Задача *Необычная планета*:

При какой форме однородной планеты объёма V, состоящей из несжимаемого вещества, сила тяжести на её поверхности будет максимальна (в какой-то точке) среди всех возможных форм? (Подсказка: можно считать, что планета односвязна и имеет осевую симметрию.)

Решение: Рассмотрим задачу в цилиндрических координатах. Ось z проходить через точку наблюдения и центр тяжести. Точку наблюдения будем считать началом системы отсчета.

Точка в которой мы рассматриваем поле будет находится на оси симметрии. Ведь если это не так, то есть облась планеты с корденатой z_0, которая не симметрична по углу φ.

Разместив материя с этой координатой z_0 симметрично по φ мы уменьшим расстояние до точки наблюдения и увеличим $\cos\theta$, что увеличит поле при том же объеме планеты.

Получаем: ось z - ось симметрии планеты.

Будем искать $R(z)$ - форму планеты.

1) У нас есть ограничение на объем (так как мы не знаем ограничений на z, то пока формально интеграл будет до $+\infty$):

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{R(z)}\int\limits_0^{2\pi} R dz dR d\varphi = V \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}\frac{R^2(z)}{2}dz = \frac{V}{2\pi}$$

Разделим планету на тонкие диски и будем суммировать поле от дисков в интересующей нас точке.

$$E_{disk} = 2\pi\sigma\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2(z)}}\right) = 2\pi\rho dz\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2(z)}}\right)$$

$$E = 2\pi\rho\int\limits_0^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2(z)}}\right)dz \text{ß} sup$$

Будем искать форму планеты вариационным методом, с учетом условия трансверсальности (конечности объема):

$$F = \left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2(z)}}\right) - \lambda\frac{R^2(z)}{2}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial R} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial R'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial R} = 0$$

$$\frac{z\cdot R}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} - \lambda R = 0 \Rightarrow R(z) = \sqrt{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2/3} - z^2}$$

Так как $R(z) > 0$, получаем что $z_{max} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$.

Отсюда получаем уравнение на λ:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{z}{\lambda} \right)^{2/3} - z^2 \right) dz = \frac{V}{\pi} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{15}{4\pi} V \right)^{-2/3}$$

Таким образом ответ:

$$R(z) = \sqrt{\left(\frac{z}{\lambda} \right)^{2/3} - z^2},\ \lambda = \left(\frac{15}{4\pi} V \right)^{-2/3}$$