

Следует отметить, что для применимости результатов указанных работ нужно, чтобы потеря устойчивости происходила в мягком режиме, тогда как режим потери устойчивости течения Пуазейля оказался жестким.

Д. Вырождения коразмерности 2.

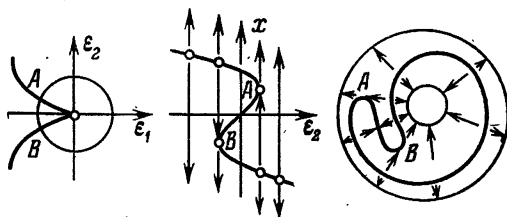
Разобранными выше случаями (рождение и уничтожение пары особых точек, рождение или уничтожение предельного цикла из особой точки) исчерпываются бифуркации фазовых портретов в окрестности особой точки для общих однопараметрических семейств векторных полей.

В двухпараметрических семействах эти особенности будут встречаться на линиях плоскости параметров, но кроме них будут (в отдельных точках плоскости параметров) наблюдаться более сложные вырождения. Среди этих более сложных вырождений неустраимы малым шевелением двухпараметрического семейства следующие 5 вырождений.

1°. Один нулевой корень с дополнительным вырождением. Пример:

$$\dot{x} = \pm x^3 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2, \quad x \in \mathbb{R}$$

(рис. 133). Легко проверить, что выписанная деформация (топологически) версальна; в многомерном случае версальная деформация получится надстройкой седла.



— Рис. 133.

Бифуркационная диаграмма (для случая $+x^3$) изображена на рис. 133 слева. Полукубическая парабола делит плоскость параметров на две части. В меньшей части система имеет вблизи $x=0$ три положения равновесия, в большей — одно. Перестройки фазового портрета при обходе параметра вокруг точки $\varepsilon=0$ по малой окружности, показаны на рис. 133 справа. Прямое произведение этой окружности на (одномерное) фазовое пространство есть круговое кольцо, положения равновесия образуют в этом кольце замкнутую кривую, а поведение векторов поля ясно из рис. 133.

2°. Одна мнимая пара с дополнительным вырождением. Пример:

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z \bar{z} \pm z^2 \bar{z}^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Бифуркационная диаграмма состоит из прямой $\varepsilon_1 = 0$ и касающейся ее в нуле половины параболы; она изображена на рис. 134 для случая, когда в формуле стоит $+z^2z^2$.

Перестройки фазового портрета при обходе вокруг 0 по малой окружности показаны на рис. 134 справа. Изображенное на этом рисунке кольцо — прямое произведение окружности на плоскости параметров и прямой, на которой откладывается $\pm|z|$. Окружность на этом рисунке соответствует положению равновесия $z = 0$, а каждый предельный цикл изображается двумя точками пересечения радиуса с линией $\varepsilon_1 + \varepsilon_2|z|^2 + |z|^4 = 0$.

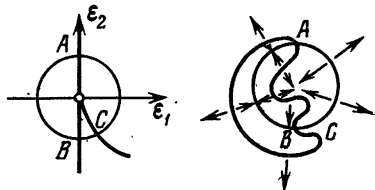


Рис. 134.

Бифуркационная диаграмма и семейство над окружностью для случая, когда в формуле стоит $-z^2z^2$, аналогичны.

3°. *Две мнимые пары.*

4°. *Мнимая пара и еще один нулевой корень.*

Исследование этих случаев не доведено еще до той полноты, при которой можно выписывать версальные семейства; более того, неясно, имеется ли в случае двух мнимых пар двухпараметрическое (или хотя бы конечнопараметрическое) топологически версальное семейство (даже в предположении нормальной несоизмеримости отношения частот при одновременном их переходе из одной полу-плоскости в другую).

Наконец, остается последний случай коразмерности 2:

5°. *Два нулевых корня.* Пример — семейство уравнений на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2 \end{cases}$$

с параметрами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость ε на четыре части, обозначенные A, B, C, D на рис. 135, соответствующем выбору $+x_1x_2$ в формуле.

Фазовые портреты, соответствующие каждой из четырех частей плоскости ε , показаны на рис. 135. Ветвям бифуркационной диаграммы соответствуют системы с вырождениями коразмерности один, изображенные на рис. 135 (P, Q, R, S).

Заметим, что бифуркация на ветви S — рождение цикла из петли сепаратрисы — не входит в нашу классификацию особенностей коразмерности 1, так как она является не локальным (вблизи особой точки), а глобальным явлением. Мы видим, таким образом, что с увеличением числа параметров семейства при локальном исследовании бифуркаций особых точек начинают играть роль глобальные бифуркации меньших коразмерностей. Отсюда следует, что при достаточном числе параметров мы столкнемся в локальной задаче

с теми же трудностями не всюду плотности структурно устойчивых систем, которые были обнаружены Смейлом в глобальной задаче о векторных полях на многообразии (см. § 15).

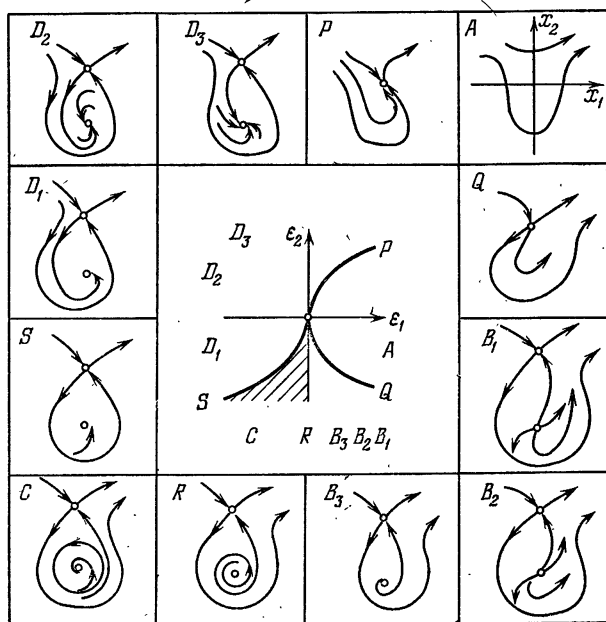


Рис. 135.

Бифуркации в случае, соответствующем выбору знака «—» в формуле, сводятся к предыдущим изменениям знаков t и x_2 .

Теорема. Векторные поля общего положения с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения в особой точке на фазовой плоскости имеют топологически версальную деформацию с двумя параметрами, эквивалентную одной из двух деформаций, рассмотренных выше.

Иными словами, общее двухпараметрическое семейство дифференциальных уравнений на плоскости, имеющих при некотором значении параметра особую точку с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения, непрерывной заменой параметров и непрерывно зависящей от параметров непрерывной заменой фазовых координат приводится к указанному выше виду.

Эта теорема, доказанная Р. И. Богдановым в 1971 году, была впервые опубликована в обзоре В. И. Арнольд, Лекции о бифуркациях и версальных семействах, УМН 27, 5 (1972), стр. 119—131. Такенс анонсировал анало-

гичный результат в 1974 году. Доказательство версальности не просто; главную трудность представляет исследование единственности предельного цикла. Р. И. Богданов преодолевает эту трудность при помощи нетривиальных соображений о поведении эллиптических интегралов в зависимости от параметра. См. Р. И. Богданов, Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости, Тр. семинара имени И. Г. Петровского, 1976, вып. 2, 23—36; Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел, там же, стр. 37—65.

§ 34. Потеря устойчивости автоколебаний

Следующей по сложности задачей теории бифуркаций (после задачи о перестройке фазовых портретов в окрестности положений равновесия) является задача о перестройках семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой. Эта задача полностью не решена и, по-видимому, в некотором смысле неразрешима. Тем не менее общие методы теории бифуркаций позволяют получить существенную информацию об этих перестройках; в настоящем параграфе дается краткий обзор основных результатов в этом направлении.

А. Монодромия и мультипликаторы.

Рассмотрим замкнутую фазовую кривую системы дифференциальных уравнений. Нас интересуют перестройки расположения фазовых кривых в окрестности данной кривой при малом изменении уравнения.

Для расположения фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения имеется (с точностью до гомеоморфизма окрестности) конечное число возможностей. Чтобы описать их, выберем на замкнутой фазовой кривой точку O . Проведем через эту точку трансверсальную к замкнутой фазовой кривой площадку (корузмерности один в фазовом пространстве). Фазовые кривые, выходящие из точек площадки, достаточно близких к точке O , вновь пересекают площадку, сделав оборот вдоль кривой. Возникает отображение окрестности точки O на трансверсальной площадке в эту площадку. Это отображение называется *функцией* (или *отображением*) *последования Пуанкаре* (рис. 136) (или просто *отображением Пуанкаре*).

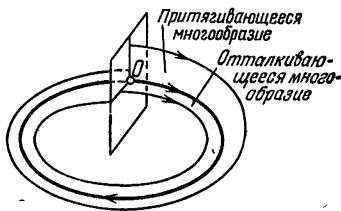


Рис. 136.

Точка O является неподвижной точкой функции последования. Рассмотрим линеаризацию функции последования в точке O . Этот линейный оператор называется *оператором монодромии*.

Собственные числа оператора монодромии называются *мультипликаторами* исходной замкнутой фазовой кривой. Оператор монодромии можно найти, решая линейное уравнение с периодическими

коэффициентами (уравнение в нормальных вариациях вдоль нашей фазовой кривой).

Предположим, что все мультипликаторы по модулю меньше единицы. Тогда можно доказать, что все соседние фазовые кривые при продолжении вперед притягиваются к нашей замкнутой фазовой кривой. Если хотя бы один из мультипликаторов по модулю больше, единицы, то существуют фазовые кривые, удаляющиеся от замкнутой (приближающиеся к ней при $t \rightarrow -\infty$).

В общем случае несколько собственных чисел лежит внутри единичной окружности, а несколько — снаружи. В этом случае фазовые кривые, притягивающиеся к данной, образуют, как можно доказать, *притягивающееся многообразие*, пересечение которого с нашей трансверсалью имеет такую размерность, сколько мультипликаторов лежит внутри единичной окружности. Точно так же фазовые кривые, асимптотические к замкнутой при $t \rightarrow -\infty$, образуют *отталкивающееся многообразие*. Размерность его пересечения с трансверсалью равна числу неустойчивых мультипликаторов (мультипликаторов вне единичной окружности).

В окрестности нашей замкнутой фазовой кривой имеет место гиперболическая ситуация (см. § 14): все прочие фазовые кривые удаляются от замкнутой как при $t \rightarrow +\infty$ (удаление происходит вдоль отталкивающегося многообразия), так и при $t \rightarrow -\infty$ (вдоль притягивающегося). Топологический тип семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой, не имеющей мультипликаторов на единичной окружности, однозначно определяется числами устойчивых и неустойчивых мультипликаторов и тем, сколько среди тех и других отрицательных: четное или нечетное число.

Посмотрим, что изменится в этой картине при малом изменении системы.

Б. Простейшие вырождения.

Замкнутая фазовая кривая называется *невыврожденной*, если единица не является мультипликатором. Невыврожденная замкнутая фазовая кривая при малой деформации системы не исчезает, а лишь немного деформируется (по теореме о неявной функции, примененной к уравнению $f(x) = x$, где f — функция последования). При деформации невырожденной замкнутой фазовой кривой мультипликаторы также лишь немного деформируются. Следовательно, как число устойчивых, так и число неустойчивых мультипликаторов не меняется при деформации, если ни один из мультипликаторов исходной фазовой кривой не лежал на единичной окружности.

Мультипликаторы замкнутой фазовой кривой общего положения не лежат на единичной окружности. Таким образом, расположение фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения структурно устойчиво.

Но если мы рассматриваем не индивидуальную систему, а семейство систем, зависящих от параметра, то при отдельных значениях параметра мультипликаторы могут попадать на единичную окружность, и возникает вопрос о бифуркациях.

Как обычно, начнем с простейших вырождений, т. е. вырождений, неустранимых в однопараметрических семействах. Таких вырождений коразмерности 1 в нашем случае имеется три. Действительно, характеристическое уравнение оператора монодромии вещественно, поэтому каждый невещественный мультипликатор имеет комплексно сопряженный. Следовательно, на единичную окружность выходят либо 2 комплексно сопряженных мультипликатора, либо один вещественный, равный либо 1, либо -1 . Все три случая (комплексная пара, $+1$, -1) соответствуют многообразиям коразмерности 1 в функциональном пространстве.

Рассмотрим, например, границу области устойчивости замкнутой фазовой кривой в функциональном пространстве. Эта граница является гиперповерхностью в функциональном пространстве. Она состоит из трех компонент коразмерности 1. Первая компонента соответствует фазовым кривым с одной парой комплексно-сопряженных мультипликаторов с модулем 1, вторая — с мультипликатором $+1$, третья — с мультипликатором -1 ; все остальные мультипликаторы лежат внутри единичной окружности (рис. 137).

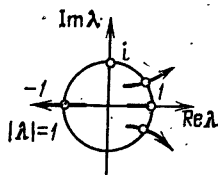


Рис. 137.

Эти три гиперповерхности коразмерности 1 пересекаются по поверхностям коразмерности 2 и имеют дальнейшие особенности. Например, самопересечения первой поверхности отвечают двум парам мультипликаторов с модулем 1 и т. д.

Задача о потере устойчивости замкнутой фазовой кривой является, таким образом, задачей о вырождении коразмерности 1, и мы должны, на первый взгляд, рассматривать однопараметрические семейства общего положения, чтобы разобраться в бифуркациях. В действительности дело обстоит не так просто: мы увидим, что в задаче о потере устойчивости при прохождении пары мультипликаторов через единичную окружность имеется два существенных параметра. Но вначале посмотрим, к каким выводам приводит однопараметрическая точка зрения.

Начнем со случая, когда один из мультипликаторов равен 1. Этот случай в сущности не отличается от задачи о бифуркации положений равновесия в однопараметрических семействах. Ситуация общего положения — это рождение или смерть пары замкнутых фазовых кривых. У функции последования при этом рождаются или умирают две неподвижные точки.

Пример 1. Рассмотрим отображение оси x в себя, заданное формулой $x \mapsto x + x^2$. Точка $x = 0$ неподвижна, и ее мультипликатор

равен 1. Рассмотрим однопараметрическую деформацию с параметром ε , близким к нулю:

$$f_\varepsilon(x) = x + x^2 + \varepsilon.$$

Эта деформация топологически версальна. Рассмотрим любое отображение прямой в себя, имеющее неподвижную точку с мультипликатором 1. Мы назовем эту (вырожденную) неподвижную точку *регулярной*, если вторая производная отображения в неподвижной точке (в какой-нибудь и тогда любой системе координат) отлична от нуля.

Если вырожденная неподвижная точка регулярна, то существует однопараметрическая топологически версальная деформация отображения. При этом как само отображение, так и его версальная деформация локально топологически эквивалентны указанной выше деформации f_ε специального отображения f_0 в окрестности точки 0.

Чтобы перейти к многомерному случаю, нужно определить надстройку над построенной деформацией.

Пример 2. Рассмотрим отображение линейного пространства в себя, заданное формулой

$$(y, z, u, v) \mapsto (2y, -2z, u/2, -v/2),$$

где y, z, u, v — точки четырех подпространств, прямым произведением которых является наше пространство. Мы будем называть такое отображение *стандартным седлом* (размерности пространств, которым принадлежат y и u любые, а z и v — нуль или единица),

Рассмотрим любое гладкое отображение, имеющее неподвижную точку. Предположим, что ни один из мультипликаторов не лежит на единичной окружности. Тогда в окрестности неподвижной точки отображение топологически эквивалентно стандартному седлу (это легко следует из теоремы Гробмана — Хартмана, § 13).

Пример 3. Рассмотрим прямое произведение деформации отображения прямой примера 1 на стандартное седло. Мы получим однопараметрическое семейство отображений с параметром ε и фазовыми координатами, меняющимися в окрестности нуля:

$$(x; y, z, u, v) \mapsto (x + x^2 + \varepsilon, 2y, -2z, u/2, -v/2).$$

Эта деформация называется *надстройкой* над деформацией примера 1. Она топологически версальна.

Теорема. *Однопараметрические семейства отображений общего положения топологически эквивалентны выписанному выше в окрестности каждой неподвижной точки с мультипликатором 1 при значениях параметра, близких к тому, для которого мультипликатор становится равным 1.*

«Доказательство в одномерном случае легко. Многомерный случай сводится к одномерному при помощи теоремы Шошитайшвили (§ 32), которая верна не только для дифференциальных уравнений, но и для отображений. ►

В. Случай мультипликатора —1.

При появлении мультипликатора —1 замкнутая фазовая кривая гладко зависит от параметра и сама не буфурцирует. Но при этом от нее ответвляется дважды наматывающаяся на нее замкнутая фазовая кривая. Чтобы понять, как это происходит, обратимся опять к функции последования.

Пример 1. Рассмотрим отображение прямой в себя

$$f_0(x) = -x \pm x^3.$$

Мультипликатор неподвижной точки 0 равен —1.

Включим f_0 в семейство:

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon - 1)x \pm x^3.$$

Теорема. Деформация f_ε отображения f_0 версальна. Однопараметрическое семейство общего положения в окрестности неподвижной точки с мультипликатором —1 при значениях параметра, близких к тому, при котором мультипликатор равен —1, топологически эквивалентно описанному.

«Рассмотрим любое однопараметрическое семейство отображений прямой, в котором мультипликатор неподвижной точки обращается в —1 при некотором значении параметра.

Неподвижная точка гладко зависит от параметра (по теореме о неявной функции). Гладко зависящей от параметра заменой координат можно перенести неподвижную точку в нуль.

Будем теперь делать замены Пуанкаре (см. § 25), последовательно убивающие нерезонансные члены. Эти замены будут гладко зависеть от параметра, если мы будем оставлять члены, становящиеся резонансными при критическом значении параметра, не только при этом значении параметра (когда их и нельзя убить), но также при соседних значениях.

В нашем случае резонансные члены — это все члены нечетной степени. Следовательно, семейство можно привести к виду

$$x \mapsto \lambda x + ax^3 + O(|x|^5),$$

где λ , a и O гладко зависят от параметра.

В семействе общего положения производная λ по параметру при $\lambda = -1$ отлична от нуля. В таком случае за параметр можно принять $\varepsilon = 1 + \lambda$. Теперь деформация имеет вид

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)x + a(\varepsilon)x^3 + O(|x|^5).$$

В семействе общего положения $a(0) \neq 0$. Гладко зависящим от параметра растяжением координат добиваемся $a(\varepsilon) = \pm 1$.

Теперь остается проверить, что член O не влияет на топологический тип семейства. Рассмотрим квадрат нашего отображения:

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)^2 x + (\varepsilon - 1) a x^3 + a (\varepsilon - 1)^3 x^3 + O(|x|^5).$$

Каждая точка x сдвигается на

$$h = -2\varepsilon(1 + \dots)x - (2a + \dots)x^3 + O(|x|^5),$$

где \dots означает $O(\varepsilon)$.

Нулевую линию уровня функции h на плоскости (x, ε) легко исследовать (рис. 138). Рис. 138 определяет топологический тип семейства. ►

Таким образом, в общем однопараметрическом семействе отображений прямой на прямую мультипликатор неподвижной точки

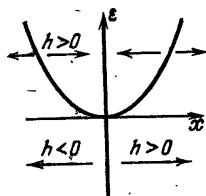


Рис. 138.

становится равным -1 в момент трансверсального прохождения через единичную окружность (в отличие от обращения мультипликатора в 1 , при котором мультипликатор, вообще говоря, через окружность не проходит). В момент прохождения мультипликатора через -1 изнутри наружу неподвижная точка теряет устойчивость. При этом, в зависимости от знака коэффициента при x^3 , возможно два случая. Либо рядом с потерявшей устойчивость точкой (на расстоянии

порядка квадратного корня из отлчия параметра от критического значения) возникает устойчивый цикл периода 2 (две неподвижных точки квадрата отображения) — это случай мягкой потери устойчивости. Либо область притяжения стягивается до 0 из-за подхода цикла порядка два еще до потери устойчивости (жесткая потеря устойчивости).

Многомерная картина получается надстраиванием седла, как это описано выше.

Применяя все сказанное об отображениях к функции последования замкнутой фазовой кривой, получаем в случае мягкой потери устойчивости картину, изображенную на рис. 139: исходный цикл теряет устойчивость, но появляется устойчивый цикл с примерно вдвое большим периодом.

Описанные здесь явления хорошо наблюдаются в экспериментах. Следующий пример заимствован из доклада Г. И. Баренблата на семинаре И. Г. Петровского. Рассматривается полимерная пленка, медленно растягиваемая грузом. При малых растяжениях процесс квазистационарен (время можно считать параметром, фазовая точка находится в устойчивом положении равновесия, все наблюдаемые величины при каждом значении параметра постоянны, т. е. фактически с изменением времени медленно меняются). Однако при некотором значении параметра (т. е. при достаточном растяжении пленки) картина меняется, и вид различных физических параметров (скажем, длины x пленки) как функции времени становится таким, как изображено на рис. 140 (каждое колебание на этом рисунке можно рассматривать как происходящее при

фиксированном значении параметра, но при следующем колебании параметр немного меняется).

Истолкование этого поведения фазовых переменных со временем следующее: точка 1 соответствует мягкой потере устойчивости равновесия с образованием автоколебаний; видно, что их амплитуда растет как корень квадратный из закритичности. Точка 2 соответствует мягкой потере устойчивости цикла с прохождением мультипликатора через -1 .

Действительно, предположим, что в фазовом пространстве происходят перестройки, указанные на рис. 139.

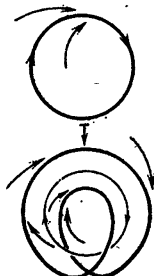


Рис. 139.

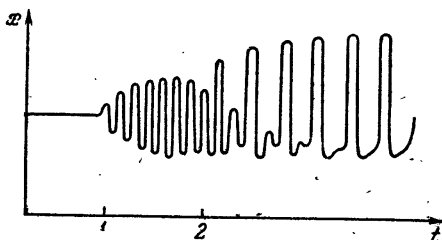


Рис. 140.

Каждая физическая наблюдаемая величина является функцией на фазовом пространстве. Пока фазовая точка находится в положении равновесия, величина постоянна. Когда фазовая точка движется по циклу, величина x становится периодической функцией времени t (амплитуда колебаний растет с циклом). Удвоению цикла, изображенному на рис. 139, отвечает именно такое удвоение периода зависимости измеряемой величины от времени, которое наблюдалось в эксперименте (рис. 140).

В связи с этим заметим, что вообще при изучении автоколебаний обычно регистрируют временные зависимости измеряемых величин (скажем, на электрокардиограмме). Во многих случаях более ясное представление о характере явлений можно получить из вида фазовой кривой или ее проекции на какую-либо плоскость. Этим методом давно пользуются для диагностики отказов таких механических автоколебательных систем, как насосы. Предложения применять этот метод в электрокардиографии уже высказывались медиками.

Г. Прохождение пары мультипликаторов через единичную окружность.

Этот случай изучен гораздо хуже обоих предыдущих. Топологически версальные деформации не выписаны и быть может не существуют. Тем не менее метод Пуанкаре позволяет получить существенную информацию. Начнем со случая, когда аргумент мультипликатора, попавшего на единичную окружность, несоизмерим с 2π (этот случай можно считать общим, так как мера множества рациональных чисел равна нулю).

Мы будем считать, что размерность отображаемого пространства равна 2. В этом случае после подходящей гладкой и гладко зависящей от параметра замены координат наше семейство отображений приводится к виду

$$z \mapsto \lambda(\varepsilon) z (1 + a(\varepsilon) |z|^2 + O(|z|^4)),$$

где вещественное число ε — параметр семейства, $\lambda(0) = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 2\pi p/q$. Для семейства общего положения $d|\lambda|/d\varepsilon|_0 \neq 0$, так что за параметр можно взять $|\lambda| - 1$.

Предположим, что член $O(|z|^4)$ отсутствует. В этом случае отображение легко исследовать. Действительно, модуль точки-образа определяется модулем точки прообраза, так что возникает вещественное отображение

$$r \mapsto r|\lambda||1 + ar^2|.$$

При $|\lambda| = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, $r \ll 1$ имеем

$$|\lambda||1 + ar^2| \approx 1 + \varepsilon + \operatorname{Re} ar^2 + \dots$$

Для семейства общего положения $\operatorname{Re} a \neq 0$. В этом случае при прохождении параметром ε значения нуль из теряющей устойчивость неподвижной точки рождается (или в этой точке умирает) инвариантная относительно отображения окружность, радиус которой пропорционален $\sqrt{|\varepsilon|}$. В первом случае (рождения окружности) она устойчива, во втором неустойчива. На самой окружности отображение сводится к повороту.

Вернемся теперь к отброшенным членам и посмотрим, повлияют ли они на сделанные выводы.

Можно показать, что инвариантная замкнутая кривая, радиусом порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$ действительно существует у полного отображения (см. Sacker R. J., On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations, New York University, Report IMM — NYU 333, 1964; СРАМ 18,4 (1965), 717 — 732).

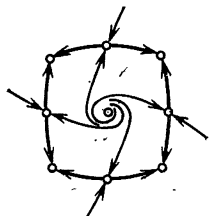


Рис. 141.

Устойчивость этой замкнутой кривой также сохраняется при возмущении. Однако устройство отображения на самой кривой для полного отображения отличается от такового для отображения с отброшенным остаточным членом. Действительно, полное отображение на инвариантной кривой может иметь как иррациональное, так и рациональное число вращения. Возникающее отображение окружности отнюдь не обязано быть

топологически эквивалентным повороту. В случае рационального числа вращения оно будет, вообще говоря, иметь конечное число периодических точек, попеременно устойчивых и неустойчивых. Эти периодические точки для исходного отображения плоскости на себя будут, соответственно, седлами и узлами. Таким образом, наша инвариантная кривая состоит в случае рационального числа вращения из цепочки сепаратрис седел, сходящихся в узлах (рис. 141).

Заметим, что сепаратрисы седел гладкие. Но при подходе к узлу с двух сторон две сепаратрисы образуют вместе, вообще говоря, кривую лишь конечной гладкости. Таким образом, возникающая ин-

вариантная кривая, вообще говоря, имеет лишь конечную гладкость. При приближении к значению параметра, соответствующему переходу мультипликаторов через окружность, гладкость инвариантной кривой растет до бесконечности (как нетрудно сообразить).

Если наше отображение было отображением последования для дифференциального уравнения, то в фазовом трехмерном пространстве инвариантная кривая отображения последования определяет инвариантный тор, сплошь состоящий из фазовых кривых. Наша инвариантная кривая — это сечение указанного тора трансверсалью. Тор имеет конечную гладкость, тем большую, чем ближе момент рождения тора из цикла. При изменении параметра в семействе число вращения на торе, вообще говоря, меняется, так что оно принимает то иррациональные, то рациональные значения.

Из описанной картины бифуркаций при переходе пары мультипликаторов через единичную окружность следует также, что в однопараметрических семействах общего положения не встречаются ответвления от данного периодического режима периодических режимов кратности, отличной от двух. Действительно, последнее могло бы происходить, лишь если бы мультипликатор переходил единичную окружность в точке с рациональным аргументом, а это — явление исключительное.

Чтобы разобраться, как возникают периодические движения с большими периодами, необходимо рассматривать семейства с двумя параметрами.

Действительно, обращение мультипликатора в корень из единицы (отличный от 1 и -1) встречается неустранимо лишь в вещественно двуметрических семействах. Двуметрическое рассмотрение потери устойчивости неподвижной точки в резонансном случае, т. е. когда мультипликатор близок к корню из единицы, позволяет также лучше понять бифуркации в однопараметрических семействах при пересечении мультипликаторами единичной окружности. А именно, как мы увидим, некоторые перестройки, кажущиеся нелокальными при однопараметрическом подходе, поддаются исследованию локальными методами, если рассматривать задачу как двуметрическую. В частности, на этом пути можно исследовать некоторые случаи жесткой потери устойчивости и указать, на какой режим перескочит система после жесткой потери устойчивости цикла.

Д. Резонанс при потере устойчивости цикла.

Рассмотрим отображение плоскости в себя в окрестности неподвижной точки с мультипликатором, равным корню степени $q > 2$ из единицы. В соответствии с общим методом Пуанкаре (гл. 5), мы можем записать семейство в подходящей системе координат в виде $z \mapsto z[\lambda + A(|z|^2) + B\bar{z}q^{-1} + O(|z|^{q+1})]$, где λ , A , B и O гладко зависят от ε .

Вместо того, чтобы исследовать это отображение, мы можем поступить по-другому. Каждый шаг метода Пуанкаре в случае резонанса сводится к усреднению вдоль соответствующего слоя Зейферта (см. § 21). Поэтому вместо приведения к нормальной форме функции последования можно записать исходное уравнение фазовых кривых в окрестности цикла как неавтономное уравнение с 2π -периодическими коэффициентами и затем приводить его к нормальной форме $2\pi q$ -периодическими по времени заменами координат (ср. § 26).

В результате этой процедуры мы получим в новых координатах (гладко зависящих от параметра) уравнение с $2\pi q$ -периодическими по t коэффициентами

$$\dot{\zeta} = \varepsilon \zeta + \zeta A(|\zeta|^2) + B\bar{\zeta}^{q-1} + O(|\zeta|^{q+1}).$$

Здесь ε — комплексный параметр, A и B голоморфно зависят от ε , значение $\varepsilon = 0$ соответствует резонансу (т. е. обращению мультипликатора исходного уравнения в корень степени q из 1).

Замечание 1. Из приведенных рассуждений следует, в частности, что:

- 1) Функция последования, с точностью до членов степени $q+1$ (и даже с точностью до членов сколь угодно высокой степени) совпадает с преобразованием фазового потока векторного поля на плоскости.
- 2) Указанное векторное поле инвариантно относительно циклической группы диффеоморфизмов плоскости (порядка q).
- 3) Выводы 1 и 2 имеют место не только для индивидуальной функции последования, но и для семейства, гладко зависящего от параметров, причем как группа, так и инвариантное относительно нее поле, получаются гладко зависящими от параметров.

Замечание 2. Точная функция последования, вообще говоря, не является преобразованием фазового потока никакого векторного поля и не коммутирует ни с какой конечной группой диффеоморфизмов.

Из сказанного выше видно, что с точностью до членов сколь угодно высокой степени относительно расстояния до замкнутой фазовой кривой задача о бифуркациях при потере устойчивости вблизи резонанса порядка $q > 2$ сводится к исследованию перестроек фазовых портретов в двухпараметрических семействах общего положения векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений на угол $2\pi/q$. Резонанс называется *сильным*, если $q \leq 4$.

Случай резонансов порядка 2 и 1 также можно включить в эту схему. А именно, потеря устойчивости цикла при прохождении пары мультипликаторов через единичную окружность соответствует гиперповерхности коразмерности один в функциональном пространстве. Эта гиперповерхность подходит к гиперповерхностям, соответствующим мультипликаторам 1 и -1 , по поверхностям коразмерности 2. Точки общего положения на этих поверхностях коразмерности 2 соответствуют таким замкнутым фазовым кривым, для которых функция последования имеет двукратное собственное число 1 (соответственно -1) с жордановой клеткой порядка 2.

Поэтому исследование граничных случаев прохождения мультипликаторов через единичную окружность сводится, с точностью до членов сколь угодно высокой степени, к изучению перестроек фазовых портретов в общих двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости, инвариантных относительно поворотов на угол $2\pi q$ ($q=1, 2$) и имеющих при некотором значении параметра особую точку с линейной частью в виде нильпотентной жордановой клетки; соответствующее линейное уравнение приводится к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0.$$

Окончательно, задача о перестройках при потере устойчивости вблизи резонансов приводит к изучению бифуркаций фазовых портретов в двухпараметрических семействах эквивариантных векторных полей на плоскости; этой последней задачей мы теперь и займемся.

§ 35. Версальные деформации эквивариантных векторных полей на плоскости

Перестройки фазовых портретов векторных полей, инвариантных относительно какой-либо группы симметрий, естественно возникают при исследовании различных явлений, в которых симметрия присутствует в самой постановке задачи.

Более удивительным является тот факт, что задачи о перестройках симметричных фазовых портретов возникают сами собой в не-симметричной а priori ситуации, при исследовании бифуркаций вблизи резонансов (ср. §§ 21 и 34). В настоящем параграфе рассматриваются именно те бифуркации симметричных фазовых портретов, которые нужны для изучения резонансов.

А. Эквивариантные векторные поля на плоскости.

Пусть F — векторное поле на плоскости комплексной переменной z . Мы будем рассматривать F как комплекснозначную (не обязательно голоморфную) функцию на \mathbb{C} . Ряд Тейлора этой функции в нуле можно записать в виде $\sum F_{k,l} z^k \bar{z}^l$.

Предложение. Пусть поле F переходит в себя при повороте плоскости переменной z на угол $2\pi/q$. Тогда коэффициенты $F_{k,l}$ отличны от нуля лишь при $k-l$, сравнимых с 1 по модулю q .

◀ Ряд Тейлора единственен, поэтому каждый его член должен повернуться на угол $2\pi/q$, когда z поворачивается на угол $2\pi/q$. Точка комплексной плоскости $z^k \bar{z}^l$ поворачивается на угол $2\pi(k-l)/q$. Этот поворот совпадает с поворотом на угол $2\pi/q$ в точности при указанном выше условии. ▶

Следствие. Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно поворотов на угол $2\pi/q$, имеют следующий вид:

$$\dot{z} = zA(|z|^2) + Bz\bar{z}^{q-1} + O(|z|^{q+1}) \quad (q > 2).$$

◀ Рассмотрим на плоскости (k, l) целые точки, удовлетворяющие сравнению $k - l \equiv 1 \pmod{q}$. Эти точки расположены на лучах, параллельных биссектрисе положительного квадранта, и начинающихся в точках, отвечающих мономам $z, z^{q+1}, z^{2q+1}, \dots; \bar{z}^{q-1}, \bar{z}^{2q-1}, \dots$

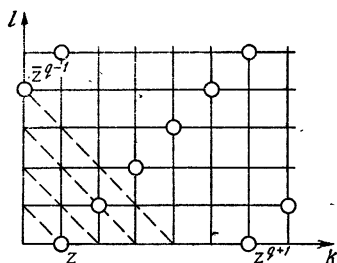


Рис. 142.

Будем искать среди перечисленных мономов мономы наименьшей степени (рис. 142).

Мы получим последовательно сперва несколько мономов на луче, начинающемся в z (т. е. мономов вида $z|z|^{2k}$), затем моном \bar{z}^{q-1} ; все прочие мономы имеют степень не ниже $q+1$ (рис. 142). ▶

Определение. Главным уравнением, инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/q$, называется предыдущее уравнение, в котором откинут член O . Правая часть главного уравнения называется *главным q -эквивариантным полем*.

Пример. Главные уравнения, инвариантные относительно групп вращений порядков 3 и 4 имеют, соответственно, вид

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + Bz^2, \quad \dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + Bz^3.$$

Для формулировки результатов исследования перестроек фазовых портретов эквивариантных векторных полей, зависящих от параметров, удобно ввести следующие определения.

Б. Эквивариантные версальные деформации.

Рассмотрим семейство v_λ векторных полей, инвариантных относительно действия группы G на фазовом пространстве и зависящих от параметра λ , принадлежащего окрестности точки 0 пространства \mathbb{R}^k (называемого базой семейства). Размерность базы называется *числом параметров* семейства.

Росток семейства в точке $\lambda = 0$ называется *эквивариантной деформацией* поля v_0 .

Определение. Эквивариантная деформация v_λ называется *эквивариантно топологически орбитально версальной* (короче *версальной*) деформацией поля v_0 , если для любой другой эквивариантной деформации w_μ того же поля существует непрерывное отображение φ баз деформаций и такое непрерывно зависящее от μ семейство гомеоморфизмов h_μ фазового пространства, коммутирующих с действием G , что h_μ переводит фазовые кривые поля w_μ в фазовые кривые поля $v_{\varphi(\mu)}$ с сохранением направления движения.

Иными словами, *эквивариантная деформация версальна, если всякая другая эквивариантная деформация топологически орбитально эквивалентна деформации, индуцированной из версальной*.