Problem Set 4, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

19. März 2025

1 Tipps

1. Aufgabe 1.

Tipps zu Aufgabe 1. lol

2. Aufgabe 2.

d

Tipps zu Aufgabe 2. d

3. Aufgabe 3.

dooooooooooooooooo o ooo oo o ooo oooo ooooo oo oo oo oooo o o o o o o o o oo oooooooooooooooooooooooooooooooooooooo o oo oo oo oooo oooo o oo o o o o o o o o oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Tipps zu Aufgabe 3. daaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa a a a a a a a a a a a a a a a a aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa aaa a a a a a a a a a a a a a a a

2 Theorie

[Satz von Leibnitz *(Parameter in Integralgrenzen)].* Sei

$$\Psi(x) \doteq \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Dann ist die Ableitung

$$\Psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$= \boxed{\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t + f(x,v(x))\,v'(x) - f(x,u(x))\,u'(x)} \tag{3}$$

Spezialfälle:

(a) $u(x) = a$, $v(x) = b$ const. $\implies u' = v' = 0$ und es gilt also

$$\Psi'(x) = \boxed{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t} \tag{4}$$

(b) $u(x) = a$ const. und $v(x) = x$, sowie $f(x,t) = g(t)$ unabh. von x $\implies u' = 0,\ g_x \equiv 0,\ v' = 1$ und es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = g(x), \tag{5}$$

der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

2.1 Vektorfelder

Definition 1. [Vektorfelder]. Ein Vektorfeld weist jedem Punkt im Raum einen Vektor der gleichen Dimension zu.

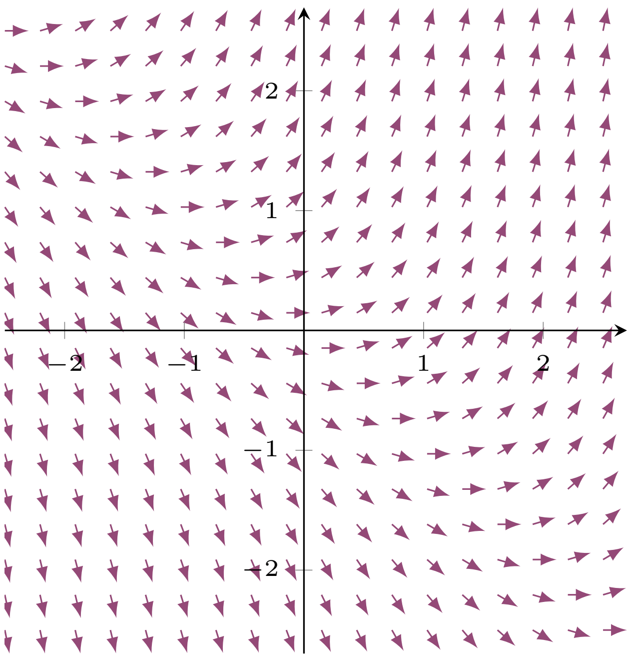
Beispiele:

(i) Magnet/Elektrisches Feld

(ii) Wind/Strömung

(iii) Wärmefluss

■



Definition 2. [Skalarfeld] Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbf{B} &\longrightarrow \mathbb{R} && (6)\\ (x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z) && (7) \end{aligned}$$

in 3 Variablen ist ein Skalarfeld. ■

Definition 3. [Vektorfeld] Ein Vektorfeld ist eine Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbf{B} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && (8)\\ \vec{r} &\longmapsto \vec{v}\,(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} && (9) \end{aligned}$$

Bemerkung 4

Falls $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{v} : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^2$, ist $\vec{v}$ ein *ebenes Vektorfeld.*

Bemerkung 5

Manche Vektorfelder sind ausserdem zeitabhänging, d.h. $\vec{v}\,(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3$. Diese Vektorfelder nennt man instationär.

■

Definition 6. [Feldlinien] Eine Kurve $K \subset B$, die an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld $\vec{v}\,(\vec{r}\,)$ ist, heisst Feldlinie von $\vec{v}$. ■

Definition 7. [Homogenes Vektorfeld] Ein konstantes Vektorfeld $\vec{v}\,(\vec{r}\,) = \vec{a}$ heisst homogen. ■