Движение заряженной частицы в бесконечном соленоиде: общий случай с начальной скоростью $(v_{x0},\, v_{y0})$

Рассмотрим заряженную частицу (заряд q, масса m), влетающую через боковую поверхность бесконечного соленоида радиуса R с однородным магнитным полем

$$\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B), \quad B > 0$$

внутри ($r < R$). Пусть момент влёта соответствует координатам

$$(x_0,\, y_0) = (R,\, 0),$$

а компоненты начальной скорости в плоскости xy равны

$$\mathbf{v}_0 = (v_{x0},\, v_{y0}), \quad v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}.$$

Снаружи соленоида ($r > R$) поля нет.

1. Ларморов радиус и центр окружности

Движение частицы в однородном магнитном поле по модулю скорости v_0 – круговое (циклическое) в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$. Ларморов радиус

$$\rho = \frac{m\, v_0}{|q|\, B}.$$

Центр ларморовской орбиты $\bigl(x_c,\; y_c\bigr)$ (окружности радиуса ρ) в плоскости xy находится по формуле:

$$\mathbf{R}_c = \bigl(x_0,\, y_0\bigr) + \frac{m}{q\, B^2}\bigl[\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}\bigr].$$

Векторное произведение в координатах даёт:

$$\mathbf{v}_0 = (v_{x0},\, v_{y0},\, 0), \quad \mathbf{B} = (0,\, 0,\, B),$$

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = B\,(v_{y0},\; -v_{x0},\, 0).$$

Следовательно:

$$x_c = R + \frac{m\, v_{y0}}{q\, B}, \quad y_c = -\frac{m\, v_{x0}}{q\, B}.$$

2. Уравнение траектории

Внутри соленоида ($r < R$) траектория частицы — окружность радиуса ρ, заданная:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \;=\; \rho^2,$$

причём $\rho = \dfrac{m}{|q|\, B}\, \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$. Если заряд $q > 0$ и $B > 0$, вращение идёт *по часовой* стрелке, поскольку сила Лоренца смещает вектор скорости вправо от радиуса.

3. Точка вылета $(x_2,\, y_2)$

Снаружи поля нет, значит при $r > R$ движение прямолинейно и равномерно. Предположим, что частица действительно дважды пересекает границу $r = R$ (т. е. **влетает** и **вылетает**):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$(R,\, 0) \quad \text{(точка влёта)} \quad \text{и} \quad (x_2,\, y_2) \quad \text{(точка вылета)}.$$

Формально $(x_2,\, y_2)$ можно найти, вычитая уравнения окружностей:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2.$$

Решение зачастую проще выполнить численно, чем выписывать в замкнутом виде.

4. Скорость при выходе: $\mathbf{v}_{\text{выход}}$

В однородном $\mathbf{B}$ вектор скорости равен

$$\mathbf{v}(t) = -\,\Omega\,\Big[(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c) \times \hat{z}\Big], \quad \text{где } \Omega = \frac{q\,B}{m} > 0$$

(при $q > 0,\ B > 0$), а $\hat{z} = (0, 0, 1)$.

В момент вылета координаты частицы — это $(x_2,\, y_2)$. Тогда:

$$\mathbf{v}_{\text{выход}} = -\,\Omega\big[\,(x_2 - x_c,\ y_2 - y_c,\ 0)\ \times (0, 0, 1)\big].$$

Вспомним, что векторное произведение $(X,\, Y,\, 0) \times (0, 0, 1)$ даёт $(\,Y,\ -X,\ 0)$. Значит:

$$\mathbf{v}_{\text{выход}} = \Big(-\,\Omega\,(y_2 - y_c),\ \ \Omega\,(x_2 - x_c),\ 0\Big).$$

Поскольку $\Omega\,\rho = \dfrac{q\,B}{m}\,\dfrac{m\,v_0}{|q|\,B} = v_0$, модуль скорости остаётся v_0, и частица выходит из соленоида, сохранив ту же кинетическую энергию.

Итоговые компоненты на выходе:

$$v_{x,\text{выход}} = -\,\frac{q\,B}{m}\,\big(y_2 - y_c\big), \quad v_{y,\text{выход}} = \frac{q\,B}{m}\,\big(x_2 - x_c\big).$$

$$\big|\mathbf{v}_{\text{выход}}\big| = v_0.$$

5. Выводы

1. **Модуль скорости не меняется** при движении внутри соленоида, так как магнитная сила не совершает работы.

2. **Направление** скорости на выходе отличается от начального и определяется тем, *какую дугу* ларморовской окружности проходит частица внутри поля.

3. Для явного вычисления $(v_{x,\text{выход}},\, v_{y,\text{выход}})$ в общем случае:

   - Находим центр орбиты (x_c, y_c);
   - Решаем систему *(окружность радиуса R)* $\cap$ *(окружность ларморовской траектории радиуса ρ)* для определения второй точки пересечения (x_2, y_2);
   - Подставляем (x_2, y_2) в формулу для скорости.

Примечание. Если $\rho < R$, тогда траектория целиком умещается внутри $r < R$, и частица не вылетает через боковую поверхность. Если $\rho = R$ и нет радиальной компоненты скорости, возможно касательное пересечение без повторного пересечения границы.

Выражение для скорости заряженной частицы в однородном магнитном поле

Рассмотрим уравнение движения частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле

$$\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B), \quad B > 0.$$

Отсутствуют электрическое поле и силы трения (резистивные силы).

1. Уравнение движения и разбиение по компонентам

Сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\,\big[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\big].$$

По второму закону Ньютона:

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\,\big[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\big].$$

Разложим скорость $\mathbf{v} = (v_x,\, v_y,\, v_z)$ и поле $\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B)$. Тогда

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = (v_x,\, v_y,\, v_z) \times (0,\, 0,\, B) = \big(B\,v_y,\ -B\,v_x,\, 0\big).$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} m\,\dfrac{dv_x}{dt} = q\,B\,v_y, \\ m\,\dfrac{dv_y}{dt} = -\,q\,B\,v_x, \\ m\,\dfrac{dv_z}{dt} = 0. \end{cases}$$

2. Решение для $v_z(t)$

Из

$$m\,\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad\Longrightarrow\quad v_z(t) = \text{const} = v_{z0}.$$

Таким образом, проекция скорости вдоль B не меняется.

3. Решение для $v_x(t)$ и $v_y(t)$

Обозначим

$$\Omega = \frac{q\,B}{m}.$$

Тогда уравнения для $(v_x,\,v_y)$ примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \Omega\,v_y, \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\,\Omega\,v_x. \end{cases}$$

Это система гармонических колебаний с частотой Ω. Дифференцируя первое уравнение ещё раз, получаем:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \Omega\,\frac{dv_y}{dt} = \Omega\,\bigl(-\,\Omega\,v_x\bigr) = -\,\Omega^2\,v_x.$$

Значит

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \Omega^2\,v_x = 0.$$

Общее решение:

$$v_x(t) = A\,\cos(\Omega t) + B\,\sin(\Omega t).$$

Используя $\dfrac{dv_x}{dt} = \Omega\,v_y$, получаем:

$$v_y(t) = \frac{1}{\Omega}\,\frac{dv_x}{dt} = -\,A\,\sin(\Omega t) + B\,\cos(\Omega t).$$

4. Учёт начальных условий

Пусть

$$\mathbf{v}(0) = (v_{x0},\, v_{y0},\, v_{z0}).$$

Тогда в момент $t = 0$:

$$v_x(0) = A = v_{x0}, \quad v_y(0) = B = v_{y0}.$$

Следовательно, $A = v_{x0}$, $B = v_{y0}$. Подставляя назад:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0}\,\cos(\Omega t) \;+\; v_{y0}\,\sin(\Omega t), \\ v_y(t) &= -\,v_{x0}\,\sin(\Omega t) \;+\; v_{y0}\,\cos(\Omega t), \end{aligned} \quad v_z(t) = v_{z0}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \bigl(v_x(t),\, v_y(t),\, v_z(t)\bigr) = \Bigl(\,v_{x0}\,\cos(\Omega t) + v_{y0}\,\sin(\Omega t),\; -\,v_{x0}\,\sin(\Omega t) + v_{y0}\,\cos(\Omega t),\; v_{z0}\Bigr).}$$

Здесь $\Omega = \frac{q\,B}{m}$ может быть положительным или отрицательным, что определяет направление вращения. Если $q > 0$, $B > 0$, вращение идёт *по часовой* стрелке, смотря вдоль оси z.

5. Физическая картина

- Если $v_{z0} = 0$, движение в плоскости, перпендикулярной B, идёт **по окружности** с угловой скоростью Ω (частота циклотронной вращения).
- При $v_{z0} \neq 0$ траектория — **винтовая линия** (спираль) вокруг оси z.
- Модуль скорости сохраняется, так как сила Лоренца перпендикулярна $\mathbf{v}$ и не совершает работы.

Почему возникает формула $\mathbf{v}(t) = -\,\Omega\,\bigl[(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c) \times \hat{z}\bigr]$?

Рассмотрим заряженную частицу (с зарядом $q > 0$ и массой m) в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ с $B > 0$. В плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$, частица движется по **окружности** с радиусом ρ (ларморов радиус), совершая вращение *по часовой стрелке*, если смотреть вдоль $+z$.

Ниже объясняется, почему вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ можно записать как

$$\mathbf{v}(t) = -\,\Omega\,\Bigl[\bigl(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c\bigr) \times \hat{z}\Bigr], \quad \text{где } \Omega = \frac{q\,B}{m} > 0.$$

Знак «$-$» отражает именно направление вращения (по часовой стрелке).

1. Центр окружности и радиус-вектор

- Вектор $\mathbf{R}_c$ — центр ларморовой окружности, вокруг которого происходит движение.
- $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c$ — это радиус-вектор от центра окружности до текущего положения частицы.

Для однородного магнитного поля $\mathbf{B}$, расположенного вдоль z, известно, что

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{r}_0 + \frac{m}{q\,B^2}\,\big[\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}\big]$$

(в случае, если $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ — начальные положение и скорость).

2. Круговое движение и поворот на 90°

Если частица движется по окружности радиуса ρ с угловой скоростью $\Omega = \frac{q\,B}{m}$, то вектор $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c$ постоянно поворачивается *по часовой стрелке* в плоскости xy. Модуль скорости при таком движении равен $\Omega\,\rho$.

$$\text{Пусть } \mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}(t),$$

где $\boldsymbol{\rho}(t)$ — вектор длины ρ, вращающийся с частотой Ω. Времявая производная даёт скорость:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt}.$$

Вращение на 90° *вправо* (по часовой стрелке) в векторной форме выражается операцией $-[\cdots \times \hat{z}]$. Именно это и даёт минус в формуле.

3. Вывод формулы $\mathbf{v}(t) = -\,\Omega\,\big[(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c) \times \hat{z}\big]$

Пусть $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c = \boldsymbol{\rho}(t)$. При круговом движении:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = -\,\Omega\,\big[\boldsymbol{\rho}(t) \times \hat{z}\big],$$

поскольку нужно повернуть $\boldsymbol{\rho}(t)$ на 90° вправо и умножить её длину на Ω. Следовательно,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = -\,\Omega\,\big[(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c) \times \hat{z}\big].$$

Так получаем искомую формулу.

4. Роль знака «$-$»

- Операция $\mathbf{a} \times \hat{z}$ обычно соответствует повороту $\mathbf{a}$ *против* часовой стрелки (если смотреть сверху вдоль $+z$).
- Здесь же вращение идёт по часовой стрелке (при $q > 0$, $B > 0$). Чтобы учесть «обратный» поворот, появляется дополнительный знак «$-$».

Итог

Таким образом, при движении заряженной частицы по окружности в однородном магнитном поле вдоль z можно выписать скорость в любой момент времени t так:

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = -\,\Omega\left[(\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_c) \times \hat{z}\right], \quad \Omega = \frac{q\,B}{m} > 0,}$$

где $\mathbf{R}_c$ есть центр ларморовской орбиты. Знак «$-$» соответствует часовой ориентации вращения в плоскости xy при $q > 0$, $B > 0$.