Problem Set 10, Tips

Vikram Damani
Analysis I

24. November 2024

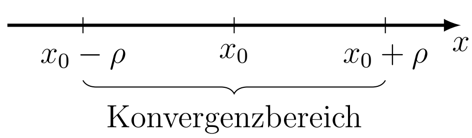
Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

1 Theorie

Definition [(Recap) Konvergenzbereich]. Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ist das Intervall $I = (-\rho + x_0, x_0 + \rho)$, in dem die Potenzreihe konvergiert. Die Randpunkte $x_0 + \rho$ und $x_0 - \rho$ müssen separat betrachtet werden, da die Konvergenz an diesen Punkten nicht garantiert ist.[1]



Der Konvergenzradius ρ ist gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

falls der Grenzwert existiert.

□

Definition [Potenzreihen mit Mittelpunkt x_0]. Durch die übliche Koordinatentransformation $x \rightsquigarrow x - x_0$ kann man jede Potenzreihe in eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ umschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

[1] Beispiel aus der Vorlesung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ hat Konvergenzbereich $[-1, 1)$, Kap. 8.5, (15.11.2024). Siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvergenzradius`

Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist dann ein (offenes/halboffenes/geschlossenses) Intervall mit Mittelpunkt x_0.

□

Theorem [Eindeutigkeit von Potenzreihen]. Stellen zwei Potenzreihen mit selbem Mittelpunkt xo die selbe Funktion dar, dann stimmen ihre Koeffizienten überein.

□

Definition [Taylorpolynom]. Das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt a ist gegeben durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Bemerkung: Das n-te Taylorpolynom ist eine Approximation n-ten Grades der Funktion $f(x)$ um den Entwicklungspunkt a. Je grösser n, desto genauer ist die Approximation und desto breiter ist der Beriech mit guter Approximation.

□

Durch die Annahme, dass eine Funktion durch ein Polynom "unendlichen Grades" (also eine Potenzreihe) genau dargestellt weden kann, kommt man zu folgendem erstaunlichen Ergebnis:

Definition [Taylorreihe]. Sei $f(x)$ eine glatte Funktion, d.h eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist. Dann heisst

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die Taylorreihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt a.

Bemerkung: *Meistens* stellt die Taylorreihe die Funktion $f(x)$ im Konvergenzbereich dar, d.h. $f(x) = T(x)$ für x im Konvergenzbereich.

□

Beispiele: Die bereits (in der Vorlesung) gefundenen Potenzreihen

(i) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(ii) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

(iii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

(iv) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

(v) $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

(vi) $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

(vii) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 1$ für alle α)

stellen jeweils ihre Funktion im Konvergenzbereich dar und sind deshalb auch die zugehörige Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Bemerkung [Gerade und Ungerade Funktionen]. Die Taylorreihe einer geraden Funktion ($f(x) = f(-x)$) enthält nur gerade Potenzen von x.

Analog enthält die Taylorreihe einer ungeraden Funktion ($f(-x) = -f(x)$) nur ungerade Potenzen von x.

2 Tipps & Tricks

Aufgabe 1b. [Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.]

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + x^4\right) \tag{1}$$

Tipps & Tricks zu 1b. Die Funktion $f(x)$ ist ein Produkt von x^2 und $\ln\bigl(1+x^4\bigr)$. Die Taylorreihe eines Produkts ist das Produkt der Taylorreihen der Faktoren. Die Taylorreihe von x^2 ist bekannt, die von $\ln\bigl(1+x^4\bigr)$ kann durch die Potenzreihe von $\ln(1+x)$ und einer geeigneten Substitution gefunden werden.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Tipps & Tricks zu 2. Durch Berechnung der Taylorreihe des Integranden und gliedweises Integrieren lässt sich die Gesamt-Taylorreihe der Funktion ermitteln.

Die Taylorreihe von $\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ kann durch die Taylorreihe von e^x und einer geeigneten Substitution, sowie gliedweises dividieren durch t^2 gefunden werden.

Aufgabe 3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3} \tag{3}$$

in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

Tipps & Tricks zu 3. $1-x+x^2-x^3$ ist ein Polynom 3. Grades, das man in zwei Faktoren $(a+b)(c+d) = 1-x+x^2-x^3$ zerlegen kann. Mit diesen Faktoren kann man die Partialbruchzerlegung durchführen. Daraus ergeben sich dann zwei Brüche, deren Potenzreihen berechnet werden können. Die Potenzreihe von $f(x)$ ist somit die Summe der Potenzreihen der beiden Brüche.