\dfrac{2x}{a^2}+2\lambda_2 x=0\\ H_y^{'}=\dfrac{2y}{b^4}+\lambda_1\dfrac{2y}{b^2}+2\lambda_2 y=0\\ H_z^{'}=\dfrac{2z}{c^4}+\lambda_1\dfrac{2z}{c^2}-2\lambda_2 z=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ x^2+y^2-z^2=0\end{cases}，解得\begin{cases}x=0\\ y^2=z^2=\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}\end{cases}或\begin{cases}x^2=z^2=\dfrac{a^2c^2}{a^2+c^2},\\ y=0\end{cases}$$

对应此时的 $G(x,y,z)=\dfrac{b^4+c^4}{b^2c^2\left(b^2+c^2\right)}$ 或 $G(x,y,z)=\dfrac{a^4+c^4}{a^2c^2\left(a^2+c^2\right)}$，此时的

$d_1 = bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$ 或 $d_2 = ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$。（下面应比较两个数值的大小，根据已知条件，难以判断。）

五、解：（1）由题意得：椭球面 $S$ 的方程为 $x^2+3y^2+z^2=1\left(z\ge 0\right)$，

令 $F=x^2+3y^2+z^2-1,$ 则 $F_x^{'}=2x, F_y^{'}=6y, F_z^{'}=2z$，

切平面 $\Pi$ 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,3y,z\right)$，$\Pi$ 的方程为 $x\left(X-x\right)+3y\left(Y-y\right)+z\left(Z-z\right)=0$，原点到切平面 $\Pi$ 的距离

$$\rho\left(x,y,z\right)=\frac{x^2+3y^2+z^2}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}},$$

$$\therefore I_1=\iint_S \frac{z}{\rho\left(x,y,z\right)}dS=\iint_S z\sqrt{x^2+9y^2+z^2}\,dS$$

将第一类的曲面积分转化为二重积分得：记 $D_{xz}: x^2+z^2\le 1, x\ge 0, z\ge 0$，

$$\therefore I_1=4\iint_{D_{xz}}\frac{z\left[3-2\left(x^2+z^2\right)\right]}{\sqrt{3\left(1-x^2-z^2\right)}}dxdz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{r^2\left(3-2r^2\right)dr}{\sqrt{3\left(1-r^2\right)}}$$

$$=4\int_0^1\frac{r^2\left(3-2r^2\right)dr}{\sqrt{3\left(1-r^2\right)}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\left(3-2\sin^2\theta\right)d\theta}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \text{。}$$

(2) 由于 $S$ 取上侧，故 $\lambda=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}, \mu=\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}, \nu=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$

$$\therefore I_2=\iint_S z\left(\lambda x+3\mu y+\nu z\right)dS=\iint_S z\sqrt{x^2+9y^2+z^2}\,dS=I_1=\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \text{。}$$

六、证明：$a_n-a_{n-1}=\ln f\left(a_{n-1}\right)-\ln f\left(a_{n-2}\right)$，由拉格朗日中值定理得：$\exists\xi$ 介于 $a_{n-1}, a_{n-2}$ 之间，使得 $\ln f\left(a_{n-1}\right)-\ln f\left(a_{n-2}\right)=\dfrac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)$

$\therefore\left|a_n-a_{n-1}\right|=\left|\dfrac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)\right|$，又 $\left|f'(x)\right|<mf(x)$，得 $\left|\dfrac{f^{'}\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}\right|<m$，

$\therefore\left|a_n-a_{n-1}\right|<m\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|<\ldots<m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|\because 0<m<1,$

$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|$收敛，$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n-a_{n-1}\right|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)$绝对收敛。

**七、解**：用反证法证明。假设存在。当 $x\in(0,1]$ 时，由拉格朗日中值定理得：$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x, 0<\xi_1<x$，即 $f(x)=1+f'(\xi_1)x, x\in(0,1]$，利用$\left|f'(x)\right|\le 1$，得 $f(x)\ge 1-x$ 在 $x\in(0,1]$ 上成立。由 $f(0)=1$ 知，得 $f(x)\ge 1-x$ 在 $[0,1]$ 上成立。同理 $x\in[1,2)$ 时，有 $f(2)-f(x)=f'(\xi_2)(2-x), x<\xi_2<2$，即 $f(2)-f(x)=f'(\xi_2)(2-x),$，$x<\xi_2<2$，即 $f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2), x\in[1,2)$，利用$\left|f'(x)\right|\le 1$，得

$f(x)\ge 1+(x-2)=x-1$在$x\in[1,2)$上成立。由 $f(2)=1$知，$f(x)\ge x-1$在$x\in[1,2]$上成立。所以$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=1$，矛盾。

# 第三届（2011）全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

**一、计算题**

1. **解**：原式=$\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2\left[1-\ln\left(1+x\right)\right]}{x}$ ，考虑到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln\left(1+x\right)-2}{x}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-x}{x^2}$$

$=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$，于是原式=0

2. **解**：（1）若$\theta=0$时，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ ；（2）若$\theta\ne 0$时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$

3. **解**：设$D_1=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le\frac{1}{2},0\le y\le 2\right\}$，$D_2=\left\{\left(x,y\right)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$

$$D_3=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\right\}$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} dxdy=1+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x}=1+2\ln 2,\iint\limits_{D_3} dxdy=3-2\ln 2$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)dxdy=\iint\limits_{D_3} dxdy-\iint\limits_{D_2\cup D_3} dxdy=2-4\ln 2$$

4. 解：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其定义区间为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，于是对 $\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}$$

于是，$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}$$

二、**证明：**（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，根据收敛数列的有界性得，存在 $M>0$，使得 $|a_n|\le M$

再由 $\varepsilon-N$ 语言得，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1,s.t.n>N_1,|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

再考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(M+|a|)N_1}{n}=0$，于是，$\forall\varepsilon>0,\exists N_2,s.t.n>N_2,\frac{(M+|a|)N_1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

于是，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{a_1+\cdots a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+\cdots a_{N_1}-N_1a}{n}-\frac{a_{N_1+1}-a+\cdots a_n-a}{n}\right|$$

$$\le\frac{N_1M+N_1|a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\le\frac{(M+|a|)N_1}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

（2）对于给定的 $p$，显然数列 $\{pn\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列，从而 $\left\{A_n=a_{(n+1)p}-a_{np}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\left\{a_{n+p}-a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lambda$，由结论（1）得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}=\lambda$，而 $A_1+A_2+\cdots+A_n=a_{(n+1)p}-a_p$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p}-a_p}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p}}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_p}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p}}{n}=\lambda$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p}}{(n+1)p}\cdot\dfrac{(n+1)p}{n}=p\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p}}{(n+1)p}\overset{m=(n+1)p}{=}p\cdot\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\lambda$ ， 即

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

三、证明：由麦克劳林公式得

$f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 与 $x$ 之间，$x\in[-1,1]$

在上式中分别取 $x=1,-1$ 得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),0<\eta_1<1$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),-1<\eta_2<0$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值 $M$ 最小值 $m$，

从而 $m\le\dfrac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\le M$，再由连续函数的介值定理，至少存在一点

$x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$ 使得 $f'''(x_0)=\dfrac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3$

**四、解**：在 $x$ 轴的 $x$ 处取一小段 $dx$，其质量是 $\rho dx$，到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是 $dF=\dfrac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中 G 为引力常数）

这个引力在水平方向的分量为 $dF_x=\dfrac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d(h^2+x^2)}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

在竖直方向的分量为 $dF_y=\dfrac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 tdt}{h^3\sec^3 t}=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\cos tdt=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为 $\vec{F}=(F_x,F_y)$

五、证明：对方程两边求导 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_1+\frac{\partial z}{\partial x}F_2=0,\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_2+\frac{\partial z}{\partial y}F_1=0$

由此解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2\left(F_1+F_2\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{y^2\left(F_1+F_2\right)}$ ，所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}=0$

将上式再求导，$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y}$

两式相加得，$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\left(x+y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

六、证明：由 $\Sigma$ 的面积为 $4\pi$ 可见：当 $a,b,c$ 都为零时，等式成立

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是 $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

设平面 $P_u:u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 $u$ 固定，则 $|u|$ 是原点到平面 $P_u$ 的距离，从而 $-1\le u\le 1$

两平面 $P_u,P_{u+du}$ 截单位球 $\Sigma$ 的截下的部分上，被积函数取值为 $f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$

这部分摊开可以看成一个细长条，这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi du$，故得证.

# 第三届（2012）全国大学生数学竞赛决赛试卷（答案）

一、1．解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2+x^2-x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{2}{3}$$

2．解：$\lim\limits_{x\to+\infty}[\,(\,x^3+\frac{1}{2}x-\tan\frac{1}{x}\,)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\,]$ （令 $t=\frac{1}{x}$）

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+\frac{t^2}{2}-t^2\tan t)e^t-\sqrt{t^6+1}}{t^3}=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+\frac{t^2}{2})e^t-1+1-\sqrt{t^6+1}}{t^3}-\lim_{t\to 0+}\frac{t^2\tan te^t}{t^3}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)e^t-1}{t^3}-\lim_{t\to 0+}\frac{\left(1+t^6\right)^{\frac{1}{2}}-1}{t^3}-1=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)e^t-1}{t^3}-1$$ 由泰勒公式得

$$\left(1+\frac{t^2}{2}\right)e^t-1=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+o\left(t^3\right)\right]-1=t+t^2+\frac{5}{6}t^3+o\left(t^3\right)$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)e^t-1}{t^3}-1=\lim_{t\to0+}\frac{t+t^2}{t^3}+\frac{5}{6}-1=+\infty$$

3. **解**：依题意有，$\boldsymbol{y}$ 是函数，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{z}$ 是自变量。将方程 $z=f(x,y)$ 两边同时对 $\boldsymbol{x}$ 求导，

$0=f_x+f_y\frac{\partial y}{\partial x}$，则 $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_y}$，于是

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)=-\frac{f_y(f_{xx}+f_{yx}\frac{\partial y}{\partial x})-f_x(f_{yx}+f_{yy}\frac{\partial y}{\partial x})}{f_y{}^2}$$

$$=-\frac{f_y(f_{xx}-f_{yx}\frac{f_x}{f_y})-f_x(f_{yx}-f_{yy}\frac{f_x}{f_y})}{f_y{}^2}=-\frac{f_x^2f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y^2f_{xx}}{f_y{}^3}=0$$

4. **解**：$I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xde^{x+\frac{1}{x}}$

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$$

5. **解**：联立 $x^2+y^2=az$，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，解得两曲面的交线所在的平面为 $z=a$，

它将表面分为 $\boldsymbol{S_1}$ 与 $\boldsymbol{S_2}$ 两部分，它们在 $\boldsymbol{xoy}$ 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\le a^2$，

在 $\boldsymbol{S_1}$ 上 $dS=\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}dxdy=\sqrt{\frac{a^2+4(x^2+y^2)}{a^2}}dxdy$

在 $\boldsymbol{S_2}$ 上 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

则 $S=\iint_D\left(\sqrt{\frac{a^2+4(x^2+y^2)}{a^2}}+\sqrt{2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2 4r^2}}{a}rdr+\sqrt{2}\pi a^2$

$$=\pi a^2\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2}\right)$$

二、**解**：记 $f(x)=\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}$

① 若 $\alpha\le0$，$f(x)\ge\frac{x}{2}(\forall x>1)$；则 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}dx$ 发散

② 若 $0<\alpha\le2$，则 $\alpha-1\le1$，而 $f(x)\ge\frac{x^{1-\alpha}}{2}(\forall x\ge1)$；所以

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^\alpha \sin^2 x} dx$ 发散。

③ 若 $\alpha > 2$，即 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$，考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性即可

当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，$\frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 x} \le f(x) \le \frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 x}$

对任何 $b > 0$，我们有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+b\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+b\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\cot x}{b+\csc^2 x}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{b+1+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{b+1}}$$

这样，存在 $0 < A_1 \le A_2$，使得 $\frac{A_1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}} \le a_n \le \frac{A_2}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$.

从而可知，当 $\alpha > 4$，时，所讨论的积分收敛，否则发散。

三、证明：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微，且 $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M \ (k=1,2,\cdots)$，所以

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ （*）由 $f(\frac{1}{2^n}) = 0$，$(n=1,2,\cdots)$， 得

$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2^n}) = 0$ ，于是 $f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{2^n}) - f(0)}{\frac{1}{2^n}} = 0$

由罗尔定理，对于自然数 $n$ 在 $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ 上，存在 $\xi_n^{(1)} \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$，使得

$$f'(\xi_n^{(1)}) = 0 \quad (n=1,2,\cdots)\text{，且 } \xi_n^{(1)} \to 0(n\to\infty)$$

这里 $\xi_1^{(1)} > \xi_2^{(1)} > \xi_3^{(1)} > \cdots > \xi_n^{(1)} > \xi_{n+1}^{(1)} > \cdots$

在 $[\xi_{n+1}^{(1)}, \xi_n^{(1)}]$ $(n=1,2,\cdots)$ 上，对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，存在

$\xi_n^{(2)} \in (\xi_{n+1}^{(1)}, \xi_n^{(1)})$，使得 $f''(\xi_n^{(2)}) = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$，且 $\xi_n^{(2)} \to 0(n\to\infty)$

于是 $f''(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n^{(2)}) - f(0)}{\xi_n^{(2)}} = 0$

类似的，对于任意的 $\boldsymbol{n}$，有 $f^{(n)}(0) = 0$ 有（*） $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$

四、解：1. $J = \iint_D \left( (x+c)^2 + y^2 \right) \rho dxdy = \iint_D \left( x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \right) \rho dxdy$

$$= 2\rho \iint_{D_1} \left( x^2 + y^2 + c^2 \right) dxdy \qquad D_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, x \ge 0$$

$$=4\rho\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^1 \left( a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta+c^2 \right)abrdr$$

$$=4\rho(a^2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+b^2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+c^2\frac{\pi}{2})ab$$

$$=\frac{1}{4}\pi\rho ab(5a^2-3b^2)$$

2. 设 $J$ 固定，$b=b(a)$ 是 $J=\frac{1}{4}\pi\rho ab(5a^2-3b^2)$ 确定的隐函数，则

$b'(a)=\frac{3b^3-15a^2b}{5a^3-9ab^2}$，对 $S=\pi ab(a)$ 关于 $\boldsymbol{a}$ 求导，

$$S'(a)=\pi\left( b(a)+ab'(a) \right)=\pi\left( b+\frac{3b^3-15a^2b}{5a^2-9b^2} \right)$$

五、解：由格林公式

$$I=\oint_L(xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$$

$$=\iint_D(z^2+2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial x})+(2x\frac{\partial z}{\partial y}+z^2+2yz\frac{\partial z}{\partial y})d\sigma=\iint_D 2z^2+2(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+2(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}d\sigma$$

又：连续可微函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$

两边同时对 $x$ 求偏导数：$F_1(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F_2(1-y\frac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1+F_2}{yF_2-xF_1}$

两边同时对 $y$ 求偏导数：$F_1(x\frac{\partial z}{\partial y}-1)+F_2(-z-y\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1+zF_2}{xF_1-yF_2}$

代入上式：

$$I=\iint_D 2z^2+2(xz+y)\frac{zF_1+F_2}{yF_2-xF_1}+2(x+yz)\frac{F_1+zF_2}{xF_1-yF_2}d\sigma$$

$$=2\iint_D z^2+\frac{xz^2F_1+xzF_2+yzF_1+yF_2}{yF_2-xF_1}+\frac{xF_1+xzF_2+yzF_1+yz^2F_2}{xF_1-yF_2}d\sigma$$

$$=\iint_D z^2+\frac{xz^2F_1+yF_2-xF_1-yz^2F_2}{yF_2-xF_1}d\sigma=2\iint_D z^2+\frac{(xF_1-yF_2)z^2+yF_2-xF_1}{yF_2-xF_1}d\sigma$$

$$2\iint_D d\sigma=2\pi$$

六、解：（1）根据一阶线性微分方程的求导公式

$y=e^{\int xdx}\left[\int xe^{x^2}\cdot e^{\int -xdx}dx+C\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[e^{\frac{x^2}{2}}+C\right]$，再由初时条件得 $C=0$，于是

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}$$

（2）$\int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{1+n^2x^2}dx = \int_0^1 e^{x^2} d\arctan nx = e^{x^2}\arctan nx\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^{x^2}\arctan nxdx$

$= e\arctan n - \arctan n\xi \int_0^1 2xe^{x^2}dx$　其中 $\xi \in [0,1]$

$= e\arctan n - \arctan n\xi \int_0^1 e^{x^2}dx^2 = e\arctan n - \arctan n\xi \bullet e^{x^2}\Big|_0^1$

$= e\arctan n - (e-1)\arctan n\xi$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{1+n^2x^2}dx == \lim\limits_{n\to\infty}[e\arctan n - (e-1)\arctan n\xi]$　其中 $\xi \in [0,1]$

$=e\frac{\pi}{2} - (e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

## 第四届（2012）全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

一、1．解：因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$，而 $0 < \frac{1}{n^2}\ln(n!) \le \frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n}\right)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$，所以 $\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n}\right) = 0$，由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n!) = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

2．解：过直线 L 的平面束为 $\lambda(2x+y-3z+2) + \mu(5x+5y-4z+3) = 0$

即 $(2\lambda+5\mu)x + (\lambda+5\mu)y - (3\lambda+4\mu)z + (2\lambda+3\mu) = 0$

若平面 $\pi_1$ 过点 $(4,-3,1)$ 代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而平面 $\pi_1$ 的方程为

$3x+4y-z+1=0$，若平面束中的平面 $\pi_2$ 与 $\pi_1$ 垂直，则

$3\cdot(2\lambda+5\mu) + 4\cdot(\lambda+5\mu) + 1\cdot(3\lambda+4\mu) = 0$

解得 $\lambda=-3\mu$，从而平面 $\pi_2$ 的方程为 $x-2y-5z+3=0$

3．解：$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + au(x+y)\right], \frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + bu(x+y)\right]$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} + abu(x,y)\right]$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right]$$

若使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，即 $a=b=1$

4. 解：$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left[x+u^3\right]\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left[x+2y\right]u\right)$，得 $\left(x+4u^3\right)u'=u$，即 $\frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=4u^2$

方程通解为 $x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，故 $u=\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$

5. 解：因为 $x>1$ 时，$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\left(x\to+\infty\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0$

二、解：记 $A=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left|\sin x\right|dx$，做变量替换 $x=t-\pi$

$$A=\int_\pi^{+\infty}e^{-2(t-\pi)}\left|\sin(t-\pi)\right|dt=\int_\pi^{+\infty}e^{2\pi}\cdot e^{-2t}\cdot\left|\sin t\right|dt$$

$=e^{2\pi}\left[A-\int_0^\pi e^{-2t}\sin tdt\right]$ 考虑到

$\int_0^\pi e^{-2t}\sin tdt=\frac{1}{5}e^{-2t}\left[-2\sin t-\cos t\right]\Big|_0^\pi=\frac{1}{5}\left[e^{-2\pi}+1\right]$ 于是

$e^{-2\pi}\cdot A=A-\frac{1}{5}\left(e^{-2\pi}+1\right)$ ，整理得 $A=\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$

三、解：由泰勒公式 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2\left(0<\theta<1\right)$，令 $t=\frac{1}{x}$，得 $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$

代入原方程得 $x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501$，即 $x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$，

由此知 $x>500, 0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$，$|x-501|=\dfrac{1}{2}\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{x}\right)\right|\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{1000}=0.001$

所以，$x=501$即为满足题设条件的解.

**四、解**：曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$

令 $Y=0$，则有 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right) \text{ 于是}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{xf'(x)}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}\text{，于是}\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o\left(u^2\right)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2$$

**五、解**：由于 $\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=\int_0^1|f(t)|2tdt\le 2\int_0^1|f(t)|dt=2$

令一方面，取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则 $\int_0^1|f_n(x)|dx=\int_0^1 f_n(x)dx=1$

而 $\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^1 tf_n(t)dt=2\dfrac{n+1}{n+2}=2\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)\to 2(n\to\infty)$

因此最小的实数为 $C=2$

**六、解**：由柱面坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，则 $\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le a\\ r^2\le z\le\sqrt{t^2-r^2}\end{cases}$

其中 $a$ 满足 $a^2+a^4=t^2, a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，故有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)dz=2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)dz\right)dr$$

从而由含参变量的积分公式得（参见高等数学下册 P179 定理 5）

$$F'(t)=2\pi\left[a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f\left(a^2+z^2\right)dz\cdot\frac{da}{dt}+\int_0^a rf\left(r^2+t^2-r^2\right)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right]$$

注意到$\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第一个积分为 0，我们得到

$$F'(t)=2\pi f\left(t^2\right)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=-\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{d\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以$F'(t)=2\pi f\left(t^2\right)\left(t-a^2\right)=\pi tf\left(t^2\right)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$

七、证明：（1）设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在$N$ 使得对于任意的$n\geq N$ 时

$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta$，$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$，$a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$

于是$\sum\limits_{n=N}^{m}a_{n+1}\leq\frac{1}{\delta}\sum\limits_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N}$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$，则存在$N$ 使得对于任意的$n\geq N$ 时$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$

有$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$

于是由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

# 第四届（2013）全国大学生数学竞赛决赛试卷（答案）

一、1. 解 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(x\ln a)\ln\left(\frac{\ln(ax)}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$

$=\ln e^{2\ln a}=2\ln a$

2. 解 $y' = -2e^{-2x} f(x,x) + e^{-2x} f_u(x,x) + e^{-2x} f_v(x,x) = -2y + x^2 e^{-2x}$

因此，所求的一阶微分方程为 $y' + 2y = x^2 e^{-2x}$

其通解为 $y = e^{-\int 2dx}\left( \int x^2 e^{-2x} dx + C \right) = \left( \dfrac{x^3}{3} + C \right) e^{-2x}$ （$C$ 为任意常数）

3. 解 由题意，有 $e^{-\int_0^x f(t)dt} = f(x)$ 即 $\int_0^x f(t)dt = -\ln f(x)$ 两边求导可得

$f'(x) = -f^2(x)$，并且 $f(0) = e^0 = 1$ 由此可求得 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

4. 解 由于 $\int x\ln(1+x^2)dx = \dfrac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2) = \dfrac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2] + C$

则原式 $= \dfrac{1}{2}\int \arctan x d[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]$

$$= \frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]\arctan x - \frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$= \frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 - 3]\arctan x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + \frac{3}{2}x] + C$$

5. 解记 $F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z^2 - 27$，则曲面的法向量为 $\vec{n}_1 = (F_x, F_y, F_z) = 2(3x, y, -z)$

过直线 $\begin{cases} 10 + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $10 + 2y - 2z - 27 + \lambda(x + y - z) = 0$

即 $(10+\lambda)x + (2+\lambda)y - (2+\lambda)z - 27 = 0$ 其法向量为 $\vec{n}_2 = (10+\lambda, 2+\lambda, -2-\lambda)$

设所求的切点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，则

$$\begin{cases} 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27 \\ \dfrac{10+\lambda}{3x_0} = \dfrac{2+\lambda}{y_0} = \dfrac{2+\lambda}{z_0} \\ (10+\lambda)x_0 + (2+\lambda)y_0 - (2+\lambda)z_0 = 27 \end{cases}$$

解得 $x_0 = 3, y_0 = 1, z_0 = 1, \lambda = -1$，或 $x_0 = -3, y_0 = -17, z_0 = -17, \lambda = -19$

所求的切平面方程为 $9x + y - z = 27$，或 $9x + 17y - 17z = -27$

二、解： 设引力 $F = (F_x, F_y, F_z)$，由对称性知 $F_x = 0$，$F_y = 0$

记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，从原点出发过点 $(x,y,z)$ 的射线与 $\boldsymbol{z}$ 轴的夹角为 $\theta$，则有

$\cos\theta=\dfrac{z}{r}$ 质点和面积微元 $dS$ 之间的引力为 $dF=G\dfrac{\rho dS}{r^2}$，

而 $dF_z=G\dfrac{\rho dS}{r^2}\cos\theta=G\rho\dfrac{z}{r^3}dS$ 于是，有 $F_z=\int_\Sigma G\rho\dfrac{z}{r^3}dS$

在 $z$ 轴上的区间 $[1,2]$ 上取小区间 $[z,z+dz]$ 相应于该小区间有 $dS=2\pi z\sqrt{2}dz=2\sqrt{2}\pi zdz$

而 $r=\sqrt{2z^2}=\sqrt{2}z$，就有 $F_z=\int_1^2 G\rho\dfrac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3}dz=G\rho\pi\int_1^2\dfrac{1}{z}dz=G\rho\pi\ln 2$

**三、证明**：当 $t>0$ 时，对函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,t]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(1+t)=\frac{t}{1+\xi},\quad 0<\xi<t \text{ 由此得 } \frac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t$$

取 $t=\dfrac{1}{x}$，有 $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}$

所以，当 $x\geq 1$时，有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调增加

又 $f'(x)\leq\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\leq\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$

$$=\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sqrt{x(x+1)}}\leq\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

故 $\int_1^x f(t)dt\leq\int_1^x\dfrac{1}{2\sqrt{t^3}}dt$，所以 $f(x)-f(1)\leq 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leq\mathbf{1}$

即 $f(x)\leq f(1)+1$，$f(x)$ 有上界

由于 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调增加且有上界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

**四、证明**：在$[-2,0]$和$[0,2]$上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理，可知存在$\xi_1\in(-2,0)$，

$\xi_2\in(0,2)$ 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}$$

由于$|f(x)|<1$，所以 $|f'(\xi_1)|\leq 1$，$|f'(\xi_2)|\leq 1$

设$F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$。则$\left|F(\xi_1)\right|\le 2$，$\left|F(\xi_2)\right|\le 2$ (*)

由于 $F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，且$F(x)$为$[\xi_1,\xi_2]$上的连续函数，应用闭区间上连续函数的最值定理，$F(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上必定能够取得最大值，设为$M$。则当$\xi$为$F(x)$的最大值点时，由(*)知：$M=F(\xi)$，$\xi\in[\xi_1,\xi_2]$。

所以$\xi$必是$F(x)$的极大值点，注意到$F(x)$可导，由极值点的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]^2=0$$

由于 $F(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\ge 4$，且$\left|f(\xi)\right|<1$，可知$f'(\xi)\ne 0$，由上式知

$$f(\xi)+f''(\xi)=0$$

五、解： 由对称性，可以只计算区域$y\ge x$，由极坐标变换得

$$I=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}d\phi\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\sin(\phi+\frac{\pi}{4})\right|r^2dr$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\cos\theta\right|r^2dr$$

上式的积分里，$(\theta,r)$所在的区域为矩形：$D:0\le\theta\le\pi,0\le r\le 1$，把$D$分解为$D_1\cup D_2$，

其中 $D_1:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1$，$D_2:\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,0\le r\le 1$

又记 $D_3:\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\sqrt{2}\cos\theta\le r\le 1$，这里$D_3$是$D_1$的子集。

且记 $I_i=\iint_{D_i}\left|r-\sqrt{2}\cos\theta\right|r^2d\theta dr$，$(i=1,2,3)$，则$I=2(I_1+I_2)$

注意到$r-\sqrt{2}\cos\theta$在$D_1\setminus D_3$，$D_2$，$D_3$的符号分别为负，正，正；则

$$I_3=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_{\sqrt{2}\cos\theta}^1(r-\sqrt{2}\cos\theta)r^2dr=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$I_1=\iint_{D_1}(\sqrt{2}\cos\theta-r)r^2d\theta dr+2I_3=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{8}+2I_3=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$I_2=\iint_{D_2}(\sqrt{2}\cos\theta-r)r^2d\theta dr=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi}{8}$$

所以，就有 $I=2(I_1+I_2)=1+\dfrac{3\pi}{8}$

六、证明：用反证法， 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$

则存在自然数 $m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$，使得

$$\sum_{i=1}^{m_1}|a_n|\ge 1,\quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_n|\ge k\quad (k=2,3,\cdots)$$

取 $x_i=\dfrac{1}{k}\operatorname{sgn}a_i\quad (m_{k-1}\le i\le m_k)$，则 $\sum\limits_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}a_ix_i=\sum\limits_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}\dfrac{|a_i|}{k}\ge 1$

由此可知，存在数列 $\{x_n\}\to 0\,(n\to\infty)$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散，与题设矛盾。

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

# 第五届（2013）全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

一. 解：因为 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)^n=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)\right]$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$

2. 解：记 $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散即可. 因为

$a_n\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$. 而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散，故由比较判别法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散.

3. **解**：方程两边对 $x$ 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0$，故 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，

得 $x(x+2y)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$，将 $x=-2y$ 代入所给方程得 $x=-2, y=1$，将 $x=0$

代入所给方程得 $x=0, y=-1$，

又 $y''=\dfrac{(2x+2xy'+2y)(2y^2-x^2)-x(x+2y)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$

$y''\big|_{x=0,y=1,y'=0}=\dfrac{(0+0-2)(2-0)-0}{(2-0)^2}=-1<0, y''\big|_{x=-2,y=1,y'=0}=1>0$，故 $y(0)=-1$ 为极大

值， $y(-2)=1$ 为极小值.

4. **解**：设切点 A 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$，曲线过 A 点的切线方程为 $y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$

令 $y=0$，由切线方程得切线与 $x$ 轴交点的横坐标为 $x_0=-2t$. 从而作图可知，所求平面图

形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{t}\left[t-(-2t)\right]-\displaystyle\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\dfrac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow t=1$，故 A 点的坐标为 $(1,1)$.

二. **解**： $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$，

$=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$，

$=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\cdot\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$，

$=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}$.

三. **解**：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导必连续，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right]=0$， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

由洛必塔法则及定义 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f''(0)$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，从而由比较判别法的极限形式

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

四. 解: 因为 $f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增，从而有反函数，

设 $A=f(a),B=f(b),\varphi$ 是 $f$ 的反函数，则 $0<\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}\le\dfrac{1}{m}$，

又 $\left|f(x)\right|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以 $\left|\int\limits_a^b\sin f(x)dx\right|\overset{x=\varphi(y)}{=}\left|\int\limits_A^B\varphi'(y)\sin ydy\right|$，

$\le\left|\int\limits_0^{\pi}\varphi'(y)\sin ydy\right|\le\int\limits_0^{\pi}\dfrac{1}{m}\sin ydy=-\dfrac{1}{m}\cos y\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2}{m}$.

五. 解: 记 $\Sigma$ 围成的立体为 V，由高斯公式

$I=\iiint\limits_V\left(3x^2+6y^2+9z^2-3\right)dv=3\iiint\limits_V\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)dxdydz$，

为了使得 I 的值最小，就要求 V 是使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$ 的最大空间区域，即

取 $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}$，曲面 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1$， 为求最小值，作变换

$\begin{cases}x=u\\ y=v/\sqrt{2}\\ z=w/\sqrt{3}\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1/\sqrt{3}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

从而 $I=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_V\left(u^2+v^2+w^2-1\right)dudvdw$，使用球坐标计算，得

$I=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\left(r^2-1\right)r^2\sin\varphi dr$，

$=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}\cdot 4\pi\cdot\dfrac{-2}{15}=-\dfrac{4\sqrt{6}}{15}\pi$.

六. 解: 作变换$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \end{cases}$（观察发现或用线性代数里正交变换化二次型的方法），曲线

C 变为$uov$平面上的椭圆$\Gamma: \dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$（实现了简化积分曲线），也是取正向，

而且$x^2+y^2=u^2+v^2, ydx-xdy=vdu-udv$（被积表达式没变，同样简单！），

$I_a(r)=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{vdu-udv}{\left(u^2+v^2\right)^a}$，曲线参数化$u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta, \theta:0\to 2\pi$，则有

$vdu-udv=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$，

$$I_a(r)=\int_0^{2\pi}\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta}{\left(\dfrac{2}{3}r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a},$$

令$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$，则由于$\dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta<2$，从而

$0<J_a<+\infty$. 因此当$a>1$时$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=0$或$a<1$时$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=-\infty$，

而$a=1, J_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$，

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan\theta}{\dfrac{1}{3}+\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\dfrac{1}{3}+t^2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1/3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1/3}}\Bigg|_0^{+\infty}=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\sqrt{3}\pi.$$

$I_1(r)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\pi=-2\pi$. 故所求极限为$I_a(r)=\begin{cases}0, a>1 \\ -\infty, a<1 \\ -2\pi, a=1\end{cases}$.

七. 解：（1）记$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, u_n=\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n=1,2,3,\cdots$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\ln n}{\sqrt{n}}=0$, $n$充分大时$0<a_n<1+\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$，

所以$0<u_n<\dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$收敛，

（2）记$a_k=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k},(k=1,2,3,\cdots)$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right),$$

$$=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+2},$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}-\frac{a_n}{n+2}=1-\frac{1}{n}-\frac{a_n}{n+2},$$

因为$0<a_n<1+\int_1^n\dfrac{1}{x}dx=1+\ln n$，所以$0<\dfrac{a_n}{n+2}<\dfrac{1+\ln n}{n+2}$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\ln n}{n+2}=0$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+2}=0$. 因此$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$.（也可由此用定义推知级数的收敛性）.

# 第五届（2014）全国大学生数学竞赛决赛试卷（答案）

一. 1. 解：方法 I： 原式$=\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt\int_0^t xdx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\dfrac{\pi}{2}$.

方法 II：令 $f(x)=\int_x^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt$，则 $f'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$，且 $f(2\pi)=0$，所以原式=

$$\int_0^{2\pi}xf(x)dx=-\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

2. 解：$1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\left(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，所以有$\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)dx\geq\frac{4}{\pi}$，取 $f(x)=\frac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

3. 解：由两个方程定义的曲面在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面分别为：

$F_x\left(P_0\right)(x-x_0)+F_y\left(P_0\right)(y-y_0)+F_z\left(P_0\right)(z-z_0)=0$，

$G_x\left(P_0\right)(x-x_0)+G_y\left(P_0\right)(y-y_0)+G_z\left(P_0\right)(z-z_0)=0$. 上述两切平面的交线就是$\Gamma$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切线，此切线在点$xoy$面上的投影就是 S 过$(x_0,y_0)$的切线.

消去$z-z_0$，得到：$\left(F_xG_z-G_xF_z\right)\Big|_{P_0}(x-x_0)+\left(F_yG_z-G_yF_z\right)\Big|_{P_0}(y-y_0)=0$，这里$x-x_0$的系数是$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，故上式是一条直线的方程，就是要求的切线.

4. 解：由关系式$AB=A-B+E$，得$\left(A+E\right)\left(B-E\right)=0$，所以

$Rank\left(A+B\right)\leq Rank\left(A+E\right)+Rank\left(B-E\right)\leq 3$，因为$Rank\left(A+B\right)=3$，所以$Rank\left(A+E\right)+Rank\left(B-E\right)=3$，又$Rank\left(A+E\right)\geq 2$，考虑到$B$不是单位矩阵，所以$Rank\left(B-E\right)\geq 1$，只有$Rank\left(A+E\right)=2$.

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&5&a\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-2&-5\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&13-2a\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix}$$，从而$a=\frac{13}{2}$.

二. 证：由泰勒公式

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)h^4$，三阶展开

$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2h^2$，一阶展开

其中$\xi$介于$x$，$x+h$之间，$\eta$介于$x$，$x+\theta h$之间，由上面的两个展开式，与已知条件，

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，可得

$4\left(1-3\theta\right)f'''(x)=\left[6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)\right]h$，

当 $\theta \neq \frac{1}{3}$ 时，令 $h \to 0$，此时 $f(x)$ 是不超过二次的多项式，

当 $\theta = \frac{1}{3}$ 时，有 $\frac{2}{3} f^{(4)}(\eta) = f^{(4)}(\xi)$，令 $h \to 0$，注意到 $\xi \to x, \eta \to x$，有 $f^{(4)}(x) = 0$

从而 $f(x)$ 是不超过三次的多项式.

三. 证：由题设知道：$f'(0) = -1$，则所给方程可变形为

$(1+x)f'(x) + (1+x)f(x) - \int_0^x f(t)dt = 0$，两边求导：$(1+x)f''(x) + (2+x)f'(x) = 0$，

这是一个可降阶的二阶微分方程，可用分离变量法求得 $f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$.

由于 $f'(0) = -1$，得 $C = -1$，$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+x} < 0$，所以 $f(x)$ 单减. 而 $f(0) = 1$，所以当 $x \geq 0$

时，$f(x) \leq 1$. 对于 $f'(t) = \frac{-e^{-t}}{1+t} < 0$ 在 $[0, x]$ 上进行积分得

$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{-e^{-t}}{1+t} dt \geq 1 - \int_0^x e^{-t} dt = e^{-x}$. 得证.

四. 证明：$I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)d(1-x)$，对于固定的 $y$，

$(1-x)f(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0$，由分部积分法得，$\int_0^1 f(x,y)d(1-x) = -\int_0^1 (1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$，

交换积分次序可得 $I = \int_0^1 (1-x)dx \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$，因为 $f(x,0) = 0$，所以 $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = 0$，

从而 $(1-y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = 0$，再由分部积分可得：

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy = -\int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d(1-y) = -\int_0^1 (1-y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dy,$$

$$I = \int_0^1 (1-x)dx \int_0^1 (1-y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dy = \iint_D (1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy,$$

因为 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \leq A$，且 $(1-x)(1-y)$ 在 $D$ 上非负，所以

$I \le A\iint_D (1-x)(1-y)dxdy = \frac{A}{4}$.

五. 解：由高斯公式：

$$I_t = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint_V \left(2xz+2yz+x^2+y^2\right) f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz$$

由对称性：$\iiint_V \left(2xz+2yz\right) f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz = 0$，从而

$$I_t = \iiint_V \left(x^2+y^2\right) f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz = \int_0^1 [\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f'(r^2z)r^3dr]dz =$$

$$2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3dr\right]dz$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3dr\right]dz}{t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^1 f'(t^2z)t^3dz}{4t^3} = \frac{\pi}{2}f'(0)$.

六. 证：必要性：设 $A,B$ 为两个 n 阶正定矩阵，从而为对称矩阵，即 $\left(AB\right)^T = AB$，又 $A^T = A$，$B^T = B$，所以 $\left(AB\right)^T = B^TA^T = BA$，所以 $AB = BA$。

充分性：设 $AB = BA$，则 $\left(AB\right)^T = B^TA^T = BA = AB$，所以 $AB$ 是实对称矩阵，因为 $A,B$ 为两个 n 阶正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $P,Q$，使 $A = P^TP$，$B = Q^TQ$，于是 $AB = P^TPQ^TQ$。所以，$\left(P^T\right)^{-1}ABP^T = PQ^TQP^T = \left(QP^T\right)^TQP^T$，即 $\left(P^T\right)^{-1}ABP^T$ 是正定矩阵，所以 $\left(P^T\right)^{-1}ABP^T$ 的特征值全为正实数，所以 $AB$ 是正定矩阵。

七. 证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} = 0$，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1$，使得当 $n > N_1$ 时，$0 \le \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$，又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^\infty a_nx^n = A$，所以存在 $\delta > 0$，当 $1-\delta < x < 1$ 时，$\left|\sum_{n=0}^\infty a_nx^n - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$，取 $N_2$，当 $n > N_2$ 时，$\frac{1}{n} < \delta$，从而 $1-\delta < 1-\frac{1}{n}$，取 $x = 1-\frac{1}{n}$，则 $\left|\sum_{n=0}^\infty a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$，取 $N = \max\left\{N_1, N_2\right\}$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n - A\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}a_k - \sum_{k=0}^{n}a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - A\right|$$

$$\le \left|\sum_{k=0}^{n}a_k\left(1-x^k\right)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - A\right|$$

取 $x = 1-\dfrac{1}{n}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\left(1-x^k\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}a_k\left(1-x\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|\left(1-x\right)k = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|k}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\left|a_k\right|x^k < \frac{\varepsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k \le \frac{\varepsilon}{3n}\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n\frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为 $\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，则 $\left|\sum_{k=0}^{n}a_k - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ 得证.

# 第六届（2014）全国大学生数学竞赛预赛试卷（答案）

一．填空题

1. $\underline{y''(x)-2y'(x)+y(x)=0}$；2. $\underline{2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0}$；3. $\underline{3}$；4. $\underline{1}$；5. $\underline{2}$；

二． 解：$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{d}{dx}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|dx = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{d}{dx}\cos\left(\ln x\right)\right|dx = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin\left(\ln x\right)\right|\dfrac{1}{x}dx$，令

$\ln x = u$，则 $I = \int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin u\right|du \underline{\underline{u=-t}} \int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt = 4n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t\right|dt = 4n$ 。

三．证明：由泰勒公式，有 $f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \dfrac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2, \xi\in(0,x)$，

$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \dfrac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta\in(x,1)$，上述两式相减，得到

$f(0) - f(1) = -f'(x) - \dfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 + \dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，

于是 $f'(x) = f(1) - f(0) - \dfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 + \dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$。由条件 $\left|f(x)\right|\le A, \left|f''(x)\right|\le B$，

得到 $\left|f'(x)\right| \le 2A + \dfrac{B}{2}((1-x)^2+x^2)$，因为 $(1-x)^2+x^2 = 2x^2-2x+1$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 $1$，

故 $\left|f'(x)\right| \le 2A + \dfrac{B}{2}$。

**四. 解：**（1）解：设球缺所在的球体表面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，球缺的中心线为 $z$ 轴，记球缺的区域为 $\Omega$，则其体积为

$$\iiint\limits_{\Omega} 1dV=\int\limits_{R-h}^{R} dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\int\limits_{R-h}^{R} \pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi h^2}{3}\left(3R-h\right)$$（注：这是用截面法计算的）

因为球缺所在球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取 $h<R$，则 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

它在 $xOy$ 面上的投影区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le r^2=R^2-\left(R-h\right)^2\right\}$ 则球冠的面积表示为

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D}\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$=-\pi R\int_0^r\frac{d\left(R^2-\rho^2\right)}{\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-2\pi R\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^r$$

$$=-2\pi R\left[\sqrt{R^2-r^2}-R\right]=-2\pi R\left[R-h-R\right]=2\pi Rh$$。

（2）记球缺 $\Omega$ 的底面圆为 $P_1$，方向指向球缺外，且记 $J=\iint\limits_{P_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$。由高斯公式，有 $I+J=\iiint\limits_{\Omega}3dv=3V_{\Omega}$，其中 $V_{\Omega}$ 为 $\Omega$ 的体积。由于平面 $P$ 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt3}(1,1,1)$，故 $J=\frac{-1}{\sqrt3}\iint\limits_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt3}\sigma(P_1)=-2\sqrt3\sigma(P_1)$，其中 $\sigma(P_1)$ 为 $P_1$ 的面积。故 $I=3V_{\Omega}-J=3V_{\Omega}+2\sqrt3\sigma(P_1)$。因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度 $h=\left|QD\right|=\sqrt3$。再由（1）所证并代入 $h=\sqrt3$ 和 $R=2\sqrt3$ 得：

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt3\pi(2Rh-h^2)=33\sqrt3\pi$$。

**五．证明：**由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，故 $f(x)<f(b), f^n(x)<f^n(b)$，则 $\int_a^b[f(x)]^n dx<(b-a)f^n(b)$，即 $\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx<f^n(b)$，

同时 $\int_{b-\frac{1}{n}}^b[f(x)]^n dx<\int_a^b[f(x)]^n dx$，由积分中值定理得，存在 $\xi\in(b-\frac{1}{n},b)$，使得 $[f(\xi)]^n\cdot\frac{1}{n}=\int_{b-\frac{1}{n}}^b[f(x)]^n dx$，则 $\frac{1}{n(b-a)}[f(\xi)]^n\le\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\le f^n(b)$，因此 $\frac{f(\xi)}{\sqrt[n]{n(b-a)}}\le f(x_n)\le f(b)$，由极限的保号性得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\xi)}{\sqrt[n]{n(b-a)}}\le\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le f(b)$，

由$\xi \in (b-\frac{1}{n},b)$知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\xi)}{\sqrt[n]{n(b-a)}}=f(b)$，由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$，又由$f(x)$在$[a,b]$上严格单增知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$。

六. **解:** 令$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，因为$A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i^2/n^2}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$。记$x_i=\frac{i}{n}$，

则$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)dx$，故$J_n=n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))dx$，由拉格朗日中值定理，存在

$\xi_i \in (x_{i-1},x_i)$使得$J_n=n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)dx$。令$m_i$和$M_i$分别是$f'(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的最小最大值，则$m_i \le f'(\xi_i) \le M_i$，故积分$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)dx$介于$\int_{x_{i-1}}^{x_i}m_i(x-x_i)dx$和$\int_{x_{i-1}}^{x_i}M_i(x-x_i)dx$之间，所以存在$\eta_i \in (x_{i-1},x_i)$使得

$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)dx=\frac{-f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2}{2}$，于是，

$J_n=-\frac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2=-\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i)$，从而

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{4}$。