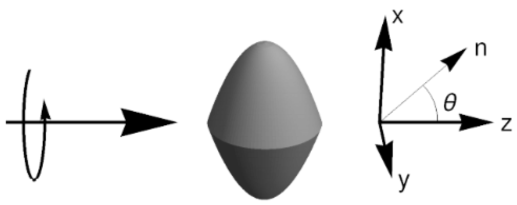
Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
26.12.2024

Условие:

ЗАДАЧА 16 (8 БАЛЛОВ)

Эллиптически поляризованный свет падает на фигуру вдоль оси z и рассеивается. Параметры Стокса падающего излучения $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{24}{25}$, $\xi_3 = -\frac{7}{25}$. Фигура состоит из двух параболоидов вращения радиуса R и высотой $h = \frac{3}{2}R$, склеенных как показано на рисунке, её диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 9$, центр фигуры находится в начале координат, ось фигуры вдоль оси x. Её можно описать уравнением $|x| < h\left(1 - \frac{z^2+y^2}{R^2}\right)$.

Найти параметры Стокса рассеянного света от углов θ, φ между рассеянной и падающей волнами.



Подсказка: Полезно вычислить коэффициенты деполяризации и найти поляризуемость фигуры вдоль разных осей $\alpha_i = p_i/E_{0,i}$, $(i = x, y, z)$.

2

Напоминание: Базисные вектора в сферической системе координат имеют вид

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y$$

Решение:

$$\overrightarrow{E}_{seat}(\vec{r}) = \widehat{G}(\vec{r})\,\vec{p}$$
$$\vec{p} = \alpha_x E_{0x}\vec{e_x} + \alpha_y E_{0y}\vec{e_y}$$

$$G_{\alpha\beta} = \left(q^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\frac{e^{iqr}}{r}; \quad \alpha;\beta = x;y;z$$

так как $r >> 1/q$:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{r}\left(q^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)e^{iqr} = q^2\left(\delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta\right)\frac{e^{iqr}}{r}$$

$$E_i = G_{ij}\left(\alpha_j E_{0j}\right); \quad i;j = x;y;z$$

Пусть пока $|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2 = I$

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{I}\left(E_{0x}E_{0y}^* + E_{0x}^*E_{0y}\right) = \frac{2}{I}Re\left(E_{0x}E_{0y}^*\right) = 2|E_{0x}||E_{0y}|\cos\delta; \quad \delta - \text{Разность фаз} \\ \xi_2 = \frac{1}{Ii}\left(E_{0x}E_{0y}^* - E_{0x}^*E_{0y}\right) = \frac{2}{I}Im\left(E_{0x}E_{0y}^*\right) = 2|E_{0x}||E_{0y}|\sin\delta \\ \xi_3 = \frac{1}{I}\left(|E_{0x}|^2 - |E_{0y}|^2\right) \end{cases}$$

Из условия

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 \Rightarrow \cos\delta = 0 \Rightarrow \sin\delta = 1 \\ \xi_2 = 24/25 \Rightarrow |E_{0x}||E_{0y}| = \frac{12}{25}I \\ \xi_3 = -7/25 \Rightarrow |E_{0x}|^2 - |E_{0y}|^2 = -\frac{7}{25}I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |E_{0x}| = \frac{3}{5}\sqrt{I} \\ |E_{0y}| = \frac{4}{5}\sqrt{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\pi/2} = |E_{0x}|\cdot i \\ E_{0y} = |E_{0y}| \end{cases}$$

Такое определение $\xi_1;\xi_2;\xi_3$ - когда мы смотрим на падующую волну. То есть ее волновой вектор направлен на нас. В таком случае в сферической сисетме коореднат мы их переопределим через замену $E_x \to E_\varphi; E_y \to -E_\theta$

Найдем новые $E_x;E_y;E_z$, после этого найдем $E_\theta;E_\varphi$, и тогда найдем вектора Стокса.

$$E_i = G_{ij}\left(\alpha_j E_{0j}\right); \quad i;j = x;y;z$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n_x^2 & -n_xn_y & -n_xn_z \\ -n_yn_x & 1-n_y^2 & -n_yn_z \\ -n_zn_x & -n_zn_y & 1-n_z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_xE_{0x} \\ \alpha_yE_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}\cdot q^2\frac{e^{iqr}}{r}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_xE_{0x} - n_x^2\alpha_xE_{0x} - n_xn_y\alpha_yE_{0y} \\ \alpha_yE_{0y} - n_y^2\alpha_yE_{0y} - n_xn_y\alpha_xE_{0x} \\ -n_xn_z\alpha_xE_{0x} - n_yn_z\alpha_yE_{0y} \end{pmatrix}\cdot q^2\frac{e^{iqr}}{r}$$

Выразим $n_x;n_y;n_z$ через $n_r;n_\theta;n_\varphi$. Так как мы всегда будем смотреть по n_r, то $n_\theta = n_\varphi = 0; n_r = 1$. Это по сути переход из декартовых коореднат в сферические

$$\begin{cases} n_x = \sin\theta\cos\varphi \\ n_y = \sin\theta\sin\varphi \\ n_z = \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x E_{0x} - \sin^2\theta\cos^2\varphi\alpha_x E_{0x} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\alpha_y E_{0y} \\ \alpha_y E_{0y} - \sin^2\theta\sin^2\varphi\alpha_y E_{0y} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\alpha_x E_{0x} \\ -\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\alpha_x E_{0x} - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\alpha_y E_{0y} \end{pmatrix} \cdot q^2\frac{e^{iqr}}{r}$$

Переходим в сферические коорденаты:

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \alpha_x E_{0x} - \sin^2\theta\cos^2\varphi\alpha_x E_{0x} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\alpha_y E_{0y} \\ \alpha_y E_{0y} - \sin^2\theta\sin^2\varphi\alpha_y E_{0y} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\alpha_x E_{0x} \\ -\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\alpha_x E_{0x} - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\alpha_y E_{0y} \end{pmatrix} \cdot q^2\frac{e^{iqr}}{r}$$

Магия математики:

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta\left(\alpha_x E_{0x}\cos\varphi + \alpha_y E_{0y}\sin\varphi\right) \\ \alpha_y E_{0y}\cos\varphi - \alpha_x E_{0x}\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot q^2\frac{e^{iqr}}{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\frac{2Re\left(E_\theta E_\varphi^*\right)}{|E_\theta|^2+|E_\varphi|^2} \\ \xi_2 = -\frac{2Im\left(E_\theta E_\varphi^*\right)}{|E_\theta|^2+|E_\varphi|^2} \\ \xi_3 = \frac{|E_\theta|^2-|E_\varphi|^2}{|E_\theta|^2+|E_\varphi|^2} \end{cases}$$

Подаставляем $E_r; E_\theta; E_\varphi$, учитываем $E_{0x} = |E_{0x}|i; E_{0y} = |E_{0y}|$, получаем:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\cos\theta\left(\alpha_y^2|E_{0y}|^2-\alpha_x^2|E_{0x}|^2\right)\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2|E_{0y}|^2\varphi+\alpha_x^2|E_{0x}|^2\cos\varphi\right)} \\ \xi_2 = \frac{2\cos\theta\alpha_x|E_{0x}|\alpha_y|E_{0y}|\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2|E_{0y}|^2\varphi+\alpha_x^2|E_{0x}|^2\cos\varphi\right)} \\ \xi_3 = \frac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta+1} = -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\cos\theta\left(\alpha_y^2\frac{16}{25}-\alpha_x^2\frac{9}{25}\right)\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2\frac{16}{25}\varphi+\alpha_x^2\frac{9}{25}\cos\varphi\right)} \\ \xi_2 = \frac{2\cos\theta\alpha_x\alpha_y\frac{4}{5}\frac{3}{5}}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2|E_{0y}|^2\varphi+\alpha_x^2|E_{0x}|^2\cos\varphi\right)} \\ \xi_3 = -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+1} \end{cases}$$

Теперь $\alpha_x; \alpha_y$

Приблизим нашу фигуру Элипсоидом вращения. В такмо случае полуоси:

$$a_x = h; a_y = a_z = R$$

В таком случае в литературе (Г. ван де Хюлст 'Рассеяние света малыми частицами' , параграф 6.3) находим выражения для α_i

где L_j — три множителя, зависящие от отношений осей. Объединяя это уравнение со вторым уравнением разд. 6.22, мы можем исключить $\mathbf{E}$ и найти $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} V = \alpha_j \mathbf{E}_0.$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{V}{4\pi\alpha_j} = L_j + \frac{1}{m^2 - 1},$$

которое дает три главных значения α_1, α_2, α_3 тензора поляризуемости.

Для произвольного отношения полуосей a, b и c имеем

$$L_1 = \int_0^\infty \frac{abc\, ds}{2(s+a^2)^{\frac{3}{2}}(s+b^2)^{\frac{1}{2}}(s+c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Формулы для L_2 и L_3 получаются из формулы для L_1 с помощью циклических подстановок. Всегда выполняется соотношение

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1.$$

Шары имеют $L = \frac{1}{3}$ независимо от направления, откуда мы получаем формулы разд. 6.31. Ниже приводится сводка формул для L для различных частных случаев.

Сфероиды ($b = c$)
вытянутые ($a > b$):

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}; \qquad L_1 = \frac{1-e^2}{e^2}\left(-1 + \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right);$$

$$\alpha_i = \frac{V(\varepsilon - 1)}{1 + (\varepsilon - 1) N_i}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$$

$$N_x = \frac{1-e^2}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e} - e\right); \;\; e = 1 - \frac{R^2}{h^2}$$

$$N_y = N_z = \frac{1}{2}(1 - N_x)$$

Ответ:

$$
\begin{cases}
\xi_1 = \frac{2\cos\theta\left(\alpha_y^2\frac{16}{25}-\alpha_x^2\frac{9}{25}\right)\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2\frac{16}{25}\varphi+\alpha_x^2\frac{9}{25}\cos\varphi\right)} \\
\xi_2 = \frac{2\cos\theta\alpha_x\alpha_y\frac{4}{5}\frac{3}{5}}{(\cos^2\theta+1)\left(\alpha_y^2|E_{0y}|^2\varphi+\alpha_x^2|E_{0x}|^2\cos\varphi\right)} \\
\xi_3 = -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+1}
\end{cases}
$$

$$\alpha_i = \frac{V\left(\varepsilon-1\right)}{1+\left(\varepsilon-1\right)N_i}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$$

$$N_x = \frac{1-e^2}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-e\right);\quad e = 1-\frac{R^2}{h^2}$$

$$N_y = N_z = \frac{1}{2}\left(1-N_x\right)$$