Université Clermont-Auvergne Année 2021-2022

U.E. PYTHON POUR LES MATHS - Contrôle continu n° 1, Groupe TP2 L2 Info, 8 novembre 2021

Durée : 1h15. Le sujet comporte 2 exercices (trois pages).

Sont autorisés les programmes de TP, les notes manuscrites et les documents distribués. L'accès à internet (y compris à l'ENT), les téléphones portables et les calculettes sont **interdits**.

Vous rendrez un fichier par exercice en le nommant `exercice1.py`, `exercice2.py`. Les fichiers seront rendu sur le site ENT de l'UE "Python pour les Maths", onglet Contrôle. Si vous travaillez en binôme, mettez vos noms dans chacun de ces fichiers.

Pour chaque exercice, votre programme doit afficher l'ensemble des réponses requises. Un repère orthonormé sera utilisé pour représenter chaque graphique demandé. La clarté des programmes et des réponses seront prises en compte.

Exercice 1. *Méthode d'Archimède*

Au III$^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère, Archimède de Syracuse a développé une méthode pour approcher la valeur de π. Dans cet exercice, on se propose de revisiter sa méthode en utilisant des outils qui n'existaient pas à son époque.

1. Dessiner sur un même graphique le cercle unité, un hexagone régulier inscrit dans le cercle unité et un hexagone régulier dont les côtés sont tangents au cercle unité. Le résultat attendu est la figure ci-dessous.

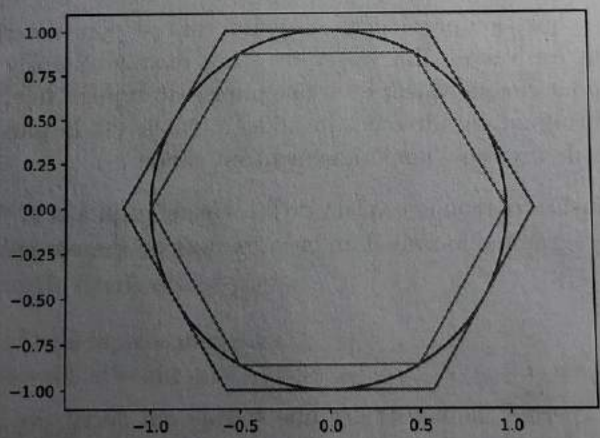

Figure 1: Deux hexagones réguliers approchant le cercle unité.

Indication : les sommets d'un hexagone régulier dont les côtés sont tangents au cercle unité sont sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $1/\cos(\pi/6) = 2/\sqrt{3}$.

2. À partir de ces deux hexagones, on peut construire deux suites de polygones réguliers – l'un inscrit, l'autre tel que ses côtés sont tangents au cercle unité – en doublant le nombre de côtés des polygones à chaque étape. Pour $n \in \mathbb{N}$, les coordonnées $(x_k^I, y_k^I)_k$ des sommets du polygone inscrit, noté $\mathcal{P}_n^I$, sont :

$$\begin{cases} x_k^I = \cos\left(\frac{2k\pi}{6\times 2^n}\right), \text{ pour } k \in \{0,1,\ldots,6\times 2^n\} \\ y_k^I = \sin\left(\frac{2k\pi}{6\times 2^n}\right), \text{ pour } k \in \{0,1,\ldots,6\times 2^n\} \end{cases},$$

et les coordonnées $(x_k^E, y_k^E)_k$ des sommets du polygone dont les côtés sont tangents au cercle unité, noté $\mathcal{P}_n^E$, sont :

$$\begin{cases} x_k^E = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)} \cos\left(\frac{2k\pi}{6\times 2^n}\right), \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, 6 \times 2^n\} \\ y_k^E = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)} \sin\left(\frac{2k\pi}{6\times 2^n}\right), \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, 6 \times 2^n\} \end{cases}$$

Archimède s'est intéressé en particulier au cas $n = 4$. Dessiner sur une même figure le cercle unité, le polygone $\mathcal{P}_n^I$ et le polygone $\mathcal{P}_n^E$ pour $n = 4$. Que remarquez-vous ?

3. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le périmètre du cercle est compris entre le périmètre du polygone $\mathcal{P}_n^I$ et le périmètre du polygone $\mathcal{P}_n^E$. On aboutit à l'encadrement de π suivant :

$$6 \times 2^n \times s_n \leq \pi \leq 6 \times 2^n \times t_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

où $(s_n)_n$ est la suite de terme général $s_n = \sin\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)$ et $(t_n)_n$ est la suite de terme général $t_n = \tan\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)$. En utilisant les formules de l'angle double, on démontre que les suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ peuvent s'écrire sous la forme de suites récurrentes :

$$s_0 = \frac{1}{2},\ s_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - (s_n)^2}\right)}, \tag{2}$$

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + (t_n)^2} - 1}{t_n}. \tag{3}$$

Utiliser les équations (1), (2) et (3) pour calculer un encadrement de π pour chaque n dans $\{0, 1, \ldots 15\}$. Le programme affichera pour chaque valeur de n une phrase du type : "n = ... : pi est compris entre...et..."

4. Reprendre le code de la question précédente et ajouter un test pour déterminer, pour chaque valeur de n, si l'encadrement est valide. La valeur de π du module NumPy servira de référence. Le programme affichera pour chaque valeur de n une phrase du type : "n= ...fournit un encadrement valide" ou "n= ...fournit un encadrement invalide". Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle l'encadrement de π calculé numériquement est valide ?

5. Au XV$^{\text{ème}}$ siècle, Al-Kashi a obtenu une valeur de π correcte jusqu'à la 17$^{\text{ème}}$ décimale en considérant le cas $n = 14$. Votre programme fournit-il un encadrement de π aussi précis ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

Exercice 2. *Spirale de Fibonacci*

La suite de Fibonacci $(F_n)_n$ permet de construire une spirale qui décrit des spirales observées dans la nature (*e.g.* la coquille d'un escargot). On se propose dans cet exercice de tracer la spirale de Fibonacci représentée Figure 2.

1. Écrire une fonction `fibo_liste(n)` qui renvoie une liste contenant les termes F_0 à F_n (inclus). Utiliser cette fonction pour calculer les 11 premiers termes de la suite et les stocker dans une liste.

2. Soit $(x_n)_n$ la suite définie par : $x_0 = 0$ et

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, \text{ si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ x_n + F_n, \text{ si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ x_n, \text{ si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ x_n - F_n, \text{ si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

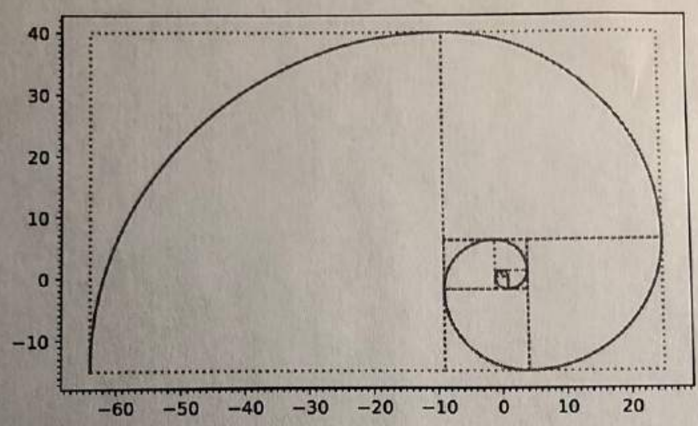

Figure 2: Spirale de Fibonacci (en trait plein).

Soit $(y_n)_n$ la suite définie par : $y_0 = 0$ et

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n - F_n, \text{ si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ y_n, \text{ si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ y_n + F_n, \text{ si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ y_n, \text{ si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Calculer et stocker dans une liste les termes x_0 à x_9 (inclus). Calculer et stocker dans une liste les termes y_0 à y_9 (inclus).

3. On rappelle que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(x^C, y^C)$ et de rayon r peut être représenté par la courbe paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = x^C + r\cos(t) \\ y(t) = y^C + r\sin(t) \end{cases}.$$

Écrire une fonction `arc(xc, yc, r, tmin, tmax)` qui trace, pour le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(x^C, y^C)$ et de rayon r, l'arc de cercle décrit quand t parcourt l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$.

4. Utiliser la fonction `arc` afin de représenter, pour le cercle unité, l'arc de cercle décrit quand t parcourt l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le résultat attendu est le quart de cercle reliant le point $(1,0)$ au point $(0,1)$.

5. Soit (I_n) la suite d'intervalles définie par :

$$I_n = \begin{cases} \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \text{ si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \text{ si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Utiliser la fonction `arc` pour représenter, sur un même graphique, pour chaque n dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$, pour le cercle $\mathcal{C}_n$ de centre $C_n(x_n, y_n)$ et de rayon F_{n+1}, l'arc de cercle décrit quand t parcourt l'intervalle I_n. Le résultat attendu est la courbe en trait plein représentée Figure 2.