# Problem Set 2, Summary & Tips


Vikram R. Damani
Analysis II


13. März 2025

## 1 Tipps

**1. Aufgabe 1.**

Sei $T$ ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ und $f(x,y,z)=x+y$. Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_T f(x,y,z)\mathrm{d}V \tag{1}$$

**Tipps zu Aufgabe 1.** Es hilft $T$ zu skizzieren um die Integrationsgrenzen intuitiver zu bestimmen können.

*Recall: Die inneren Integrationsgrenzen sind Funktionen der äusseren Variablen!*

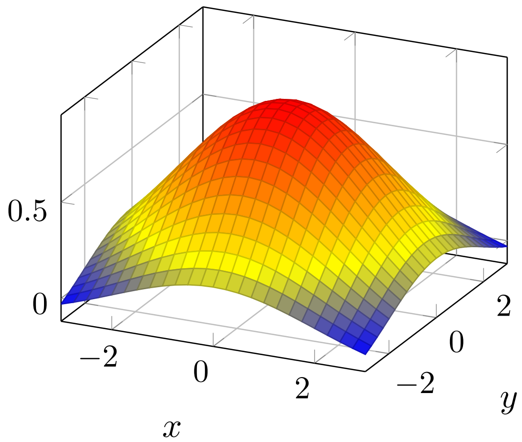



ABBILDUNG 1: Der Graph von $f(x,y)=e^{\frac{-(x^2+y^2)}{8}}-e^{-2}$ dargestellt auf dem Gebiet $B=[-2,2]\times[-2,2]\subset\mathbb{R}^2$.

**2. Aufgabe 2.**

(a) Die Oberfläche einer Insel sei gegeben durch

$$f(x,y)=e^{\frac{-(x^2+y^2)}{8}}-e^{-2}. \tag{2}$$

Berechnen Sie das Volumen der Insel, welches über der Wasseroberfläche (Höhe $z=0$) liegt.

(b) Sei $K$ der endliche Körper, der im ersten Oktanten (d.h. $x, y, z > 0$) durch den Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ und die Ebene $x = y$ begrenzt wird. Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation und berechnen Sie das Volumen von $K$.

**Tipps zu Aufgabe 2.**

(b) Das Volumendes Zylinders ist gegeben durch das (Dreifach-)integral $\iiint_K \mathrm{d}V$. Die Grenzen des gegebenen Zylinders werden implizit durch den Kreis und explizit durch die Linie $y = x$ und $x, y, z \geq 0$ beschrieben. Richtige Wahl der Integrationsreihenfolge vereinfacht die Parametrisierung der Grenzen.

### 3. Aufgabe 3.

Ein gerader Kreiszylinder mit Radius $R$, $(x^2 + y^2 \leq R^2)$, und Höhe $H$, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die $z$-Achse.

**Tipps zu Aufgabe 3.** Die Masse ist gegeben durch $\iiint_V \rho \mathrm{d}V$. Da wir über einen Zylinder integrieren, vereinfacht eine geeignete Wahl des Koordinatensystems die Berechnung. Achtung: Der Integrand muss entsprechend angepasst werden.

Das Trägheitsmoment ergibt sich aus dem quadrierten Abstand zur Drehachse mal der Dichte über den ganzen Körper integriert: $\iiint_V r^2 \rho \, \mathrm{d}V$.

## 2 Theorie

*[Flächenelement in Polarkoordinaten]* Das Flächenelement $\mathrm{d}F$ lässt sich in Polarkoordinaten $(\rho, \varphi)$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &\boxed{= \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho} \end{aligned} \tag{3}$$

*[Volumenintegrale]* Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ und

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbf{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{r} &\longmapsto f(\vec{r}) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Das Volumenintegral $V$ der Funktion $f$ über das Gebiet $\mathbf{B}$ ist gegeben durch

$$V = \iiint_B \mathrm{d}V \tag{6}$$

In kartesischen Koordinaten gilt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

**Remark 1**
Wie bei Flächenintegralen liegt die Schwierigkeit hier eher beim Bestimmen der Integrationsgrenzen statt beim eigentlichen Integrieren.

## 2.1 Koordinatentransformation

Sei eine Koordinatentransformation gegeben

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \tag{7}$$

Wie verhält sich der Flächeninhalt von unserem infinitesimalen Flächen-/Volumenelement unter dieser Transformation?

*[Jacobi-Determinante (2D)]* Das Flächenelement $\mathrm{d}F$ unter einer Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{d}F = \left|\det(\mathbf{J})\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v} \tag{8}$$

mit der Jacobi Matrix

$$\boxed{\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}} \tag{9}$$

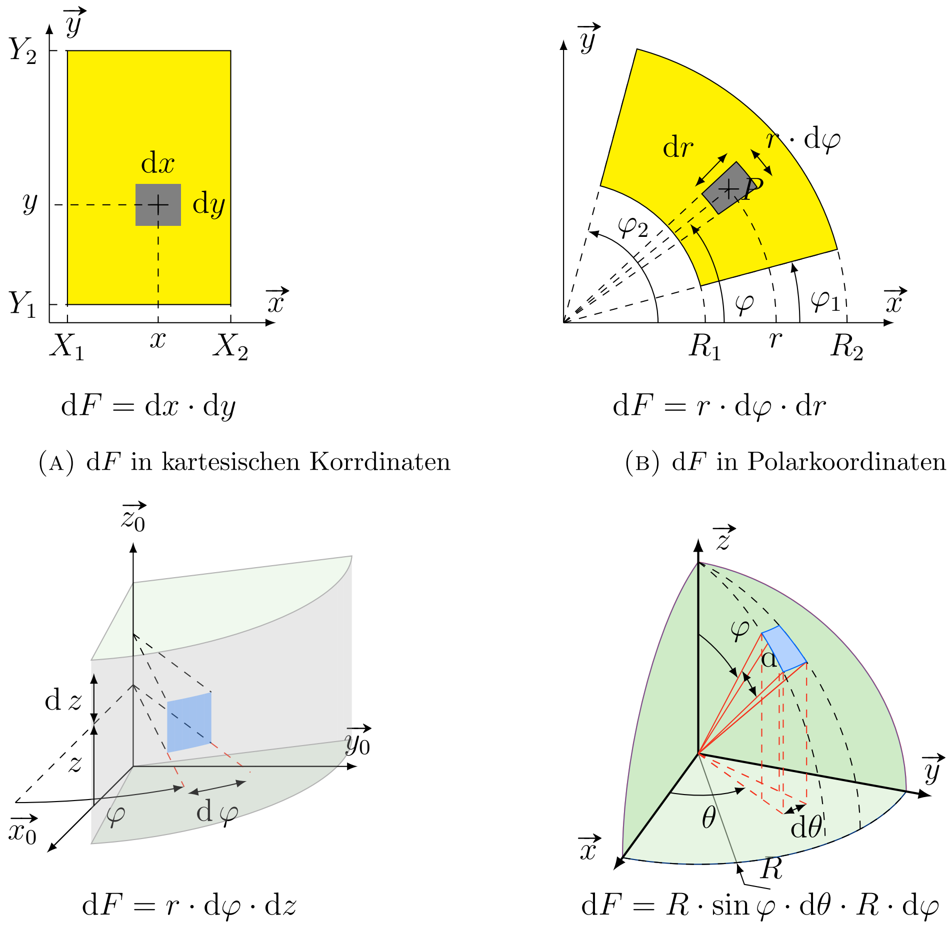
Für das Gebietsintegral gilt dann

$$V = \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}F = \iint_{\widetilde{B}} \widetilde{f}(u,v)\left|\det(\mathbf{J})\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{10}$$

mit $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ und $\widetilde{B} = \vec{r}\,(B)$.

*[Jacobi-Determinante (3D)]* Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ unter einer Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v,w)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{d}F = \left|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\cdot\vec{r}_w\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \left|\det(\mathbf{J})\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w} \tag{11}$$




(A) d$F$ in kartesischen Korrdinaten

(B) d$F$ in Polarkoordinaten

(C) d$F$ in Zylinderkoordinaten

(D) d$F$ in Kugelkoordinaten

Abbildung 2: Flächenelement d$F$

mit der Jacobi Matrix

$$\boxed{\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}} \tag{12}$$

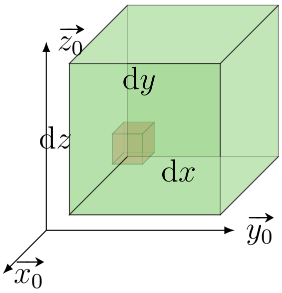
Für das Gebietsintegral gilt dann

$$V = \iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\widetilde{B}} \widetilde{f}(u,v,w)\big|\det(\mathbf{J})\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \tag{13}$$

mit $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ und $\widetilde{B} = \vec{r}(B)$.

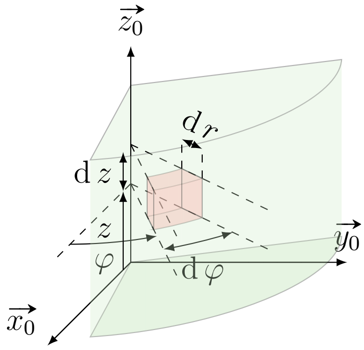
**Theorem 2.** *[Volumenelement in Kugelkoordinaten] Das Volumenelement in Kugelkoordinaten ist gegeben durch*

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \tag{14}$$



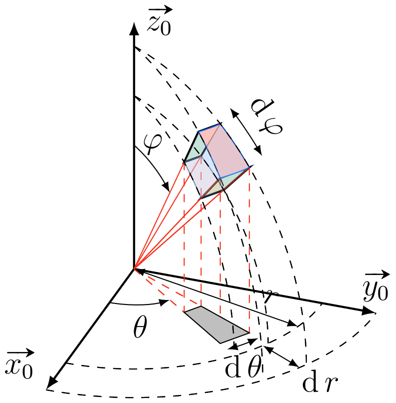

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

(A) $\mathrm{d}V$ in kartesischen Koordinaten




$$\mathrm{d}V = r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$$

(B) $\mathrm{d}V$ in Polarkoordinaten




$$\mathrm{d}V = r \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\theta \cdot r \cdot \mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}r.$$

(C) $\mathrm{d}V$ in Kugelkoordinaten

Abbildung 3: Volumenelement