ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАПРАВЛЕНИЕ 03.03.01 Прикладные математика и физика

ПРОФИЛЬ Теоретическая Физика

ЗАДАНИЕ

о прохождении практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности

студента Кононова Александра Михайловича

Курс 2 Группа 201

Форма обучения: очная

Сроки прохождения практики с 01.07.2024 по 14.07.2024

Форма представления на кафедру выполненного задания: отчет в письменной форме

Дата выдачи задания: 01.07.2024

Задание для прохождения практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности: Нахождение условия параметрического резонанса в системе с периодическим δ-образным потенциалом.

С заданием ознакомлен

Оценка

Руководитель практики Аверкиев Н.С.

(Ф.И.О. полностью, должность, звание, подпись).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ОТЧЕТ по практике по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности

Весенний семестр 2023/2024 учебного года

Тема: Нахождение условия параметрического резонанса в системе с периодическим δ-образным потенциалом.

Студент: Кононов Александр Михайлович

Руководитель практики: Аверкиев Никита Сергеевич

Должность, звание:

Оценка:

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность

Параметрический резонанс — это явление, при котором колебательная система начинает усиливаться при периодическом изменении параметров тех элементов колебательной системы, в которых сосредоточена энергия колебаний. Введение периодического дельта-образного потенциала добавляет дополнительную сложность к исследованию этого явления, позволяя изучить, как такие особенности потенциала влияют на поведение системы, включая условия возникновения резонанса, его интенсивность и устойчивость. Параметрический резонанс в системах с дельта-образным потенциалом может найти применение в современных технологиях, например, в разработке новых типов резонаторов, сенсоров или фильтров. Понимание поведения таких систем помогает в создании устройств, которые могут адаптивно изменять свои свойства в зависимости от внешних воздействий.

1.2 Цель и задачи практики

Цель:

Получить условие на параметры колебательной системы с δ-образным потенциалом для возникновения параметрического резонанса.

Задачи:

- Найти коэффициент прохождения волны через 1 δ-образный потенциал
- Найти коэффициент прохождения волны через 2 δ-образных потенциала
- Найти условие на параметры системы для возникновения параметрического резонанса в колебательной системе за счет двойного δ-образного потенциала

2 Ход выполнения задания

2.1 Задача с одним δ-образным потенциалом

Уравнение описывающие волну в среде с некоторым потенциалом имеет вид:

$$C^2(x;t)U''(x;t) = \ddot{U}(x;t) \tag{1}$$

В нашем случае потенциал от времени не зависит и представляет собой лишь δ-функцию, и решение мы будем искать в виде $U(x;t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, а значит уравнение принимает вид:

$$C^2(x)U''(x) = \omega^2 U(x) \tag{2}$$

Записав потенциал в явном виде получаем уравнение:

$$U''(x) - k_0^2 \cdot a\delta(x) \cdot U(x) = 0 \tag{3}$$

Где $k_0 = \frac{\omega}{C_0}$.

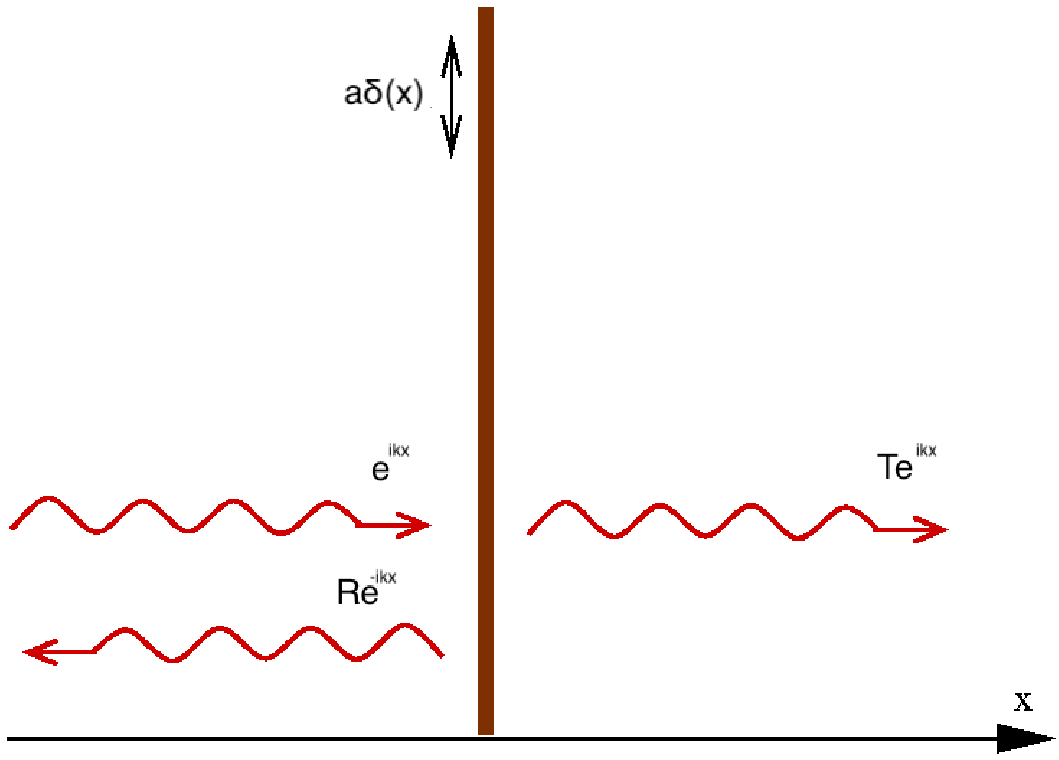

Рисунок 1: Прохождение волны через δ-образный потенциал

Будем искать решение в двух областях. В первой области в виде $U(x) = e^{ik_0x} + Re^{-ik_0x}$, во второй $U(x) = Te^{ik_0x}$. Условия на границе двух областей такое:

1) Непрерывность U(0)

2) Условие на скачёк производной: $U'_{x=0+} - U'_{x=0-} + k_0^2 a \cdot U(0) = 0$

Составив и решив систему уравнений - получаем значения R и T:

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ik_0 - ik_0R - (ik_0T) + k_0^2aT = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Получили:

$$\begin{cases} R = \frac{-i\frac{ka}{2}}{1+i\frac{ka}{2}} \\ T = \frac{1}{1+i\frac{ka}{2}} \end{cases} \tag{5}$$

2.2 Задача с двумя δ-образными потенциалами

В этой задачи условия похожи, однако теперь в пространстве на расстоянии b друг от друга разположены 2 δ-образных потенциала одинаковой величины a.

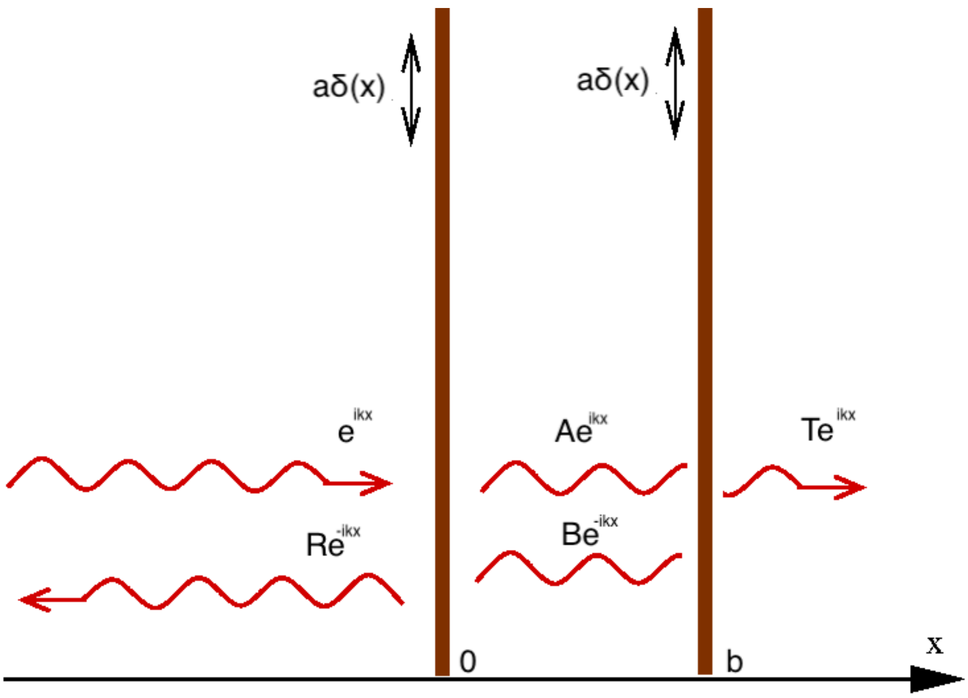

Рисунок 2: Прохождение волны через 2 δ-образных потенциала

Решение же теперь будем искать в 3 областях:

$$\begin{cases} U(x) = e^{ik_0x} + Re^{-ik_0x} & x < 0 \\ U(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} & 0 < x < b \\ U(x) = Te^{ik_0x} & x > b \end{cases} \tag{6}$$

А граничных условий теперь будет 4, по 2 на каждую границу областей:

$$\begin{cases} U_{x=0+} - U_{x=0-} = 0 & \text{, непрерывность в } 0 \\ U'_{x=0+} - U'_{x=0-} + k_0^2 a \cdot U(0) = 0 & \text{, скачёк производной в } 0 \\ U_{x=b+} - U_{x=b-} = 0 & \text{, непрерывность в } b \\ U'_{x=b+} - U'_{x=b-} + k_0^2 a \cdot U(b) = 0 & \text{, скачёк производной в } b \end{cases} \tag{7}$$

Получаем следующую систему уравнений на амплитуды волн:

$$\begin{cases} 1 + R = A + B \\ ik_0A - ik_0B - (ik_0 - ik_0R) + k_0^2 a(1 + R) = 0 \\ Ae^{ik_0b} + Be^{-ik_0b} = Te^{ik_0b} \\ ik_0Te^{ik_0b} - (Ae^{ik_0b} - Be^{-ik_0b}) + k_0^2 aTe^{ik_0b} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Решив эту систему уравнений получили выражения на коэффициенты отражения R и пропускания T:

$$\begin{cases} R = \frac{(cos(ik_0b) + 2sin(k_0b))ie^{ik_0b}}{k_0a(e^{2ik_0b} - (1+2i/k_0a)^2)} \\ T = \frac{4}{k_0^2a^2e^{2ik_0b} - (k_0a+2i)^2} \end{cases} \tag{9}$$

Эти результаты сходятся с результатами полученными в статье [1].

Посмотрим теперь при каких значения параметров $|T| = 1$. Физически это значит что волна проходит через оба барьера полностью. Получаем следующие уравнение на параметры системы:

$$2(1 - Cos(2kb)) + 8\frac{1}{k^2a^2}(1 + Cos(2kb)) - 8\frac{1}{ka}Sin(2kb) = 0 \tag{10}$$

Это трасдендентное уравнение на k, однако оно имеет не корни, согласно этому графику:

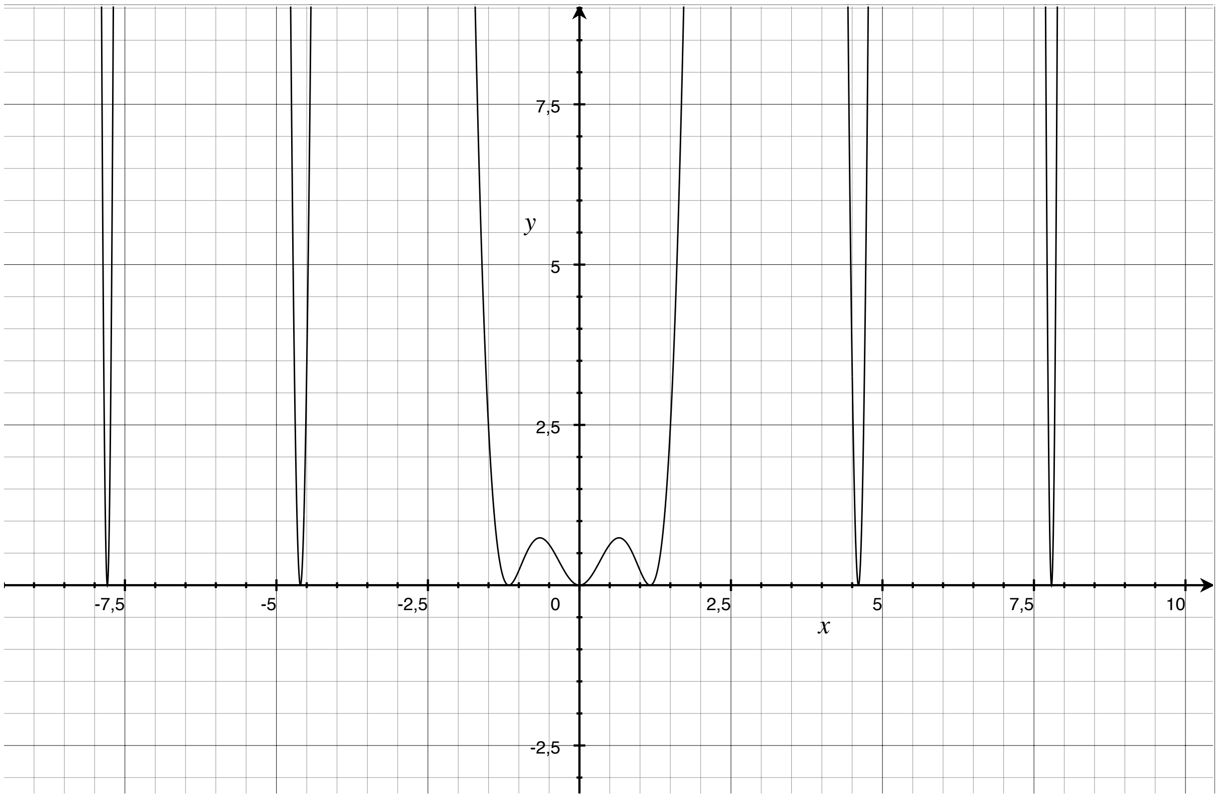

Рисунок 3: График уравнения (10)

А значит при некоторых значениях k волна проходит полностью через 2 δ-образных барьера.

2.3 Задача на условие возникновения параметрического резонанса в колебательной системе за счет двойного δ-образного потенциала

Рассмотрим теперь гармонический ассцилятор, который колеблится под действием периодического потенциала следующего вида:

$$\begin{cases} \chi(t) = \frac{1}{\Omega}(\delta(t - T/4) - \delta(t - 3T/4)) \quad 0 < t < T \\ \chi(t+T) = \chi(t) \end{cases} \tag{11}$$

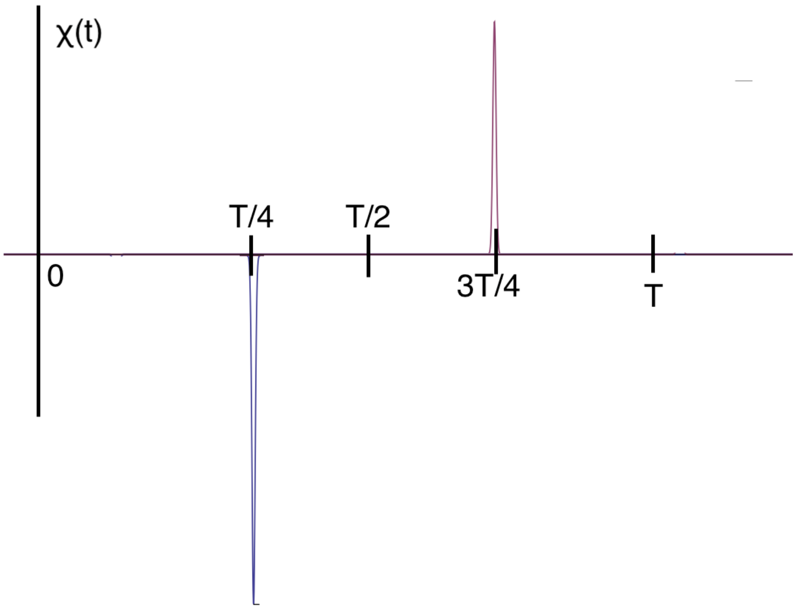

Рисунок 4: График потенциала $\chi(t)$

Тогда уравнение на функцию принимает вид:

$$\ddot{U} + \omega_0(1 + \chi(t))U = 0 \tag{12}$$

Так как потенциал имеет периодическую структуру во времени, то решение данного уравнения можно получить из теоремы Блоха [2], а именно:

$$U(t) = e^{\lambda t}\widetilde{U}(t) \tag{13}$$

Где:

$$\widetilde{U}(t) = \widetilde{U}(t + T) \tag{14}$$

То есть, $U(t)$ можно переписать в виде:

$$U(t + T) = e^{\lambda T}U(t) \tag{15}$$

Учитывая, что на интервале между δ-функциями $U(t)$ имеет вид:

$$U(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \tag{16}$$

А также граничные условия аналогичные (7) и дополнительные на непрерывность в точке $t = T$: $U(T) = e^{\lambda T}U(0)$, $\dot{U}(T) = e^{\lambda T}\dot{U}(0)$. Подставляя в них решение, получим:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta-e^{\lambda T})A+(\gamma+\delta-e^{\lambda T})B=0 \\ (\alpha-\beta-e^{\lambda T})A+(\gamma-\delta+e^{\lambda T})B=0 \end{cases} \tag{17}$$

Где:

$$\begin{cases} \alpha = e^{i\omega_0 T}+\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T}-\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2} \\ \beta = \frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{-i\omega_0 T/2}+\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T/2}-\frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{i\omega_0 T/2}-\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T/2} \\ \gamma = -\frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{i\omega_0 T/2}-\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T/2}+\frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{-i\omega_0 T/2}+\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T/2} \\ \delta = e^{-i\omega_0 T}+\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T}-\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2} \end{cases} \tag{18}$$

Для того, чтобы система уравнений имела решение необходимо, чтобы ее определитель был равен 0.

$$det = e^{2\lambda T}-(\alpha+\beta)e^{\lambda T}+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0 \tag{19}$$

Из выражений $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ полчается, что $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Значит $e^{\lambda_1 T}\cdot e^{\lambda_2 T}=1$. Тогда, получаем выражение:

$$e^{\lambda_1 T}=Cos(\omega_0 t)+\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}Cos(\omega_0 t)-\frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}\pm$$
$$\pm Sin(\frac{\omega_0 t}{2})\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2}+2)(Sin^2(\frac{\omega_0 t}{2})\cdot(\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2}+2)-2)}$$

Необходимо, чтобы это выражение было вещественным, иначе мы получим что обе экспоненты имеют чисто мнимые показатели:

$$e^{\lambda_1 T}=\alpha+i\beta$$

$$e^{\lambda_2 T}=\alpha-i\beta$$

$$e^{\lambda_1 T}\cdot e^{\lambda_2 T}=1=\alpha^2+\beta^2$$

$$=>\lambda_1=-\lambda_2=i\widetilde{\lambda},\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}$$

Так как нас интересует параметрический резонанс, необходимо чтобы $e^{\lambda T}\in\mathbb{R}$. Значит:

$$Sin^2(\frac{\omega_0 T}{2})>\frac{1}{1+\omega_0^2/4\Omega^2} \tag{20}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 2\omega_0 + \gamma$$

$$Sin^2(\frac{\pi}{1 + \gamma/2\omega_0}) > \frac{1}{1 + \omega_0^2/4\Omega^2}$$

Это трансцендентное неравенство, решением которого будет область допустимых значений T для возникновения параметрического резонанса.

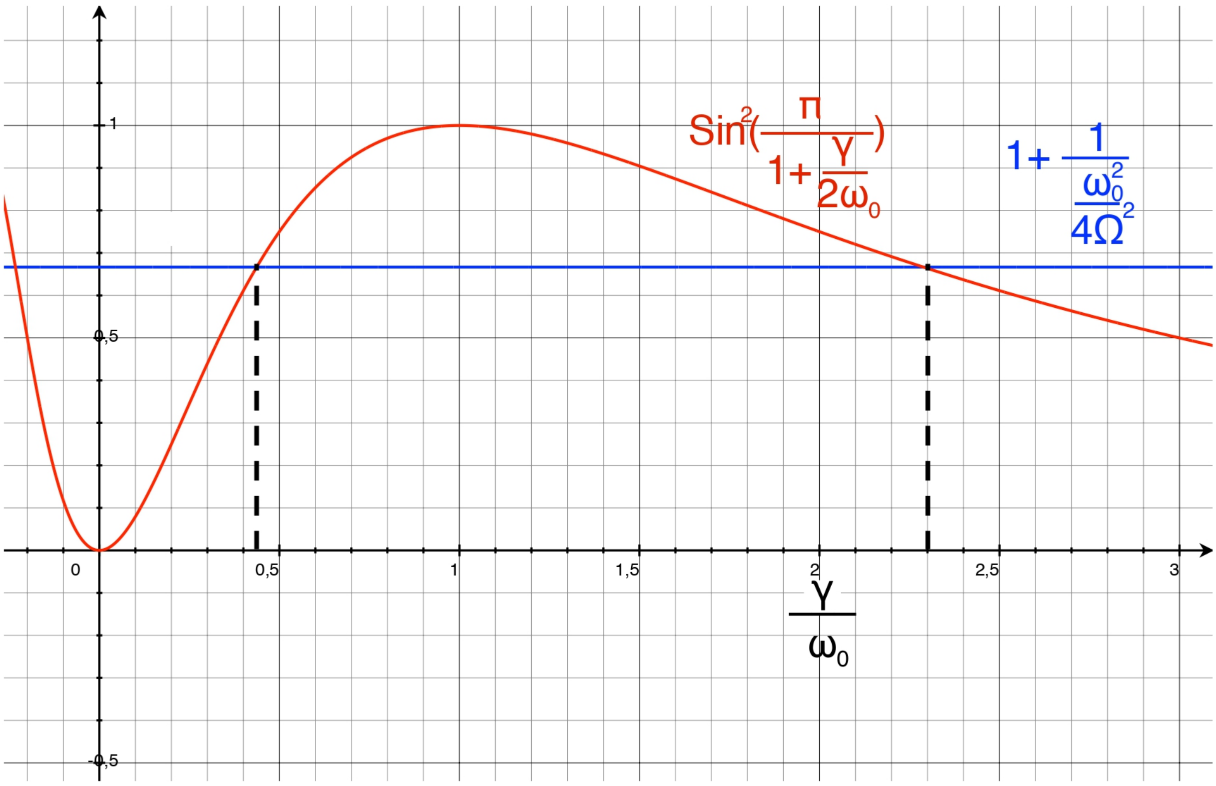

Рисунок 5: Графическое представление неравенства

Из графика можно видеть, что существует диапазон значений T, при которых выполняется неравенство, а следовательно и осуществляется параметрический резонанс.

3 Заключение

В данной работе представлено решение задачи о возникновении параметрического резонанса в системе с δ-образным периодическим потенциалом. Стоит отметить также, что система с данным потенциалом, не может быть описан через теорию возмущений и приближением малого взаимодействия, как это принято в классическом подходе решения задач о параметрическом резонансе. С помощью данного подхода можно попробовать описывать не слабые периодические потенциалы, раскладывая их по δ-функциям, что увеличивает класс решаемых задач.

4 Список литературы

1. Zafar Ahmed, 'Revisiting double Dirac delta potential', European Journal of Physics (March 2016)

2. Dr Siegfried Flugge, 'Practical Quantum Mechanics', Springer (1994)