Условие задачи: Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$, то есть

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Требуется найти распределение двумерного случайного вектора

$$Y \;=\; \bigl(X^3,\ |0.5 - X|\bigr).$$

1. Поддержка (support) распределения.

Очевидно, что Y принимает значения на кривой, заданной параметрически:

$$y_1 \;=\; x^3, \quad y_2 \;=\; |0.5 - x|, \quad x \in [-1, 1].$$

Иными словами,

$$\operatorname{Supp}(Y) \;=\; \bigl\{(y_1, y_2) : y_1 = x^3,\ y_2 = |0.5 - x|,\ x \in [-1, 1]\bigr\}.$$

2. Нахождение плотности вдоль кривой.

Перейдём к дифференциалу длины дуги. Для параметризации $\gamma(x) = \bigl(x^3,\, |0.5 - x|\bigr)$, $x \in [-1, 1]$, длина дуги ds определяется формулой

$$ds \;=\; \sqrt{\Bigl(\frac{d}{dx}x^3\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{d}{dx}|0.5 - x|\Bigr)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{(3x^2)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{9x^4 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Так как X равномерна на $[-1, 1]$, вероятность попасть в малый интервал $\mathrm{d}x$ равна $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$. Следовательно, плотность вдоль кривой (в терминах длины дуги) будет:

$$f_Y(x) \;=\; \frac{f_X(x)}{\frac{ds}{dx}} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{9x^4 + 1}}.$$

3. Итоговое выражение для плотности.

В терминах координат (y_1, y_2) это означает:

$$f_Y(y_1, y_2) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{9x^4 + 1}}, & \text{если } (y_1, y_2) = \bigl(x^3,\ |0.5 - x|\bigr) \text{ для } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, распределение случайного вектора $\bigl(X^3,\ |0.5 - X|\bigr)$ сосредоточено на кривой $\{(x^3,\, |0.5 - x|) : x \in [-1, 1]\}$ с приведённой выше плотностью относительно меры длины на этой кривой.