§8. Распределение Максвелла

Краткие теоретические сведения

Канонические распределения Гиббса устанавливают явный вид функций распределения значений координат и импульсов всех N частиц, составляющих равновесную термодинамическую систему. Однако для анализа многих явлений достаточно знать более простые функции распределения, несущие информацию об одной или нескольких частицах. Примером такой функции является распределение Максвелла, плотность распределения вероятностей которого определяется из условия равенства $w^{(3)}(\vec{p})d\vec{p}$ средней доле одинаковых частиц, импульсы которых заключены в пределах от $\vec{p}$ до $\vec{p}+d\vec{p}$.

Из канонического распределения Гиббса следует

$$w^{(3)}(\vec{p}) = (2\pi mkT)^{-3/2}\exp(-\vec{p}^2/2mkT), \qquad (8.1)$$

где m — масса частицы, T — температура, k — постоянная Больцмана. Проинтегрировав (8.1) по $dp_y dp_z$ в бесконечных пределах, получим, что

$$w(p_x) = (2\pi mkT)^{-1/2}\exp(-p_x^2/2mkT). \qquad (8.2)$$

Формула (8.2) — плотность вероятности распределения Гаусса. Индекс 1 у функции $w^{(1)}(x)$ здесь и далее для краткости опущен. Произведение $w(p_x)dp_x$ равно средней доле частиц, проекции импульсов которых находятся в интервале от p_x до p_x+dp_x. Функции $w^{(3)}(\vec{p})$ и $w(p_x)$ удовлетворяют условию нормировки $\int w^{(3)}(\vec{p})d\vec{p} = 1$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(p_x)dp_x = 1$.

В сферической системе координат импульс молекулы $\vec{p}$ однозначно определяют $|\vec{p}|$, азимутальный угол θ ($0 \le \theta \le \pi$) и полярный угол φ ($0 \le \varphi \le 2\pi$). Из (8.1) следует, что совместная плотность распределения вероятностей $w^{(3)}(p,\theta,\varphi)$ для случайных величин p, θ и φ может быть записана в виде $w^{(3)}(p,\theta,\varphi) = w(p)w(\theta)w(\varphi)$, где $w(\varphi) = 1/2\pi$,

$$w(p) = [4\pi p^2/(2\pi mkT)^{3/2}]\exp(-p^2/2mkT), \qquad (8.3)$$

$$w(\theta) = \sin(\theta)/2. \qquad (8.4)$$

Функции $w(p)$, $w(\theta)$ и $w(\varphi)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int\limits_0^{\infty} w(p)dp = \int\limits_0^{\pi} w(\theta)d\theta = \int\limits_0^{2\pi} w(\varphi)d\varphi = 1.$$

На рис. 8.1 изображен график $w(p)$ для двух значений температуры: T_0 и $4T_0$. На нем показаны наивероятнейшие значения модуля импульса p^* и $2p^*$, определяемые из условия $dw(p)/dp = 0$. При температуре T средние значения модуля импульса $\bar{p} = (8mkT/\pi)^{1/2}$ и квадрата импульса $\overline{p^2} = 3mkT$ удовлетворяют неравенству $p^* < \bar{p} < \sqrt{\overline{p^2}}$, где наивероятнейшее значение модуля импульса $p^* = (2mkT)^{1/2}$. Величину $\tilde{v} = \sqrt{\overline{p^2}}/m$ часто называют среднеквадратичной скоростью.

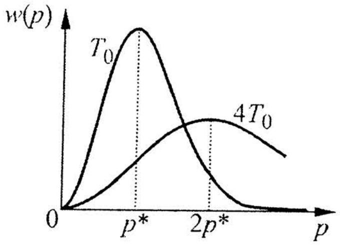

Рис. 8.1

Примеры решения задач

Пример 8.1. Оценить отношение числа молекул азота, проекция скорости которых на произвольную ось находится в интервале $(v_1 - \Delta v_1, v_1 + \Delta v_1)$, к числу молекул, имеющих проекцию скорости на ту же ось в интервале $(v_2 - \Delta v_2, v_2 + \Delta v_2)$, при $T = 300$ К. Молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, $v_1 = 300$ м/с, $\Delta v_1 = 0{,}31$ м/с, $v_2 = 500$ м/с, $\Delta v_2 = 0{,}51$ м/с.

Решение. Число молекул газа ΔN_i, проекция скорости которых на некоторую ось находится в интервале $(v_i - \Delta v_i, v_i + \Delta v_i)$, где $i = 1,2$, $\Delta v_i / v_i << 1$, определяется с помощью распределения (8.2):

$$\Delta N_i = Nw(v_i)\Delta v_i = N(m/2\pi kT)^{1/2}\exp(-mv_i^2/2kT)\Delta v_i.$$

Здесь N — число молекул в сосуде, $m = \mu/N_A$ — масса одной молекулы.

Отношение $\Delta N_1/\Delta N_2 = \exp[m(v_2^2 - v_1^2)/2kT]\Delta v_1/\Delta v_2 \approx 1{,}5$.

Пример 8.2. Используя распределение Максвелла, найти плотность вероятности распределения молекул по энергиям $w(E)$.

Решение. Импульс молекулы связан с ее кинетической энергией соотношением $E = p^2/2m$, поэтому

$$w(E) = w(p(E))(dp/dE) = [4\pi(2mE)/(2\pi mkT)^{3/2}]\exp(-E/kT)\times \\ \times(m/2E)^{1/2} = [2\pi/(\pi kT)^{3/2}]E^{1/2}\exp(-E/kT). \quad (8.5)$$

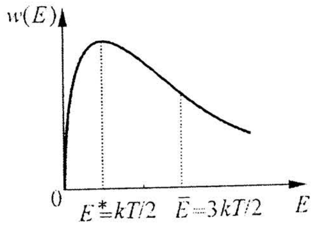

Рис. 8.2

Зависимость $w(E)$ иллюстрирует рис. 8.2, на котором показаны наивероятнейшее $E^* = kT/2$ и среднее $\overline{E} = 3kT/2$ значения энергии. Распределение (8.5) удовлетворяет условию нормировки: $\int_0^\infty w(E)dE = 1$.

Пример 8.3. Для идеального газа, состоящего из N частиц, найти относительные флуктуации энергий одной молекулы $\delta(E)$ и всего газа $\delta(E_N)$.

Решение. Используя найденное в предыдущем примере распределение $w(E)$, вычислим среднее значение энергии одной молекулы

$$\overline{E} = \int_0^\infty Ew(E)dE = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\int_0^\infty E\sqrt{E}\exp(-E/kT)dE = 3kT/2. \quad (8.6)$$

Дисперсия энергии

$$\sigma^2(E) = \int_0^\infty (E - 3kT/2)^2 w(E)\,dE = \\ = \int_0^\infty E^2 w(E)\,dE - 3kT\int_0^\infty Ew(E)\,dE + \frac{9}{4}(kT)^2\int_0^\infty w(E)\,dE. \quad (8.7)$$

Первый интеграл в правой части (8.7) легко берется по частям и равен $15(kT)^2/4$, второй равен $\overline{E} = 3kT/2$, а третий — единице в соответствии с

условием нормировки для плотности распределения $w(E)$. В итоге, $\sigma^2(E) = 3(kT)^2/2$ и относительная флуктуация энергии одной молекулы $\delta(E) = \sqrt{\sigma^2(E)}/\overline{E} = \sqrt{2/3}$. В идеальном газе частицы движутся независимо друг от друга, поэтому энергия всего газа $E_N = NE$, ее среднее значение $\overline{E_N} = N\overline{E}$, а дисперсия $\sigma^2(E_N) = N\sigma^2$. Относительная флуктуация $\delta(E_N) = \sqrt{\sigma^2(E_N)}/\overline{E_N} = \sqrt{2/3N}$ становится очень малой при $N >> 1$.

Пример 8.4. Найти вероятность того, что кинетическая энергия молекулы идеального газа не превышает заданного значения E_0 при температуре T.

Решение. Интегрируя функцию $w(E)$, задаваемую формулой (8.5), от нуля до E_0, получим вероятность того, что кинетическая энергия молекулы меньше E_0

$$P(E_0) = \int_0^{E_0}[2\pi/(k\pi T)^{3/2}]\sqrt{E}\exp(-E/kT)dE = (4/\sqrt{\pi})\int_0^{\sqrt{E_0/kT}} t^2\exp(-t^2)dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{-t\exp(-t^2)\Big|_0^{\sqrt{E_0/kT}} + \int_0^{\sqrt{E_0/kT}}\exp(-t^2)dt\right\} = \Phi\left(\sqrt{\frac{E_0}{kT}}\right) - \sqrt{\frac{4E_0}{\pi kT}}\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right).$$

здесь $\Phi\{y\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp(-t^2)dt$ — интеграл вероятности. График зависимости $P(z_0)$, где $z_0 = E_0/kT$, изображен на рис. 8.3. Заметим, что около двадцати процентов частиц имеют энергию меньше наивероятнейшей ($z_0 = 1/2$), а около шестидесяти — меньше средней ($z_0 = 3/2$).

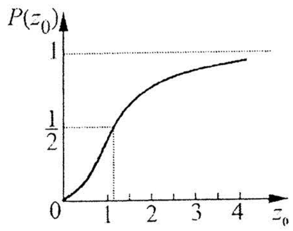

Рис. 8.3

Пример 8.5. Жидкость, нагретая до температуры T, разлита тонким слоем по плоскости. Проекции скоростей молекул образовавшейся пленки статистически независимы и подчиняются распределению Гаусса. Найти плотность вероятности распределения молекул пленки по энергиям E, считая их движение двумерным. Вычислите наивероятнейшее и среднее значения энергий и импульсов молекул пленки. Масса молекулы m.

Решение. Так как проекции скоростей молекул пленки статистически независимы, то $w(p_x, p_y) = w(p_x)w(p_y)$, где $w(p_{x,y})$ задается формулой (8.2). Переходя к полярным координатам и интегрируя по углу, находим

$$w(p) = (p/mkT)\exp(-p^2/2mkT). \qquad (8.8)$$

Из (8.8) следует, что наивероятнейшее значение модуля импульса $p^* = (mkT)^{1/2}$, а $\bar{p} = \int\limits_0^\infty (p^2/mkT)\exp(-p^2/2mkT)dp = (\pi mkT)^{1/2}$. Плотность вероятности распределения молекул пленки по энергиям E

$$w(E) = w(p(E))(dp/dE) = ((2mE)^{1/2}/mkT)\exp(-E/kT)(m/2E)^{1/2} =$$
$$= (kT)^{-1}\exp(-E/kT).$$

Максимум $w(E)$ достигается при $E = E^*$, где $E^* = 0$, а

$$\bar{E} = \int\limits_0^\infty Ew(E)dE = \frac{1}{kT}\int\limits_0^\infty E\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE = kT.$$

Заметим, что $p^{*2}/2m \neq E^*$.

Пример 8.6. Найти при температуре T среднее значение модуля скорости относительного движения двух молекул идеального газа. Масса молекулы m.

Решение. Любые две молекулы, имеющие импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, в идеальном газе движутся независимо друг от друга, и, следовательно,

$$w^{(2)}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = w(\vec{p}_1)w(\vec{p}_2), \qquad (8.9)$$

где каждый из сомножителей задается выражением (8.1). Переходя в (8.9) к переменным $\tilde{\vec{p}}_1 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ и $\tilde{\vec{p}}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$, получаем:

$$w^{(2)}(\tilde{\vec{p}}_1, \tilde{\vec{p}}_2) = (4\pi mkT)^{-3}\exp(-\tilde{p}_1^2/4mkT - \tilde{p}_2^2/4mkT).$$

Интегрируя $w^{(2)}(\tilde{\vec{p}}_1, \tilde{\vec{p}}_2)$ по $d\tilde{\vec{p}}_1$ и переходя к сферическим координатам, найдем распределение

$$w(\tilde{p}_2) = [4\pi\tilde{p}_2^2/(4\pi mkT)^3]\exp(-\tilde{p}_2^2/4mkT)4\pi\int\limits_0^\infty \tilde{p}_1^2\exp(-\tilde{p}_1^2/4mkT)d\tilde{p}_1 =$$
$$= [4\pi^{1/2}(mkT)^{3/2}]^{-1}\tilde{p}_2^2\exp(-\tilde{p}_2^2/4mkT).$$

Среднее значение модуля скорости относительного движения двух молекул идеального газа:

$$\bar{u} = \overline{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \overline{\tilde{p}_2}/m = [4\pi^{1/2}(mkT)^{3/2}]^{-1}\int\limits_0^\infty \tilde{p}_2^3\exp(-\tilde{p}_2^2/4mkT)d\tilde{p}_2 =$$
$$= [4\pi^{1/2}(mkT)^{3/2}]^{-1}(4mkT)^2 = 4\sqrt{kT/\pi m}.$$

Легко заметить, что $\overline{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$ в $\sqrt{2}$ раз больше среднего значения скорости одной частицы $\overline{|v|} = \bar{p}/m = (8kT/\pi m)^{1/2}$.

Пример 8.7. Найти среднее число молекул газа, ударяющихся за время τ о плоскую поверхность сосуда, площадь которой S. Температура газа T, масса одной частицы m, а их концентрация n.

Решение. Направим ось $0x$ декартовой системы координат перпендикулярно стенке сосуда. За время τ из числа молекул, проекции скорости которых на ось $0x$ лежат в интервале $(v_x, v_x + dv_x)$, в поверхность площади S ударятся только те из них, которые находятся в наклонном цилиндре, имеющем совпадающее с площадкой основание, высоту $v_x\tau$ и образующую, параллельную $\vec{v}$ (см. рис. 8.4).

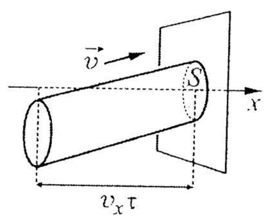

Рис. 8.4

Число таких молекул $dN = Sv_x\tau nw(v_x)dv_x = Sp_x\tau nw(p_x)dp_x/m$. Полное число столкновений N найдем, интегрируя dN по dp_x от нуля до бесконечности (эти молекулы летят к стенке сосуда):

$$N = \frac{S\tau n}{m(2\pi mkT)^{1/2}}\int\limits_0^\infty p_x\exp\left(-\frac{p_x^2}{2mkT}\right)dp_x = \frac{Sn\tau\sqrt{kT}}{\sqrt{2\pi m}} = \frac{Sn\tau\bar{p}}{4m} = \frac{Sn\tau\bar{v}}{4}, \qquad (8.10)$$

где $\bar{v}$ — среднее значение модуля скорости частиц газа. Именно столько частиц вылетело бы из сосуда в вакуум за время τ, если бы в нем сделали отверстие малой площади S.

Пример 8.8. Считая концентрацию частиц n практически не меняющейся, найти средние значения модуля скорости и энергии молекул, вылетающих из малого отверстия площадью S в плоской стенке сосуда. Газ в сосуде имеет температуру T, масса одной молекулы m.

Решение. За время τ из числа молекул, скорости которых лежат в интервале $(\vec{v}, \vec{v}+d\vec{v})$, через отверстие вылетят молекулы находящиеся в наклонном цилиндре, имеющем совпадающее с отверстием основание и образующую длиной $v\tau$, параллельную $\vec{v}$ (см. рис. 8.4). Таких молекул в нем $nSv\tau w^{(2)}(v,\theta)w(\varphi)\cos\theta dv d\theta d\varphi$, где $w(\varphi)=1/2\pi$, а $w^{(2)}(v,\theta)$ легко находится из формул (8.3) —(8.4):

$$w^{(2)}(v,\theta)=[2\pi v^2 m^{3/2}/(2\pi kT)^{3/2}]\exp(-mv^2/2kT)\sin\theta .$$

Вероятность $w^{(1)}(v)dv$ обнаружить у молекулы в пучке скорость, модуль которой находится в интервале $(v, v+dv)$, определяется равенством

$$w^{(1)}(v)=\frac{\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}nSv\tau w^{(2)}(v,\theta)w(\varphi)\cos\theta d\theta}{\int\limits_0^{\infty}dv\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}nSv\tau w^{(2)}(v,\theta)w(\varphi)\cos\theta d\theta}=\frac{v^3\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT}\right)v}{\int\limits_0^{\infty}v^3\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT}\right)dv}.$$

Проводя интегрирования по частям, получаем

$$w^{(1)}(v)=\frac{m^2v^3}{2(kT)^2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Среднее значение модуля скорости вылетающих из отверстия молекул вычислим с помощью формулы (7.22):

$$\bar{v}=\int\limits_0^{\infty}vw^{(1)}(v)dv=\int\limits_0^{\infty}\frac{m^2v^4}{2(kT)^2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv=3\left(\frac{\pi kT}{8m}\right)^{1/2}. \qquad (8.11)$$

Вылетающие из отверстия молекулы имеют большую среднюю скорость по сравнению со средней скоростью молекул в объеме газа.

Среднее значение энергии вылетающих молекул

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{m}{2}\int\limits_0^{\infty}v^2w^{(1)}(v)dv=\int\limits_0^{\infty}\frac{m^3v^5}{4(kT)^2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv=2kT$$

также больше, чем $3kT/2$.

Пример 8.9. Тонкостенный пустой сосуд объемом V погружен в идеальный газ, занимающий объем намного больший, чем V. Температура газа T и концентрация его молекул n_0 считаются постоянными. В стенке погруженного сосуда образовалось малое плоское отверстие площадью $S << V^{2/3}$. Найти зависимость от времени концентрации молекул газа внутри сосуда. Среднее значение модуля скоростей молекул внутри и вне сосуда одинаково и равно $\bar{v}$.

Решение. В соответствии с (8.10) через отверстие в сосуд за время dt влетает $Sn_0\bar{v}dt/4$ частиц, а вылетает $Sn(t)\bar{v}dt/4$, где $n(t)$ концентрация газа в сосуде в момент времени t, $\bar{v}=\sqrt{8kT/\pi m}=\sqrt{8RT/\pi\mu}$ — среднее значение модуля скорости молекул. Изменение числа частиц в сосуде за время dt

$$Vdn=(n_0-n)S\bar{v}dt/4, \qquad (8.12)$$

откуда, с учетом начального условия $n(0)=0$, получим следующее выражение для концентрации частиц в сосуде $n(t)=n_0[1-\exp(-t/\tau)]$. В последней формуле $\tau=4V/S\bar{v}$ — характерное время, за которое концентрация частиц внутри сосуда приближается к n_0. Если, например, в качестве газа выбрать гелий (молярная масса $\mu=4$ г/моль) при температуре $T=300$ K, то $\bar{v}=1260$ м/с. Для сосуда объемом $V=1$ л с площадью отверстия $S=0{,}01$ мм^2 характерное время $\tau=3{,}2\cdot10^2$ с $=5{,}3$ мин.

Пример 8.10. Невесомый поршень площадью S удерживается в пустом цилиндрическом сосуде объемом V пружиной жесткостью κ, деформация которой подчиняется закону Гука (см. рис. 8.5). В начальный момент времени поршень находится у левой стенки сосуда и пружина не деформирована. Через какой промежуток времени τ поршень сдвинется так, что давление на него станет равным половине атмосферного p_0, если в левой стенке сосуда сделать малое отверстие площадью s_0. Температуру T считать постоянной, воздух — идеальным газом, а процесс сжатия пружины — квазистатическим. Среднее значение модуля скоростей молекул внутри и вне сосуда одинаково и равно $\bar{v}$.

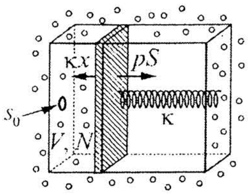

Рис. 8.5

Решение. Как и в предыдущем примере, за время dt через отверстие в сосуд влетает $s_0 n_0 \bar{v} dt/4$ молекул, а вылетает $s_0 n(x,t)\bar{v}dt/4$. Изменение числа частиц в сосуде за время dt

$$dN = s_0\bar{v}[n_0 - N(t)/Sx(t)]dt/4 . \qquad (8.13)$$

Здесь $x(t)$ — сжатие пружины в момент времени, когда в сосуде находится $N(t)$ молекул, n_0 — концентрация частиц в атмосфере, S – площадь поршня. Сила, действующая на поршень со стороны газа, в любой момент времени равна силе упругости пружины $\kappa x(t) = p(t)S = N(t)kT/x(t)$. Из последней формулы легко получить, что давление в сосуде $p(t) = N(t)kT/Sx(t)$ и $kTdN = 2\kappa x dx = 2pS^2 dp/\kappa$. С помощью этих равенств преобразуем (8.13) к следующему виду

$$2\alpha p dp/dt = s_0\bar{v}(p_0 - p)/4 , \qquad (8.14)$$

где $p_0 = n_0 kT$ — атмосферное давление, $\alpha = S^2/\kappa$. Уравнение (8.14) легко интегрируется методом разделения переменных

$$t + C = 8\alpha[-p - p_0 \ln(p_0 - p)]/s_0\bar{v} . \qquad (8.15)$$

В (8.15) константа $C = -(8\alpha p_0/s_0\bar{v})\ln p_0$. Она определяется с помощью начального условия $p(0) = 0$. В итоге давление воздуха под поршнем удовлетворяет равенству $t = (8\alpha/s_0\bar{v})\{p_0 \ln[p_0/(p_0 - p(t))] - p(t)\}$. При $t = \tau$ давление в сосуде $p_0/2$, откуда $\tau = (8p_0 S^2/s_0\kappa\bar{v})(\ln 2 - 1/2)$.

Пример 8.11. Найти давление равновесного излучения на абсолютно отражающие стенки сосуда, считая его газом, состоящим из фотонов,

движущихся в произвольных направлениях с одинаковым по модулю импульсом $\hbar\omega/c$. Концентрация фотонов равна n.

Решение. В используемой модели газ фотонов можно считать идеальным газом, частицы которого движутся с постоянной по модулю скоростью. Рассуждая так же, как в примере 8.8, выделим на стенке сосуда площадку площадью S. Число долетающих до нее за время τ фотонов, импульс которых $\hbar\omega/c$ составляет с нормалью к площадке угол, лежащий в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$, равно $dN = nSc\tau\cos\theta w(\theta)d\theta$, где $w(\theta)$ задается формулой (8.4). Зеркально отражаясь от стенки, каждый из этих фотонов передает ей импульс $2(\hbar\omega/c)\cos\theta$. Суммарный импульс $\tilde{p}$, передаваемый стенке за время τ, получим, интегрируя $2(\hbar\omega/c)\cos\theta dN = (\hbar\omega/c)nSc\tau\cos^2\theta\sin\theta d\theta$ по всем возможным значениям угла θ, т. е. от нуля до $\pi/2$ (необходимо учитывать только те фотоны, которые летят по направлению к стенке). В итоге

$$\tilde{p} = \hbar\omega S\tau n \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = S\tau\hbar\omega n/3 .$$

С другой стороны $\tilde{p} = pS\tau$, где p — давление, оказываемое излучением на стенку сосуда. Сравнивая два выражения для суммарного импульса, окончательно получаем, что $p = n\hbar\omega/3 = u/3$, где $u = n\hbar\omega$ — плотность энергии излучения. Заметим, что аналогичное выражение для одноатомного идеального газа имеет вид $p = nkT = 2u_0/3$, где $u_0 = 3nkT/2$.

Пример 8.12. В сосуде в равновесном состоянии при температуре T находятся N_1 молекул массой m_1 и N_2 молекул массой m_2. Найти плотность функции распределения вероятностей $\tilde{w}(v)$ находящихся в сосуде молекул по скоростям и построить ее график.

Решение. Общее число молекул dN, модуль скорости которых попадает в интервал $(v, v + dv)$, равно $dN_1 + dN_2$, где

$$dN_{1,2} = 4\pi(m_{1,2}/2\pi kT)^{3/2} N_{1,2} v^2 \exp(-m_{1,2}v^2/2kT)dv$$

находятся с помощью распределения Максвелла.

С другой стороны $dN = (N_1 + N_2)\widetilde{w}(v)dv$. Сравнивая два выражения для dN, получаем

$$\widetilde{w}(v) = \sum_{i=1}^{2} \frac{N_i m_i^{3/2}}{(N_1 + N_2)} \frac{4\pi v^2}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2kT}\right) = \widetilde{w}_1(v) + \widetilde{w}_2(v).$$

На рис. 8.6 сплошными кривыми изображены графики $\widetilde{w}(v)$, точками — $\widetilde{w}_1(v)$, пунктирными кривыми — $\widetilde{w}_2(v)$ для смеси газов с заметно различающимися массами молекул, удовлетворяющими условию $N_1 m_1^{3/2} \approx N_2 m_2^{3/2}$ (а), в случае, когда $m_1 \approx m_2$ (б), и при $m_1 = m_2$ (в). На рис. 8.6а четко видны два максимума, соответствующих наивероятнейшим скоростям молекул каждого сорта.

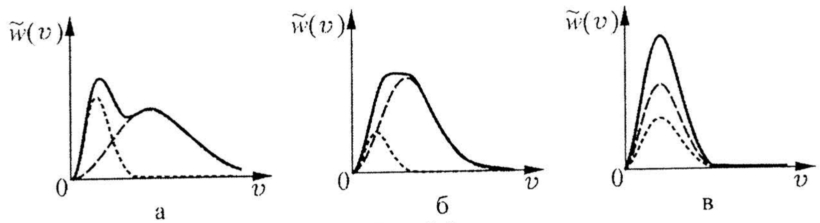

Рис. 8.6

Задание для самостоятельной работы

8.13. Доказать, что относительное число молекул газа, скорости которых больше средней, но меньше среднеквадратичной, не зависит от температуры.

8.14. Оценить процент молекул газа, скорости которых отличаются от наивероятнейшей v^* не более чем на $0{,}01v^*$? Как изменится ответ, если наивероятнейшую скорость заменить среднеквадратичной?

8.15. Вычислить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул кислорода ($\mu = 32$ г/моль) при температуре $t = 17\,°$C. При той же температуре найти среднюю квадратичную скорость взвешенной в воздухе капельки воды диаметром $d = 0{,}1$ мкм. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

8.16. При какой температуре число молекул, имеющих скорость в интервале $(v, v + \Delta v)$, где $\Delta v << v$, максимально? Масса молекулы m.

8.17. Оценить, какой процент молекул кислорода при температуре $T = 300$ К обладает скоростями, лежащими в интервале от $v_1 = 2000$ м/с до $v_2 = 2020$ м/с. Молярная масса кислорода $\mu = 32$ г/моль.

8.18. Зная плотность вероятности $w(v)$ распределения молекул газа по скоростям, найти вероятность P_1 того, что только одна из N молекул имеет скорость, лежащую в интервале $(v, v + \Delta v)$, где $\Delta v << (kT/m)^{1/2}$. Чему равна вероятность P_n того, что ровно n произвольных молекул имеют модуль скорости, попадающий в этот интервал? Вычислить среднее значение n.

8.19. Найти скорость $\widetilde{v}$ из условия, что среднее число молекул, скорости которых меньше $\widetilde{v}$, составляет половину от их общего числа. Масса молекулы m, температура газа T.

8.20. Вычислить средние значения проекции и модуля проекции скорости молекулы идеального газа на некоторое направление, если масса молекулы m, а температура газа T.

8.21. В сосуде при температуре T находится N молекул идеального газа. Найти число частиц, имеющих одновременно проекцию скорости на ось $0z$ в интервале $(v_z, v_z + dv_z)$ и составляющую скорости, перпендикулярную этой оси, модуль которой лежит в интервале $(v_\perp, v_\perp + dv_\perp)$. Масса молекулы m.

8.22. Считая, что в твердом теле при температуре T атомы в узлах кристаллической решетки могут совершать движение только вдоль одного выделенного направления со скоростями, подчиняющимися распределению Гаусса, найти плотность вероятности распределения $w(E)$ молекул по кинетическим энергиям. Вычислить среднюю энергию и ее дисперсию.

8.23. Проекции скорости молекул идеального газа на оси декартовой системы координат статистически независимы и подчиняются распределению Гаусса. Найти совместную $w(v_x, v)$ и условную $w(v_x \mid v)$ плотности вероятности. Масса молекулы m, температура газа T.

8.24. В сосуде при температуре $T = 300$ К находится смесь равных количеств водорода ($\mu_1 = 2$ г/моль) и азота ($\mu_2 = 28$ г/моль). Найти среднюю скорость молекул смеси газов.

8.25. В сосуде находится смесь равных количеств гелия и аргона при $T = 300$ К. Найти среднее значение энергии молекулы в смеси газов.

8.26. При какой температуре смеси азота ($\mu_1 = 28$ г/моль) и кислорода ($\mu_2 = 32$ г/моль), наиболее вероятные скорости молекул этих веществ будут отличаться друг от друга на $\Delta v = 30$ м/с?

8.27. Найти среднее значение угла θ между скоростями двух молекул идеального газа.

8.28. Найти плотность вероятности функции распределения частиц идеального газа по углам сферической системы координат, вылетающих в единицу времени в вакуум из небольшого плоского отверстия в стенке сосуда. Считать концентрацию и температуру газа в сосуде постоянными. Азимутальный угол отсчитывается от перпендикуляра к плоскости отверстия.

8.29. В сосуде имеется два малых отверстия, площади которых S_1 и S_2. Первое отверстие выходит в область пространства, где находится газ, давление которого p_0 можно считать постоянным. Второе отверстие выходит в область пространства, имеющую достаточно большой объем, где первоначально был вакуум. Молекулы воздуха могут попадать в сосуд только через первое отверстие, а покидать его — через оба. Найти установившееся давление в сосуде. Температура в сосуде и обеих областях пространства одинакова.

8.30. В тонкостенном сосуде, помещенном в вакуум, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок одноатомных молекул массой m, летящих с одной и той же скоростью v_0 перпендикулярно к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке n_0. Определить среднее значение концентрации частиц в сосуде и их среднюю скорость в установившемся равновесном состоянии.

§9. Распределение Больцмана

Краткие теоретические сведения

Пользуясь каноническим распределением Гиббса (7.5), можно найти распределение Больцмана, плотность распределения вероятностей которого $w^{(3)}(\vec{r})$ определяется из условия равенства $w^{(3)}(\vec{r})d\vec{r}$ средней доле молекул газа, находящихся в объеме $d\vec{r}$ около точки, определяемой радиус-вектором $\vec{r} = \{x, y, z\}$.

Пусть находящийся в равновесном состоянии при температуре T газ состоит из N одинаковых частиц и потенциальная энергия взаимодействия любых двух молекул $\Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, где $1 \le i, j \le N$, намного меньше их потенциальных энергий во внешнем поле $U_0(\vec{r}_i)$. В этом случае

$$w^{(3)}(\vec{r}) = \exp(-U_0(\vec{r})/kT) \times \left(\int\limits_V \exp(-U_0(\vec{r})/kT) d\vec{r} \right)^{-1}. \qquad (9.1)$$

Здесь k – постоянная Больцмана, V — объем, занимаемый газом. Функция $w^{(3)}(\vec{r})$ связана с концентрацией молекул $n(\vec{r})$ простым соотношением

$$n(\vec{r}) = N w^{(3)}(\vec{r}). \qquad (9.2)$$

Вблизи поверхности Земли поле силы тяжести однородно и потенциальная энергия молекулы массой m с точностью до аддитивной константы определяется формулой: $U_0(x, y, z) = mgz$, где g — ускорение свободного падения, z — высота над поверхностью Земли, на которой находится частица. В этом случае для рассматриваемого газа, в случае его нахождения в области $z \ge 0$, можно получить из формулы (9.1) плотность распределения вероятностей

$$w(z) = (mg/kT)\exp(-mgz/kT). \qquad (9.3)$$

Индекс 1 у функции $w^{(1)}(z)$ здесь и далее для краткости опущен. Произведение $w(z)dz$ равно средней доле частиц, находящихся в слое толщиной dz на высоте z. Так как частицы независимы, то центр масс такого газа расположен на высоте