

Problem Set 1, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

19. Februar 2025

1 Theorie

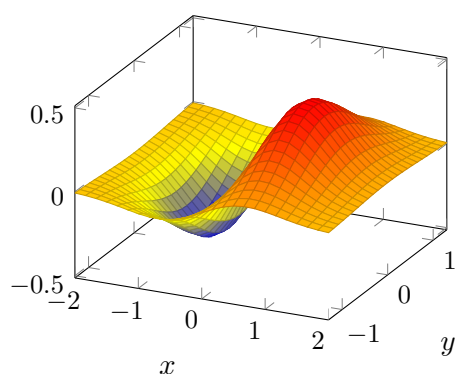
Definition 1. [Funktionen in zwei Variablen] Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Definitionsbereich $D(f) = D$ und Wertebereich $W(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D(f) : f(x, y) = z\}$ ist eine Abbildung, die jedem $(x, y) \in D$ genau ein $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Beispiel: $f(x, y) = ax + by + c$ ist eine affin lineare Funktion in zwei Variablen.

Definition 2. [Graph] Der Graph von f ist die Menge

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D(f) : z = f(x, y)\} \quad (1)$$

Beispiel: Darstellung des Graphen $\Gamma(f)$ von $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$



Definition 3. [Niveaulinien] Für ein fixes $C \in \mathbb{R}$ ist

$$N_{f,C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\} \quad (2)$$

die Niveaulinie von f zum Niveau C .¹

Beispiel: Höhenlinien auf einer Karte.

Analog zu Ableitungen in Funktionen einer Variable lassen sich hier (partielle) Ableitungen (d.h. Ableitungen in jeweils x-Koordinaten- oder y-Koordinaten-Richtung) definieren.

[Partielle Ableitungen]. Die Partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten ist die Ableitung dieser Funktion nach *einer* Variable.

¹ This is a neat little Geogebra applet: <https://www.geogebra.org/m/nuR3n88b>

Die Partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x an der Stelle (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

Hierbei wird die y -Koordinate konstant gehalten.

Die Partielle Ableitung in y wird analog berechnet

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (4)$$

Die Partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind wieder Funktionen in x und y .

Remark 4: Berechnung

Es folgt aus der Definition, dass

Remark 5: Notation

Je nach Autor wird eine partielle Ableitung auf verschiedene Weise geschrieben. Hier eine kurze Liste

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = D_x f = f_x$$

Definition 6. [Gradient] Der Gradient von f ist der Vektor

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (5)$$

Da die partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten wiederum eine Funktion in diesen Argumenten ist, kann man diese auch auf Diff'barkeit untersuchen. Die zweite Ableitung von f nach x wird wie folgt gebildet

$$(f_x)_x \doteq f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (6)$$

Definition 7. [Höhere Ableitungen] Allgemeiner erhält man höhere Ableitungen von f nach x_i und x_j wie folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

Das ergibt vier mögliche Kombinationen für Funktionen in zwei Variablen:

1. f_{xx}

2. $(f_x)_y$
3. f_{yy}
4. $(f_y)_x$

Definition 8. [Stetigkeit] Eine Funktion in zwei Variablen ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig, falls für jede Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^\infty$ gilt

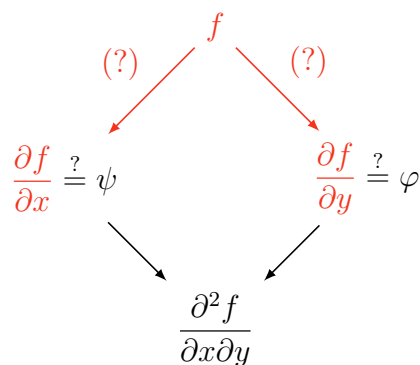
$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \implies f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y) \quad (8)$$

[Satz von Schwartz]. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Wenn f_{xy} und f_{yx} in einer Umgebung um (x_0, y_0) stetig sind, dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad (9)$$

Remark 9: Reihenfolge der Ableitungen

Eine unmittelbare Folge vom Satz von Schwartz ist, dass meistens die Reihenfolge der Ableitungen egal ist!



Anhand bekannten partiellen Ableitungen lässt sich die ursprüngliche Funktion unter folgender Bedingung rekonstruieren

[Integrabilitätsbedingung (IB)].

$$\varphi_y \equiv \psi_x \quad (10)$$

Fact 10. Erfüllen zwei stetig diff'bare Funktionen die Integrabilitätsbedingung $\varphi_y \equiv \psi_x$ in einem achsenparallelen Rechteck, dann gibt es eine Funktion f mit

$$f_y = \varphi \text{ und } f_x = \psi \quad (11)$$

2 Tipps