# Problem Set 5, Tips

Vikram Damani
Analysis I

October 18, 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

(a) ($\heartsuit$) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{\tan(x)}$;

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

**Tipps & Tricks zu 1.** Bernoulli-de l'Hôpital-Regel:

**Definition [Bernoulli-de l'Hôpital-Regel].** Seien $f$ und $g$ zwei Funktionen, die in einer Umgebung von $x_0$ definiert sind und in $x_0$ differenzierbar sind. Falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ gilt, sofern $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

**ACHTUNG**: Die Regel gilt nur, wenn alle fünf Bedingungen erfüllt sind.

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$,
- $f$ und $g$ sind in einer Umgebung $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ von $x_0$ definiert,
- $f$ und $g$ sind in $[a,b]$ differenzierbar, ausser evtl. in $x_0$,
- $g'(x) \neq 0$ in $[a,b] \setminus \{x_0\}$

- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

**Aufgabe 2.** (a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

(b) Seien $c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $c < d$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $c$ und $d$ das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[c, d]$.

**Tipps & Tricks zu 2.** Ein *globales Maximum* ist ein Punkt, an dem die Funktion $f(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(f)$ den größten Funktionswert annimmt. Ein *lokales Maximum* ist ein Punkt, an dem die Funktion $f(x)$ für alle $x \in [a, b] \subseteq \mathcal{D}(f)$ den größten Funktionswert annimmt, jedoch nicht unbedingt den größten Funktionswert im gesamten Definitionsbereich.

**Definition [Extremalstellen].** Eine Funktion $f(x)$ hat eine Extremalstelle an der Stelle $x_0$, falls $f'(x_0) = 0$.

$\square$

**Definition [Globales Maximum].** Eine Funktion $f(x)$ hat ein globales Maximum an der Stelle $x_0$, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(f)$.

$\square$

**Definition [Lokales Maximum].** Eine Funktion $f(x)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x_0$, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b] \subseteq \mathcal{D}(f)$ in einer Umgebung von $x_0$.

$\square$

**Theorem [Bedingungen für Extremalstellen].** Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(f)$ differenzierbar ist. Die Funktion hat in $x_0 \in [a, b]$ eine Extremalstelle, falls:

- $f'(x_0) = 0$,
- $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ wenn $f(a) \geq f(x)$ bzw. $f(b) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$,

Falls $f$ nicht auf $[a, b]$ differenzierbar, dann ist $x_0$ eine Extremalstelle, falls $f$ in $x_0$ definiert ist und $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$.

$\square$

**Definition [Höhere Ableitungen].** Die $n$-te Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist definiert als:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(\dots \frac{d}{dx}}_{\text{n mal}} f(x)))$$

□

**Definition [Maxima und Minima mit höheren Ableitungen].** Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $x_0$ zweimal differenzierbar ist. Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat $f(x)$ in $x_0$ ein lokales Minimum. Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat $f(x)$ in $x_0$ ein lokales Maximum.

□

Um in (b) das Maximum zu bestimmen ist eine Fallunterscheidung notwendig, da das Intervall $[c, d]$ nicht spezifiziert ist (also beliebig gewählt werden kann). Wenn $d$ kleiner als die Extremalstelle ist, dann ist das Maximum in $d$. Was passiert wenn $c$ größer als die Extremalstelle ist? (Gebrauch von der $\max(x, y)$[1] Funktion erlaubt).

**Aufgabe 3.** (♡) Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse $m_0$ mit Zerfallsrate $\alpha$. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross $\alpha$ für ein neues Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach $t_1$ Sekunden, also $m(t_1) = 1$.

(a) Bestimmen Sie $\alpha(t_1)$ als Funktion des Zeitpunkts $t_1$.

(b) Ab jetzt sei $t_1 = 10$ Sekunden gemessen, wobei der Messfehler $\Delta t$ maximal $\pm 0.1$ Sekunden betrage. Man bestimme die maximal und minimal möglichen Werte von $\alpha(t_1 + \Delta t)$.

(c) Bestimmen Sie den absoluten Fehler $\Delta\alpha$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\Delta\alpha$ ungefähr proportional zu $\Delta t$ und zu $\frac{1}{t_1^2}$ ist.

(d) Bestimmen Sie den relativen Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ ungefähr proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

(e) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion, d.h. $d\alpha = \alpha' dt$. Vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

**Tipps & Tricks zu 3.** Fehlerrechnung:

**Definition [Absoluter Fehler].** Der absolute Fehler $\Delta f$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert als:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

[1] $\max(x, y)$ gibt den grösseren Wert zurück.

$\square$

**Definition [Relativer Fehler].** Der relative Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert als:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$$

$\square$

**Definition [Linearisierung].** Die Linearisierung einer Funktion $f(x)$ um den Punkt $x_0$ ist definiert als:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\square$

**Definition [Linearisierter Fehler].** Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $x_0$ differenzierbar ist. Der Fehler $\Delta f$ der Funktion $f(x)$ ist definiert als:

$$df = f'(x_0)dx$$

$\square$

**BEACHTE**: $t + \Delta t \approx t$ darf man als Approximation jeweils verwenden, aber $\Delta t \approx 0$ selbst muss immer eine Grenzwertbetrachtung sein.

**Aufgabe 4.** In dieser Aufgabe wollen wir folgenden Satz beweisen und verwenden:

**Theorem [].** Eine stetige, in $(a, b)$ differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

$\square$

(a) ($\heartsuit$) Zeigen Sie mittels expliziter Berechnung des Differentialquotienten, dass eine konstante Funktion überall die Ableitung 0 hat.

(b) Zeigen Sie: Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konstant. Verwenden Sie dafür den Mittelwertsatz.

(c) ($\heartsuit$) Beweisen Sie mit dem nun bewiesenen Satz die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

**Tipps & Tricks zu 4.** Mittelwertsatz:

**Definition [Mittelwertsatz].** Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $[a, b]$ stetig ist und in $(a, b)$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, so dass:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

Einsetzen von $f'(x) = 0$ in den Mittelwertsatz, ergibt $f(b) - f(a) = 0$, also $f(b) = f(a)$. Wieso muss $f$ dann konstant sein?

**Bemerkung [Ableitungen von inversen Funktionen].** Sei $f(x)$ eine Funktion, die in $[a, b]$ stetig ist und in $(a, b)$ differenzierbar ist mit inverse $f^{-1}$. Dann gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen können so berechnet werden, oder man kann in der Formelsammmlung nachschauen.