Задача. Бусина на кольце

Маленькая бусина массой m свободно скользит по проволочному кольцу радиуса R. Кольцо вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через диаметр и параллельной силе тяжести. Найти положения равновесия бусины, исследовать их устойчивость и найти частоту малых колебаний.

Решение:

1. Условие задачи:

- Кольцо расположено в вертикальной плоскости и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. - Бусина может свободно двигаться без трения по кольцу. - Требуется найти положения равновесия, исследовать их устойчивость и определить частоту малых колебаний.

2. Выбор системы координат:

Обозначим угол θ как угол отклонения бусины от нижней точки кольца, измеренный против часовой стрелки. Тогда положение бусины задаётся координатами:

$$x = R\sin\theta, \quad z = -R\cos\theta.$$

3. Силы, действующие на бусину:

1. **Сила тяжести $\mathbf{F}_g$**:

$$\mathbf{F}_g = -mg\hat{z}.$$

2. **Центробежная сила $\mathbf{F}_c$** в системе отсчёта, вращающейся вместе с кольцом:

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 R\sin\theta\,\hat{x}.$$

4. Эффективная потенциальная энергия:

Эффективная потенциальная энергия в вращающейся системе отсчёта:

$$U(\theta) = U_g + U_c = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta.$$

5. Поиск положений равновесия:

Равновесие достигается там, где первая производная потенциальной энергии по θ равна нулю:

$$\frac{dU}{d\theta} = 0.$$

Вычисляем производную:

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR\sin\theta - m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = mR\sin\theta\left(g - \omega^2R\cos\theta\right).$$

Приравниваем к нулю:

$$\sin\theta\left(g - \omega^2R\cos\theta\right) = 0.$$

Получаем два случая:
1. $\sin\theta = 0$:

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi.$$

2. $g - \omega^2 R\cos\theta = 0$:

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Это решение имеет физический смысл, если $|\cos\theta| \leq 1$, то есть при $\omega^2 R \geq g$.

6. Исследование устойчивости:

Устойчивость определяется знаком второй производной потенциальной энергии:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

a) При $\theta = 0$**:**

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgR - m\omega^2R^2 = mR(g - \omega^2 R).$$

- Если $\omega^2 R < g$, то $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0$ — положение устойчиво. - Если $\omega^2 R > g$, то $\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0$ — положение неустойчиво.

b) При $\theta = \pi$**:**

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgR - m\omega^2R^2 = -mR(g + \omega^2 R) < 0.$$

- Положение всегда неустойчиво.

c) При $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$**:**

Вычисляем вторую производную:

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{d\theta^2} &= mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\ &= mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1).\end{aligned}$$

Подставляем $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$:

$$\cos^2\theta = \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2, \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2.$$

Вычисляем:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgR\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right) - m\omega^2R^2\left(2\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1\right).$$

Упрощаем:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = m\left(\frac{g^2}{\omega^2}\right) - m\left(\frac{2g^2}{\omega^2} - \omega^2 R^2\right) = m\left(\omega^2 R^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right) > 0.$$

Поскольку $\omega^2 R^2 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} > 0$ при $\omega^2 R > g$.

- Положение устойчиво при $\omega^2 R > g$.

7. Нахождение частоты малых колебаний:

a) Вокруг $\theta = 0$:

Частота малых колебаний определяется выражением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{mR^2}\frac{d^2U}{d\theta^2}} = \sqrt{\frac{g - \omega^2 R}{R}}.$$

- Частота определена только при $\omega^2 R < g$.

b) Вокруг $\cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$:

Рассмотрим малые отклонения φ от положения равновесия:

$$\theta = \theta_0 + \varphi, \quad \varphi \ll 1.$$

Уравнение движения:

$$mR^2\ddot{\varphi} = -\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}\varphi.$$

Ранее мы получили:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = m\left(\omega^2 R^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right).$$

Уравнение принимает вид:

$$mR^2\ddot{\varphi} + m\left(\omega^2 R^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right)\varphi = 0.$$

Сокращаем на m:

$$R^2\ddot{\varphi} + \left(\omega^2 R^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right)\varphi = 0.$$

Делим на R^2:

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right)\varphi = 0.$$

Получаем выражение для частоты малых колебаний:

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \left(\frac{g}{\omega R}\right)^2.$$

Поскольку $\cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$, то $\sin^2\theta_0 = 1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2$. Тогда:

$$\omega_0 = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2} = \omega \sin\theta_0.$$

8. Итоговые результаты:

- Положения равновесия:

- $\theta = 0$: устойчиво при $\omega^2 R < g$. - $\theta = \pi$: всегда неустойчиво. - $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$: устойчиво при $\omega^2 R > g$.

- Частоты малых колебаний:

- Вокруг $\theta = 0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g - \omega^2 R}{R}}.$$

- Вокруг $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$:

$$\omega_0 = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2} = \omega \sin\theta_0.$$

Заключение:

Бусина имеет устойчивые положения равновесия в нижней точке кольца при низкой скорости вращения ($\omega^2 R < g$) и при углах, удовлетворяющих условию $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$, при высокой скорости вращения ($\omega^2 R > g$). Частота малых колебаний зависит от угловой скорости вращения кольца, радиуса кольца и ускорения свободного падения.