# Problem Set 4, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

19. März 2025

## 1 Tipps

**1. Aufgabe 1.**

**Tipps zu Aufgabe 1.** lol

**2. Aufgabe 2.**

d

**Tipps zu Aufgabe 2.** d

**3. Aufgabe 3.**

dooooooooooooooooo o ooo oo o ooo oooo ooooo oo oo oo oooo o o o o o o o o oo oooooooooooooooooooooooooooooooooooooo o oo oo oo oooo oooo o oo o o o o o o o o ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

**Tipps zu Aufgabe 3.** daaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa a a a a a a a a a a a a a a a a aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa aaa a a a a a a a a a a a a a a a

## 2 Theorie

*[Satz von* Leibnitz *(Parameter in Integralgrenzen)].* Sei

$$\Psi(x) \doteq \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Dann ist die Ableitung

$$\Psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$= \boxed{\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t + f(x, v(x))\, v'(x) - f(x, u(x))\, u'(x)} \tag{3}$$

*Spezialfälle*:

(a) $u(x) = a,\ v(x) = b \quad \text{const.} \implies u' = v' = 0$ und es gilt also

$$\Psi'(x) = \boxed{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \mathrm{d}t} \tag{4}$$

(b) $u(x) = a$ const. und $v(x) = x$, sowie $f(x,t) = g(t)$ unabh. von $x$ $\implies u' = 0,\ g_x \equiv 0,\ v' = 1$ und es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x g(t) \mathrm{d}t = g(x), \tag{5}$$

der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

## 2.1 Vektorfelder

**Definition 1.** [Vektorfelder]. Ein Vektorfeld weist jedem Punkt im Raum einen Vektor der gleichen Dimension zu.

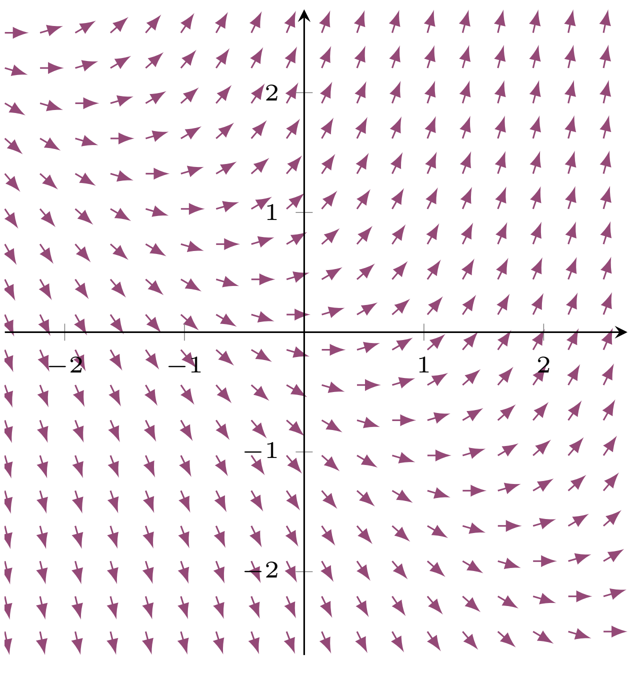
**Beispiele:**

(i) Magnet/Elektrisches Feld

(ii) Wind/Strömung

(iii) Wärmefluss

■



**Definition 2.** [Skalarfeld] Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Funktion

$$f: \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6}$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) \tag{7}$$

in 3 Variablen ist ein Skalarfeld. ■

**Definition 3.** [Vektorfeld] Ein Vektorfeld ist eine Funktion

$$f: \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{8}$$
$$\vec{r} \longmapsto \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{9}$$

**Bemerkung 4**

Falls $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{v} : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^2$, ist $\vec{v}$ ein *ebenes Vektorfeld*.

**Bemerkung 5**

Manche Vektorfelder sind ausserdem zeitabhänging, d.h. $\vec{v}(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3$. Diese Vektorfelder nennt man instationär.

■

**Definition 6.** [Feldlinien] Eine Kurve $K \subset B$, die an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ ist, heisst Feldlinie von $\vec{v}$. ■

**Definition 7.** [Homogenes Vektorfeld] Ein konstantes Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a}$ heisst homogen. ■

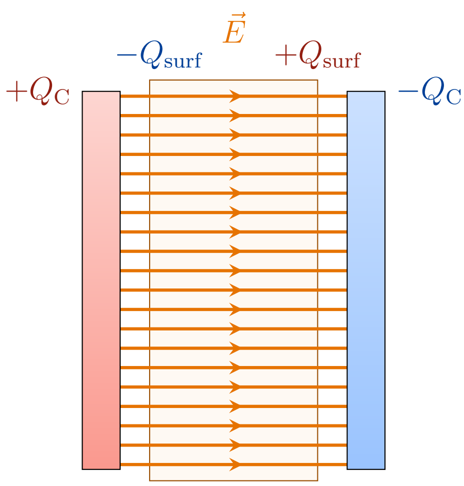



ABBILDUNG 1: Homogenes Vektorfeld eines Plattenkondensators.

**Definition 8.** [Rotationsfeld] Bezeichnet $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (const.) eine Winkelgeschwindigkeit um die Drehachse $\vec{\omega}$, so ist

$$\vec{v}\,(\vec{r}\,) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 y \end{pmatrix} \tag{10}$$

■

## 2.2 Differentialoperatoren

**Definition 9.** [Gradientenfeld] Sei $f$ ein Skalarfeld. Dann ist

$$grad(f) = \boldsymbol{\nabla} f(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{11}$$

das zugehörige Gradientenfeld. ■

**Bemerkung 10**

Zuweisungen die Funktionen in andere Funktionen umwandeln (Funktion $\mapsto$ Funktion) nennt man Operatoren.

**Definition 11.** [Divergenz] Für ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist der Divergenzoperator wie folgt definiert

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = (v_1)_x + (v_2)_y + (v_2)_z = f(x, y, z) \tag{12}$$

ein Skalarfeld. ■

**Bemerkung 12**

Der Laplace Operator kann auch als Divergenz des Gradientenfeldes geschrieben werden, also

$$\Delta f = \nabla \cdot \boldsymbol{\nabla} f = (f_x)_x + (f_y)_y + (f_z)_z \tag{13}$$

**Definition 13.** [Rotation] Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Dann ist

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix} \tag{14}$$

■

Es gilt also

$$
\begin{tikzcd}
\text{Skalarfeld} \arrow[r, shift left, "\mathrm{grad}"] & \text{Vektorfeld} \arrow[l, shift left, "\mathrm{div}"] \arrow[loop right, "\mathrm{rot}"]
\end{tikzcd}
$$