Задача 2

Пусть G — связная группа Ли. Пусть

$$p\colon \widetilde{G} \to G$$

её универсальное накрытие. Доказать, что существует структура группы Ли на $\widetilde{G}$, т. ч.

1. $p\colon \widetilde{G} \to G$ — гладкая функция,
2. $p\colon \widetilde{G} \to G$ является гомоморфизмом групп Ли.

Доказательство. Обозначим умножение на G как

$$\mu\colon G \times G \to G,$$

взятие обратного как

$$\operatorname{inv}\colon G \to G.$$

Порядок доказательства:

1. Введём на $\widetilde{G}$ структуру гладкого многообразия.
2. Покажем, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ гладкая.
3. Введём на $\widetilde{G}$ операции умножения

   $$\widetilde{\mu}(x, y) = xy$$

   и взятия обратного

   $$\widetilde{\operatorname{inv}}(x) = x^{-1}.$$

4. Проверим, что $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\operatorname{inv}}$ гладкие, откуда следует, что на $\widetilde{G}$ получается структура группы Ли.
5. Докажем, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ является гомоморфизмом групп Ли.

1) Топологические свойства $\widetilde{G}$

Уже знаем (из построения универсального накрытия на лекциях), что $\widetilde{G}$ — топологическое пространство. Нужно проверить выполнение трёх свойств из определения гладкого многообразия:

1.1) $\widetilde{G}$ — хаусдорфово. Рассмотрим две точки $x, y \in \widetilde{G}$. Пусть $p(x) = a$ и $p(y) = b$ в G.

- Если $p(x) = p(y) = a$, то существует «хорошая» окрестность $U(a)$ так, что $p|_{V_x}$ — гомеоморфизм x, а x и y лежат на разных V_i, V_j, $i \neq j$. Это и будут непересекающиеся окрестности.

- Если $p(x) = a \neq b = p(y)$, то существуют непересекающиеся хорошие окрестности $U(a)$ и $U(b)$: $U(a) \cap U(b) = \varnothing$. Тогда можно выбрать окрестности
$$x \in V(x) \subset p^{-1}(U(a)), \quad y \in W(y) \subset p^{-1}(U(b)),$$
которые также будут непересекающимися. В силу того, что $p|_{V(x)}$ и $p|_{W(y)}$ — гомеоморфизмы, мы получаем, что $V(x) \cap W(y) = \varnothing$.

Поскольку G — хаусдорфово, мы можем добиваться непересекаемости окрестностей образов, и при прообразах через p также получаем непересекающиеся окрестности на $\widetilde{G}$.

1.2) $\widetilde{G}$ имеет счётную базу. Покроем G хорошими окрестностями. Из них можно выбрать счётный набор $\{U_i\}$, так как в G существует счётная база. На лекциях показано, что

$$p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_j U_{i,j}$$

— счётное дизъюнктное объединение $U_{i,j} \subset \widetilde{G}$. Таким образом, $\{U_{i,j}\}$ — счётная база в $\widetilde{G}$.

1.3) Построение атласа. Осталось предъявить атлас. Рассмотрим точку $x \in \widetilde{G}$, $p(x) = a$. Знаем, что существует хорошая окрестность $U(a)$ в G, такая, что $p|_{V_x}$ — гомеоморфизм для $V_x = p^{-1}(U(a))\cap$ (некоторая компонента).

Так как G имеет структуру гладкого многообразия размерности $2n$, можно покрыть $U = U_i \cap U_j$ набором карт $\{\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^n\}$. Этому набору соответствует набор

$$V_i = p^{-1}(U_i \cap U),$$

покрывающий V. Тогда определим атлас на $\widetilde{G}$ так:

$$\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ p|_{V_i} \colon p^{-1}(U_i \cap U) \to W_i \subset \mathbb{R}^n.$$

Отображение $\widetilde{\varphi}_i$ является композицией гомеоморфизмов, следовательно — это допустимая карта. Чтобы задать атлас $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$, перебираем все x в $\widetilde{G}$, берём соответствующие хорошие окрестности (их счётное число) и карты из атласа $\mathcal{A}_G$. Так, очевидно, получаем, что

$$\widetilde{G} = \bigcup_i V_i.$$

Согласованность $\widetilde{\varphi}_i$ вытекает из согласованности φ_i на G.

Итак, $\widetilde{G}$ имеет структуру гладкого многообразия.

2) Гладкость отображения $p\colon \widetilde{G} \to G$

Покажем, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ — гладкая. Это значит, что каждый локальный представитель p в картах является гладким. Пусть

$$\varphi_j \circ p \circ (\widetilde{\varphi}_i)^{-1}\colon W_i \to W_j$$

— это композиция гладких отображений (так как $\widetilde{\varphi}_i$, φ_j согласованные карты), откуда p гладкое.

3) Введение операций $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\mathrm{inv}}$

Определим

$$\widetilde{\mu}\colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}, \quad \widetilde{\mu}\big([\alpha(t)], [\beta(t)]\big) = [\alpha(t) \cdot \beta(t)],$$

где $[\alpha(t)]$ — класс гомотопной петли в G. Проверим корректность: если

$$\alpha \sim \alpha', \quad \beta \sim \beta',$$

то

$$\alpha(t) \cdot \beta(t) \sim \alpha'(t) \cdot \beta'(t).$$

Отсюда корректность операции $\widetilde{\mu}$.

Аналогично вводим

$$\widetilde{\mathrm{inv}}\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}, \quad \widetilde{\mathrm{inv}}\big([\alpha(t)]\big) = [\alpha(t)]^{-1} = \big[\alpha(t)^{-1}\big].$$

Здесь $[\alpha(t)]^{-1}$ — путь в G, равный в каждой точке обратному элементу $\alpha(t)$.

Так на $\widetilde{G}$ получаем структуру группы: нейтральным элементом служит

$$[e_c(t)],$$

где $e_c(t)$ — тривиальный (константный) путь в нейтральном элементе G. Умножение есть

$$[\alpha(t)] \cdot [e_c(t)] = [\alpha(t) \cdot e_c(t)] = [\alpha(t)].$$

4) Гладкость $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\mathrm{inv}}$

Чтобы $\widetilde{G}$ стало группой Ли, нужно показать, что умножение $\widetilde{\mu}$ и обращение $\widetilde{\mathrm{inv}}$ являются гладкими отображениями.

4.1) Гладкость $\widetilde{\mu}$. Пусть $\mu\colon G \times G \to G$ гладкое многообразие. Аналогичные карты задаются и для $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$. С учётом того, что

$$\mu = p \circ \widetilde{\mu} \circ (p^{-1} \times p^{-1}),$$

мы можем проверить локально: в картах $\widetilde{\varphi}_i$ и $\widetilde{\varphi}_j$ композиция с μ остаётся гладкой, так как само μ гладко на $G \times G$.

4.2) Гладкость $\widetilde{\mathrm{inv}}$. Аналогично,

$$\mathrm{inv} = p \circ \widetilde{\mathrm{inv}} \circ p^{-1},$$

а inv гладко на G. Локально это сводится к композиции диффеоморфизмов в картах, значит, $\widetilde{\mathrm{inv}}$ гладко.

Таким образом, на $\widetilde{G}$ построена структура группы Ли.

5) Гомоморфизм групп Ли

Осталось показать, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ является гомоморфизмом групп Ли. Мы уже знаем, что p гладкое (пункт 2). Проверим гомоморфизм:

$$p\big([\alpha(t)] \cdot [\beta(t)]\big) = p\big([\alpha(t)\,\beta(t)]\big) = (\alpha(1) \cdot \beta(1)) = p\big([\alpha(t)]\big) \cdot p\big([\beta(t)]\big).$$

Таким образом, p — гомоморфизм групп Ли.

Задача 2 (альтернативная формулировка доказательства)

Пусть G — связная группа Ли, а

$$p\colon \widetilde{G} \to G$$

есть её универсальное накрытие. Требуется показать, что на $\widetilde{G}$ можно ввести структуру группы Ли, причём:

1. отображение $p\colon \widetilde{G} \to G$ является гладким;
2. то же самое p даёт гомоморфизм групп Ли.

План решения. Пусть умножение в G задаётся отображением

$$\mu\colon G \times G \to G$$

и обращение —

$$\mathrm{inv}\colon G \to G.$$

Тогда докажем следующее:

1. Снабдим $\widetilde{G}$ структурой гладкого многообразия.
2. Убедимся, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ является гладкой функцией.
3. Определим на $\widetilde{G}$ операции умножения

   $$\widetilde{\mu}(x, y) = xy$$

   и взятия обратного

   $$\widetilde{\mathrm{inv}}(x) = x^{-1}.$$

4. Покажем, что данные операции гладкие, откуда $\widetilde{G}$ становится группой Ли.
5. Наконец, проверим, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ есть гомоморфизм групп Ли.

1) Топология на $\widetilde{G}$

Из построения универсального накрытия известно, что $\widetilde{G}$ — топологическое пространство. Нужно лишь подтвердить три условия для гладкого многообразия:

1.1) Хаусдорфовость. Возьмём произвольные точки $x, y \in \widetilde{G}$. Пусть $p(x) = a$ и $p(y) = b$ в G.

- Если $a = b$, то берём в G «хорошую» окрестность $U(a)$, на которой p является гомеоморфизмом на соответствующих компонентах прообраза. Точки x и y попадают в разные компоненты, которые можно выбрать как непересекающиеся.
- Если $a \neq b$, то в G найдутся непересекающиеся «хорошие» окрестности $U(a)$ и $U(b)$, а в $\widetilde{G}$ — их прообразы, которые тоже непересекаются благодаря тому, что p локально является гомеоморфизмом.

Поскольку G — хаусдорфово, то и в $\widetilde{G}$ строятся непересекающиеся окрестности соответствующих точек.

1.2) Счётная база. Выберем в G счётный набор «хороших» окрестностей $\{U_i\}$, который возможен благодаря тому, что G имеет счётную базу. Тогда прообраз каждой U_i под p раскладывается в дизъюнктное объединение $U_{i,j}$:

$$p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_j U_{i,j}.$$

Все такие $U_{i,j}$ вместе образуют счётную базу на $\widetilde{G}$.

1.3) Атлас на $\widetilde{G}$. Пусть $x \in \widetilde{G}$ и $p(x) = a$. Так как a имеет «хорошую» окрестность $U(a)$ в G и p при этом локальный гомеоморфизм, рассмотрим соответствующий кусок $V_x \subset \widetilde{G}$, который отображается гомеоморфно на $U(a)$.

В G уже есть гладкая структура с атласом $\{\varphi_i\}$. Тогда на каждом V_x зададим карты

$$\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ p\big|_{V_x}.$$

Композиция гомеоморфизма и гладкой карты даёт гладкую карту. Собирая такие карты по всем «хорошим» окрестностям и их прообразам, получаем полный атлас на $\widetilde{G}$. Согласованность новых карт получается из согласованности исходных φ_i.

2) Гладкость $p\colon \widetilde{G} \to G$

Чтобы проверить гладкость p, достаточно проверить гладкость его локальных версий в координатных картах. Но локально p — композиция уже гладких (или гомеоморфных) отображений, следовательно, гладкое.

3) Групповая операция и обращение

На $\widetilde{G}$ определяется умножение

$$\widetilde{\mu}\big([\alpha(t)], [\beta(t)]\big) = \big[\alpha(t)\,\beta(t)\big],$$

где $[\alpha(t)]$ и $[\beta(t)]$ — классы петель в G. Корректность: гомотопные петли при умножении дают гомотопные результаты. Нейтральным элементом выступает класс $\big[e_c(t)\big]$, где $e_c(t)$ — постоянный путь в нейтральном элементе G. Обращение петли $[\alpha(t)]$ задаётся путём

$$[\alpha(t)]^{-1} = \big[\alpha(t)^{-1}\big].$$

4) Гладкость $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\mathrm{inv}}$

4.1) Гладкость $\widetilde{\mu}$. Умножение на G есть гладкое отображение $\mu\colon G\times G \to G$. На $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ по определению

$$\mu \;=\; p \;\circ\; \widetilde{\mu} \;\circ\; (p^{-1} \times p^{-1}),$$

и поскольку локально все карты согласованы с картами в $G \times G$, операция $\widetilde{\mu}$ получается гладкой.

4.2) Гладкость $\widetilde{\mathrm{inv}}$. Аналогично, $\mathrm{inv}\colon G \to G$ гладко. Тогда

$$\mathrm{inv} \;=\; p \;\circ\; \widetilde{\mathrm{inv}} \;\circ\; p^{-1}.$$

В локальных координатах эта композиция диффеоморфизмов также гладкая, значит, и $\widetilde{\mathrm{inv}}$ гладко.

Таким образом, на $\widetilde{G}$ формируется структура группы Ли.

5) Гомоморфизм групп Ли

Наконец, покажем, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ — гомоморфизм групп Ли. Мы уже доказали его гладкость. Для свойств гомоморфизма надо лишь проверить согласованность умножений:

$$p\Big([\alpha(t)]\cdot[\beta(t)]\Big) \;=\; p\Big([\alpha(t)\,\beta(t)]\Big) \;=\; \alpha(1)\,\beta(1) \;=\; p([\alpha(t)]) \;\cdot\; p([\beta(t)]).$$

Значит, p действительно переводит произведение в произведение, то есть является гомоморфизмом групп Ли.