Преобразования Лоренца

В физике преобразования Лоренца - линейная группа преобразований пространства времени, относительно которой законы физики должны быть инварианты.

А именно, если $A_1(\vec{r}; ct); \ldots; A_n(\vec{r}; ct)$ - физические величины, $F(A_1; \ldots, A_n) = 0$ - закон, связывающий их, то после преобразований L:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Новые величины $A_1'(\vec{r'}; ct'); \ldots; A_n'(\vec{r'}; ct')$ будут подчиняться тому же закону $F(A_1'; \ldots, A_n') = 0$.

Группа Лоренца состоит из 3-х групп: поворотов, сдвигов и Лоренцевых бустов. Про первые 2 все понятно. Мы знаем как выглядит общая матрица поворота и сдвиг:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Я получу матрицу Лоренцево буста в общем виде.

Всем достаточно хорошо известна эта матрица в случае сонаправленности скорости с одной из осей (например x):

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

А если обозначить $\beta \coloneqq \frac{v}{c}$; $\gamma \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}$ то:

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Но что делать если нужно совершить буст в направлении не совпадающим с осями, например когда $\vec{v} = (v_x; v_y, v_z)$? Из 1-ого случая мы видим что какое-либо изменение происходит по оси, параллельной направлению скорости.

Распишем:

$$\begin{gathered} \vec{r} = \vec{r_\parallel} + \vec{r_\perp} \\ \vec{r}\,' = \vec{r_\parallel}' + \vec{r_\perp}' \end{gathered} \tag{5}$$

Где:

$$\vec{r_\parallel} = \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right) \frac{\vec{v}}{v}$$
$$\vec{r_\perp} = \vec{r} - \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right) \frac{\vec{v}}{v} \tag{6}$$

Тогда:

$$ct' = \gamma \left(ct - \left(\vec{\beta} \cdot \vec{r_\parallel}\right)\right)$$
$$\vec{r_\parallel}' = \gamma \left(\vec{r_\parallel} - \vec{\beta} ct\right) \tag{7}$$
$$\vec{r_\perp}' = \vec{r_\perp}$$

В общем виде:

$$ct' = \gamma \left(ct - \beta \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right)\right)$$
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma - 1) \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right) \frac{\vec{v}}{v} - \gamma \vec{\beta} ct \tag{8}$$

И матрица преобразования Лоренца в общем случае:

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_x}{c} & -\gamma \frac{v_y}{c} & -\gamma \frac{v_z}{c} \\ -\gamma \frac{v_x}{c} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_y}{c} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_z}{c} & (\gamma - 1) \frac{v_z v_x}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_z v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Для скорости тоже общий вид напишу для красоты, получить который можно расписав дифференциалы:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$
$$\gamma_v := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$
$$\vec{u}\,' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma_v} - \vec{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \cdot \vec{v}\right)$$

Ну и на десерт формула, которую я мало понимаю, но выглядящую красиво. Преобразование общего *невзаимодействующего* многочастичного состояния (состояния из пространства Фока) в квантовой теории поля:

$$U(\Lambda; a) \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \ldots} =$$
$$= e^{-i a_\mu \left[(\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \ldots\right]} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 \, (\Lambda p_2)^0 \ldots}{p_1^0 p_2^0 \ldots}} \left(\sum_{\sigma_1' \sigma_2' \ldots} D^{(j_1)}_{\sigma_1' \sigma_1}[W(\Lambda; p_1)] D^{(j_2)}_{\sigma_2' \sigma_2}[W(\Lambda; p_2)] \ldots\right) \Psi_{\Lambda p_1 \sigma_1' n_1; \Lambda p_2 \sigma_2' n_2; \ldots} \tag{11}$$

Где $W(\Lambda; p)$ - вигнеровское вращение, а $D^{(j)}$ - $(2j + 1)$-мерное представление группы $SO(3)$.