



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

НАПРАВЛЕНИЕ 03.03.01 Прикладные математика и физика

ПРОФИЛЬ Теоретическая Физика

ЗАДАНИЕ

о прохождении производственной практики (НИР)

студента Кононова Александра Михайловича

Курс 3 Группа 301.3

Форма обучения: очная

Сроки прохождения практики с 01.07.2025 по 14.08.2025

Форма представления на кафедру выполненного задания: отчет в письменной форме

Дата выдачи задания: 01.07.2025

Задание для прохождения производственной практики (НИР): Расчет когерентной суперпозиции испускаемых и резонансно рассеянных фотонов в двухуровневой системе, управляемой импульсным полем.

С заданием ознакомлен

Оценка

Руководитель практики Крайнов И.В.

(Ф.И.О. полностью, должность, звание, подпись).



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

ОТЧЕТ по производственной практике (НИР)

Весенний семестр 2024/2025 учебного года

**Тема: Расчет когерентной суперпозиции испускаемых и
резонансно рассеянных фотонов в двухуровневой системе,
управляемой импульсным полем.**

Студент: Кононов Александр Михайлович

Руководитель практики: Крайнов Игорь Вадимович

Должность, звание:

Оценка:

Содержание

1	Введение	2
1.1	Актуальность	2
1.2	Цель и задачи практики	2
2	Ход выполнения задания	4
2.1	Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, совпадающей по энергии с частотой импульса	4
2.2	Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса	6
2.3	Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса	7
2.4	Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса	8
3	Заключение	11
4	Список литературы	11

1 Введение

1.1 Актуальность

Мы представляем результаты о наблюдении группы фотонов в состояниях, содержащих ~ 3 фотона, представляющих собой когерентную суперпозицию излученных и резонансно рассеянных лазерных фотонов. Данное явление возникает при возбуждении двухуровневой системы — заряженной квантовой точки в микрорезонаторе — импульсами с площадью, кратной 2π . Возникновение явления обусловлено тем, что возбуждающий лазерный импульс содержит несколько десятков фотонов, чье амплитудное квантовое распределение формирует такую суперпозицию, а поляризация рассеянных фотонов изменяется в результате взаимодействия с заряженной резонансной системой. Подобный пучок фотонов является состоянием высшего порядка в Фоковском пространстве и перспективен для применения в квантовых технологиях.

1.2 Цель и задачи практики

Цель:

Получить зависимость $g^{(2)}(0)$ фактора от площади возбуждающего импульса в двух-уровневой системе.

Задачи:

- Найти волновую функции выходного состояния двух-уровневой системы, совпадающей по энергии с частотой импульса
- Найти $g^{(2)}(0)$ фактор в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса

- Найти волновую функции выходного состояния двух-уровневой системы, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса
- Найти $g^{(2)}(0)$ фактор в двух-уровневой системе, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

2 Ход выполнения задания

2.1 Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, совпадающей по энергии с частотой импульса

Гамельтониан описывающий двух-уровневою систему имеет вид:

$$\hat{H} = E_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \omega_0 \hat{b}_-^\dagger \hat{b}_- + g \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{b}_- + \hat{a}_+ \hat{b}_-^\dagger \right) \quad (1)$$

Заметим, что гамельтониан взаимодействует с Фоковским пространством через 2-мерные подпространства с базисом $|0; N\rangle$ и $|1; N-1\rangle$.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega_0 N & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & E_0 + \omega_0(N-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Найдем собственные числа и вектора, учтя что E_0 и ω_0 равны:

$$\varepsilon_N^\pm = \omega_0 N \pm g\sqrt{N} \quad (3)$$

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0; N\rangle \pm |1; N-1\rangle) \quad (4)$$

Двух-уровневая система накачивалась когерентным лазерным излучением с горизонтальной поляризацией. Волновая функция такой накачки следующая:

$$|\psi_{in}\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n_H\rangle \quad (5)$$

Где $|\alpha|^2 = N$.

При взаимодействии двух-уровневой системы с накачкой описывается оператором эволюции:

$$\hat{S}_0 = \exp(-i\tau \hat{H}) \quad (6)$$

Где τ - это время взаимодействия между трионом и импульсом. Так как:

$$\hat{b}_\pm^\dagger = \left(\hat{b}_H^\dagger \pm i\hat{b}_V^\dagger \right) / \sqrt{2} \quad (7)$$

то

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{S}_0 |\psi_{in}\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_+^\dagger / \sqrt{2}} \hat{S}_0 e^{\alpha \hat{b}_-^\dagger} |0\rangle \quad (8)$$

Воспользуемся свойством собственных векторов и разложением по базису:

$$\exp(-i\tau \hat{H}) |\psi_n\rangle = \exp(-i\tau E_n) |\psi_n\rangle \quad (9)$$

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0; N\rangle \pm |1; N-1\rangle) \quad (10)$$

получим:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle = & \frac{e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2} \sum_n e^{-\alpha \hat{b}_-^\dagger / \sqrt{2}} \left[\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\tau\omega_0} e^{-i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}} \right)^n}{n!} e^{-i\tau g \sqrt{N}/2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\tau\omega_0} e^{i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}} \right)^n}{n!} e^{i\tau g \sqrt{N}/2} \right) \hat{b}_-^\dagger{}^n + \\ & + \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\tau\omega_0} e^{-i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}} \right)^{n-1}}{\sqrt{n!}\sqrt{(n-1)!}} e^{-i\tau g \sqrt{N}/2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{-i\tau\omega_0} e^{i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}} \right)^{n-1}}{\sqrt{n!}\sqrt{(n-1)!}} e^{i\tau g \sqrt{N}/2} \right) \hat{b}_-^\dagger{}^{n-1} \hat{a}_+^\dagger \right] |0\rangle \quad (11) \end{aligned}$$

В этом уравнении мы разложили \sqrt{n} до линейного порядка вокруг N , для большого среднего значения числа фотонов ($N \gg 1$)

Так как: $\tau g \ll 1$, $|\alpha|^2 = N$ то:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle = & \frac{e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2} \left[\left(e^{-i\delta \hat{b}_-^\dagger} e^{-i\theta/2} + e^{i\delta \hat{b}_-^\dagger} e^{i\theta/2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(e^{-i\delta \hat{b}_-^\dagger} e^{-i\theta/2} - e^{i\delta \hat{b}_-^\dagger} e^{i\theta/2} \right) \hat{a}_+^\dagger \right] |0\rangle \quad (12) \end{aligned}$$

где: $\theta = \tau g \sqrt{N}$, $\delta = \frac{\tau g \alpha}{2\sqrt{2N}}$

Снова разложим до 1 порядка по δ , а так же учтем, что детектирование испущенных фотонов происходит в горизонтальной поляризации

$$|\psi_{out}^V\rangle \approx \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \frac{i\delta - 1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle + \frac{i\delta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|2\rangle \quad (13)$$

2.2 Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса

Рассчитаем вероятность обнаружить фотон:

$$P_1(t) = \sum_m |\langle m | \hat{a} | \psi_{out}^V \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2} \cdot \sum_m \frac{\alpha^{2m+2}}{(m+1)!} \left(1 - \cos\left(2gt\sqrt{m+1}\right)\right) \quad (14)$$

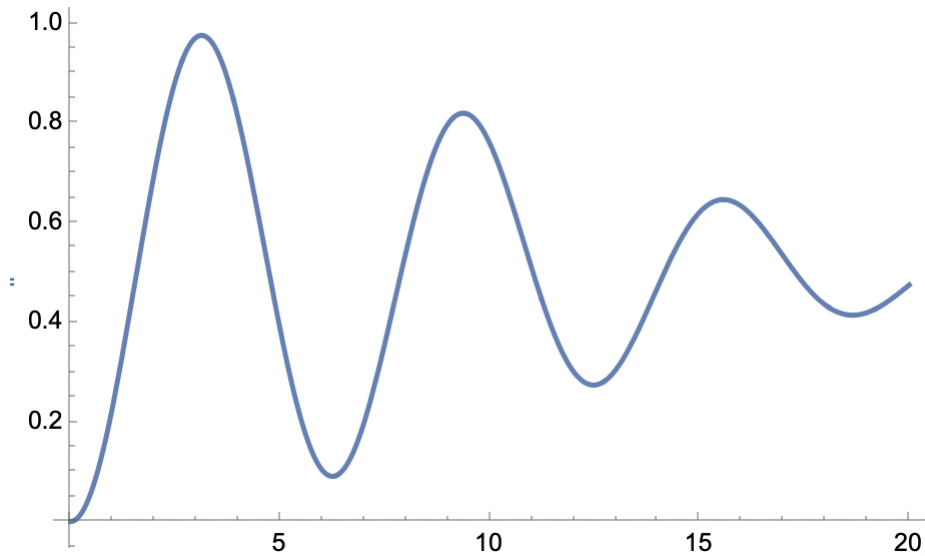


Рисунок 1: $P_1(t)$ - вероятность обнаружить фотон

$g^{(2)}(0)$ фактор показывает вероятность обнаружить 2 когерентных фотона одновременно. Он считается следующим образом:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \psi_{out}^V | \hat{n}^2 - \hat{n} | \psi_{out}^V \rangle}{\langle \psi_{out}^V | \hat{n}^2 | \psi_{out}^V \rangle^2} = \frac{2|\delta|^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + |\delta|^2} \quad (15)$$

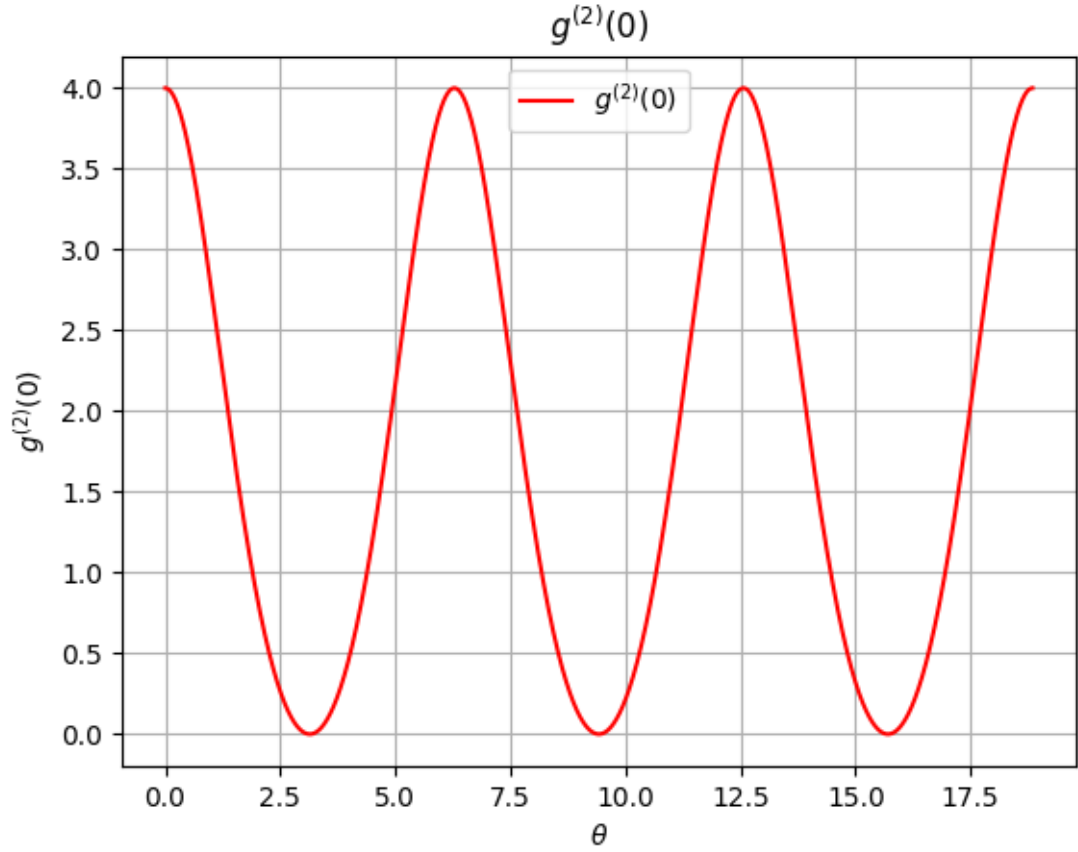


Рисунок 2: $g^{(2)}(0)$

Видно, что $g^{(2)}(0)$ становится равным 0 при нечетных площадях импульса ($\pi, 3\pi, \dots$) и имеет максимум при нечетных площадях импульса ($2\pi, 4\pi, \dots$)

2.3 Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

В этой задачи условия похожи, однако теперь $E_0 \neq \omega_0$.

Гамильтониан:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega_0 N & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & E_0 + \omega_0(N-1) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Собственные числа и вектора:

$$\varepsilon_N^\pm = \omega_0 N + \frac{1}{2} (E_0 - \omega_0) \pm \sqrt{(E_0 - \omega_0)^2 + 4g^2 N} \quad (17)$$

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{2}(E_0 - \omega_0) \pm \sqrt{(E_0 - \omega_0)^2 + 4g^2 N}}{g\sqrt{n}} \right)^2}} \cdot \left(|0; N\rangle + \left(\frac{1}{2} (E_0 - \omega_0) \pm \sqrt{(E_0 - \omega_0)^2 + 4g^2 N} \right) |1; N - 1\rangle \right) \quad (18)$$

Проделав все те же шаги, получим волновую функцию после взаимодействия накачки и двух-уровневой системы:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}^V\rangle = & \frac{e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2\sqrt{1 + \delta_N^2}} \left[e^{-i\theta/2} e^{-i\gamma \hat{b}_-^\dagger} \left(\sqrt{1 + \delta_N^2} - \delta_N \right) + \right. \\ & + e^{i\theta/2} e^{i\gamma \hat{b}_-^\dagger} \left(\sqrt{1 + \delta_N^2} + \delta_N \right) + \\ & \left. + \left(e^{-i\theta/2} e^{-i\gamma \hat{b}_-^\dagger} - e^{i\theta/2} e^{i\gamma \hat{b}_-^\dagger} \right) \hat{a}_+^\dagger \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Где $\delta_n = \frac{E_0 - \omega_0}{2g\sqrt{n}}$, $\theta = \tau g \sqrt{N} \sqrt{1 + \delta_N^2}$, $\gamma = \frac{\tau g \alpha}{2\sqrt{2N}}$.

Разложим до линейного порядка по γ , а так же учтем смену поляризации

$$\begin{aligned} |\psi_{out}^V\rangle \approx & \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{1 + \delta_N^2}} \left[\left(\sqrt{1 + \delta_N^2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + i\delta_N \sin \frac{\theta}{2} \right) |0\rangle + \right. \\ & \left. + \left(\frac{i\gamma \sqrt{1 + \delta_N^2} - 1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\delta_N \gamma}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \right) |1\rangle + \frac{i\gamma}{2} \cos \frac{\theta}{2} |2\rangle \right] \end{aligned} \quad (20)$$

2.4 Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \psi_{out}^V | \hat{n}^2 - \hat{n} | \psi_{out}^V \rangle}{\langle \psi_{out}^V | \hat{n}^2 | \psi_{out}^V \rangle^2} = \frac{2(1 + \delta_N^2) \gamma^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{(\gamma^2 (1 + \delta_N^2) + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \delta_N \gamma \sin \theta)^2} \quad (21)$$

Видим, что при $\delta_N \rightarrow \infty \Rightarrow g^{(2)}(0) \rightarrow 0$. Это хороший и логичный результат, означающий что при большой разности энергий взаимодействие не происходит.

Построим зависимость $g^{(2)}(0)$ от δ_N при разных площадях импульса θ :

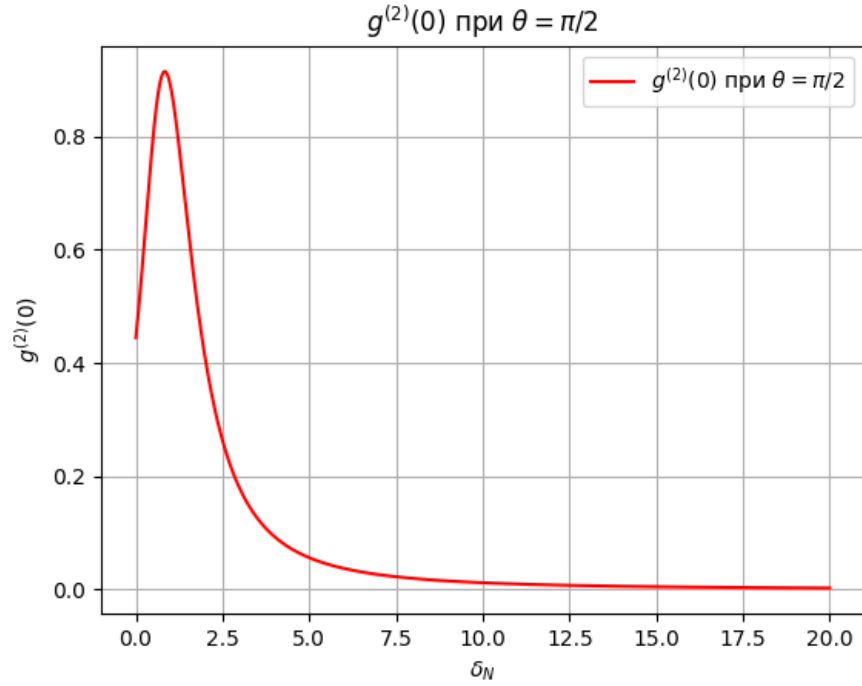


Рисунок 3: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = \pi/2$

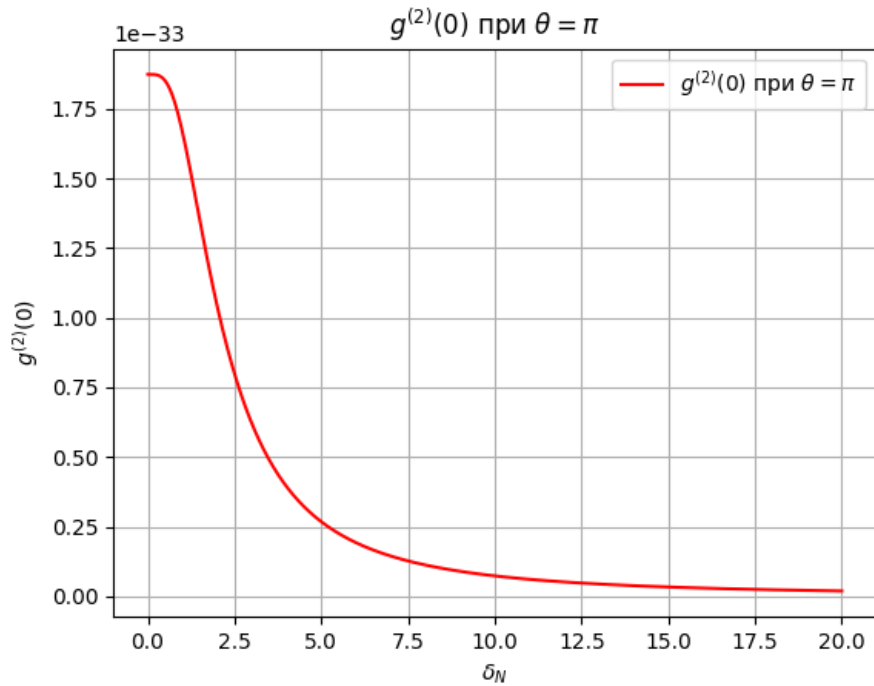


Рисунок 4: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = \pi$

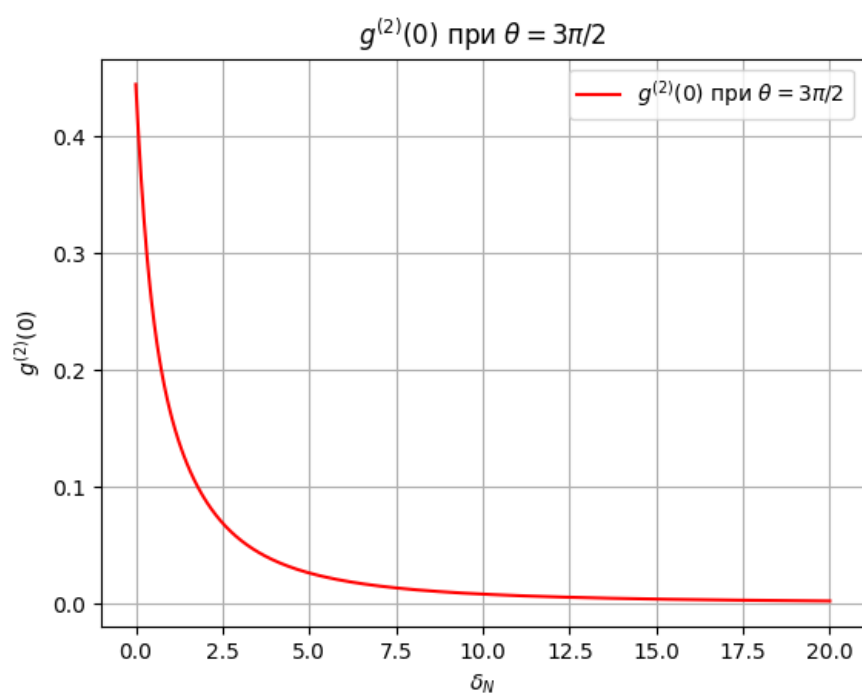


Рисунок 5: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = 3\pi/2$

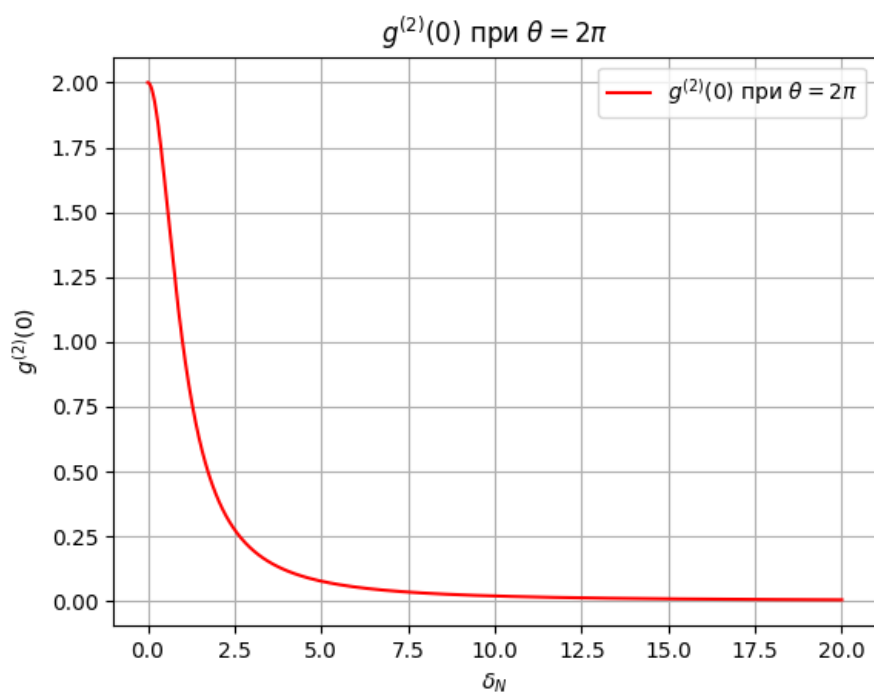


Рисунок 6: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = 2\pi$

3 Заключение

В данной работе мы исследовали генерацию многофотонных состояний в системе — заряженной квантовой точке, расположенной в микрорезонаторе, возбуждаемой четными π -импульсами. Экспериментально полученные данные демонстрируют, что при такой форме возбуждения наблюдается сжатие двухфотонного состояния, что свидетельствует о когерентной суперпозиции излучённых и резонансно рассеянных фотонов.

Формирование таких состояний с гибко настраиваемой статистикой открывает широкие возможности для развития квантовых технологий, включая схемы квантовых вычислений и протоколы квантового распределения ключей. Данный подход предполагает эффективное управление статистикой фотонных состояний через форму и мощность возбуждающих импульсов и свойства резонансной системы.

4 Список литературы

1. Krainov I.V., 'Coherent superposition of emitted and resonantly scattered photons from a two-level system driven by an even- π pulse', Mesoscale and Nanoscale Physics (2025)
2. Marlian O. Scully and M. Suhail Zubairy, 'Quantum optics' (1996)
3. Bonch-Bruевич V.L., 'Physics of Semiconductors' (1965)
4. Anselm A.I., Introduction to Semiconductor Theory (1963)