Problem Set 2, Summary & Tips

Vikram R. Damani
Analysis II

10. März 2025

1 Tipps

2 Theorie

[Flächenelement in Polarkoordinaten] Das Flächenelement $\mathrm{d}F$ lässt sich in Polarkoordinaten (ρ, φ) schreiben als

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\boxed{= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho} \end{aligned} \tag{1}$$

[Volumenintegrale] Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ und

$$f\colon \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2}$$
$$\vec{r} \longmapsto f(\vec{r}) \tag{3}$$

eine Funktion in 3 Variablen.

Das Volumenintegral V der Funktion f über das Gebiet $\mathbf{B}$ ist gegeben durch

$$V = \iiint_B \mathrm{d}V \tag{4}$$

In kartesischen Koordinaten gilt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

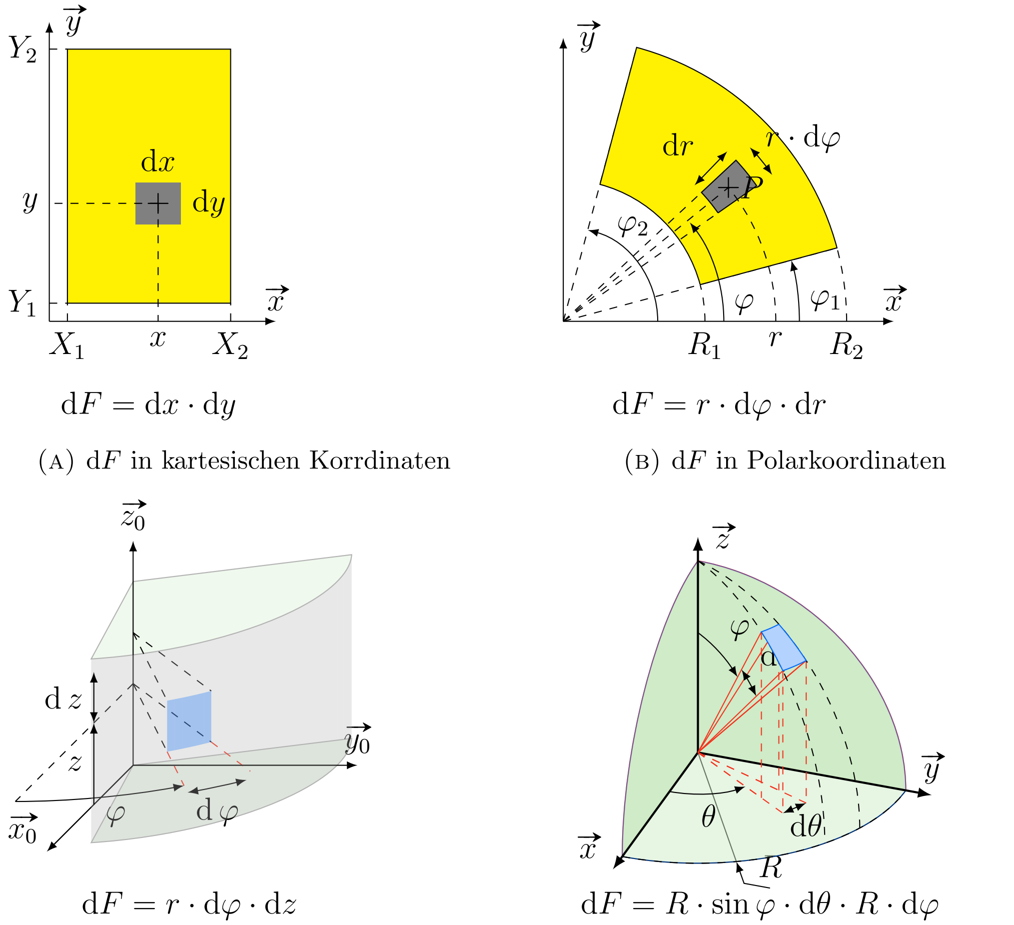
Remark 1
Wie bei Flächenintegralen liegt die Schwierigkeit hier eher beim Bestimmen der Integrationsgrenzen statt beim eigentlichen Integrieren.

2.1 Koordinatentransformation

Sei eine Koordinatentransformation gegeben

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \tag{5}$$

Wie verhält sich der Flächeninhalt von unserem infinitesimalen Flächen-/Volumenelement unter dieser Transformation?



(A) $\mathrm{d}F$ in kartesischen Korrdinaten

(B) $\mathrm{d}F$ in Polarkoordinaten

(C) $\mathrm{d}F$ in Zylinderkoordinaten

(D) $\mathrm{d}F$ in Kugelkoordinaten

ABBILDUNG 1: Flächenelement $\mathrm{d}F$

[Jacobi-Determinante (2D)] Das Flächenelement $\mathrm{d}F$ unter einer Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{d}F = \left|\det(\mathbf{J})\right| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v} \tag{6}$$

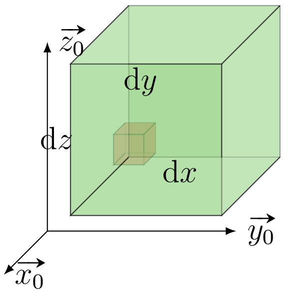
mit der Jacobi Matrix

$$\boxed{\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}} \tag{7}$$

Für das Gebietsintegral gilt dann

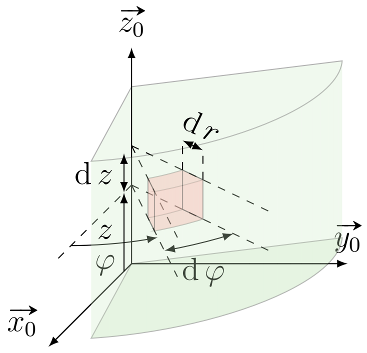
$$V = \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}F = \iint_{\widetilde{B}} \widetilde{f}(u,v)\left|\det(\mathbf{J})\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{8}$$

mit $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ und $\widetilde{B} = \vec{r}(B)$.



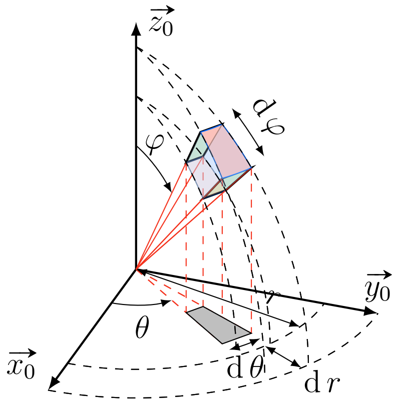
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

(A) dV in kartesischen Koordinaten



$$\mathrm{d}V = r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$$

(B) dV in Polarkoordinaten



$$\mathrm{d}V = r \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\theta \cdot r \cdot \mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}r.$$

(C) dV in Kugelkoordinaten

Abbildung 2: Volumenelement

[Jacobi-Determinante (3D)] Das Volumenelement dV unter einer Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v,w)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{d}F = \left|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_w\right| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w = \left|\det(\mathbf{J})\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w} \tag{9}$$

mit der Jacobi Matrix

$$\boxed{\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}} \tag{10}$$

Für das Gebietsintegral gilt dann

$$V = \iiint_B f(x,y,z) \, \mathrm{d}V = \iiint_{\widetilde{B}} \widetilde{f}(u,v,w) \left|\det(\mathbf{J})\right| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \tag{11}$$

mit $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ und $\widetilde{B} = \vec{r}(B)$.

Theorem 2. *[Volumenelement in Kugelkoordinaten] Das Volumenelement in Kugelkoordinaten ist gegeben durch*

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \tag{12}$$