Problem Set 11, Tips

Vikram R. Damani
Analysis I

30. November 2024

Aufgaben in rot markiert, Tipps & Tricks in blau.

1 Theorie

Definition [Bestimmtes Integral]. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist die Fläche unter dem Graphen von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert als

$$A \triangleq \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

das **bestimmte Integral** von f von a bis b.

Bemerkung [Bedingungen für Konvergenz]. f darf auf $[a, b]$ an einzelnen, isolierten Stellen unstetig sein.[1] Die Grenzen a und b müssen endlich sein.

Stetige Funktionen sind in der Regel integrierbar.

□

Definition [Riemannsumme und Riemannintegral]. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in die **Teilintervalle** $[\mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{x_i}]$ mit **Intervallbreite**[2] $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und wählen Stützpunkte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

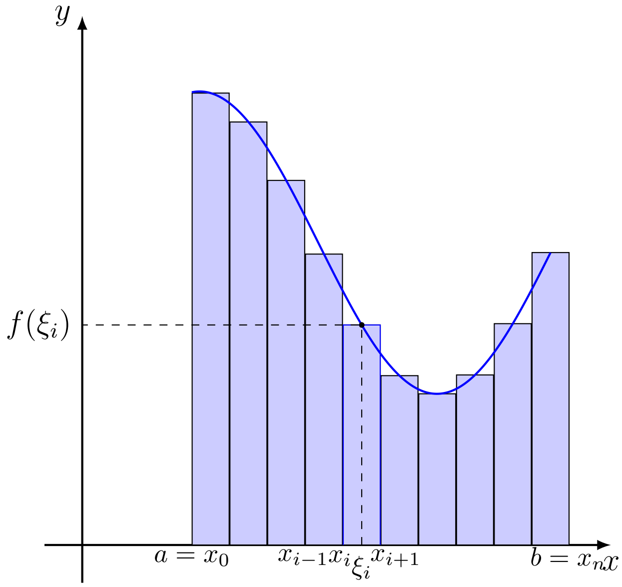
Die **Riemannsumme** von f bezüglich der Zerlegung $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und der Stützpunkte ξ_k ist definiert als

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

$$\triangleq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{3}$$

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst **Riemann-integrierbar**, falls sich die Summe für jede

[1] Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f auf $[a, b]$ muss eine Menge mit Lebesgue-Mass Null sein.
[2] Die Intervalle müssen nicht unbedingt regelmässig sein.



Zerlegung $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und jede Wahl der Stützpunkte $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ einem festen Grenzwert I annähert, vorausgesetzt, die Zerlegung ist hinreichend fein. Im Grenzwert $n \to \infty$ und $\Delta x_i \to 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty,\, \max_{i=1,\ldots,n}(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty,\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I. \tag{4}$$

Dann ist I das bestimmte Integral von f zwischen a und b und wir schreiben

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = I}. \tag{5}$$

$\square$

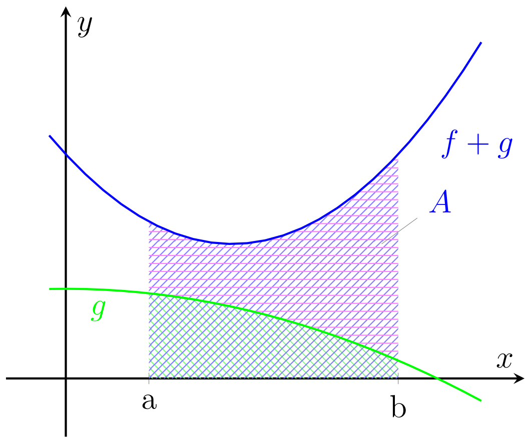
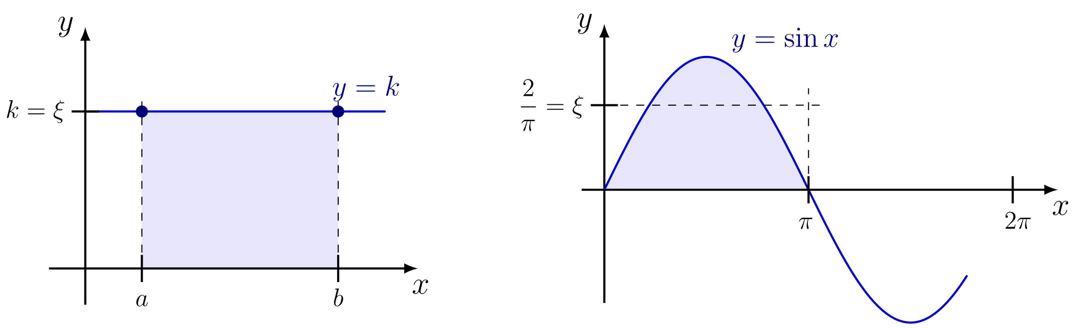


Abbildung 1: Beispiel für eine Fläche $A = \int_a^b (f+g)\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x + \int_a^b g\mathrm{d}x$ unter dem Graphen von $f+g$ auf dem Intervall $[a, b]$.

Definition [Rechenregeln für Integrale]. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Symmetrie)
2. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Linearität)
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (Additivität)

$\square$



(A) Fläche unter einer konstanten Funktion auf dem Intervall $[a, b]$.

(B) Fläche unter einer Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$. Die Fläche beträgt $2 = \xi(b - a)$.

Abbildung 2: Integrale einiger Funktionen und Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

Definition [Stammfunktion]. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F auf I differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in I. \tag{6}$$

Bemerkung [Viele Stammfunktionen]. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Definition [Mittelwertsatz der Integralrechnung]. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \tag{7}$$

$\square$

Theorem [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{8}$$

eine Stammfunktion von f. Es gilt also

$$F_a'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in [a, b]. \tag{9}$$

F_a ist unabhänging von der Wahl des unteren Integrationslimits a.

Beweis. Sei $x \in [a, b]$. Dann ist die Funktion F auf $[a, x]$ stetig und auf (a, x) differenzierbar. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\theta \in (x, x + h)$ so dass

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\theta)h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \phi h)h}{h} = f(x). \end{aligned}$$

wobei $\phi \in (0, 1)$. ■

□

Definition [Unbestimmtes Integral]. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Menge aller Stammfunktionen von f definiert als

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,. \tag{10}$$

Das "$+c$" (die **Integrationskonstante**) ist nötig um die ganze Menge der Stammfunktionen zu beschreiben.

□

Definition [Integrale Berechnen]. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{11}$$

Notation: Das Integral von f über das Intervall $[a, b]$ wird auch als

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq F(x)\Big|_a^b \triangleq \big[F(x)\big]_a^b \tag{12}$$

geschrieben.

Beispiel:

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

2. Allgemein gilt $\displaystyle\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

□

Definition [Partielle Integration]. Seien $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,. \tag{13}$$

Herleitung: Mit der Produktregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x)) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \implies u(x)v'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x)) - u'(x)v(x)$$

und somit

$$\int u(x)v'(x)dx = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x))dx - \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Tricks:

1. "Nach dem Integral I auflösen".
2. 2x partielle Integration und dann nach I auflösen.
3. Mit 1 multiplizieren.
4. Wähle $u(x)$ oder $v(x)$ so, dass nach (mehrmaligem) Ableiten die Funktion verschwindet.

Beispiel:

$$\int x \sin x \mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + c$$

□

Definition [Substitution]. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : J \to I$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u} \tag{14}$$

wobei $u = g(x)$.

Herleitung:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \implies \mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{g'(x)}\mathrm{d}u$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)g'(x)\frac{1}{g'(x)}\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u$$

Bei bestimmten Integralen muss auch das Intervall angepasst werden.

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u} \tag{15}$$

Bemerkung: Manchmal ist es nötig, allgemeiner $h(u) = g(x)$ zu setzen und dann $h'(u)\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$ zu verwenden.

Beispiel:

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\sin(u) + c = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + c$$

$\square$

Allgemeie Integrationstricks:

1. Symmetrien ausnutzen. **Beispiel:** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ für ungerade Funktionen f.
2. Linearität und Additivität ausnutzen.
3. Partialbruchzerlegung und Polynomdivision verwenden um Brüche zu vereinfachen.
   Beispiel: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx.$
4. Trigonometrische und Hyperbolische Identitäten verwenden.