Problem Set 8, Tips

Vikram Damani
Analysis I

8. November 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

Tipps & Tricks zu 1.

(Definitionen und Sätze aus den Tipps & Tricks für Serie 5:)

Definition [Extremalstellen]. Eine Funktion $f(x)$ hat eine Extremalstelle an der Stelle x_0, falls $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Definition [Höhere Ableitungen]. Sei $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ diff'bar. Dann ist

$$\frac{d}{dx} f = f' : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R} \tag{1}$$

die erste Ableitung. Falls f' diff'bar, ist die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2}{dx^2} f = (f')' : \mathcal{D}(f') \to \mathbb{R} \tag{2}$$

Allgemein, ist die n-te Ableitung von $f(x)$ ist definiert als:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(\dots \frac{d}{dx}}_{\text{n mal}} f(x))), \quad x \in \mathcal{D}(f^{(n)})$$

wobei $f^{(0)} = f$.

$\square$

Definition [Maxima und Minima mit höheren Ableitungen]. Sei $f(x)$ eine Funktion, die in x_0 mindestens zweimal differenzierbar ist. Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat $f(x)$ in x_0 ein lokales Minimum. Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat $f(x)$ in x_0 ein lokales Maximum.

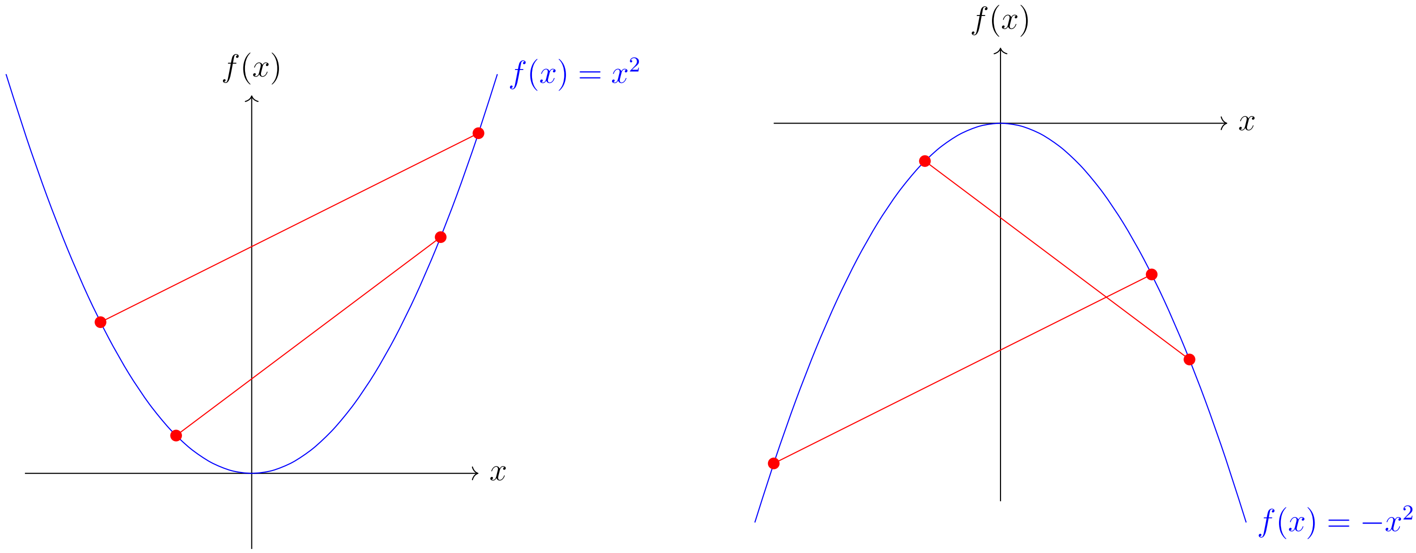
Achtung: Am Rand des Definitionsbereiches sind Ableitungen nicht definiert. Es kann dort dennoch lokale Maximal- oder Minimalstellen geben!

□

Definition [Konkavität und Konvexität]. Eine Funktion ist in eimem Intervall I *konvex*, falls sie oberhalb ihrer Tangente liegt. Anders gesagt, eine Funktion ist in einem Intervall I konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$, die Gerade durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ oberhalb der Funktion liegt.

Wir nennen eine Funktion konvex, falls sie im ganzen Definitionsbereich konvex ist.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist ein Beispiel für eine konvexe Funktion.



(A) Ein Beispiel für eine konvexe Funktion.

(B) Ein Beispiel für eine konkave Funktion.

Abbildung 1: Beispiele.

Eine Funktion ist in einem Intervall I *konkav*, falls sie unterhalb ihrer Tangente liegt, oder äquivalent, falls für alle $x_1, x_2 \in I$, die Gerade durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ unterhalb der Funktion liegt.

Wir nennen eine Funktion konkav, falls sie im ganzen Definitionsbereich konkav ist.

Die Funktion $f(x) = -x^2$ ist ein Beispiel für eine konkave Funktion. Die Funktion $f(x) = -x + 1$ ist ein Beispiel für eine konvexe Funktion.

Wir können auch die zweite Ableitung verwenden, um Konvexität und Konkavität zu bestimmen.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist } \textit{konvex} \text{ in } I$$
$$f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist } \textit{konkav} \text{ in } I$$

Eine Funktion ist in einem Intervall I konvex, falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Eine Funktion ist in einem Intervall I konkav, falls $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Etwas mathematischer: Eine Funktion $f(x)$ ist in einem Intervall I konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{3}$$

Eine Funktion $f(x)$ ist in einem Intervall I konkav, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{4}$$

Die funktionen $l(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ sind lineare Interpolationen (also Geraden) durch x_1 und x_2.

□

Definition [Wendepunkte]. Eine Funktion $f(x)$ hat einen Wendepunkt an der Stelle x_0, falls $f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ das Vorzeichen wechselt.

Bemerkung [Wendepunkte und Sattelpunkte]. Bei einem Sattelpunkt gilt zusatzlich $f'(x_0) = 0$.

□

Theorie zu 2 & 3.

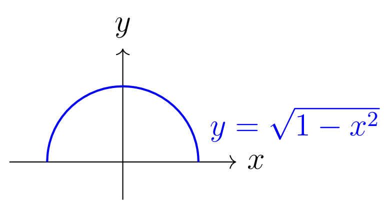
Definition [Ebene Kurven]. Ebene Kurven sind "eindimensionale" Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

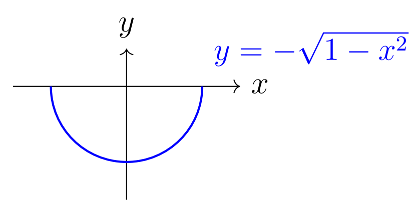
Eine Kurve C ist eine Menge von Punkten (x, y), die auf verschiedene Weisen beschrieben werden können:

1. Parametrisierung: $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$, wobei $x(t)$ und $y(t)$ Funktionen sind, die t auf x und y abbilden.
2. Implizite Darstellung: $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$, wobei $F(x, y)$ eine Funktion von x und y ist.
3. Explizite Darstellung: $C = \{(x, y) \subset \mathbb{R}^2\}$. y lässt sich dann anhand (mehrerer) Funktionen von x ausdrücken.

   Zum Beispiel:

   $$C = \{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{1-x^2}\}, \quad \text{ein Kreis mit Radius 1.}$$





Bemerkung [Von Parametrisierung zu impliziten Darstellung]. Um von einer Parametrisierung zu einer impliziten Darstellung zu kommen, muss man in den Parametrisierungen $x(t)$ und $y(t)$ t eliminieren. Dazu kann man z.B. die Umkehrfunktion $t(x)$ bestimmen und in $y(t)$ einsetzen.

$\square$