Problem Set 1, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

23. Februar 2025

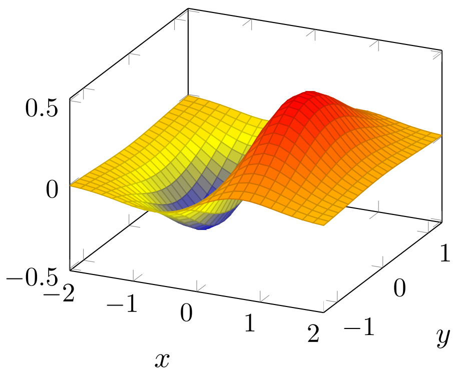
1 Theorie

Definition 1. [Funktionen in zwei Variablen] Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit defnsbereich $D(f) = D$ und Wertebereich $W(f) = \{z \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in D(f) : f(x, y) = z\}$ ist eine Abbildung, die jedem $(x, y) \in D$ genau ein $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Beispiel: $f(x, y) = ax + by + c$ ist eine affin lineare Funktion in zwei variablen.
Definition 2. [Graph] Der Graph von f is die Menge

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D(f) : z = f(x, y)\} \tag{1}$$

Beispiel: Darstellung des Graphen $\Gamma(f)$ von $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$



Definition 3. [Niveaulinien] Für ein fixes $C \in \mathbb{R}$ ist

$$N_{f,C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = C\} \tag{2}$$

die Niveaulinie von f zum Niveau C.[1]

Beispiel: Höhenlinien auf einer Karte.

Analog zu Ableitungen in Funktionen einer Variable lassen sich hier (partielle) Ableitungen (d.h Ableitungen in jeweils x-Koordinaten- oder y-Koordinaten-Richtung) definieren.

[Partielle Ableitungen]. Die Partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten ist die Ableitung dieser Funktion nach *einer* Variable.

[1] This is a neat little Geogebra applet: `https://www.geogebra.org/m/nuR3n88b`

Die Partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x an der Stelle (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

Hierbei wird die y-Koordinate konstant gehalten.

Die Partielle Ableitung in y wird analog berechnet

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{4}$$

Die Partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind wieder Funktionen in x und y.

Remark 4: Berechnung

Jeder, der in einer Dimension ableiten kann, kann auch Funktionen in mehreren Variablen partiell ableiten. Eine partielle Ableitung nach einer Variablen ist per Definition genau analog zu einer Ableitung in einer Dimension, wobei alle anderen Variablen konstant gehalten werden.

Remark 5: Notation

Je nach Autor wird eine partielle Ableitung auf verschiedene Weise geschrieben. Hier eine kurze Liste

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = D_x f = f_x$$

Definition 6. [Gradient] Der Gradient von f ist der Vektor

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \tag{5}$$

Da die partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten wiederum eine Funktion in diesen Argumenten ist, kann man diese auch auf Diff'barkeit untersuchen. Die zweite Ableitung von f nach x wird wie folgt gebildet

$$(f_x)_x \doteq f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{6}$$

Definition 7. [Höhere Ableitungen] Allgemeiner erhält man höhere Ableitungen von f nach x_i und x_j wie folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{7}$$

Das ergibt vier mögliche Kombinationen für Funktionen in zwei Variablen:

1. f_{xx}
2. $(f_x)_y$
3. f_{yy}
4. $(f_y)_x$

Definition 8. [Stetigkeit] Eine Funktion in zwei Variablen ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig, falls für jede Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ gilt

$$x_n \to x y_n \to y \implies f(x_n, y_n) \to f(x, y) \tag{8}$$

[Satz von Schwartz]. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Wenn f_{xy} und f_{yx} in einer Umgebung um (x_0, y_0) stetig sind, dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \tag{9}$$

Remark 9: Reihenfolge der Ableitungen

Eine unmittelbare Folge vom Satz von Schwartz ist, dass meistens die Reihenfolge der Ableitungen egal ist!

$$\begin{tikzcd}
 & f \arrow[dl, "(?)"'] \arrow[dr, "(?)"] & \\
\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{?}{=} \psi \arrow[dr] & & \frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{?}{=} \varphi \arrow[dl] \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &
\end{tikzcd}$$

Anhand bekannten partiellen Ableitungen lässt sich die ursprüngliche Funktion unter folgender Bedingung rekonstruieren

[Integrabilitätsbedingung (IB)].

$$\varphi_y \equiv \psi_x \tag{10}$$

Fact 10. *Erfüllen zwei stetig diff'bare funktionen die Integrabilitätsbedingung $\varphi_y \equiv \psi_x$ in einem achsenparallelen Rechteck, dann gibt es eine Funktion f mit*

$$f_y = \varphi \text{ und } f_x = \psi \tag{11}$$

Definition 11. [Lineare Ersatzfunktion] Die lineare Ersatzfunktion an der Stelle (x_0, y_0) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei Variablen ist gegeben durch

$$t_f(x, y) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0)}_{\text{Spannt } t_f \text{ in } x\text{-Richtung auf}} + \underbrace{f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{Spannt } t_f \text{ in } y\text{-Richtung auf}} + \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{Stützpunkt}} \tag{12}$$

Wie bei Funktionen in einer Variablen können wir auch für Funktionen in höheren Dimensionen ein lokales Koordinatensystem in $(x_0, y_0 f(x_0, y_0))$ definieren, in dem die lineare Ersatzfunktion wie folgt neu definiert ist

[Totales Differential].

$$df = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy \tag{13}$$

Fact 12. *Sei $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Für kleine $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$ ist die Approximation $\Delta f \approx df$ gut.*

Wir können also den wirklichen absoluten Fehler durch Linearisierung näherungsweise bestimmen, wenn der Messfehler der Variablen klein ist.

2 Tipps