Problem Set 1, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

16. Februar 2025

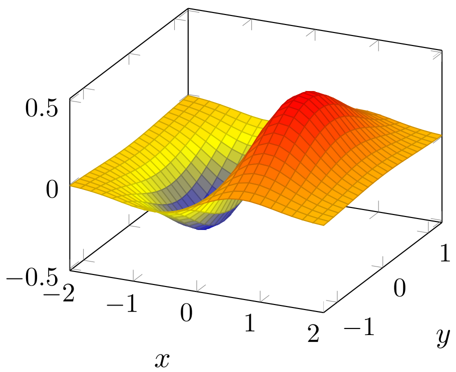
1 Theorie

Definition 1. [Funktionen in zwei Variablen] Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit defnsbereich $D(f) = D$ und Wertebereich $W(f) = \{z \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in D(f) : f(x, y) = z\}$ ist eine Abbildung, die jedem $(x, y) \in D$ genau ein $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Beispiel: $f(x, y) = ax + by + c$ ist eine affin lineare Funktion in zwei variablen.
Definition 2. [Graph] Der Graph von f is die Menge

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D(f) : z = f(x, y)\} \tag{1}$$

Beispiel: Darstellung des Graphen $\Gamma(f)$ von $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$



Definition 3. [Niveaulinien] Für ein fixes $C \in \mathbb{R}$ ist

$$N_{f,C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = C\} \tag{2}$$

die Niveaulinie von f zum Niveau C.[1]

[1] This is a neat little Geogebra applet: `https://www.geogebra.org/m/nuR3n88b`

Beispiel: Höhenlinien auf einer Karte.

Analog zu Ableitungen in Funktionen einer Variable lassen sich hier (partielle) Ableitungen (d.h Ableitungen in jeweils x-Koordinaten- oder y-Koordinaten-Richtung) definieren.

[Partielle Ableitungen]. Die Partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten ist die Ableitung dieser Funktion nach *einer* Variable. Die

Partielle Ableitungen von $f(x, y)$ nach x an der Stelle (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

Hierbei wird die y-Koordinate konstant gehalten.

Die Partielle Ableitung in y wird analog berechnet

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{4}$$

Die Partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind wieder Funktionen in x und y.

Remark 4: Notation
Je nach Autor wird eine partielle Ableitung auf verschiedene Weise geschrieben. Hier eine kurze Liste

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = D_x f = f_x$$

Definition 5. [Gradient] Der Gradient von f ist der Vektor

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \tag{5}$$

Da die partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten wiederum eine Funktion in diesen Argumenten ist, kann man diese auch auf Diff'barkeit untersuchen. Die zweite Ableitung von f nach x wird wie folgt gebildet

$$(f_x)_x \doteq f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{6}$$

Definition 6. [Höhere Ableitungen] Allgemeiner erhält man höhere Ableitungen von f nach x_i und x_j wie folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{7}$$

Das ergibt vier mögliche Kombinationen für Funktionen in zwei Variablen:

1. f_{xx}
2. $(f_x)_y$
3. f_{yy}
4. $(f_y)_x$

Definition 7. [Stetigkeit] Eine Funktion in zwei Variablen ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig, falls für jede Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ gilt

$$x_n \to x y_n \to y \implies f(x_n, y_n) \to f(x, y) \tag{8}$$

[Satz von Schwartz]. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Wenn f_{xy} und f_{yx} in einer Umgebung um (x_0, y_0) stetig sind, dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \tag{9}$$

Remark 8: Reihenfolge der Ableitungen

Eine unmittelbare Folge vom Satz von Schwartz ist, dass meistens die Reihenfolge der Ableitungen egal ist!

$$\begin{tikzcd}
& f \arrow[dl, "(?)"'] \arrow[dr, "(?)"] & \\
\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{?}{=} \psi \arrow[dr] & & \frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{?}{=} \varphi \arrow[dl] \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &
\end{tikzcd}$$

Anhand bekannten partiellen Ableitungen lässt sich die ursprüngliche Funktion unter folgender Bedingung rekonstruieren

[Integrabilitätsbedingung].