Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

6. März 2025

1 Tipps

2 Theorie

2.1 Fuktionen in 3 Variablen

[Funktionen in drei Variablen] Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{bzw. } \vec{r} \longmapsto f(\vec{r}), \tag{2}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Im Allgemeinen unterscheiden sich Funktionen in 3 Variablen nicht wesentlich von Funktionen in 2 Variablen.

Definition 1. [Niveaufläche] Für ein $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x, y, z) = C\right\} \tag{3}$$

■

Definition 2. [Lineare Funktionen in 3D] Eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{4}$$

ist eine lineare Funktion. ■

Notation 3. *Bei Funktionen in höheren Dimensionen schreiben wir die Argumente oft in Vektorschreibweise, d.h. wir schreiben*

$$f(\vec{x}) \doteq f(x, y, z), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

Sofern dies nicht zu Verwirrung führt, schreiben wir

$$\vec{x} \doteq (x, y, z) \text{ und } \vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0, z_0). \tag{6}$$

Definition 4.

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

■

Definition 5. [Partielle Ableitung]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \tag{7}$$

Analog f_y, f_z. ■

Notation 6. *Sofern es klar ist, schreiben wir* $f_x \doteq f_x(x_0, y_0, z_0)$

[Satz von Schwartz] In der Regel spielt die Reihenfolge von Partiellen Ableitungen keine Rolle

$$\begin{tikzcd}
 & & f \arrow[dll, "(?)"'] \arrow[d, "(?)"'] \arrow[drr, "(?)"] & & \\
\varphi \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend right] & & \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & & \chi \arrow[dl] \arrow[ddll, bend left] \\
 & \varphi_y = \psi_x & & \psi_z = \chi_y & \\
 & & \varphi_z = \chi_x & &
\end{tikzcd}$$

[IB] Sind φ, ψ, χ auf einem achsenparallelen Quader definierte Funktionen in 3 Variablen mit

$$\varphi_y \equiv \psi_x \text{ und } \varphi_z \equiv \chi_x \text{ und } \psi_z \equiv \chi_y \tag{8}$$

dann gibt es eine Funktion f mit

$$f_x = \varphi \text{ und } f_y = \psi \text{ und } f_x = \chi \tag{9}$$

Definition 7. [Gradient] Der Gradient von f ist

$$grad(f) = \vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \tag{10}$$

wobei $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$. ■

Notation 8. *Es wird oft* $\boldsymbol{\nabla} f$ *statt* $\vec{\nabla} \cdot f$ *geschrieben. Diese Notation führt auch zu weniger Verwirrung bei Skalarprodukten (*$\boldsymbol{\nabla} f \cdot \vec{r}$ *statt* $\vec{\nabla} \cdot f \cdot \vec{r}$*)*

Definition 9. [Verallgemeinerte Kettenregel] Sei $F(t) = f(\vec{r}(t))$. Dann ist

$$F'(t) = f_x\,\dot{x} + f_y\,\dot{y} + f_z\,\dot{z} = \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}(t) \tag{11}$$

■

Definition 10. [Richtungsableitung] Die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{r}_0$ in Richtung $\vec{e}$ (der Einheitsvektor in die gewünschte Richtung) ist

$$D_{\vec{e}} f(\vec{(r)}_0) = grad(f(\vec{r}_0)) \cdot \vec{e} \tag{12}$$

■

Theorem 11. *[Grösste Richtungsableitung] Der Gradient $\vec{\nabla} \cdot f(\vec{r}_0)$ ist die gösste Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{r}_0$ und zeigt in Richtung des grössten Anstiegs.*

Theorem 12. *[Richtung des Gradienten] Der Gradient steht senkrecht auf der Niveaufläche und Tangentialebene von f an der Stelle $\vec{r}_0$.*

Für die Tangentialebene gilt also allgemein

$$\boxed{T: \ (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \boldsymbol{\nabla} f = 0} \tag{13}$$

[Lineare Ersatzfunktion] Die lineare Ersatzfunktion von f an der Stelle $\vec{r}_0$ ist gegeben durch

$$l(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \boldsymbol{\nabla} f \cdot (\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{14}$$

2.2 Koordinatentransformation

Definition 13. [Zylinderkoordinaten] Wir definieren die Koordinatentransformation zu Zylinderkoordinaten wie folgt

$$\begin{array}{ll} x(\rho, \phi) = \rho \cos(\phi) & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(\rho, \phi) = \rho \sin(\phi) & \phi = \arctan \dfrac{y}{x} \end{array} \tag{15}$$

Dann ist die Transformation

$$\widetilde{f}(\rho, \varphi) = f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) \tag{16}$$

Remark 14
Für ein festes ρ (bzw. φ) ist

$$\rho \longmapsto (x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$$

(bzw. $\varphi \longmapsto (x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$) die parametrisierung einer ebenen Kurve in der xy-Ebene mit Parameter ρ (bzw. φ)

Wendet man die verallgemeinerte Kettenregel auf $\widetilde{f}$ an, so erhält man

$$\begin{array}{cc}
\hline
x_\rho(\rho,\varphi) = \cos(\phi) & y_\rho = \sin(\varphi) \\
x_\varphi = -\rho\sin(\varphi) & y_\varphi = \rho\cos(\varphi) \\
\hline
\end{array} \tag{17}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \implies \widetilde{f}_\rho &= \boldsymbol{\nabla} f \cdot \begin{pmatrix} x_\rho \\ y_\rho \end{pmatrix} \\ &= f_x\cos(\varphi) + f_y\sin(\varphi) \end{aligned}} \tag{18}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} \implies \widetilde{f}_\varphi &= \boldsymbol{\nabla} f \cdot \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{pmatrix} \\ &= -f_x\rho\cos(\varphi) + f_y\rho\cos(\varphi) \end{aligned}} \tag{19}$$

wobei in f_x und f_y jeweils $(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))$ eingesetzt werden muss.

Kompakter geschrieben gilt also

$$\begin{pmatrix} \widetilde{f}_\rho & \widetilde{f}_\varphi \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\nabla} f)^\top \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix}}_{\doteq M} \tag{20}$$

■

Definition 15. [Umkehrtransformation] Multipliziert man (20) mit M^{-1} von rechts, erhält man

$$\begin{pmatrix} \widetilde{f}_\rho & \widetilde{f}_\varphi \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = (\boldsymbol{\nabla} f)^\top = \begin{pmatrix} f_\rho & f_\varphi \end{pmatrix} \tag{21}$$

■

Definition 16. [Laplace Operator]

$$\Delta f \doteq f_{xx} + f_{yy} \tag{22}$$

In Polarkoordinaten gilt

$$\Delta \widetilde{f} \doteq f_{xx} + f_{yy} = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\varphi\varphi} \tag{23}$$

■

Remark 17
Δf is entirely equivalent to writing $\nabla^2 f = \nabla \cdot \boldsymbol{\nabla} f$

2.3 Gebietsintegrale

[Gebietsintegrale] Zur Berechnung von Volumina zwischen der xy-Ebene und dem Graphen einer Funktion f führen wir das Gebietsintegral ein.

Das Gebietsintegral V der Funktion f über das Gebiet

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [\alpha, \beta]\,,\; y \in \big[\gamma(x), \delta(x)\big]\right\} \tag{24}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [\gamma, \delta]\,,\; x \in \big[\alpha(y), \beta(y)\big]\right\} \tag{25}$$

ist gegeben durch

$$V = \iint_B f \underbrace{dA}_{\text{Flächenelement von } B} \tag{26}$$

$$= \boxed{\int_\alpha^\beta \underbrace{\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}_{=F(x)} \,\mathrm{d}x} \tag{27}$$

$$= \int_\alpha^\beta F(x)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

$$= \boxed{\int_\gamma^\delta \underbrace{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}_{=G(y)} \,\mathrm{d}y} \tag{29}$$

$$= \int_\alpha^\beta G(y)\,\mathrm{d}x \tag{30}$$

Die Integrationsreihenfolge kann also vertauscht werden, wobei die Integrationsgrenzen entsprechend angepasst werden müssen.

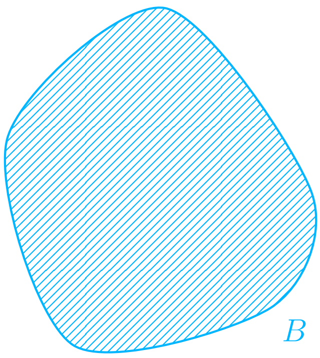

ABBILDUNG 1: Ein allgemeines geschlossenes Gebiet im $\mathbb{R}^2$