TP 8 : tableaux `numpy` et méthodes numériques élémentaires

On a déjà vu des tableaux sur la feuille TP 3 (graphisme). Il s'agit d'une structure de données qui superficiellement ressemble à une liste Python, mais qui a des propriétés bien différentes : les listes servent à stocker des données, les tableaux sont fait pour effectuer des calculs numériques. Pour simplifier la notation, sur cette feuille on omet souvent le préfixe `np` avant les fonctions de `numpy`, mais n'oubliez pas de le mettre dans votre code.

Exercice 1. *Extrait de Terminale S*

Dans un bouquin de Terminale S on peut trouver l'assertion suivante :

> **2. Les termes de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :**
> $$v_n = \sin n$$
> **se répartissent uniformément dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.**

En utilisant *une* ligne de code (avec un tableau) et une visualisation adéquate, vérifier si c'est vrai. Afficher votre conclusion (`print`).

Exercice 2. *Matrice aléatoire*

Créer et visualiser une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille 300 où la composante a_{ij} est un entier aléatoire tiré au hasard dans $[0, i]$ $(i, j = 1, 2, \dots, 300)$. On pourra utiliser la commande `plt.matshow` (de `matplotlib)` avec l'option de jeu de couleurs `cmap='hot'`.

Exercice 3. *Matrices, vecteurs et algèbre linéaire*

1. Définir à l'aide du type `array` du module `numpy` les matrices et vecteurs suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{10,20}(\mathbb{R}),\ d_{i,j} = 0 \text{ pour tout } 1 \le i \le 10, 1 \le j \le 20.$$

$$E = (e_{i,j}) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R}),\ e_{i,j} = 7 \text{ pour tout } 1 \le i, j \le 7$$

$$I \text{ la matrice identité pour les matrice } \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$$

$$u = (u_i) \in \mathbb{R}^{100}, \quad u_i = i \text{ pour tout } 1 \le i \le 100$$

$$L = (\ell_{i,j}) \text{ la matrice diagonale de taille } 100 \times 100, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} i, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } 1 \le i, j \le 100$$

$$M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}) \text{ la matrice tri-diagonale définie par } m_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{si } i = j \\ -1, & \text{si } j = i-1 \text{ ou } j = i+1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Recommandation : préférer les solutions n'utilisant pas de boucle!

2. Calculer et afficher:

$$A + B, \quad A\ B, \quad G = (g_{ij}) \text{ avec } g_{ij} = a_{ij} b_{ij}, \quad A\ C, \quad A\ x, \quad 10\ C, \quad z\ C, \quad x + z, \quad \langle x, z \rangle\,.$$

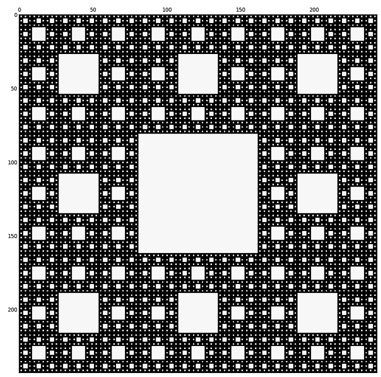
   Remarquer que les vecteur `numpy` n'ont pas d'orientation: ils ne sont ni ligne ni colonne.

3. Modifier la matrice A en remplaçant l'élément 4 par 0. Remplacer la deuxième ligne de la matrice C par le vecteur $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. A partir de la matrice C ainsi obtenue, créer une nouvelle matrice $F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant les deux premières colonnes de C.

4. Calculer et afficher la puissance 10 de A. Proposer une solution en utilisant une boucle `for`. Comparer au résultat obtenu à l'aide de la fonction `matrix_power` du module `numpy.linalg`.

Exercice 4. *Tapis de Sierpiński*

Afficher le tapis de Sierpiński de niveau 6, c'est-à-dire la figure suivante. On utilisera `hstack` et `vstack` de `numpy` et une boucle `for` (et aucune récursivité).



Exercice 5. *Systèmes d'équations linéaires*

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

par trois méthodes suivantes :

1. en utilisant la matrice inverse;

2. en utilisant la commande `solve`.

3. en utilisant la *méthode de Cramer* :

   Soit `A1` une *copie* de `A`;

   on affecte une colonne de la matrice `A1` avec la colonne b, par exemple `A1[:, j] = b` (pourvu que `b` soit de la bonne longueur et "sans forme");

   alors la j-ième inconnue du système et donnée par $\det(A1)/\det(A)$.

   Attention ! on ne modifiera pas la matrice A du système mais on utilisera une copie.

Exercice 6. *Interpolation de Lagrange*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_0, x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ $(N+1)$ nombres réels distincts 2 à 2. Soit f une fonction continue. Dans cet exercice, on se propose de construire un polynôme P de degré N qui approche la fonction f au sens suivant

$$P(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_NX^N$ avec les coefficients $a_0, \ldots, a_N$ à déterminer. On voit aisément qu'en posant successivement $X = x_0$, puis $X = x_1$, ..., $X = x_n$ dans (1), on obtient le système d'équations linéaires $L\,a = b$, d'inconnue a, où :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \ldots & x_N^N \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Posons $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Soit `x` le vecteur composé de $N + 1$ points équirépartis sur $[-\pi, \pi]$ (cf. `linspace`).

1. Soit $N = 4$. Construire la matrice L (cf. `hstack`, `reshape`) et résoudre le système linéaire $L\ a = b$.
2. Visualiser, sur un même graphique, la fonction f et le polynôme obtenu dans la question précédente. Pour évaluer un polynôme étant donnés le vecteur de ses coefficients `a = [a_0, ..., a_N]` et des points d'abscisses `t = np.linspace(-pi, pi, 250)` (par exemple), on peut utiliser la commande `polyval(a[::-1], t)` (cette commande du package `numpy` accepte les coefficients dans l'ordre `[a_N, ...,a_0]`, d'où besoin de l'inversion `a[::-1]`).

   Refaire avec $N = 10$.
3. *Facultatif.* La commande `polyfit(x, y, k)`, étant donnés un vecteur de points d'abscisses `x`, un vecteur de valeurs `y = f(x)` et un entier `k`, retourne les coefficients du polynôme de degré `n` passant *au plus près* des points `(x[i], y[i])`, `i = 0, ..., len(x)`. Si de plus `k = len(x)-1`, la commande retourne le même polynôme que celui obtenu "à la main" dans la question précédente (car il existe un unique polynôme de degré k passant par $k + 1$ points).

   Refaire la question précédente en utilisant la commande `polyfit` (le resultat de `polyfit` et compatible avec `polyval`, cette fois il n'y a donc pas de besoin d'inverser le vecteur des coefficients).

Exercice 7. *Dichotomie*

1. Écrire une procédure `dicho(f, a, b, eps)` qui, étant donnés une fonction `f` et deux réels `a` $<$ `b`, renvoie une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ par la méthode de dichotomie avec le paramètre de précision `eps`.

   Remarque technique : pour passer une fonction mathématique en argument pour la procédure `dicho`, on définit d'abord cette fonction en Python à l'aide de `def`.
2. A l'aide de la fonction `dicho`, trouver avec une précision $\varepsilon = 10^{-8}$
   (a) la solution de l'équation $\ln(x) = \sin(x)$, $x > 0$ (on proposera des valeurs pour a et b);
   (b) les solutions de l'équation $2x + 3 = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser une représentation graphique pour trouver des intervalles contenant les solutions).
3. Écrire une procédure `dicho_nbr(f, a, b, eps)` qui renvoie le nombre d'itérations effectuées dans la méthode de dichotomie (avec les arguments habituels `f, a, b, eps`).

   Combien d'itérations faut-il effectuer pour résoudre chaque équation de la question précédente ?

Exercice 8. *Méthode de Newton*

1. Écrire une procédure `newt(f, df, x, eps)` qui implémente la méthode de Newton, où `f` est la fonction à traiter, `df` sa dérivée (calculée et codée à la main), `x` est le point de départ proposé et `eps` est la précision souhaitée. a procédure retournera un zéro (approché) de la fonction et le nombre d'itérations effectuées.
2. Refaire la question 3 de l'exercice précédent en utilisant la méthode de Newton.

   Comparer le nombre d'itérations nécessaires pour la méthode de Newton et celle de la dichotomie.

Exercice 9. *Intégration numérique*

Écrire une procédure `int_rect_g(f, a, b, n)` qui intègre, par la méthode des rectangles à gauche, la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant une division avec `n+1` points (`n` rectangles). On utilisera ici la commande `sum` et **aucune** boucle `for`.

Puis écrire une procédure `int_rect_d` qui applique la méthode des rectangles à droite et une procédure `int_trap` qui utilise la méthode de trapèzes (bien entendu, sans aucune boucle `for`).

1. Calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$ à l'aide de vos trois procédures avec $n = 100$ (rectangles ou trapèzes).

   Réponses : $S_g = 0.992125456606$, $S_d = 1.00783341987$, $S_t = 0.99997943824$.
2. Intégrer par une méthode de rectangles les fonction suivantes : $f(x) = e^{\sin(x)}$ sur $[-\pi, \pi]$ puis $g(x) = \exp(-x^2)$ sur $[-10, 2]$. Refaire avec un nombre de rectangles $n = 10^k$, k variant entre 1 et 7 (inclus). Observer les résultats.
3. La commande `quad(f, a, b)` intègre "automagiquement" une fonction `f` sur un intervalle $[a, b]$. Pour l'utiliser, il faut d'abord l'importer : `from scipy.integrate import quad`.

   Comparer les résultats de la question précédente avec ceux donnés par la commande `quad`.