

Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

10. März 2025

1 Theorie

1.1 Funktionen in 3 Variablen

[Funktionen in drei Variablen] Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} f: \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{bzw. } \vec{r} \longmapsto f(\vec{r}), \tag{2}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Im Allgemeinen unterscheiden sich Funktionen in 3 Variablen nicht wesentlich von Funktionen in 2 Variablen.

Definition 1. *[Niveaufläche]* Für ein $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = C\} \tag{3}$$

Definition 2. *[Lineare Funktionen in 3D]* Eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{4}$$

ist eine lineare Funktion.

Notation 3. *Bei Funktionen in höheren Dimensionen schreiben wir die Argumente oft in Vektorschreibweise, d.h. wir schreiben*

$$f(\vec{x}) \doteq f(x, y, z), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

Sofern dies nicht zu Verwirrung führt, schreiben wir

$$\vec{x} \doteq (x, y, z) \text{ und } \vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0, z_0). \tag{6}$$

Definition 4.

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

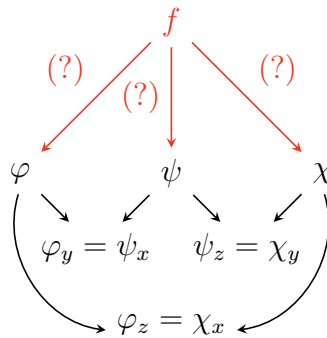
Definition 5. [Partielle Ableitung]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \quad (7)$$

Analog f_y, f_z . ■

Notation 6. Sofern es klar ist, schreiben wir $f_x \doteq f_x(x_0, y_0, z_0)$

[Satz von Schwartz] In der Regel spielt die Reihenfolge von Partiellen Ableitungen keine Rolle



[IB] Sind φ, ψ, χ auf einem achsenparallelen Quader definierte Funktionen in 3 Variablen mit

$$\varphi_y \equiv \psi_x \text{ und } \varphi_z \equiv \chi_x \text{ und } \psi_z \equiv \chi_y \quad (8)$$

dann gibt es eine Funktion f mit

$$f_x = \varphi \text{ und } f_y = \psi \text{ und } f_z = \chi \quad (9)$$

Definition 7. [Gradient] Der Gradient von f ist

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

wobei $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$. ■

Notation 8. Es wird oft ∇f statt $\vec{\nabla} \cdot f$ geschrieben. Diese Notation führt auch zu weniger Verwirrung bei Skalarprodukten ($\nabla f \cdot \vec{r}$ statt $\vec{\nabla} \cdot f \cdot \vec{r}$)

Definition 9. [Verallgemeinerte Kettenregel] Sei $F(t) = f(\vec{r}(t))$. Dann ist

$$F'(t) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z} = \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad (11)$$
■

Definition 10. [\[Richtungsableitung\]](#) Die Richtungsableitung von f an der Stelle \vec{r}_0 in Richtung \vec{e} (der Einheitsvektor in die gewünschte Richtung) ist

$$D_{\vec{e}}f(\vec{r}_0) = \text{grad}(f(\vec{r}_0)) \cdot \vec{e} \quad (12)$$

Theorem 11. [\[Grösste Richtungsableitung\]](#) Der Gradient $\vec{\nabla} \cdot f(\vec{r}_0)$ ist die grösste Richtungsableitung von f an der Stelle \vec{r}_0 und zeigt in Richtung des grössten Anstiegs. ■

Theorem 12. [\[Richtung des Gradienten\]](#) Der Gradient steht senkrecht auf der Niveaufläche und Tangentialebene von f an der Stelle \vec{r}_0 .

Für die Tangentialebene gilt also allgemein

$$T: (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (13)$$

[\[Lineare Ersatzfunktion\]](#) Die lineare Ersatzfunktion von f an der Stelle \vec{r}_0 ist gegeben durch

$$l(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \vec{\nabla} f \cdot (\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (14)$$

1.2 Koordinatentransformation

Definition 13. [\[Zylinderkoordinaten\]](#) Wir definieren die Koordinatentransformation zu Zylinderkoordinaten wie folgt

$$\begin{array}{ll} x(\rho, \phi) = \rho \cos(\phi) & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(\rho, \phi) = \rho \sin(\phi) & \phi = \arctan \frac{y}{x} \end{array} \quad (15)$$

Dann ist die Transformation

$$\tilde{f}(\rho, \varphi) = f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) \quad (16)$$

Remark 14

Für ein festes ρ (bzw. φ) ist

$$\rho \longmapsto (x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$$

(bzw. $\varphi \longmapsto (x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$) die parametrisierung einer ebenen Kurve in der xy-Ebene mit Parameter ρ (bzw. φ)

Wendet man die verallgemeinerte Kettenregel auf \tilde{f} an, so erhält man

$$\begin{array}{cc} \overline{x_\rho(\rho, \varphi) = \cos(\phi)} & \overline{y_\rho = \sin(\varphi)} \\ \overline{x_\varphi = -\rho \sin(\varphi)} & \overline{y_\varphi = \rho \cos(\varphi)} \end{array} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{f}_\rho &= \nabla f \cdot \begin{pmatrix} x_\rho \\ y_\rho \end{pmatrix} \\ &= f_x \cos(\varphi) + f_y \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{f}_\varphi &= \nabla f \cdot \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{pmatrix} \\ &= -f_x \rho \cos(\varphi) + f_y \rho \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (19)$$

wobei in f_x und f_y jeweils $(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$ eingesetzt werden muss.

Kompakter geschrieben gilt also

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_\rho & \tilde{f}_\varphi \end{pmatrix} = (\nabla f)^\top \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix}}_{\doteq M} \quad (20)$$

■

Definition 15. [\[Umkehrtransformation\]](#) Multipliziert man (20) mit M^{-1} von rechts, erhält man

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_\rho & \tilde{f}_\varphi \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = (\nabla f)^\top = \begin{pmatrix} f_\rho & f_\varphi \end{pmatrix} \quad (21)$$

■

Definition 16. [\[Laplace Operator\]](#)

$$\Delta f \doteq f_{xx} + f_{yy} \quad (22)$$

In Polarkoordinaten gilt

$$\Delta \tilde{f} \doteq f_{xx} + f_{yy} = \tilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\varphi\varphi} \quad (23)$$

■

Remark 17

Δf is entirely equivalent to writing $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$

1.3 Gebietsintegrale

[Gebietsintegrale] Zur Berechnung von Volumina zwischen der xy-Ebene und dem Graphen einer Funktion f führen wir das Gebietsintegral ein.

Das Gebietsintegral V der Funktion f über das Gebiet

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], y \in [\gamma(x), \delta(x)] \right\} \quad (24)$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\gamma, \delta], x \in [\alpha(y), \beta(y)] \right\} \quad (25)$$

ist gegeben durch

$$V = \iint_B f \underbrace{dA}_{\text{Flächenelement von } B} \quad (26)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy}_{=F(x)} dx \quad (27)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx \quad (28)$$

$$= \int_{\gamma}^{\delta} \underbrace{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx}_{=G(y)} dy \quad (29)$$

$$= \int_{\gamma}^{\delta} G(y) dy \quad (30)$$

Die Integrationsreihenfolge kann also vertauscht werden, wobei die Integrationsgrenzen entsprechend angepasst werden

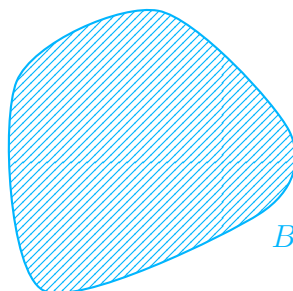


ABBILDUNG 1: Ein allgemeines geschlossenes Gebiet im \mathbb{R}^2