Problem Set 9, Tips

Vikram Damani
Analysis I

15. November 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

1 Theorie

Definition [Zykloide]. Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt auf einem Kreis beschreibt, der auf einer anderen Kurve abrollt.

Die Kurve ist die Summe aus zwei Bewegungen: Die Bewegung des Mittelpunks des Kreises und die Bewegung des Punktes auf dem Kreis.

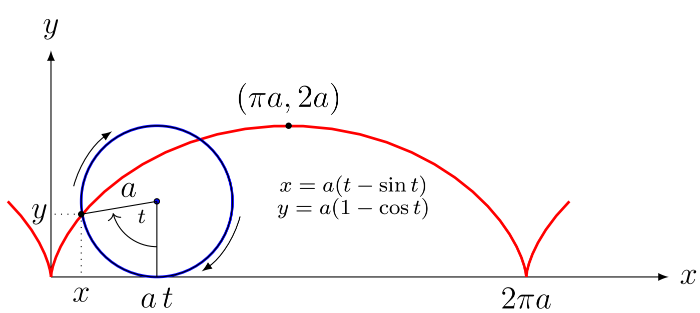


ABBILDUNG 1: Zykloide

Wir betrachten einen Kreis mit Radius a. Der Kreismittelpunkt bewegt sich hier auf einer Geraden:

$$x(t) = at$$
$$y(t) = a$$

Der Punkt auf dem Kreis bewegt sich dann auf der Zykloide:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \vec{m}(t) - a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier ist $\vec{m}(t)$ der Vektor, der die Bewegung des Kreismittelpunkts beschreibt.

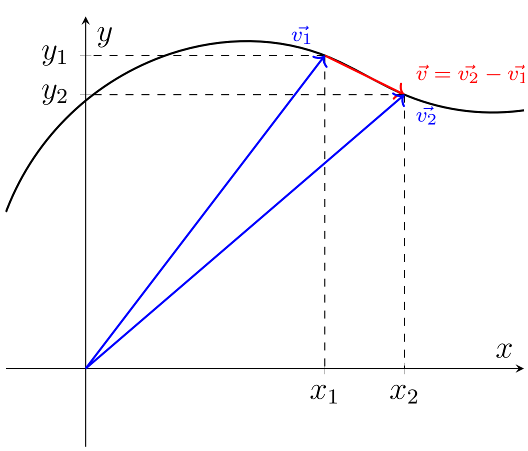
Allgemeiner gilt für einen Kreis mit Radius a, wenn der Punkt nicht auf dem Kreis liegt, sondern auf einem Abstand b vom Kreismittelpunkt:

$$\begin{aligned} x(t) &= at - b\sin(t) \\ y(t) &= a - b\cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Falls } b < a: \text{ Verkürzte Zykloide} \\ &\text{Falls } b > a: \text{ Verlängerte Zykloide} \end{aligned}$$

Bemerkung [Mehr als Geraden]. Wie vorher erwähnt ist die Zykloide die Kurve die durch die Bewegung eines Punktes auf einem Kreis entsteht, der auf einer anderen Kurve abrollt. Hiebei muss die andere Kurve nicht unbedingt eine Gerade sein, sondern kann auch eine beliebige Kurve sein.

□



Definition [Tangenten]. Die Richtung der Tangente an eine ebene Kurve $(x(t), y(t))$ an der Stelle t_0 ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v_2} - \vec{v_1} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wenn nun $x_2 \to x_1$, also $t_2 \to t_1$, dann erhalten wir einen Vektor, der die Kurve tangential in t_1 berührt.

Da aber die Länge des Vektors $\vec{v}$ auch gegen Null geht, normieren wir ihn mit $t_2 - t_1$, um die Richtung zu erhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}}{t_2 - t_1} &= \lim_{t_2 \to t_1} \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{pmatrix} x(t_2) - x(t_1) \\ y(t_2) - y(t_1) \end{pmatrix} \\ &= \lim_{t_2 \to t_1} \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Steigung der Tangente ist gegeben durch

$$m(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

□

Definition [Krümmung]. Die Krümmung einer Kurve $(x(t), y(t))$ ist ein Mass dafür, wie stark die Kurve "gebogen" ist. Die Krümmung ist rotationsinvariant, d.h. sie ändert sich nicht durch Drehungen der Kurve, und sie ist unabhängig von der Parametrisierung. (Es wäre einfach anzunehmen, dass die Krümmung die Ableitung der Steigung ist, also die zweite Ableitung einer Funktion, aber das ist nicht der Fall: Die zweite Ableitung einer Funktion ist z.B. nicht rotationsunabhängig.)

Die Krümmung ist gegeben durch

$$k(t) = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

also die Änderung des Winkels α pro Bogenlänge Δs.

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

Bemerkung [Kurvenrichtung]. Bedeutung des Vorzeichen von $k(t)$:

1. $k(t) < 0 \iff \alpha$ wächst mit $s \iff$ Rechtskurve wenn t wächst.
2. $k(t) > 0 \iff \alpha$ fällt wenn s wächst $\iff$ Linkskurve wenn t wächst.
3. Ein Punkt mit $k(t) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $k(t)$ ist ein Wendepunkt.
4. An Punkten mit grossem $|k(t)|$ ist die Kurve "eng", während bei "weiten" Kurven $|k(t)|$ klein ist.[1]

$\square$

Definition [Krümmungskreis]. Der Krümmungskreis einer Kurve $(x(t), y(t))$ an der Stelle t_0 ist der Kreis, der am besten die Kurve an der Stelle t_0 approximiert. Der Krümmungskreis hat den Radius $r(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ und den Mittelpunkt

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{k(t_0)} \quad \underbrace{\frac{\vec{n}(t_0)}{\|\vec{n}(t_0)\|}}_{\substack{\text{Einheitsnormalen-} \\ \text{vektor}}} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Ortsvektor} \\ \text{der Kurve bei } t_0}} + \underbrace{\frac{1}{k(t_0)}}_{\text{Radius}} \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}_{\substack{\text{Normierung} \\ \text{des Normalenvektors}}} \quad \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da der Normalenvektor allgemein nicht Einheitslänge hat, normieren wir ihn, um den Einheitsnormalenvektor zu erhalten.

$\square$

Definition [Folge der Partialsummen]. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit entsprechender Reihe $\sum_0^\infty a_n$. Die Folge der Partialsummen ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Summen der ersten n Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falls die Folge der Partialsummen $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_0^\infty a_k \to s$.

Bemerkung . Falls die Folge der Partialsummen konvergiert, ist a_n eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\square$

[1]Source: Lecture notes, Analysis I, HS 2024 (11.11.24), Kapitel II., S. 48

Bemerkung [Wichtige Reihen]. Hier sind einige wichtige Reihen und deren Partialsummen:

1. Hamonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{divergiert}$$

   Proof: see proof_harmonic_series.pdf

2. Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{konvergiert}$$

   Bemerkung [Leibniz-Kriterium]. Es gilt für alternierende Reihen (Vorzeichen wechseln) mit *monoton* fallenden Gliedern ($|a_n| < |a_{n-1}|$), dass die Reihe konvergiert. Das heisst, wenn a_n monoton fallend ist und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty a_n$.

3. Geometrische Reihe: $a_n = x^n$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$

4. Alternierende geometrische Reihe: $a_n = (-1)^n x^n = (-x)^n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x} \quad \text{für } |x| < 1$$

5. Allgemein mit Funktionen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)^n = \frac{1}{1-f(n)} \quad \text{für } \big|f(n)\big| < 1$$

Definition [Potenzreihen]. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

heisst Potenzreihe. Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert, heisst Konvergenzbereich der Potenzreihe und ist in diesem Fall ein Intervall mit Mittelpunkt 0. Das Intervall kann offen, geschlossen oder halboffen sein. Dieses Intervall kann auch unendlich sein, d.h. $(-\infty, \infty)$, wenn die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Die grösste Zahl ρ für die die Potenzreihe konvergiert, heisst Konvergenzradius der Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

falls der Grenzwert existiert.

$\square$

Aufgabe 3c. Berechnen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$

Tipps & Tricks zu 3c). Hier lässt sich der Konvergenzradius nicht direkt durch den Quotienten von a_{n+1} und a_n bestimmen, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe Null sind. Stattdessen substituieren wir $y = x^2$ und erhalten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n} y^n$$

Nun können wir den Konvergenzradius für y bestimmen und aus dem Zusammenhang $y = x^2$ lässt sich dann der Konvergenzbereich für x bestimmen.