Беседа № 30:

Решим эту задачу аналитически, рассчитывая распределение случайной величины N. Напомню, что $N = \sup\{n : U_1 U_2 \cdots U_n > s\}$, где U_i — независимые равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[0, 1]$.

1. Определение зависимости:

Мы можем переписать условие:

$$U_1 U_2 \cdots U_n > s$$

или в логарифмическом виде:

$$\log(U_1) + \log(U_2) + \cdots + \log(U_n) > \log(s).$$

Логарифм равномерно распределенной случайной величины на $[0, 1]$ имеет распределение с плотностью:

$$f_{\log(U)}(x) = e^x \quad \text{для } x < 0,$$

так как U принимает значения от 0 до 1.

Определим новую случайную величину $X_i = -\log(U_i)$. Тогда X_i имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$ (среднее значение 1).

2. Сумма случайных величин:

Теперь мы можем заключить, что:

$$Y_n = -(\log(U_1) + \log(U_2) + \cdots + \log(U_n)) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Сумма Y_n имеет распределение Гамма с параметрами n и 1:

$$Y_n \sim \text{Гамма}(n, 1),$$

что эквивалентно:

$$Y_n \sim \text{Сумма } n \text{ независимых } \exp(1).$$

3. Оценка вероятности:

Таким образом, мы хотим оценить:

$$P(N \geq n) = P(U_1 U_2 \cdots U_n > s) = P(Y_n < -\log(s)).$$

Плотность Гамма Y_n задается как:

$$f_Y(y; n, 1) = \frac{y^{n-1} e^{-y}}{(n-1)!} \quad \text{для } y > 0.$$

4. Вероятность:

Чтобы найти вероятности, нам нужно вычислить:

$$P(Y_n < -\log(s)) = \int_0^{-\log(s)} \frac{y^{n-1} e^{-y}}{(n-1)!} dy,$$

что является функцией распределения Гамма и может быть связано с функцией Г.

5. Использование функции распределения Гамма:

Таким образом,

$$P(N \geq n) = 1 - P(Y_n \geq -\log(s)) = 1 - \int_{-\log(s)}^{\infty} \frac{y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!} dy = 1 - \Gamma(n, -\log(s)),$$

где $\Gamma(n, x)$ — это неполная гамма-функция.

6. Формула для $P(N = n)$:

Теперь, чтобы найти $P(N = n)$,

$$P(N = n) = P(N \geq n) - P(N \geq n + 1).$$

Подставив значения, получим:

$$\begin{aligned} P(N = n) &= (1 - \Gamma(n, -\log(s))) - (1 - \Gamma(n + 1, -\log(s))) \\ &= \Gamma(n + 1, -\log(s)) - \Gamma(n, -\log(s)). \end{aligned}$$

Заключение:

Таким образом, распределение N можно найти через используя неполные гамма-функции:

$$P(N = n) = \Gamma(n + 1, -\log(s)) - \Gamma(n, -\log(s)),$$

что завершает аналитическое решение задачи.

Примечание:

- Гамма-функция и её неполные версии часто доступны в математических библиотеках, таких как SciPy в Python, что позволяет легко подсчитывать вероятность $P(N = n)$ для конкретных значений s