

Problem Set 5, Tips

Vikram Damani
Analysis I

November 1, 2024

Aufgaben in **rot** markiert, Tipps & Tricks in **blau**.

1 Theorie

Definition [Fundamentalsatz der Algebra]. Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Eine Zahl x_0 heißt Nullstelle von $p(x)$, falls $p(x_0) = 0$.

Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 1$ hat genau n Nullstellen, gezählt mit Vielfachheit. Das Polynom $p(x)$ lässt sich also schreiben als

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (1)$$

wobei x_1, x_2, \dots, x_n die Nullstellen von $p(x)$ sind.

Bemerkung: Die Nullstellen von einem Polynom $p(x)$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ sind nicht notwendigerweise reell. Es gilt jedoch, dass komplexe Nullstellen stets als Komplex konjugierte Paare auftreten, d.h. wenn $x_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist, dann ist auch $\overline{x_0}$ eine Nullstelle von $p(x)$.

□

Bemerkung [Arsinh]. Die Funktion $\text{Arsinh}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$, d.h. $\sinh(\text{Arsinh}(x)) = x$. Es gilt aus der Vorlesung, dass $\text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.