

Пространство между ними заполнено газом, коэффициент теплопроводности которого κ , а теплоемкость близка к нулю. Масса единицы длины цилиндра M , удельная теплоемкость металла c . Коэффициент теплопроводности цилиндра считать бесконечно большим. Найти зависимость от времени температуры цилиндра T_2 , если в начальный момент его температура была T_{20} . Температура оболочки постоянна и равна T_{10} . Радиус цилиндра R , оболочки $2R$.

13.15. Металлический шар радиусом R_1 , поддерживаемый при постоянной температуре T_1 , находится в центре металлической оболочки радиусом R_2 , температура которой постоянна и равна T_2 . Найти стационарное распределение температуры $T(r)$ в газе, заполняющем промежуток между шаром и оболочкой, считая, что коэффициент его теплопроводности $\kappa = a\sqrt{T}$, где a — известная константа.

13.16. Найти стационарное распределение температуры $T(x)$ в газе, находящемся между двумя большими параллельными пластинами площадью S , если их поддерживают при постоянных температурах T_1 и T_2 . Расстояние между пластинами l . Коэффициент теплопроводности $\kappa = \alpha\sqrt{T}$, где α — известная константа.

13.17. Для измерения коэффициента вязкости η воздуха при комнатной температуре можно использовать вискозиметр, состоящий из неподвижного внутреннего цилиндра (радиус R , длина $L \gg R$) и медленно вращающегося с угловой скоростью ω внешнего цилиндра (радиус $R + \delta$, длина L) (см. рис. 13.2). Узкая область между цилиндрами ($\delta \ll R$) заполнена воздухом. Выразить η через момент сил M , действующий на внутренний цилиндр, считая, что в установившемся режиме скорость ламинарного движения частиц воздуха линейно меняется от внутреннего цилиндра к внешнему.

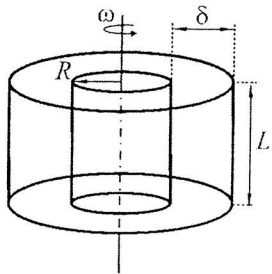


Рис. 13.2

§14. Броуновское движение

Краткие теоретические сведения

Беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в термически однородной жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул окружающей среды, называется броуновским движением. Его причиной является отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны хаотически двигающихся молекул жидкости или газа, т.е. флуктуациями давления. Скорость достаточно крупной (по сравнению с размерами молекул) броуновской частицы массой M быстро меняется по величине и направлению. Поэтому линия, соединяющая точки пространства, где находилась частица через небольшие равные промежутки времени, оказывается сложной самопересекающейся ломаной линией (см. рис. 14.1).

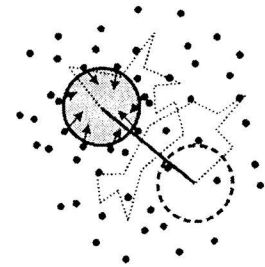


Рис. 14.1

Броуновские частицы сталкиваются друг с другом крайне редко, т.е. образуют «разреженный газ». «Случайные блуждания» броуновских частиц, когда на них действует пропорциональная их скорости сила сопротивления, описываются уравнением Фоккера — Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U_0(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) w_1(\vec{r}, \vec{p}, t) = \gamma M k T \frac{\partial^2 w_1(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}^2} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} [\gamma \vec{p} w_1(\vec{r}, \vec{p}, t)]. \quad (14.1)$$

Здесь $w_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$ — удовлетворяющая условию нормировки (13.2) одночастичная функция распределения, T — температура, $\gamma^{-1} = M / 6\pi R_0 \eta_0$ — связанное с трением время релаксации импульса частицы, R_0 — ее радиус, η_0 — эффективная динамическая вязкость среды, $U_0(\vec{r})$ — потенциальная энергия частицы во внешнем поле. Формула (14.1) получается из цепочки уравнений БГКИ (см. (13.4) и (13.5)) если масса

броуновской частицы намного больше, чем масса молекулы окружающей ее жидкости или газа, а также при выполнении некоторых других условий. Используя терминологию кинетической теории газов, правую часть (14.1) можно называть интегралом столкновений. Если w_1 не зависит от времени и \vec{r} , то решением уравнения (14.1) при $U_0(\vec{r}) = 0$ является распределение Максвелла (см. §8) для частиц массой M . В общем виде решение (14.1) получить достаточно сложно. Приведем его ниже в двух важных частных случаях.

Если в начальный момент времени броуновские частицы распределены равномерно по пространству и имеют одинаковый импульс \vec{p}_0 , то решение (14.1) для бесконечной среды при отсутствии внешних полей имеет вид

$$w(\vec{p}, t) = \int w_1(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} = \frac{1}{(2\pi MkT)^{3/2} [1 - \alpha^2(t)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{[\vec{p} - \vec{p}_0 \alpha(t)]^2}{2MkT[1 - \alpha^2(t)]}\right), \quad (14.2)$$

где $\alpha(t) = \exp(-\gamma t)$. При $\tau_1 \ll t \ll \gamma^{-1}$, где τ_1 определено в §13, дисперсия импульса броуновской частицы линейно растет с ростом t : $\overline{(\Delta p)^2} = 2MkT\gamma t$ (формула Эйнштейна для импульсов). При $t \gg \gamma^{-1}$ величина $\overline{(\Delta p)^2}$ становится не зависящей от времени: формула (14.2) переходит в распределение Максвелла. Если при $t = 0$ все частицы были сосредоточены вблизи начала координат и имели одинаковый импульс \vec{p}_0 , то решение (14.1) при $U(\vec{r}) = 0$ для бесконечной среды задается формулой

$$w(\vec{r}, t) = \int w_1(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p} = [4\pi D\beta(t)]^{-3/2} \exp\left(-\frac{\{\vec{r} - (\vec{p}_0/\gamma M)[1 - \alpha(t)]\}^2}{4D\beta(t)}\right), \quad (14.3)$$

где $\beta(t) = [\gamma t + 4\alpha(t) - \alpha^2(t) - 3]/\gamma$, $D = kT/M\gamma$. Из (14.3) видно, что среднее значение квадрата радиус-вектора

$$\overline{r^2} = 6kT[\gamma t + 4\alpha(t) - \alpha^2(t) - 3]/M\gamma^2 + p_0^2[1 - \alpha(t)]^2/\gamma^2 M^2. \quad (14.4)$$

В начальный момент ($t = 0$) $\overline{r^2} = 0$. После завершения хаотического этапа эволюции, т.е. при $t \gg \gamma^{-1}$, функция $\beta(t) \approx t$ и равенства (14.3) и (14.4) принимают вид:

$$w(\vec{r}, t) = (4\pi Dt)^{-3/2} \exp[-(\vec{r} - \vec{p}_0/\gamma M)^2/4Dt], \quad (14.5)$$

$$\overline{r^2} = 6Dt + p_0^2/\gamma^2 M^2 = 6kTt/M\gamma + p_0^2/\gamma^2 M^2. \quad (14.6)$$

Заметим, что (14.5) удовлетворяет уравнению

$$\partial w(\vec{r}, t)/\partial t = D\Delta w(\vec{r}, t), \quad (14.7)$$

где Δ — оператор Лапласа. Оно справедливо, если $|d\vec{p}/dt| \ll \gamma|\vec{p}|$, иными словами при $\gamma t \gg 1$. Если область пространства, в которой движутся броуновские частицы, ограничена, то формулы (14.5), (14.6) при $\vec{p}_0 = 0$ остаются справедливыми на временах $L^2/D \gg t \gg \gamma^{-1}$, где L — минимальный из характеризующих эту область размеров.

Кроме поступательного броуновского движения возможно также вращательное броуновское движение — беспорядочное изменение ориентации частиц в пространстве под влиянием ударов молекул среды. В метрологии броуновское движение считается основным фактором, ограничивающим чувствительность измерительных приборов.

Примеры решения задач

Пример 14.1. С помощью микроскопа рассматривают тонкий слой крови. За время $t_0 = 15$ с среднее смещение эритроцитов составляет $l = 10^{-6}$ м. Оценить коэффициент диффузии D эритроцитов, пренебрегая их начальной скоростью.

Решение. Эритроциты можно рассматривать как частицы, совершающие броуновское движение в плазме крови. Их смещение в плоскости наблюдения на расстояние l за время t_0 можно оценить из формулы $l^2 = 4Dt_0$, в которую переходит равенство (14.6) при $\vec{p}_0 = 0$ в двумерном случае, откуда $D = l^2/4t_0 = 1,7 \cdot 10^{-14}$ м²/с.

Пример 14.2. Броуновские частицы, находящиеся в начальный момент времени вблизи начала координат, могут свободно двигаться только параллельно оси z . Определить плотность распределения вероятностей $w(t)$ нахождения частицы на расстоянии, большем или равном z_0 от начала координат к моменту времени t . Коэффициент диффузии частиц D .

Решение. Вероятность $P(t)$ обнаружить частицу в момент времени t в области $|z| \geq z_0$ согласно (14.5) равна

$$P(t) = 2(4\pi Dt)^{-1/2} \int_{z_0}^{\infty} \exp(-z^2/4Dt) dz = 1 - \Phi\{z_0/(4Dt)^{1/2}\}, \quad (14.8)$$

где $\Phi\{y\}$ — интеграл вероятности. С другой стороны ее можно выразить через $w(t)$:

$$P(t) = \int_0^t w(t_1) dt_1. \text{ Продифференцировав (14.8) по } t,$$

получим, что $w(t) = z_0(4\pi Dt^3)^{-1/2} \exp(-z_0^2/4Dt)$.

На рис. 14.2 приведены графики зависимости $w(t)$ при разных значениях z_0^2/D . Максимум

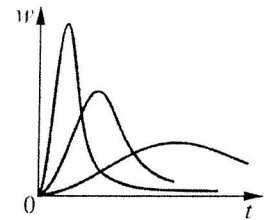


Рис. 14.2

функции достигается при $t^* = z_0^2/6D$ и равен $w(t^*) = \sqrt{3/(2\pi e^3)} (6D/z_0^2)$.

Пример 14.3. Броуновские частицы массой M находятся в поле силы тяжести. Определить средние значения их смещений и квадрата их смещений в вертикальном направлении. Время релаксации импульса частицы γ^{-1} .

Решение. Изменение z -компоненты импульса броуновской частицы описывается в этом случае уравнением: $dp_z/dt + \gamma p_z = Mg + f(t)$, где $f(t)$ — сила со стороны окружающих ее молекул, g — ускорение свободного падения. Оно может быть сведено к традиционному уравнению $d\tilde{p}_z/dt + \gamma\tilde{p}_z = f(t)$ заменой переменной $p_z = \tilde{p}_z + Mg/\gamma$. Последнее означает, что для решения задачи можно воспользоваться формулой (14.3), положив в ней $p_0 = Mg/\gamma$

$$w(z, t) = [4\pi D\beta(t)]^{-3/2} \exp\{-[z - z_0 - (g/\gamma^2)(1 - \alpha(t))]^2/4D\beta(t)\}, \quad (14.9)$$

где z_0 — место начального скопления частиц, $D = kT/M\gamma$, $\alpha(t) = \exp(-\gamma t)$, $\beta(t) = (\gamma t + 4\alpha(t) - \alpha^2(t) - 3)/\gamma$. Из (14.9) видно, что при $t \gg \gamma^{-1}$ справедливы равенства: $\overline{z - z_0 - gt/\gamma} = 0$, $\overline{(z - z_0 - gt/\gamma)^2} = 2Dt$. Из них окончательно получим, что $\overline{z - z_0} = gt/\gamma$, а $\overline{(z - z_0)^2} = (gt/\gamma)^2 + 2kTt/M\gamma$.

Пример 14.4. Броуновские частицы, находящиеся в начальный момент времени вблизи точки $z = z_0$, могут свободно двигаться только параллельно оси z . Найти решение уравнения для плотности распределения вероятностей, описывающей их перемещение после завершения хаотического этапа эволюции, при наличии непроницаемой стенки в точке $z = 0$. Определить среднее смещение частицы и средний квадрат ее смещения за время t . Коэффициент диффузии D .

Решение. По принятой классификации уравнение (14.7) является уравнением параболического типа. Его решение с начальными и граничными условиями $w(z, 0) = \delta(z - z_0)$, $w(z \rightarrow \infty, t) = 0$, $(\partial w/\partial z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$, $(\partial w/\partial z)|_{z=0} = 0$ имеет вид*

$$w(z, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \{ \exp[-(z - z_0)^2/4Dt] + \exp[-(z + z_0)^2/4Dt] \}.$$

График функции $w(z, t)$ изображен на рис. 14.3. Вводя переменные $\xi_{\mp} = (z \mp z_0)/\sqrt{4Dt}$, находим

$$\begin{aligned} \overline{z - z_0} &= \int_0^{\infty} (z - z_0) w(z, t) dz = \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \left\{ \int_{d^2}^{\infty} \exp(-\xi_-^2) d\xi_-^2 + \int_{d^2}^{\infty} \exp(-\xi_+^2) d\xi_+^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2z_0}{(Dt)^{1/2}} \int_d^{\infty} \exp(-\xi_+^2) d\xi_+ \right\} = \frac{2(Dt)^{1/2}}{\pi^{1/2}} \exp(-d^2) - \frac{2z_0}{\pi^{1/2}} \int_d^{\infty} \exp(-x^2) dx = \\ &= 2 \left(\frac{Dt}{\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{z_0^2}{4Dt}\right) - z_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{z_0}{(4Dt)^{1/2}}\right) \right], \end{aligned}$$

* Смотрите, например А.Н. Тихонов, А.А. Самарский «Уравнения математической физики», М., Наука, 1972 и последующие издания.

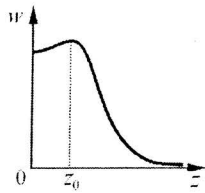


Рис. 14.3

где $d = z_0 / (4Dt)^{1/2}$, $\Phi(y)$ — интеграл вероятности.

Если $t \gg z_0^2 / D$ ($d^2 \ll 1$), то среднее смещение частицы растет пропорционально корню из времени $\overline{z - z_0} = 2\sqrt{Dt/\pi}$. Заметим, что при отсутствии отражающей стенки $\overline{z - z_0} = 0$ (движение броуновской частицы в положительном и отрицательном направлениях оси z в этом случае равновероятны).

Найдем теперь средний квадрат смещения броуновской частицы

$$\begin{aligned} \overline{(z - z_0)^2} &= \int_0^\infty (z - z_0)^2 w(z) dz = \frac{4Dt}{\pi^{1/2}} \left\{ \int_{-d}^\infty \xi_-^2 \exp(-\xi_-^2) d\xi_- + \int_d^\infty \xi_+^2 \exp(-\xi_+^2) d\xi_+ - \right. \\ &\quad \left. - 2d \int_d^\infty \xi_+ \exp(-\xi_+^2) d\xi_+ + 4d^2 \int_d^\infty \exp(-\xi_+^2) d\xi_+ \right\} = \frac{4Dt}{\pi^{1/2}} \left(d \exp(-d^2) + \frac{\pi^{1/2}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 4d^2 \int_d^\infty \exp(-x^2) dx \right) = 2Dt \{ (2d/\pi^{1/2}) \exp(-d^2) + 1 + 4d^2 [1 - \Phi(d)] \}. \end{aligned}$$

При вычислении второго и третьего интеграла в фигурных скобках использовалось интегрирование по частям. При больших значениях t средний квадрат смещения имеет такую же величину, как в отсутствие стенки.

Пример 14.5. Свободная энергия находящегося в неравновесном состоянии идеального газа из N частиц определяется в общем случае формулой $F(t) = F_0 + kTN \int \ln[w_1(\vec{r}, \vec{p}, t) / w_1^{(0)}(\vec{r}, \vec{p})] w_1(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p}$, где F_0 — свободная энергия системы в равновесном состоянии (см. формулу (7.32)), а $w_1^{(0)}(\vec{r}, \vec{p})$ — распределение Максвелла — Больцмана. Доказать, что при простейшем броуновском движении в отсутствие внешних полей, когда функция распределения $w_1(\vec{p}, t)$ не зависит от \vec{r} , производная $dF(t)/dt \leq 0$.

Решение. Вычислим производную свободной энергии

$$\frac{dF(t)}{dt} = kTN \int \frac{\partial w_1(\vec{p}, t)}{\partial t} \left(\ln \left(\frac{w_1(\vec{p}, t)}{w_1^{(0)}(\vec{r}, \vec{p})} \right) + 1 \right) d\vec{r} d\vec{p} =$$

$$= kTN \int \left[\gamma MkT \frac{\partial^2 w_1}{\partial \vec{p}^2} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} (\gamma \vec{p} w_1) \right] \cdot \left[\ln(w_1 / w_1^{(0)}) + 1 \right] d\vec{r} d\vec{p}.$$

При записи (14.10) мы воспользовались формулой (14.1), положив в ней $U(\vec{r}) = 0$ и $\partial w_1 / \partial \vec{r} = 0$. Преобразуем получившийся интеграл, используя интегрирование по частям. Учтем также, что вероятность нахождения броуновских частиц вне рамок занимаемого ими объема равна нулю и что они не могут иметь бесконечно большие скорости. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= -kTN \int \left(\gamma MkT \frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} + \gamma \vec{p} w_1 \right) \left(\frac{1}{w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} - \frac{1}{w_1^{(0)}} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial \vec{p}} \right) d\vec{r} d\vec{p} = \\ &= -kTN \gamma \int \left(\frac{MkT}{w_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} \right)^2 + \vec{p} \frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} - \frac{MkT}{w_1^{(0)}} \frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial \vec{p}} - \vec{p} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial \vec{p}} \frac{w_1}{w_1^{(0)}} \right) d\vec{r} d\vec{p} = \\ &= -kTN \gamma \int \frac{MkT}{w_1} \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} \right)^2 + \frac{2\vec{p} w_1}{MkT} \frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} + \left(\frac{\vec{p} w_1}{MkT} \right)^2 \right) d\vec{r} d\vec{p} = \\ &= -(kT)^2 N \gamma \int \frac{M}{w_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \vec{p}} + \frac{\vec{p}}{MkT} w_1 \right)^2 d\vec{r} d\vec{p} \leq 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

При записи последней формулы мы воспользовались соотношением $\partial w_1^{(0)} / \partial \vec{p} = -(\vec{p} / MkT) w_1^{(0)}$. Знак равенства в (14.11) соответствует равновесному состоянию броуновских частиц. В этом случае $w_1 = w_1^{(0)}$ и скобка в последнем подинтегральном выражении становится равной нулю.

Задание для самостоятельной работы

14.6. Во сколько раз отличается средняя длина траектории, по которой в течение $\tau = 1$ с двигалась броуновская частица, от ее среднего смещения за это время, если время релаксации ее импульса $\gamma^{-1} = 1,06 \cdot 10^{-7}$ с.

14.7. Броуновские частицы, находящиеся в начальный момент времени вблизи начала координат, могут свободно двигаться только параллельно оси z . Определить плотность вероятности смещения частицы

на максимальное расстояние z_{\max} от начала координат к моменту времени $t \gg \gamma^{-1}$, где γ^{-1} — время релаксации ее импульса. Коэффициент диффузии D .

14.8. Найти установившееся распределение нейтронов в неограниченной поглощающей среде, содержащей точечный источник, расположенный в начале координат. Неменяющееся число нейтронов в среде в установившемся режиме — N . Среднее время жизни нейтрона τ , коэффициент их диффузии D .

14.9. Нестабильные частицы в начальный момент времени находятся около начала координат и могут двигаться только параллельно оси z . Частицы распадаются в соответствии с законом, согласно которому скорость их распада пропорциональна числу частиц и обратно пропорциональна среднему времени жизни τ . Определить средний квадрат смещения частицы за время t много большее, чем время релаксации ее импульса. Коэффициент диффузии D .

14.10. Нестабильные частицы могут двигаться только в положительном направлении оси z . В точке $z=0$ внешним источником поддерживается их постоянная плотность n_0 . Определить установившееся стационарное распределение плотности числа частиц вдоль оси z , если они распадаются в соответствии с законом, по которому скорость их распада пропорциональна числу частиц и обратно пропорциональна среднему времени их жизни τ . Коэффициент диффузии D .

14.11. Броуновские частицы, находящиеся в начальный момент времени вблизи начала координат, могут двигаться только параллельно оси z . Найти решение уравнения для плотности распределения вероятностей, описывающей их перемещение, при наличии двух непроницаемых стенок, расположенных в точках $z = \pm a$ при t много большем, чем время релаксации импульса броуновской частицы. Коэффициент диффузии D .

ОТВЕТЫ

§1. Основные понятия и первое начало термодинамики

1.11. $p_{\text{CO}_2} = \eta \mu_0 (p_0 - p) / \mu 100\% \approx 25 \text{ Па}$.

1.12. Газ из левого сосуда полностью перейдет в правый. Поршень массой m_2 установится на высоте $h = h_0(1 + S_1/S_2) = h_0(1 + m_1/m_2)$.

1.13. $m = p_{N_2} V \mu_{N_2} / RT \approx 1,25 \text{ г}$.

1.14. $T_{\max} = p_0 / \beta e R$, где $e \approx 2,718 \dots$

1.15. График зависимости $p(V) = \nu R(T_0 + \alpha V^2) / V$ приведен на рисунке. Минимальное значение $p_{\min} = 2\nu R \sqrt{\alpha T_0}$ достигается при $V = \sqrt{T_0 / \alpha}$.

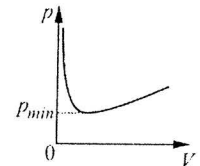


Рис. к задаче 1.15

1.17. $T = 2\pi m^{1/2} / \{S[2g\rho + \gamma(g/\rho + p_0)/x_0]\}^{1/2} = 0,11 \text{ с}$.

1.18. $\Delta U = C_p(m/\mu + m_1/\mu_1)\Delta T / \gamma = 831 \text{ кДж}$.

1.19. $A = R(T_2 - T_1) / 2$.

1.20. $\Delta U = p_1 V_1 [(V_1/V_2)^{\gamma-1} - 1] / (\gamma - 1) = -1,875 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

1.21. $T = T_1 T_2 (5p_1 V_1 + 3p_2 V_2) / (5p_1 V_1 T_2 + 3p_2 V_2 T_1) = 380,2 \text{ К}$,
 $p = T(p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1) / T_1 T_2 (V_1 + V_2) = 1,22 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

1.22. 1) $C = C_V + R/2$, 2) $C = C_V - 2R$.

1.23. $\tilde{C} = \tilde{C}_V - [p + (\partial U / \partial V)_T](\partial \varphi / \partial T)_V / (\partial \varphi / \partial V)_T$.

1.24. $\tilde{C}_I > \tilde{C}_{II}$.

1.25. $V T^{C_V/R} \exp(-\alpha T / R) = \text{const}$.

1.26. $V T^{C_0/R} \exp(\alpha T^2 / 2R) = \text{const}$.

1.27. $C_1 = C_V + R V_2 / (V_1 + V_2)$.

1.28. $C = C_V + R/2$.

1.29. При расширении газ охлаждается; $C = C_V - R > 0$.

1.30. $C = -C_V$; $A = 2C_V T_0 [2^{R/2C_V} - 1]$.