Tarea 2

June 13, 2025

1 Tarea 2

Tópicos Selectos De Matemáticas Aplicadas II: Análisis de Datos con Python Fecha de entrega: Domingo 15 de junio

Alan Badillo Salas

1. Dada la siguiente lista de vectores en $\mathbb{R}^3$:

`vectores = { [0, 1, 0], [1, 1, 0], [1, 2, 3], [-1, 0, 1], [0, 0, 1], [-1, 1, 0], [2, 1, 1], [3`

escriba una función que calcule el **ángulo** que cada uno de estos vectores forma con respecto al vector fijo $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$, y muestre únicamente aquellos vectores cuyo ángulo sea mayor a 80°, junto con el valor correspondiente del ángulo (en grados).

Primero definimos la función para calcular el ángulo, ponemos el parámetro fijo $a = (1, 0, 0)$ y aseguramos que sean arreglos de *numpy*, luego el ángulo entre dos vectores u y v estará dado por:

$$cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

[2]:
```
import numpy

def angulo(u, a = [1, 0, 0]):
    a = numpy.array(a)
    u = numpy.array(u)
    na = a.dot(a)
    nu = u.dot(u)
    return numpy.degrees(numpy.acos(a.dot(u) / (na * nu)))
```

Recorremos cada vector de la lista e imprimimos el vector y su ángulo, solo si este es mayor a 80°:

[ ]:
```
vectores = [
    [0, 1, 0],
    [1, 1, 0],
    [1, 2, 3],
    [-1, 0, 1],
    [0, 0, 1],
    [-1, 1, 0],
    [2, 1, 1],
    [3, 0.5, -1],
```

```
]

for vec in vectores:
    t = angulo(vec)

    if t > 80:
        print(f"({', '.join([f'{x:2.0f}' for x in vec])}) | {t:6.2f}°")
```

```
( 0,  1,  0) |  90.00°
( 1,  2,  3) |  85.90°
(-1,  0,  1) | 120.00°
( 0,  0,  1) |  90.00°
(-1,  1,  0) | 120.00°
```

2. Sea la siguiente función definida por partes:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^2 + y^2), & \text{si } x^2 + y^2 \leq 4 \\ \cos(x - y), & \text{si } 4 < x^2 + y^2 < 12 \\ -1, & \text{si } 12 \leq x^2 + y^2 \end{cases}$$

Visualice la función en el dominio \$ [-6, 6] $\times$[-6, 6] \$ utilizando `plt.imshow()`.

Primero definimos los vectores en el espacio (solo 6) y construimos las matrices mezcladas en la rejilla

[42]:
```
x = numpy.linspace(-6, 6, 6)
y = numpy.linspace(-6, 6, 6)

X, Y = numpy.meshgrid(x, y)

X, Y
```

[42]:
```
(array([[-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ],
        [-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ],
        [-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ],
        [-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ],
        [-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ],
        [-6. , -3.6, -1.2,  1.2,  3.6,  6. ]]),
 array([[-6. , -6. , -6. , -6. , -6. , -6. ],
        [-3.6, -3.6, -3.6, -3.6, -3.6, -3.6],
        [-1.2, -1.2, -1.2, -1.2, -1.2, -1.2],
        [ 1.2,  1.2,  1.2,  1.2,  1.2,  1.2],
        [ 3.6,  3.6,  3.6,  3.6,  3.6,  3.6],
        [ 6. ,  6. ,  6. ,  6. ,  6. ,  6. ]]))
```

Construimos una variable auxiliar que representa $x^2 + y^2$

[43]:
```
R = X ** 2 + Y ** 2

R
```

[43]:
```
array([[72.  , 48.96, 37.44, 37.44, 48.96, 72.  ],
       [48.96, 25.92, 14.4 , 14.4 , 25.92, 48.96],
       [37.44, 14.4 ,  2.88,  2.88, 14.4 , 37.44],
       [37.44, 14.4 ,  2.88,  2.88, 14.4 , 37.44],
       [48.96, 25.92, 14.4 , 14.4 , 25.92, 48.96],
       [72.  , 48.96, 37.44, 37.44, 48.96, 72.  ]])
```

Observamos que los valores para $x^2 + y^2 \leq 4$ son:

[53]:
```
R <= 4
```

[53]:
```
array([[False, False, False, False, False, False],
       [False, False, False, False, False, False],
       [False, False,  True,  True, False, False],
       [False, False,  True,  True, False, False],
       [False, False, False, False, False, False],
       [False, False, False, False, False, False]])
```

Esta activación se puede usar numéricamente:

[54]:
```
(R <= 4) * 1
```

[54]:
```
array([[0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 1, 0, 0],
       [0, 0, 1, 1, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0]])
```

Entonces multiplicamos la región de activación por la función que deberá activarse en esa región:

[59]:
```
(R <= 4) * numpy.sin(R).round(3)
```

[59]:
```
array([[ 0.   , -0.   , -0.   , -0.   , -0.   ,  0.   ],
       [-0.   ,  0.   ,  0.   ,  0.   ,  0.   , -0.   ],
       [-0.   ,  0.   ,  0.259,  0.259,  0.   , -0.   ],
       [-0.   ,  0.   ,  0.259,  0.259,  0.   , -0.   ],
       [-0.   ,  0.   ,  0.   ,  0.   ,  0.   , -0.   ],
       [ 0.   , -0.   , -0.   , -0.   , -0.   ,  0.   ]])
```

Entonces para construir $z = f(x, y)$ dada por los casos, iremos sumando los puntos en sus respectivas regiones:

[64]:
```
Z = R * 0
Z += (R <= 4) * numpy.sin(R)
Z += ((R > 4) & (R < 12)) * numpy.cos(X - Y)
```

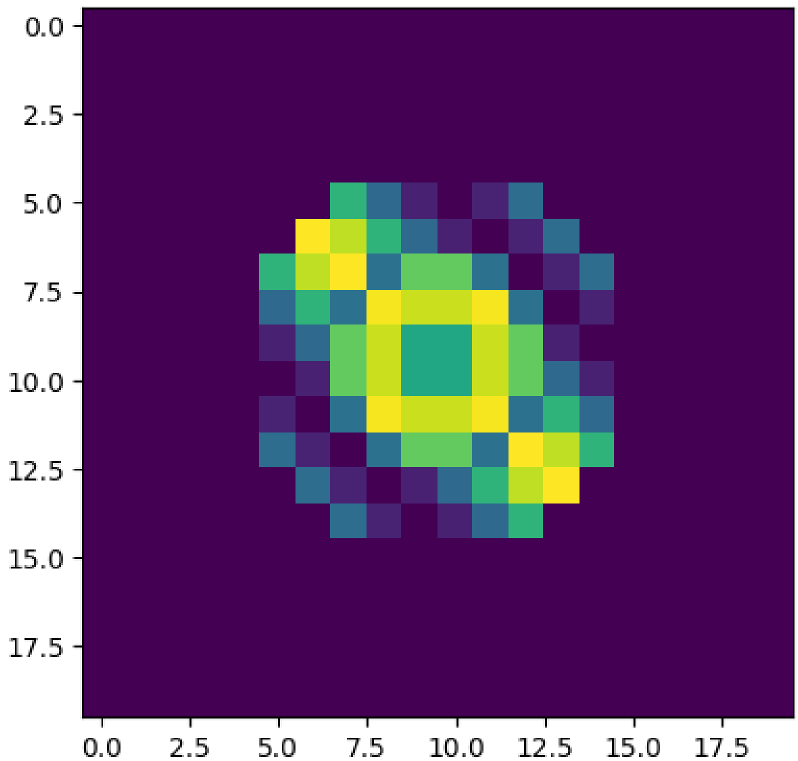
```
Z += (12 <= R) * (-1)

Z.round(3)
```

[64]:
```
array([[-1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   ],
       [-1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   ],
       [-1.   , -1.   ,  0.259,  0.259, -1.   , -1.   ],
       [-1.   , -1.   ,  0.259,  0.259, -1.   , -1.   ],
       [-1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   ],
       [-1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   , -1.   ]])
```

Ahora visualizamos toda la región en más puntos (20):

[66]:
```
import matplotlib.pyplot as pyplot

x = numpy.linspace(-6, 6, 20)
y = numpy.linspace(-6, 6, 20)

X, Y = numpy.meshgrid(x, y)

R = X ** 2 + Y ** 2

Z = R * 0
Z += (R <= 4) * numpy.sin(R)
Z += ((R > 4) & (R < 12)) * numpy.cos(X - Y)
Z += (12 <= R) * (-1)

pyplot.imshow(Z)
```

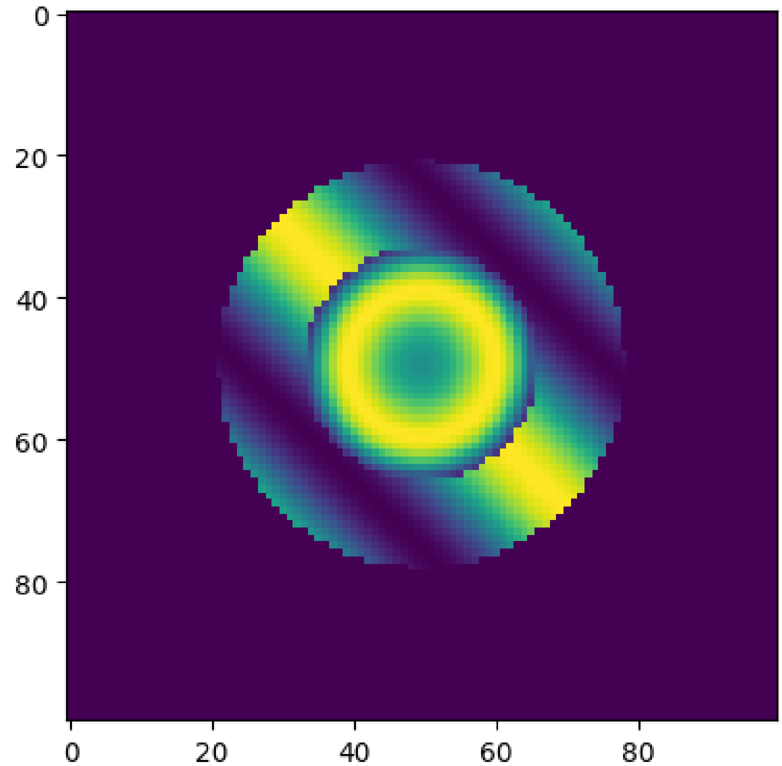
[66]:
```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x115bc7950>
```



Podemos visualizar aún con más puntos (100):

[67]:
```
import matplotlib.pyplot as pyplot

x = numpy.linspace(-6, 6, 100)
y = numpy.linspace(-6, 6, 100)

X, Y = numpy.meshgrid(x, y)

R = X ** 2 + Y ** 2

Z = R * 0
Z += (R <= 4) * numpy.sin(R)
Z += ((R > 4) & (R < 12)) * numpy.cos(X - Y)
Z += (12 <= R) * (-1)

pyplot.imshow(Z)
```

[67]: <matplotlib.image.AxesImage at 0x1151234d0>



3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 &= 7 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 4 \\
3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\
-2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

1. Resuelva el sistema.
2. Verifique la solución sustituyéndola en la ecuación original y evaluando $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

Primero definimos la matriz de coeficientes y el vector de valores:

[68]:
```
A = numpy.array([
    [ 2, -1,  3,  1, -1],
    [ 1,  2, -1,  2,  1],
    [ 3, -1,  1, -1,  2],
    [ 1,  1,  1,  1,  1],
    [-2,  4,  1, -3,  1],
])
```

```python
b = numpy.array([
    7,
    4,
    10,
    5,
    0
])

A, b
```

[68]:
```
(array([[ 2, -1,  3,  1, -1],
        [ 1,  2, -1,  2,  1],
        [ 3, -1,  1, -1,  2],
        [ 1,  1,  1,  1,  1],
        [-2,  4,  1, -3,  1]]),
 array([ 7,  4, 10,  5,  0]))
```

Podemos obtener rápidamente la solución si invertimos la matriz (si es que existe), probamos que su determinante no sea cero:

[178]:
```python
print(f"|A| = {numpy.linalg.det(A):.1f}")
```

```
|A| = -145.0
```

Como la inversa si existe, podemos obtener la solución del sistema $Ax = b$ vía:

$$x = A^{-1}b$$

[75]:
```python
x = numpy.linalg.inv(A).dot(b)

x
```

[75]:
```
array([ 3.03448276,  1.        ,  0.86206897, -0.27586207,  0.37931034])
```

Ahora resolvemos por Cramer, construyendo la matriz B que reemplaza la columna de la variable por el vector b y se dividen los determinantes:

[85]:
```python
for i in range(len(A)):
    B = A.copy()

    B[:, i] = b

    xi = numpy.linalg.det(B) / numpy.linalg.det(A)

    print(f"x{i + 1} = {xi:11.8f}")
```

```
x1 =  3.03448276
x2 =  1.00000000
x3 =  0.86206897
```

```
x4 = -0.27586207
x5 =  0.37931034
```

4. Genera un array de 400 números aleatorios con distribución normal de media 10 y desviación estándar 2.

- Calcula la media y desviación estándar de la muestra.
- ¿Cuántos valores están entre 8 y 12?

Primero generamos la muestra de 400 puntos y reportamos su media y desviación estándar:

[96]:
```
x = numpy.random.normal(10, 2, 400)

print(f"x = {x[:3]} ... {x[-3:]}")

print(f"media      : {x.mean()}")
print(f"desviación : {x.std()}")
```

```
x = [13.29341634  9.49770122  6.72190712] … [ 9.53059329 14.22561822
12.04152874]
media      : 10.048053120840368
desviación : 2.0811410979828766
```

Obtenemos el total de puntos en la región donde $8 \leq x \leq 12$:

[97]:
```
total = ((x >= 8) & (x <= 12)).sum()

print(f"|8 <= x <= 12| = {total} ({100 * total / 400:.2f}%)")
```

```
|8 <= x <= 12| = 275 (68.75%)
```

5. Simula una muestra de 200 observaciones donde cada valor puede ser 'A', 'B' o 'C' con probabilidades 0.5, 0.3 y 0.2, respectivamente (np.random.choice). Cuenta cuántas veces ocurre cada categoría.

Primero definimos las categorías A, B y C y seleccionamos 200 de ellos con las probabilidades dadas:

[183]:
```
cat = ["A", "B", "C"]

x = numpy.random.choice(cat, p=[0.5, 0.3, 0.2], size=200)

print(f"x = {x[:3]} ... {x[-3:]}")
```

```
x = ['B' 'A' 'B'] … ['B' 'A' 'B']
```

Contamos cuántas x son de cada categoría y lo reportamos:

[184]:
```
for c in cat:
    total = (x == c).sum()
    print(f"{c}: {total} ({100 * total / 200:.1f}%)")
```

```
A: 102 (51.0%)
B: 53 (26.5%)
C: 45 (22.5%)
```

También podemos hacer esto con *pandas*:

[196]:
```python
import pandas

pandas.DataFrame({ "x": x }).groupby("x").size()
```

[196]:
```
x
A    102
B     53
C     45
dtype: int64
```

6. Genera una señal base (por ejemplo, todos 100) y agrégale ruido gaussiano con desviación 5.

- Grafica la señal ruidosa.
- Calcula el error medio cuadrático con respecto a la señal original:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$$

Donde: - y_i son los valores de la señal base, - $\hat{y}_i$ son los valores de la señal ruidosa, - n es el número total de observaciones.

Primero generamos la señal base (constante) y para cada punto agregamos un ruido aleatorio distribuido normalmente:

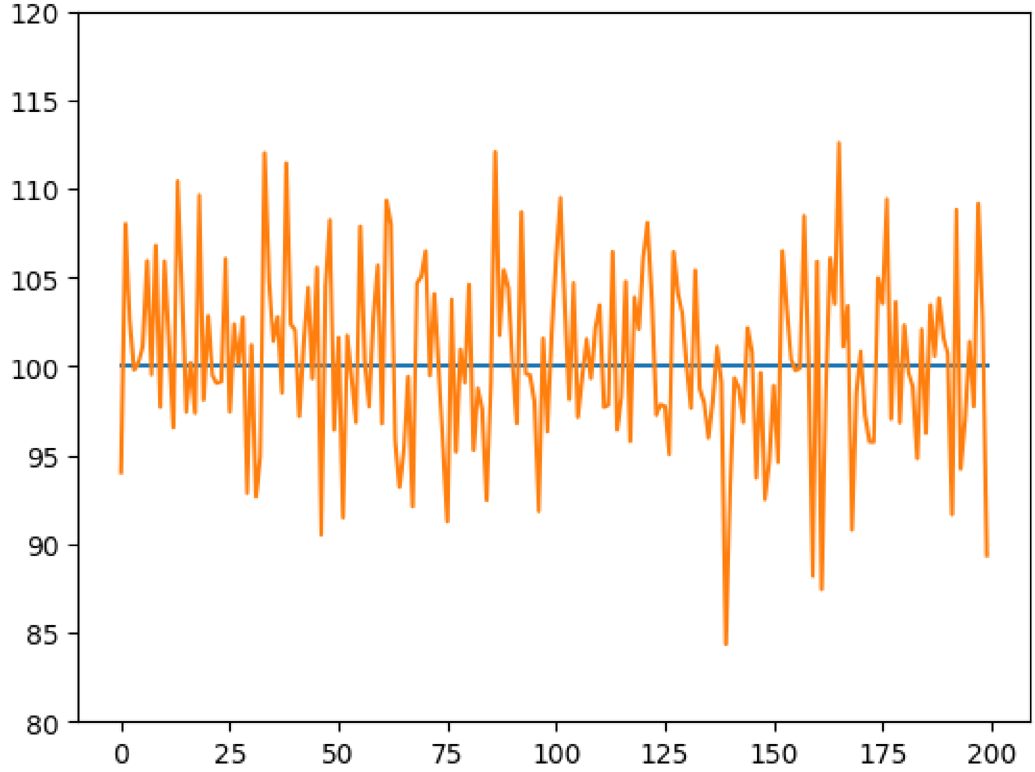
[141]:
```python
n = 200

y = numpy.ones(n) * 100

yp = y.copy()

for i in range(n):
    yp[i] += numpy.random.normal(0, 5, 1)[0]

print(f"y = {y[:3]} ... {y[-3:]}")
print(f"yp = {yp[:3]} ... {yp[-3:]}")
```

```
y = [100. 100. 100.] … [100. 100. 100.]
yp = [ 94.03121373 108.03524829 102.57290729] … [109.16251603 102.8492013
89.37277578]
```

Graficamos ambas señales:

[142]:
```
pyplot.plot(y)
pyplot.plot(yp)
pyplot.ylim(y.min() - 20, y.max() + 20)
```

[142]: (80.0, 120.0)



Calulamos el error cuadrático medio:

[148]:
```
RMSE = (((y - yp) ** 2).sum() / n) ** 0.5

print(f"RMSE: {RMSE:.6f}")
```

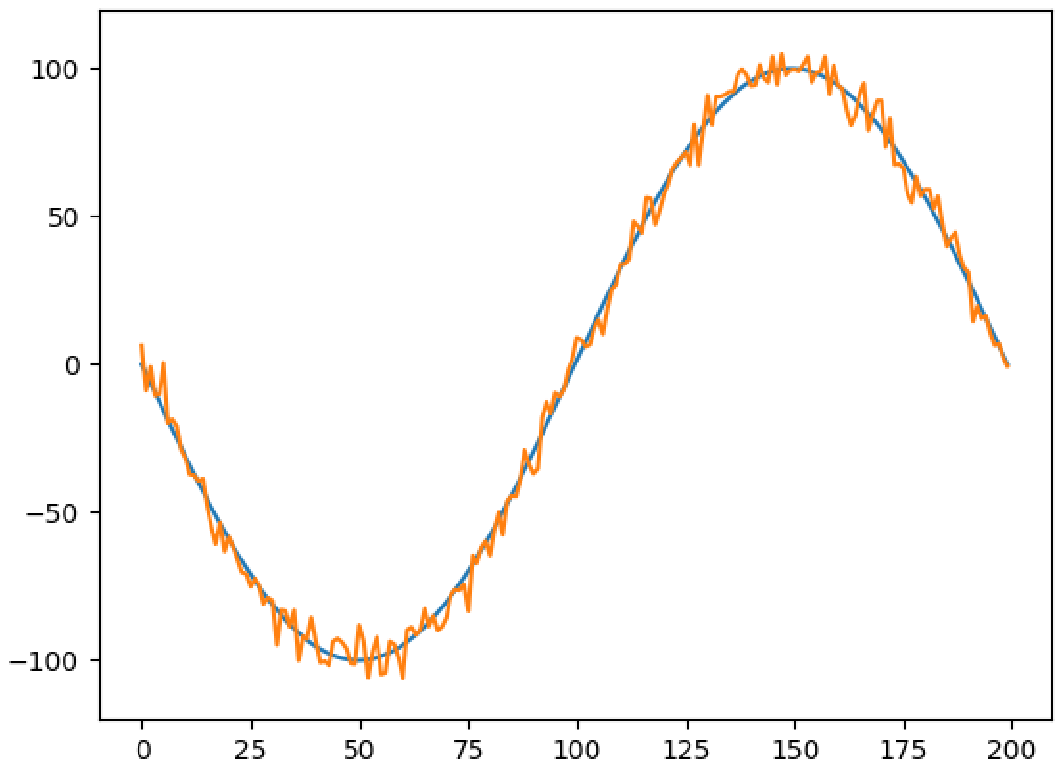
```
RMSE: 5.001866
```

Generamos otra señal para visualizar esto mejor (la señal sinoidal):

[149]:
```
n = 200

x = numpy.linspace(-numpy.pi, numpy.pi, n)

y = numpy.sin(x) * 100

yp = y.copy()
```

```python
for i in range(n):
    yp[i] += numpy.random.normal(0, 5, 1)[0]

print(f"y = {y[:3]} ... {y[-3:]}")
print(f"yp = {yp[:3]} ... {yp[-3:]}")

pyplot.plot(y)
pyplot.plot(yp)
pyplot.ylim(y.min() - 20, y.max() + 20)

RMSE = (((y - yp) ** 2).sum() / n) ** 0.5

print(f"RMSE: {RMSE:.6f}")
```

```
y = [-1.22464680e-14 -3.15685498e+00 -6.31056313e+00] … [6.31056313e+00
3.15685498e+00 1.22464680e-14]
yp = [ 6.29206401 -8.8599563  -0.80068193] … [ 6.98639091  2.22134927
-0.63479369]
RMSE: 4.867467
```



7. Dada la siguiente lista:

```
cadenas = [
    '  juan*perez!!', 'ana#LOPEZ? ', 'm@rio@@gomez', 'luis* #MORA%%', 'carla!!méndóza ',
    'PEDRO?ROSALES###', 'sofia*#cano ', 'miguel//torres', 'lucia #ramirez:', ' josé+fernández
    ' camila#RUIZ', 'marco*antonio&', 'isaBel!!GARZA', '#roberto flores* ', ' emiLIA?Reyes!',
    'DANIEL* #Martinez', '  andrés#s@las', '*pablo TORO/', ' yeSEnIa!lópez ', 'elena#morales?'
    'Nicolás*rodríguez', ' carmen?LUNA:', 'Rosa#*AVILA', 'oscar?*pineda;', 'alejandra!ríos+',
    'IGNACIO#HERRERA  ', ' sergio*MENDOZA', 'tomás#ramírez=', 'ANDREA!MORENO?', '#manuel ortíz
    'cristina*FLORES@', ' arturo#valdez;', 'LAURA*méndez', 'mariana?*ibarra!', ' esteban#quiro
    'valeria!CASTILLO', 'renata#DE la cruz', 'fernando*?Vega:', 'irma!ZAPATA%', 'francisco#rome
    'alicia*Lara=', 'liliana#MENDEZ&', 'matías*#galván;', '#ricardo!Ríos', ' catalina*ALVARADO%
    'gustavo!morales+', 'natalia#VILLARREAL:', 'andréa*páez;', '  Ramón*salinas!', ' david#moli
]
```

1. Limpie la lista 'cadenas'
2. Obtenga 50 etiquetas con el código: `[f'id_{i:03}' for i in range(1, 51)]`
3. Obtenga un objeto Series con la lista 'cadenas' indexado con las etiquetas obtenidas.

Primero definimos las cadenas:

[150]:
```
cadenas = [
    '  juan*perez!!', 'ana#LOPEZ? ', 'm@rio@@gomez', 'luis* #MORA%%', 'carla!!méndóza ',
    'PEDRO?ROSALES###', 'sofia*#cano ', 'miguel//torres', 'lucia #ramirez:', ' josé+fernández  ',
    ' camila#RUIZ', 'marco*antonio&', 'isaBel!!GARZA', '#roberto flores* ', ' emiLIA?Reyes!',
    'DANIEL* #Martinez', '  andrés#s@las', '*pablo TORO/', ' yeSEnIa!lópez ', 'elena#morales?',
    'Nicolás*rodríguez', ' carmen?LUNA:', 'Rosa#*AVILA', 'oscar?*pineda;', 'alejandra!ríos+',
    'IGNACIO#HERRERA  ', ' sergio*MENDOZA', 'tomás#ramírez=', 'ANDREA!MORENO?', '#manuel ortíz ',
    'cristina*FLORES@', ' arturo#valdez;', 'LAURA*méndez', 'mariana?*ibarra!', ' esteban#quiroz ',
    'valeria!CASTILLO', 'renata#DE la cruz', 'fernando*?Vega:', 'irma!ZAPATA%', 'francisco#romero ',
    'alicia*Lara=', 'liliana#MENDEZ&', 'matías*#galván;', '#ricardo!Ríos', ' catalina*ALVARADO%',
    'gustavo!morales+', 'natalia#VILLARREAL:', 'andréa*páez;', '  Ramón*salinas!', ' david#molina '
]
```

Definimos la función de limpieza, primero pasamos la cadena a minúsculas, quitamos los caracteres que no son alfanuméricos, luego los espacios dobles y finalmente una corrección visual para el nombre de *mario*, finalmente quitamos los espacios al principio y final y partimos la cadena en palabras y cada palabra la capitalizamos (primera letra en mayúscula):

[ ]:
```python
import re

def limpiar(cadena):
    cadena = cadena.lower()
    cadena = re.sub("[^\\w]", " ", cadena)
    cadena = re.sub("[ ]+", " ", cadena)
    cadena = re.sub("m@r", "mar", cadena)
    cadena = cadena.strip()
    cadena = " ".join([nombre.capitalize() for nombre in cadena.split(" ")])
    return cadena

s = pandas.Series(cadenas).map(limpiar)

s.values
```

[ ]:
```
array(['Juan Perez', 'Ana Lopez', 'Mario Gomez', 'Luis Mora',
       'Carla Méndóza', 'Pedro Rosales', 'Sofia Cano', 'Miguel Torres',
       'Lucia Ramirez', 'José Fernández', 'Camila Ruiz', 'Marco Antonio',
       'Isabel Garza', 'Roberto Flores', 'Emilia Reyes',
       'Daniel Martinez', 'Andrés S Las', 'Pablo Toro', 'Yesenia López',
       'Elena Morales', 'Nicolás Rodríguez', 'Carmen Luna', 'Rosa Avila',
       'Oscar Pineda', 'Alejandra Ríos', 'Ignacio Herrera',
       'Sergio Mendoza', 'Tomás Ramírez', 'Andrea Moreno', 'Manuel Ortíz',
       'Cristina Flores', 'Arturo Valdez', 'Laura Méndez',
       'Mariana Ibarra', 'Esteban Quiroz', 'Valeria Castillo',
       'Renata De La Cruz', 'Fernando Vega', 'Irma Zapata',
       'Francisco Romero', 'Alicia Lara', 'Liliana Mendez',
       'Matías Galván', 'Ricardo Ríos', 'Catalina Alvarado',
       'Gustavo Morales', 'Natalia Villarreal', 'Andréa Páez',
       'Ramón Salinas', 'David Molina'], dtype=object)
```

Agregamos los índices personalizados:

[174]:
```python
s.index = [f"id_{i:03}" for i in range(1, 51)]

s
```

[174]:
```
id_001           Juan Perez
id_002            Ana Lopez
id_003          Mario Gomez
id_004            Luis Mora
id_005        Carla Méndóza
id_006        Pedro Rosales
id_007           Sofia Cano
id_008        Miguel Torres
id_009        Lucia Ramirez
id_010       José Fernández
id_011          Camila Ruiz
```

```
id_012         Marco Antonio
id_013          Isabel Garza
id_014        Roberto Flores
id_015          Emilia Reyes
id_016       Daniel Martinez
id_017          Andrés S Las
id_018            Pablo Toro
id_019         Yesenia López
id_020         Elena Morales
id_021     Nicolás Rodríguez
id_022           Carmen Luna
id_023            Rosa Avila
id_024          Oscar Pineda
id_025        Alejandra Ríos
id_026       Ignacio Herrera
id_027        Sergio Mendoza
id_028         Tomás Ramírez
id_029         Andrea Moreno
id_030          Manuel Ortíz
id_031       Cristina Flores
id_032         Arturo Valdez
id_033          Laura Méndez
id_034        Mariana Ibarra
id_035        Esteban Quiroz
id_036      Valeria Castillo
id_037     Renata De La Cruz
id_038         Fernando Vega
id_039           Irma Zapata
id_040      Francisco Romero
id_041           Alicia Lara
id_042        Liliana Mendez
id_043         Matías Galván
id_044          Ricardo Ríos
id_045     Catalina Alvarado
id_046       Gustavo Morales
id_047    Natalia Villarreal
id_048           Andréa Páez
id_049         Ramón Salinas
id_050          David Molina
dtype: object
```