Problem Set 5, Tips

Vikram Damani
Analysis I

October 31, 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

1 Theorie

Definition [Fundamentalsatz der Algebra]. Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Eine Zahl x_0 heißt Nullstelle von $p(x)$, falls $p(x_0) = 0$.

Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 1$ hat genau n Nullstellen, gezählt mit Vielfachheit. Das Polynom $p(x)$ lässt sich also schreiben als

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \tag{1}$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $p(x)$ sind.

Bemerkung: Die Nullstellen von einem Polynom $p(x)$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ sind nicht notwendigerweise reell. Es gilt jedoch, dass komplexe Nullstellen stets als Komplex konjugierte Paare auftreten, d.h. wenn $x_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist, dann ist auch $\overline{x_0}$ eine Nullstelle von $p(x)$.

$\square$

Bemerkung [Arsinh]**.** Die Funktion $\operatorname{Arsinh}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$, d.h. $\sinh\big(\operatorname{Arsinh}(x)\big) = x$. Es gilt aus der Vorlesung, dass $\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big)$.

Definition [Exponentialfunktion]. Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)\,,\; x \mapsto \exp(x) \tag{2}$$

ist definiert als

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \tag{4}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f(x). \tag{5}$$

Die Exponentialfunktion ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Es gilt $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$.

□

Definition [Logarithmus]. Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. $\exp\big(\ln(x)\big) = x$. Der natürliche Logarithmus ist definiert als

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) \tag{6}$$

und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \tag{7}$$

für alle $x, y \in (0, \infty)$. Der natürliche Logarithmus ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Es gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

Bemerkung [Ableitung des Logarithmus]. Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{8}$$

Daher ist die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) \underset{(8)}{=} \frac{1}{e^{\ln(x)}} \underset{def.}{=} \frac{1}{x}. \tag{9}$$

Bemerkung [Logarithmus zur Basis a]. Da $a^x = e^{x \ln(a)}$ gilt, ist der Logarithmus zur Basis a definiert als

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \tag{10}$$

Es gilt $\log_a(1) = 0$ und $\log_a(a) = 1$. Die Ableitung des Logarithmus zur Basis a ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}. \tag{11}$$

□

Definition [Landau-o]. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann schreiben wir $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$, falls

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{12}$$

Bemerkung [Intuition]. Die Schreibweise $f(x) = o(g(x))$ bedeutet, dass $f(x)$ im Vergleich zu $g(x)$ für $x \to \infty$ vernachlässigbar klein ist.

Bemerkung [Berechnung]. Um zu zeigen, dass $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$, ist es wichtig, gut mit Bernoulli-Hôpital umgehen zu können.

Bemerkung [ln, x^k und e^x]. Es gilt $\ln(x) = o(x^k)$ für $x \to \infty$ für jedes $k > 0$, da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} \underset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^k} = 0. \tag{13}$$

Es gilt auch $x^k = o(e^x)$ für $x \to \infty$ für jedes $k > 0$, da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} \underset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} \underset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x} \underset{\text{B-H}}{=} \cdots \underset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0. \tag{14}$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$. Dann gilt $f(x) = o(g(x))$ für $x \to 0$, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0. \tag{15}$$

□

Definition [Landau-O]. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann schreiben wir $f(x) = O(g(x))$ für $x \to \infty$, falls es eine Konstante $A \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = A \neq 0. \tag{16}$$

□