

Problem Set 8, Tips

Vikram Damani
Analysis I

14. November 2024

Aufgaben in **rot** markiert, Tipps & Tricks in **blau**.

1 Theorie

Definition [Zykloide]. Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt auf einem Kreis beschreibt, der auf einer anderen Kurve abrollt.

Die Kurve ist die Summe aus zwei Bewegungen: Die Bewegung des Mittelpunkts des Kreises und die Bewegung des Punktes auf dem Kreis.

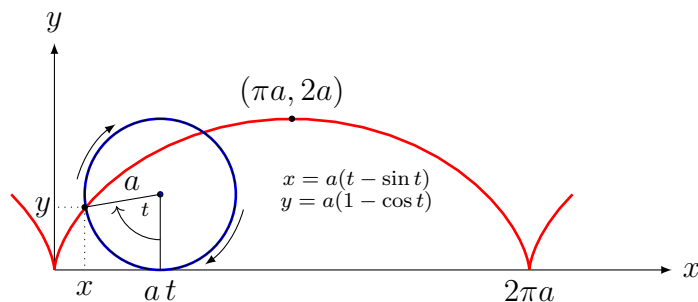


ABBILDUNG 1: Zykloide

Wir betrachten einen Kreis mit Radius a . Der Kreismittelpunkt bewegt sich hier auf einer Geraden:

$$\begin{aligned}x(t) &= at \\y(t) &= a\end{aligned}$$

Der Punkt auf dem Kreis bewegt sich dann auf der Zykloide:

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t - \sin t) \\y(t) &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \vec{m}(t) - a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hier ist $\vec{m}(t)$ der Vektor, der die Bewegung des Kreismittelpunkts beschreibt.

Allgemeiner gilt für einen Kreis mit Radius a , wenn der Punkt nicht auf dem Kreis liegt, sondern auf einem Abstand b vom Kreismittelpunkt:

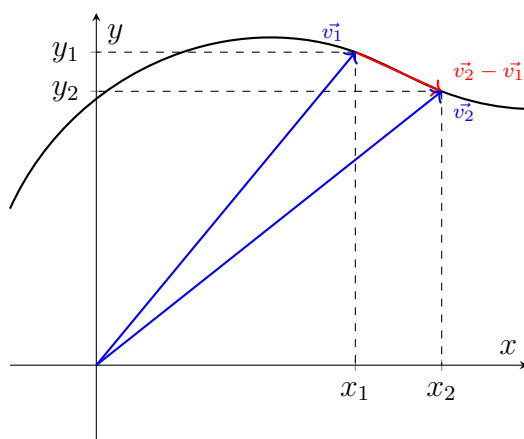
$$\begin{aligned}x(t) &= at - b \sin(t) \\y(t) &= a - b \cos(t)\end{aligned}$$

Falls $b < a$: Verkürzte Zykloide

Falls $b > a$: Verlängerte Zykloide

Bemerkung [Mehr als Geraden]. Wie vorher erwähnt, ist die Zykloide die Kurve die durch die Bewegung eines Punktes auf einem Kreis entsteht, der auf einer anderen Kurve abrollt. Hiebei muss die andere Kurve nicht unbedingt eine Gerade sein, sondern kann auch eine beliebige Kurve sein. Dann ist $\vec{m}(t)$ (die Bewegung des Kreismittelpunkts) gegeben durch die Kurve auf der der Kreis abrollt.

□



Definition [Tangenten]. Die Richtung der Tangente an eine ebene Kurve $(x(t), y(t))$ an der Stelle t_0 ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

□