Problem Set 4, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

19. März 2025

1 Tipps

1. Aufgabe 1.

Die Funktion $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch

$$F(\alpha) := \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\arctan(\alpha t)}{t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Ableitung $F'(\alpha)$ identisch gleich Null ist, mittels

a. Substitution.

b. (♡) Ableitung unter dem Integral.

Tipps zu Aufgabe 1. Es gilt $F'(x) = 0 \implies F = \text{const}$.

a. Wir suchen eine geeignete Substitution $g(u) \doteq f(t)$ um zu zeigen, dass F von α unabhängig ist.

b. Anwendung des Satz von Leibnitz.

2. Aufgabe 2 c.,d.,e..

[Zeigen Sie, ...]

c. dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d. dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e. Bestimmen Sie ausserdem die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.

Tipps zu Aufgabe 2.

c. Ein Punkt an der Oberfläche des Zylinders (x_0, y_0, z_0) ist Parametrisiert durch die Gleichung $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ und der Tangentialvektor in der $x - y$ Ebene entlang der Oberfläche erfüllt $\vec{T} \perp (x_0, y_0, 0)$.

d. Man suche $\vec{v}$ für Punkte im Abstand R zu Null und $R \to \infty$.

e. Aus c) lässt sich die Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche berechnen.

2 Theorie

[Satz von Leibnitz *(Parameter in Integralgrenzen)].* Sei

$$\Psi(x) \doteq \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Dann ist die Ableitung

$$\Psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$= \boxed{\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t + f(x, v(x))\, v'(x) - f(x, u(x))\, u'(x)} \tag{4}$$

Spezialfälle:

(a) $u(x) = a,\ v(x) = b\quad$ const. $\implies\ u' = v' = 0$ und es gilt also

$$\Psi'(x) = \boxed{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t} \tag{5}$$

(b) $u(x) = a$ const. und $v(x) = x$, sowie $f(x,t) = g(t)$ unabh. von x $\implies\ u' = 0,\ g_x \equiv 0,\ v' = 1$ und es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = g(x), \tag{6}$$

der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

2.1 Vektorfelder

Definition 1. [Vektorfelder]. Ein Vektorfeld weist jedem Punkt im Raum einen Vektor der gleichen Dimension zu.

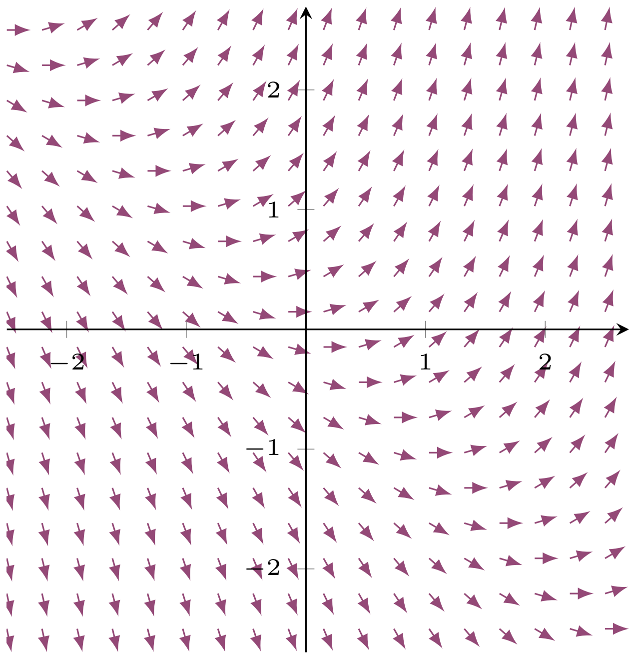
Beispiele:

(i) Magnet/Elektrisches Feld

(ii) Wind/Strömung

(iii) Wärmefluss

$\blacksquare$



Definition 2. [Skalarfeld] Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Funktion

$$f: \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{7}$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) \tag{8}$$

in 3 Variablen ist ein Skalarfeld. $\blacksquare$

Definition 3. [Vektorfeld] Ein Vektorfeld ist eine Funktion

$$f: \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{9}$$
$$\vec{r} \longmapsto \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Bemerkung 4

Falls $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{v} : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^2$, ist $\vec{v}$ ein *ebenes Vektorfeld.*

Bemerkung 5

Manche Vektorfelder sind ausserdem zeitabhänging, d.h. $\vec{v}(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3$. Diese Vektorfelder nennt man instationär.

$\blacksquare$

Definition 6. [Feldlinien] Eine Kurve $K \subset B$, die an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ ist, heisst Feldlinie von $\vec{v}$. $\blacksquare$

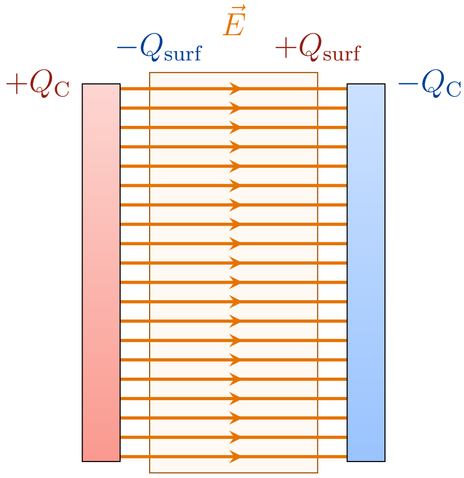


ABBILDUNG 1: Homogenes Vektorfeld eines Plattenkondensators.

Definition 7. [Homogenes Vektorfeld] Ein konstantes Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a}$ heisst homogen. ■

Definition 8. [Rotationsfeld] Bezeichnet $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (const.) eine Winkelgeschwindigkeit um die Drehachse $\vec{\omega}$, so ist

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 y \end{pmatrix} \tag{11}$$

■

2.2 Differentialoperatoren

Definition 9. [Gradientenfeld] Sei f ein Skalarfeld. Dann ist

$$grad(f) = \boldsymbol{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{12}$$

das zugehörige Gradientenfeld. ■

Bemerkung 10

Zuweisungen die Funktionen in andere Funktionen umwandeln (Funktion $\mapsto$ Funktion) nennt man Operatoren.

Definition 11. [Divergenz] Für ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist der Divergenzoperator wie folgt definiert

$$\text{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = (v_1)_x + (v_2)_y + (v_2)_z = f(x, y, z) \tag{13}$$

ein Skalarfeld. ■

Bemerkung 12

Der Laplace Operator kann auch als Divergenz des Gradientenfeldes geschrieben werden, also

$$\Delta f = \nabla \cdot \boldsymbol{\nabla} f = (f_x)_x + (f_y)_y + (f_z)_z \tag{14}$$

Definition 13. [Rotation] Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Dann ist

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix} \tag{15}$$

■

Es gilt also

$$\begin{tikzcd} \text{Skalarfeld} \arrow[r, shift left, "\text{grad}"] & \text{Vektorfeld} \arrow[l, shift left, "\text{div}"] \arrow[loop right, "\text{rot}"] \end{tikzcd}$$