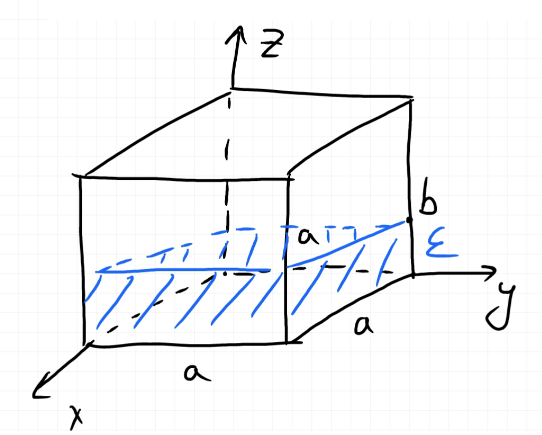
Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
16.12.2024

Условие:

ЗАДАЧА 14 (4 БАЛЛА)

Кубический резонатор с длиной ребра a состоит из идеально проводящих стенок. Область $0 \leq z \leq b$ $(b < a)$ заполнена немагнитным диэлектриком с восприимчивостью ε. Получить трансцендентное уравнение на частоты собственных мод такого резонатора с $E_y = E_z = 0$. Решить уравнение для $\varepsilon = 1$.

Решение:



$$\begin{cases} \Delta \overrightarrow{E} + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \overrightarrow{E} = 0; 0 < z < b \\ \Delta \overrightarrow{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \overrightarrow{E} = 0; b < z < a \end{cases}$$

Так как у нас $E_y = E_z = 0$, то

$$\begin{cases} \Delta E_x + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} E_x = 0; \;\; 0 < z < b \\ \Delta E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0; \;\; b < z < a \end{cases}$$

Граничные условия:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}; \;\; E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

при $y = 0, a$, $z = 0, a$:

$$E_x = 0$$

при $x = 0, a$:

$$E_x' = 0$$

при $z = b$:

$$E_x(b - 0) = E_x(b + 0); \;\; E_x'(b - 0) = E_x'(b + 0)$$

$$E_x = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

Магия матфизики:

$$X = A\cos(k_x\cdot x);\;\; k_x = \frac{\pi n}{a}\;\; n\in\mathbb{Z}$$

$$Y = B\sin(k_y\cdot y);\;\; k_y = \frac{\pi m}{a}\;\; m\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ уравнение на Z:

$$\begin{cases} \frac{Z''}{Z} = -\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} + k_x^2 + k_y^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -\frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2 + k_y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z''\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2\right) Z = 0 \\ Z''\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2\right) Z = 0 \end{cases}$$

при $0 < z < b$:

$$Z_1 = A\sin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 z}\right)$$

при $b < z < a$:

$$Z_2 = B\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(z-a)\right)$$

теперь $z = b$:

$$\begin{cases} A\sin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 b}\right) = B\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a)\right) \\ A\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\cos\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 b}\right) = B\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a)\right) \end{cases}$$

$det = 0$:

$$\frac{\tan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 b}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}} = \frac{\tan\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a)\right)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}}$$

Пусть $\varepsilon = 1$:

$$\Rightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 b}\right) = \tan\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a)\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 b} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a) + \pi p;\;\; p\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\pi^2 p^2}{a^2}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 p^2}{a^2}$$
$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 p^2}{a^2};\ \ n, m, p \in \mathbb{Z}$$
$$\omega = \frac{c\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2 + p^2};\ \ n, m, p \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\frac{\tan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} b\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}} = \frac{\tan\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}\,(b-a)\right)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}}$$
$$\omega = \frac{c\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2 + p^2};\ \ n, m, p \in \mathbb{Z}$$