Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

25. Februar 2025

1 Theorie

Definition 1. [Kreisscheiben (Technical Definition)] Die *offene Kreisfläche* ist die Menge

$$\Delta_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$$

und die *abgeschlossense Kreisscheibe* ist die Menge

$$\overline{\Delta}_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\right\}$$

[Extrema]. Der Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ ist eine

(a) **Globale Maximalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(b) **Globale Minimalstelle** falls für alle $(x, y) \in D(f)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

(c) **Lokale Maximalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

(d) **Lokale Minimalstelle** falls es eine Kreisscheibe $\Delta(x_0, y_0)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in D(f) \cap \Delta(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

Definition 2. [Beschränktes Gebiet]. Ein Gebiet D ist *beschränkt*, falls es einen (möglicherweise sehr grossen) Kreis Δ_r mit Radius r gibt, so dass $D \subseteq \Delta_r$.

[Maximum und Minimum]. Ist $D(f)$ *beschränkt* und f *stetig*, so hat f je eine globale Maximal- und Minimalstelle.

Man findet (lokale) Extremalstellen von Funktionen in mehreren Variablen auf die gleiche Weise wie bei Funktionen in einer Variablen.

[Finden von Extrema]. Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle von f, dann gilt

(i) (x_0, y_0) auf dem Rand von $D(f)$ ODER
(ii) $f_x(x_0, y_0)$ oder $f(x_0, y_0)$ nicht definiert ODER
(iii) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (konstante, d.h. horizontale Tangentialebene).

Remark 3: Achtung!
Es folgt aus (iii) alleine noch nicht, dass (x_0, y_0) extremal ist. Es könnte auch ein Sattelpunkt sein.

Zum Finden *aller* Extrema müssen alle Stellen vom Typ (i) und (ii) untersucht werden.

This is nothing new, we already had these three criteria in Analysis I for finding the extrema of functions with one variable.

Die Kettenregel lässt sich ebenfalls verallemeinern.

[Verallgemeinerte Kettenregel]. Sei $F(t) = f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t))$. Dann gilt

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}(t)) = f_x(x(t), y(t))\frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x(t), y(t))\frac{\partial y}{\partial t} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \boxed{grad(f) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} \quad (3)$$

2 Tipps

2. Aufgabe 2.

Wir betrachten die folgende Liste von Funktionen

(a) $f(x, y) = \sin(x - y)(-x^2 + y^2)$
(b) $g(x, y) = (x - y)e^{-x^2+y^2}$
(c) $h(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$
(d) $l(x, y) = (x^2 - y^2)xy$.

Tipps zu Aufgabe 2. Hier ist es wichtig, sowohl die Symmetrien der Funktionen als auch die Periodizität in Richtung der x- und y-Achsen zu betrachten. Die Funktion l lässt sich faktorisieren, was Berechnung der Niveaulinen evtl. vereinfacht.