Problem Set 6, Tips

Vikram Damani
Analysis I

October 31, 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau. Der erste Teil befasst sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen, im zweiten Teil (2) wird die Serie 6 behandelt.

1 Komplexe Zahlen: Rechenregeln

Definition [Komplexe Zahl]. Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Form $z = a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. $a = \mathrm{Re}\{(z)\}$ ist der Realteil und $b = \mathrm{Im}\{(z)\}$ der Imaginärteil von z. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

□

Definition [Konjugation]. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann ist die Konjugation von z die Zahl $\overline{z} = a - bi$. Es gilt $\overline{\overline{z}} = z$ und $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, sowie $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Weitere nützliche Eigenschaften:

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $\mathrm{Re}\{(z)\} = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ und $\mathrm{Im}\{(z)\} = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

□

Definition [Betrag]. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann ist der Betrag von z die Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Der Betrag entspricht dem Abstand zwischen zwei komplexen Zahlen ($|z| = |z - 0|$: der Abstand zu 0). Es gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

□

Definition [Argument]. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann ist das Argument von z die Zahl $\varphi = \arg z = \arctan \frac{b}{a} \in [-\pi, \pi)$. Das Argument entspricht dem Winkel vom Vektor z zur Reellen Achse. Das Argument ist nicht eindeutig, d.h. $\arg z = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Das Argument ist nur definiert, wenn $z \neq 0$.

□

Definition [Polarkoordinaten]. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann sind die Polarkoordinaten von z die Zahlen $r = |z|$ und $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$. Es gilt $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Die Polarkoordinaten sind wie das Argument nicht eindeutig, da $z = r \cdot (\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k))$ für $k \in \mathbb{Z}$. Konjugation in Polarkoordinaten: $\overline{z} = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = r \cdot e^{-i\varphi}$.

□

Definition [Euler'sche Formel]. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann ist

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

□

1.1 Rechenoperationen

Definition [Addition]. Seien $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ komplexe Zahlen. Dann ist die Summe $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$. Die Addition ist kommutativ und assoziativ, d.h. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Beispiel: $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Dann ist $z_1 + z_2 = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$.

□

Definition [Subtraktion]. Genauso wie bei der Addition. Seien $z_1 = a+bi$ und $z_2 = c+di$ komplexe Zahlen. Dann ist die Differenz $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$. Es gilt $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 - z_2 = -(z_2 - z_1)$$
$$(z_1 - z_2) - z_3 = z_1 - (z_2 + z_3)$$

□

Definition [Multiplikation]. Seien $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ komplexe Zahlen. Dann ist das Produkt $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (ausmultiplizieren und Real-/Imaginärteil des Resultats zusammennehmen). Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ, d.h. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Multiplikation in Polarkoordinaten: Seien $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ komplexe Zahlen in Polarkoordinaten. Dann ist $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Beispiele:

(1) $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Dann ist $z_1 \cdot z_2 = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3)i = -5 + 10i$.

(2) $z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Dann ist $z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6 \cdot e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

$\square$

Definition [Division]. Seien $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ komplexe Zahlen. Dann ist der Quotient $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_1|^2}$. Die Division ist nicht kommutativ, aber assoziativ, d.h. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z_1}{z_2} \neq \frac{z_2}{z_1}$$
$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_3 = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$$

Division in Polarkoordinaten: Seien $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ komplexe Zahlen in Polarkoordinaten. Dann ist $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Beispiele:

(1) $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{3+4i} \\ &= \frac{1+2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \\ &= \frac{3+8}{3^2+4^2} + \frac{6-4}{3^2+4^2} i \\ &= \frac{11}{25} + \frac{2}{25} i. \end{aligned}$$

(2) $z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Dann ist $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 1.5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

$\square$

Definition [Potenzieren]. Sei $z = a + bi = r \cdot e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl. Dann ist $z^n = (a+bi)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$. Es gilt $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^0 &= 1 \\ z^1 &= z \\ z^2 &= z \cdot z \\ z^3 &= z \cdot z \cdot z \end{aligned}$$

Beispiel: $z = 1 + 2i$. Dann ist $z^2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$. $z^3 = (1+2i)^3 = 1 + 6i - 8 - 12i = -7 - 6i$.

$\square$

Definition [Wurzeln]. Sei $z = a + bi = r \cdot e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl. Dann ist die n-te Wurzel von z die Zahl $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beispiel: $z = 3 + 4i$. Dann ist $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \cdot e^{i\left(\frac{\arctan\frac{4}{3}+2\pi k}{2}\right)}$. $z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\left(\frac{\arctan\frac{2}{1}+2\pi k}{3}\right)}$.

□

2 Serie 6

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene C.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3, \mathrm{Im}\{(z)\} \geq 0\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\{(z)\} \geq \mathrm{Re}\{(z)\}\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z-3| \geq 1) \text{ und } (|z-1-i| < 4)\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z-i+3| \geq |z+2i|) \text{ und } (\mathrm{Re}\{(z)\} > 0) \text{ und } (\mathrm{Im}\{(z)\} > 0)\}$

Tipps & Tricks zu 1. $z = a + ib$ definiert einen Punkt in der komplexen Ebene mit Koordinaten (a, b). Wenn man also z in die Bedingungen einsetzt und Imaginärteil und Realteil auf beiden Seiten der (Un-)Gleichung vergleicht, erhält man zwei separate Bedingungen für a und b. Diese Bedingungen können dann in der komplexen Ebene skizziert werden.

Was ist der Unterschied zwischen einer gleichung $|z - w| = r$ und der entsprechenden Ungleichung $|z - w| \leq r$?

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden trigonometrische Beziehungen:

(a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$

(b) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$

Tipps & Tricks zu 2. Es ist einfacher mit der Euler'schen Formel zu arbeiten. Setze $z = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ und sei $z_1 = z^3 = e^{i3x} = \cos(3x) + i\sin(3x)$. Ausmultiplizieren und Real-/Imaginärteil zusammennehmen.

Aufgabe 3. (a) Skizzieren Sie alle vierten Wurzeln von w;

(b) Gibt es eine reelle Zahl w, sodass die Punkte A, B, C, D und E gerade die fünften Wurzeln von w sind? Begründen Sie!

(c) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \text{ und } z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

Tipps & Tricks zu 3. Grundsätzlich muss man hier für (a), (b) nur die Rechenregeln anwenden. Wie sind die Wurzeln auf der komplexen Ebene verteilt?