2019 南京多校联合训练赛 2 题解

NJUPT SDL 全国粉丝后援会

2019.08.16

A. Ancient Myth

当 $k = 1$ 的时候，我们可以对所有的数求异或和，得到的异或和即为 a，因为出现偶数次的都两两消掉了。

$k = 2$ 的时候，我们得到的异或和是 $a \oplus b$，类推。

这样子我们可以设立 short 标记数组 g，将所有读入 a 的余数放在一个格子里，根据他们的商去异或。最后还原成原来的数字并且输出即可。

另外需要注意 0，题目保证了一定正好 k 个，假如不到多的就是 0 了。最后因为限时 1000 MS，所以还需要快读。

B. Sdl and interview questions

题意翻译过来就是给你 n 个点对 (x, y)，让你合理划分成若干组，使得每组的 $\max\{x\} \times \max\{y\}$ 最小，求这个最小值。

假如有一个点为 (x_1, y_1)，如果存在一个 (x_2, y_2)，并且有 $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$，那么我们就不需要考虑 (x_1, y_1) 的点了 (可以把这两个点放在一个组里，这样 x_1 和 y_1 都不会对答案做出贡献)。我们把所有这样可以处理掉的点删掉，就可以处理出一个 x 坐标单调递增、y 坐标单调递减的数组。

这样为了使得答案最小，划分方案中每个组一定是该数组中连续的一段。

简单证明：如果你某个组中的任意两个点分别对应这个数组中的下标为 i, j 的点，(不妨设 $i < j$)，此时答案最小为 $x_j y_i$，此时数组中任意的 $i < k < j$，都有 $x_k < x_j$,$y_k < y_i$，不会对答案做出贡献，所以都要选进这一组。设 $f[i]$ 为前 i 个数的答案，可以写出状态转移方程:

$$f[i] = \min(f[j] + x_i y_{j+1})$$

注意到题目的范围，斜率优化即可。

由于 x_i 与 y_j 是单调的，使用单调队列就可以 $O(n)$ 解决本题。

C. Sld and network-flows

满足 Sdl 要求的数组一定是若干个“凹”的组合，所以我们维护一个单调递减的栈即可。如果不能保证单调递减或者最后剩下的不是最大值，就输出 No。

D. Suggest to transfer to Africa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\gcd(i,j,k),u) \\
=&\sum_{d=1}^{n} f(d,u)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\gcd(i,j,k)=d] \\
=&\sum_{d=1}^{n} f(d,u)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[\gcd(i,j,k)=1] \\
=&\sum_{d=1}^{n} f(d,u)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{t|\gcd(i,j,k)}\mu(t) \\
=&\sum_{d=1}^{n} f(d,u)\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(t)\lfloor\frac{n}{td}\rfloor^3 \\
=&\sum_{d=1}^{n} f(d,u)[d|s]\sum_{s=1}^{n}\mu(\frac{s}{d})\lfloor\frac{n}{s}\rfloor^3 \\
=&\sum_{s=1}^{n}\lfloor\frac{n}{s}\rfloor^3\sum_{d|s} f(d,u)\mu(\frac{s}{d})
\end{aligned}
$$

首先使用筛法与处理莫比乌斯函数 μ 和约数和 σ。考虑把离线回答：把询问按照 u 从大到小排序，每次求答案的时候把大于等于当前 u 的 σ 的值加入到 $f*\mu$ 中，具体方法是 $f(i,u)$ 对所有的 $(f*\mu)(ci)$ 计算贡献 (其中 $c=1,2,\cdots$ 且 $ci\le n$)，使用树状数组者线段树动态维护 f 和 μ 的 Dirichlet 卷积的前缀和，整除分块对原式求和。

渐进时间复杂度 $O(n\log n+T\log T+T\sqrt{n}\log n)$。

E. SDL's Number

因为 $10^n\equiv 1^n\equiv 1 \pmod 9$，所以原题等价于求 $\sum_{i=l}^{r} i \pmod 9$，即 $\frac{(l+r)(r-l+1)}{2} \pmod 9$。观察到 $l+r$ 和 $r-l+1$ 奇偶性相反，为了防止溢出可以先约去一个 2。

单词询问的时间复杂度为 $O(1)$。

F. Game

A 不能一下拿走所有石子，就一定赢不了这场比赛，如果到了 B 的回合，不能一下拿掉所有石子，那么一定赢不了这场比赛，所以判断 A 能不能一下拿走所有石子，如果不能，就拿最少的，看 B 能不能拿走所有石子，如果不行就平局。

G. SDL and popcorn chicken

我们可以通过贪心的策略发现我们如果从当前点出发，选取的最优路径是从原向量起点移动至终点后向左旋转遇到的第一个点，每次都这样选取，我们不难发现每次我们都能取完所有的点，最后的图形很像一个逆时针旋涡。我们每次通过叉积的正负来记录方向并且不断更新，最后每次记录当前选择点。时间复杂度 $O(n^2)$。

H. Sdl all kill problems

我们只需要把 n 个字符串记录下标之后进行拼接，放进后缀数组之后，然后利用 ST 表预处理求任意两个后缀的 LCP 就可以了，任意两个后缀的最长公共前缀，就是求 SA 中两个后缀之间的 height 最小值，并且预处理求出每个字符串的开头下标, 每次询问，$O(1)$ 查询两个字符串开头下标的 LCP 就行了。

I. Sdl ans math problem

法一：假设第 k 个非立方数为 x，则 x 之前有 $1^3, 2^3, 3^3 ... m^3$ 共 m 个立方数，$[1, m^3]$ 有 $m^3 - m$ 个非立方数, 通过 $m^3 - m \leq k$ 解得最大的 m, 那么答案就是 $m^3 + k - (m^3 - m) = k + m$。

法二：归纳公式

$$k + [(k + [k^{\frac{1}{3}}])^{\frac{1}{3}}]$$

J. Sdl and McDonald's

设 $dp[i]$ 为高度 i 所能减的最大的体重，不难想到

$$dp[i] = \max(dp[i], dp[k] + a), k \in [i - b, h_{\max}]$$

暴力会 T，维护一个可以查询区间最值并支持单点修改的数据结构，每次更新答案即可。