$\frac{dy}{dx} = Ay$

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的所有特征值(不计重数)

其代数重数依次为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$

设 $r_1^{(i)}, \cdots, r_{n_i}^{(i)}$ 为 $(A-\lambda_i E)^{n_i} r = 0$ 的 n_i 个线性无关的解

令 $C = \left(r_1^{(1)}, \cdots, r_{n_1}^{(1)}, \cdots, r_1^{(s)}, \cdots, r_{n_s}^{(s)} \right)$，则 C 非齐异

从而 $e^{Ax}C$ 是 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的一个基解矩阵

即 $e^{Ax} r_1^{(1)}, \cdots, e^{Ax} r_{n_1}^{(1)}, \cdots, e^{Ax} r_1^{(s)}, \cdots, e^{Ax} r_{n_s}^{(s)}$ 为 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的 n个线性无关的解

考查 $e^{Ax} r_j^{(i)}$，注意到 $(A-\lambda_i E)^k r_j^{(i)} = 0$ for any $k \geq n_i$，从而有

$$\begin{aligned}
e^{Ax} r_j^{(i)} &= e^{(A-\lambda_i E)x + \lambda_i E x} r_j^{(i)} \\
&= e^{\lambda_i E x} e^{(A-\lambda_i E)x} r_j^{(i)} \\
&= e^{\lambda_i x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (A-\lambda_i E)^k \right] r_j^{(i)} \\
&= e^{\lambda_i x} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{x^k}{k!} (A-\lambda_i E)^k r_j^{(i)} \qquad (*)
\end{aligned}$$

现考查常系数高阶方程 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0 \qquad (*)$

令 $y_1 = y$
$y_2 = y^{(1)}$
$\cdots$
$y_n = y^{(n-1)}$

则有
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$

则 A 的特征方程为 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$

显然这也是 $(*)$ 的特征方程的所有根

考查 ODE 系统 $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} \qquad (**)$

$(**)$ 的 n个线线无关解的第一个分量就是 $(*)$ 的 n个线性无关解

主定理：$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x}x, \cdots, e^{\lambda_1 x}x^{n_1-1}, \cdots, e^{\lambda_s x}, \cdots, e^{\lambda_s x}x^{n_s-1}$

是 $(*)$ 的 n个线性无关的解

claim 1. A的每个特征值只有一个线性无关的特征向量

设 $AV=\lambda V$, $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$, 观察 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ * & * & & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix}$

得到 $\begin{cases} V_2=\lambda V_1 \\ V_3=\lambda V_2 \\ \vdots \\ V_n=\lambda V_n \end{cases} \Rightarrow V=V_1\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ (***)

推论1: A的Jordan标准型为 $J=diag\{J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\}$

其中 $J_{n_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda_i & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$

推论2: 设 r 为 A 的非零特征向量, 由 A 的特征向量的形式(***)知, r的第一个分量不等于0.

主定理的证明:

WLOG, 只证明特征值λ_1所对应的解的情况

设 $P^{-1}AP=J=diag\{J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\}$

$(A-\lambda_1 E)^{n_1}=P(J-\lambda_1 E)^{n_1}P^{-1}$

$\qquad\qquad = P\,diag\{0_{n_1\times n_1}, J_{n_2}(\lambda_2-\lambda_1)^{n_1},\cdots,J_{n_s}(\lambda_s-\lambda_1)^{n_1}\}P^{-1}$

故 $r_1=Pe_{n_1}$, $r_2=Pe_{n_1-1}$, $\cdots$, $r_{n_1}=Pe_1$ 是 $(A-\lambda_1 E)^{n_1}r=0$ 的 n_1个线性无关的解

且 $(A-\lambda_1 E)^i r_j\neq 0$ if $i<j$

$\quad (A-\lambda_1 E)^i r_j=0$ if $i\geq j$

从而 $\vec{\varphi}_i(x)=e^{\lambda_1 x}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\frac{x^k}{k!}(A-\lambda_1 E)^k r_i$ $(i=1,2,\cdots,n_1)$ 是(**)的 n_1个线性无关的解

注意到 $(A-\lambda_i E)^{i-1}r_i = PJ^{i-1}P^{-1}r_i$

$= PJ^{i-1}P^{-1}Pe_{n_1-i+1}$

$= PJ^{i-1}e_{n_1-i+1}$

$= Pe_{n_1}$

$= r_1 \quad (i=1,2,\cdots,n_1)$

由于r_1是A的特征向量, 由推论2, r_1的第一个分量不为0

从而 $\vec{\varphi}_i(x)$的第一个分量中 x^{i-1} 的系数不为0

显然，存在可逆线性变换：

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_1(x) &= a_{11}\vec{\varphi}_1(x) \\
\vec{\psi}_2(x) &= a_{21}\vec{\varphi}_1(x) + a_{22}\vec{\varphi}_2(x) \\
&\vdots \\
\vec{\psi}_{n_1}(x) &= a_{n_1 1}\vec{\varphi}_1(x) + \cdots + a_{n_1 n_1}\vec{\varphi}_{n_1}(x)
\end{aligned}$$

使得 $\vec{\psi}_i(x)$ 的第一个分量为 $e^{\lambda_1 x}x^{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n_1)$ $\square$