

PYTHON POUR MATHÉMATIQUES - 2ème épreuve sur machines - 6 janvier 2022 à 7h45

Durée : 1h25. Le sujet comporte 2 exercices (recto-verso).

- ✓ Les programmes de TP, notes manuscrites et documents distribués (annotés) sont autorisés.
- ✓ Durant l'épreuve, l'accès à internet (dont ENT), les téléphones portables et les calculettes sont **interdits**.
- ✓ À la fin, on rendra un fichier par exercice en le nommant `exercice1.py`, `exercice2.py`. On les rendra sur le site ENT de l'UE, onglet Contrôle.
- ✓ Votre programme doit afficher l'ensemble des réponses requises.
- ✓ La clarté des programmes et des réponses seront prises en compte.

Exercice 1. Carrés magiques de Dirichlet¹

Toute commande "print" doit inclure un texte qui précise ce qui est imprimé.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice carrée de taille N . On appelle l'intérieur de A , l'ensemble des coefficients qui ne sont ni sur la première ligne, ni sur la dernière ligne, ni sur la première colonne et ni sur la dernière colonne. L'intérieur de A est donc l'ensemble des coefficients $(a_{ij})_{1 < i, j < N}$. Ainsi chaque coefficient à l'intérieur de la matrice possède exactement 4 voisins : au dessus, en dessous, à gauche et à droite.

Pendant les cinq premières questions on fixe $N = 5$. Écrivez votre programme pour qu'il fonctionne avec n'importe quelle valeur de N puisqu'on l'exécutera avec $N = 30$ lors de la dernière question.

1. Construire et afficher un tableau u sans forme algébrique, c.à d. ayant un seul coefficient dans l'attribut `u.shape` (cf. cours), représentant le vecteur $(0, 1, 2, \dots, N - 1)$. Construire et afficher un tableau v sans forme algébrique représentant le vecteur $(N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$. Une solution sans boucle explicite sera préférée.
2. À partir de u et de v , construire et afficher un tableau w sans forme algébrique de longueur $2N$ représentant le vecteur $(0, 1, 2, \dots, N - 1, N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$. Une solution sans boucle explicite sera préférée.
3. Créer un tableau A représentant une matrice carrée de taille $2N \times 2N$ telle que
 - la première ligne, la dernière ligne, la première colonne et la dernière colonne de A valent toutes w ;
 - l'intérieur de A est rempli de 0.

Afficher (print) la matrice A .

¹Exercice inspiré par la vidéo d'Olivier Druet: <http://video.math.cnrs.fr/carres-magiques-de-dirichlet>

4. Écrire une fonction `iteration(A)` qui remplace chaque composante à l'intérieur du tableau `A` par la moyenne de ses 4 voisins initiaux. La fonction retournera le tableau ainsi modifié.

Dans cette question on pourra utiliser des boucles.

Visualiser à l'aide de `matshow` le tableau obtenu à partir du tableau initial après cinq appels à `iteration`.

5. Visualiser à l'aide de `matshow` le tableau obtenu à partir du tableau initial après mille appels à `iteration`.

6. Refaire les questions précédentes pour $N = 30$.

On pourra omettre les affichages `print` de grande taille et laisser seulement les graphiques.

Exercice 2. Anniversaires

Toute commande "`print`" doit inclure un texte qui précise ce qui est imprimé.

Dans cet exercice on se propose d'étudier la distribution d'anniversaires dans un groupe de personnes en supposant que les dates d'anniversaire sont aléatoires.

On suppose ici que l'année possède 365 jours numérotés de 0 à 364.

1. Quelle est la probabilité que dans une famille de 5 personnes au moins 4 dates d'anniversaires tombent dans un espace de 30 jours consécutifs ?

Pour répondre, on mettra en place une simulation qui établit cette probabilité avec une précision d'ordre 0.001 (au niveau de risque 95%, cf. cours).

2. Dans une famille de cinq personnes, quelle est en moyenne le nombre de jours entre le premier et le dernier anniversaire ?

3. Visualiser, à l'aide d'un histogramme adapté, la loi empirique du nombre de jours entre le premier et le dernier anniversaire pour une famille de 5 personnes.

4. Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves il y en ait au moins 2 qui fêtent leur anniversaire un même jour ?

On répondra en faisant une simulation similaire à celle dans des questions précédentes et avec une même précision (d'ordre 0.001).

5. Visualiser graphiquement la probabilité d'un double anniversaire dans un groupe de N personnes, N variant de 20 à 30 (dans cette question on pourra abaisser la précision à 0.01).

Pour quelles valeurs de N cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$? On affichera la réponse à l'aide d'une commande `print`.