

Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

25. Februar 2025

1 Theorie

Definition 1. [Kreisscheiben (Technical Definition)] Die *offene Kreisfläche* ist die Menge

$$\Delta_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

und die *abgeschlossene Kreisscheibe* ist die Menge

$$\overline{\Delta}_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

[*Extrema*]. Der Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ ist eine

(a) **Globale Maximalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(b) **Globale Minimalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

(c) **Lokale Maximalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(d) **Lokale Minimalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

Definition 2. [Beschränktes Gebiet]. Ein Gebiet D ist *beschränkt*, falls es einen (möglicherweise sehr grossen) Kreis Δ_r mit Radius r gibt, so dass $D \subseteq \Delta_r$.

[*Maximum und Minimum*]. Ist $D(f)$ *beschränkt* und f *stetig*, so hat f je eine **globale Maximal-** und **Minimalstelle**.

Man findet (lokale) Extremalstellen von Funktionen in mehreren Variablen auf die gleiche Weise wie bei Funktionen in einer Variablen.

[Finden von Extrema]. Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle von f , dann gilt

- (i) (x_0, y_0) auf dem Rand von $D(f)$ ODER
- (ii) $f_x(x_0, y_0)$ oder $f_y(x_0, y_0)$ nicht definiert ODER
- (iii) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (konstante, d.h. horizontale Tangentialebene).

Remark 3: Achtung!

Es folgt aus (iii) alleine noch nicht, dass (x_0, y_0) extremal ist. Es könnte auch ein Sattelpunkt sein.

Zum Finden *aller* Extrema müssen alle Stellen vom Typ (i) und (ii) untersucht werden.

This is nothing new, we already had these three criteria in Analysis I for finding the extrema of functions with one variable.

Die Kettenregel lässt sich ebenfalls verallgemeinern.

[Verallgemeinerte Kettenregel]. Sei $F(t) = f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t))$. Dann gilt

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}(t)) = f_x(x(t), y(t)) \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x(t), y(t)) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \boxed{\text{grad}(f) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} \quad (3)$$

Fact 4. Man kann die verallg. Kettenregel anwenden um die Steigung an implizit gegebenen Kurven im \mathbb{R}^2 (wie z.B. Niveaulinien) zu berechnen.

[Tangentensteigung an Kurven] Die Tangentensteigung an die Kurve $K : f(x, y) = 0$ an der Stelle (x_0, y_0) ist

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (4)$$

We have discussed functions in two variables at length now. It is therefore only natural that we extend our discussion once more to functions in higher dimensions.

[Funktionen in drei Variablen] Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} f: \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{bzw. } \vec{r} \longmapsto f(\vec{r}), \tag{6}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Definition 5. [Niveaufläche] Für ein $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = C\} \tag{7}$$

2 Tipps

2. Aufgabe 2.

Wir betrachten die folgende Liste von Funktionen

- (a) $f(x, y) = \sin(x - y)(-x^2 + y^2)$
- (b) $g(x, y) = (x - y)e^{-x^2 + y^2}$
- (c) $h(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$
- (d) $l(x, y) = (x^2 - y^2)xy$.

Tipps zu Aufgabe 2. Hier ist es wichtig, sowohl die Symmetrien der Funktionen als auch die Periodizität in Richtung der x - und y -Achsen zu betrachten. Die Funktion l lässt sich faktorisieren, was Berechnung der Niveaulinien evtl. vereinfacht.