Problem Set 12, Tips

Vikram R. Damani
Analysis I

5. Dezember 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

1 Tipps & Tricks

Tipps & Tricks zu (1), (2a). Die Fläche, die von einer in Polarkoordinaten gegeben Kurve $\rho = f(\varphi)$ eingeschlossen wird ist gegeben durch die Sektorfläche $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi)\mathrm{d}t$.

Tipps & Tricks zu (2b). b ist der zweifache Abstand vom ersten Punkt mit einer horizontalen Tangente an die x-Achse.

Recall: $\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|}$ und die Steigung der Tangente ist gegeben durch $m = \frac{\dot{y(t)}}{\dot{x}(t)}$.

Hinweis: Versuche $x(\varphi) = f(\rho, \varphi)$ und $y(\varphi) = g(\rho, \varphi)$ zu bestimmen und die Ableitung von $y(t)$ zu berechnen.

Tipps & Tricks zu (3). Eine Anwendung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung, der Bogenlägenformel und der Tangentensteigung.

Tipps & Tricks zu (4). Finde eine Parametrisierung $x(t) = f(t)$, $y(t) = g(t)$ im ersten Quadranten, die die implizite Gleichung $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ erfüllt. Dann kann man die Fläche im ersten Quadranten durch die Formel $\int_0^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t$ berechnen.

2 Theorie

Definition [Rekursive Integralformeln]. Es seien die Integrale

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x \\ J_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ J_n &= I_n.\end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}I_0 &= \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= 1.\end{aligned} \tag{3}$$

Beweis. Durch partielle Integration und Anwendung der Rekursionsformel für I_n und J_n. ■

Bemerkung [Rekursives Log-Integral]. Es lässt sich analog zeigen, dass gilt

$$L_n = \int_1^e \ln^n(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$= (n-1)(L_{n-2} - L_{n-1}) \tag{5}$$

$$= e - nL_{n-1} \tag{6}$$

Wobei die erste Rekursionsformel durch partielle Integration von $\ln^n = \ln \cdot \ln^{n-1}$ und die zweite durch partielle Integration von $\ln^n = 1 \cdot \ln^n$ bestimmt wird.

□

Bemerkung [Integration von rationalen Funktionen]. Durch **Polynomdivision** (wenn der Grad des Zählers grösser ist als der Grad des Nenners) oder durch **Partialbruchzerlegung** (wenn der Grad des Nenners grösser ist als der Grad des Zählers) lassen sich rationale Funktionen so vereinfachen, dass sie entweder direkt integrierbar sind oder mit den log oder arctan Tricks integriert werden können:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln\big(u(x)\big) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Definition [Integrale ebener Kurven]. Die Fläche zwischen einer ebenen Kurve und der x-Achse ist gegeben durch

$$I = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

Man erhält diese Formel durch eine ähnliche Methode der Betrachtung einer Riemannschen Summe wie bei Integralen von Funktionen.

□

Definition [Sektorfläche (pos. falls links)]. Die von einer ebenen Kurve und den beiden Radien $\rho_1 = \rho(\varphi_1)$ und $\rho_2 = \rho(\varphi_2)$ eingeschlossene Fläche ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y - \dot{y}x \mathrm{d}t && (8)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \mathrm{d}t && (9)
\end{aligned}
$$

in jeweils Kart.-/Polarkoordinaten.[1]

□

Definition [Bogenlänge]. Die Bogenlänge einer ebenen Kurve ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \mathrm{d}t && (10)\\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} \mathrm{d}t && (11)
\end{aligned}
$$

□

[1] Gute Illustrationen hierzu finden sich in `https://n.ethz.ch/~brunnerg/Analysis%20I/Serie%2010.pdf`