Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

3. März 2025

1 Theorie

Definition 1. [Kreisscheiben (Technical Definition)] Die *offene Kreisfläche* ist die Menge

$$\Delta_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$$

und die *abgeschlossense Kreisscheibe* ist die Menge

$$\overline{\Delta}_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\right\}$$

[Extrema]. Der Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ ist eine

(a) **Globale Maximalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(b) **Globale Minimalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

(c) **Lokale Maximalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(d) **Lokale Minimalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

Definition 2. [Beschränktes Gebiet]. Ein Gebiet D ist *beschränkt*, falls es einen (möglicherweise sehr grossen) Kreis Δ_r mit Radius r gibt, so dass $D \subseteq \Delta_r$.

[Maximum und Minimum]. Ist $D(f)$ *beschränkt* und f *stetig*, so hat f je eine globale Maximal- und Minimalstelle.

Man findet (lokale) Extremalstellen von Funktionen in mehreren Variablen auf die gleiche Weise wie bei Funktionen in einer Variablen.

[Finden von Extrema]. Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle von f, dann gilt

(i) (x_0, y_0) auf dem Rand von $D(f)$ ODER

(ii) $f_x(x_0, y_0)$ oder $f(x_0, y_0)$ nicht definiert ODER

(iii) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (konstante, d.h. horizontale Tangentialebene).

Remark 3: Achtung!

Es folgt aus (iii) alleine noch nicht, dass (x_0, y_0) extremal ist. Es könnte auch ein Sattelpunkt sein.

Zum Finden *aller* Extrema müssen alle Stellen vom Typ (i) und (ii) untersucht werden.

This is nothing new, we already had these three criteria in Analysis I for finding the extrema of functions with one variable.

Die Kettenregel lässt sich ebenfalls verallemeinern.

[Verallgemeinerte Kettenregel]. Sei $F(t) = f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F'(t) = \tfrac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}(t)) &= f_x(x(t), y(t)) \tfrac{\partial x}{\partial t} + f_y(x(t), y(t)) \tfrac{\partial y}{\partial t} && (1) \\ &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} && (2) \\ &= \boxed{grad(f) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} && (3) \end{aligned}$$

Fact 4. *Man kann die verallg. Kettenregel anwenden um die Steigung an implizit gegebenen Kurven im $\mathbb{R}^2$ (wie z.B. Niveaulinien) zu berechnen.*

[Tangentensteigung an Kurven] Die Tangentensteigung an die Kurve $K : f(x, y) = 0$ an der Stelle (x_0, y_0) ist

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \tag{4}$$

We have discussed functions in two variables at length now. It is therefore only natural that we extend our discussion once more to functions in higher dimensions.

[Funktionen in drei Variablen] Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{bzw. } \vec{r} \longmapsto f(\vec{r}), \tag{6}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Definition 5. [Niveaufläche] Für ein $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x, y, z) = C\big\} \tag{7}$$