ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАПРАВЛЕНИЕ 03.03.01 Прикладные математика и физика

ПРОФИЛЬ Теоретическая Физика

ЗАДАНИЕ

о прохождении производственной практики (НИР)

студента Кононова Александра Михайловича

Курс 3 Группа 301.3

Форма обучения: очная

Сроки прохождения практики с 01.07.2025 по 14.08.2025

Форма представления на кафедру выполненного задания: отчет в письменной форме

Дата выдачи задания: 01.07.2025

Задание для прохождения производственной практики (НИР): Расчет когерентной суперпозиции испускаемых и резонансно рассеянных фотонов в двухуровневой системе, управляемой импульсным полем.

С заданием ознакомлен

Оценка

Руководитель практики Крайнов И.В.

(Ф.И.О. полностью, должность, звание, подпись).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ОТЧЕТ по производственной практике (НИР)

Весенний семестр 2024/2025 учебного года

Тема: Расчет когерентной суперпозиции испускаемых и резонансно рассеянных фотонов в двухуровневой системе, управляемой импульсным полем.

Студент: Кононов Александр Михайлович

Руководитель практики: Крайнов Игорь Вадимович

Должность, звание:

Оценка:

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность

Мы представляем результаты о наблюдении группы фотонов в состояниях, содержащих ~ 3 фотона, представляющих собой когерентную суперпозицию излученных и резонансно рассеянных лазерных фотонов. Данное явление возникает при возбуждении двухуровневой системы — заряженной квантовой точки в микроровезонаторе — импульсами с площадью, кратной 2π. Возникновение явления обусловлено тем, что возбуждающий лазерный импульс содержит несколько десятков фотонов, чье амплитудное квантовое распределение формирует такую суперпозицию, а поляризация рассеянных фотонов изменяется в результате взаимодействия с заряженной резонансной системой. Подобный пучок фотонов является состоянием высшего порядка в Фоковском пространстве и перспективен для применения в квантовых технологиях.

1.2 Цель и задачи практики

Цель:

Получить зависимость $g^{(2)}(0)$ фактора от площади возбуждающего импульса в двух-уровневой системе.

Задачи:

- Найти волновую функции выходного состояния двух-уровневой системы, совпадающей по энергии с частотой импульса
- Найти $g^{(2)}(0)$ фактор в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса

- Найти волновую функции выходного состояния двух-уровневой системы, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

- Найти $g^{(2)}(0)$ фактор в двух-уровневой системе, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

2 Ход выполнения задания

2.1 Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, совпадающей по энергии с частотой импульса

Гамельтониан описывающий двух-уровневою систему имеет вид:

$$\hat{H} = E_0 \ \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \omega_0 \ \hat{b}_-^\dagger \hat{b}_- + g \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{b}_- + \hat{a}_+ \hat{b}_-^\dagger \right) \tag{1}$$

Заметим, что гамельтониан взаимодействует с Фоковским пространством через 2-мерные подпространства с базисом $|0;N\rangle$ и $|1;N-1\rangle$.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega_0 N & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & E_0 + \omega_0(N-1) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Найдем собственные числа и вектора, учтя что E_0 и ω_0 равны:

$$\varepsilon_N^\pm = \omega_0 N \pm g\sqrt{N} \tag{3}$$

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0;N\rangle \pm |1;N-1\rangle \right) \tag{4}$$

Двух-уровневая система накачивалась когерентным лазерным излучением с горизонтальной поляризацией. Волновая функция такой накачки следующая:

$$|\psi_{in}\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n_H\rangle \tag{5}$$

Где $|\alpha|^2 = N$.

Взаимодействие двух-уровневой системы с накачкой описывается оператором эволюции:

$$\hat{S}_0 = \exp\left(-i\tau \hat{H} \right) \tag{6}$$

Где τ - это время взаимодейтсвия между трионом и ипульсом. Так как:

$$\hat{b}_\pm^\dagger = \left(\hat{b}_H^\dagger \pm i \hat{b}_V^\dagger \right) / \sqrt{2} \tag{7}$$

то

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{S}_0 \, |\psi_{in}\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \ e^{\alpha \hat{b}_+^\dagger/\sqrt{2}} \ \hat{S}_0 \ e^{\alpha \hat{b}_-^\dagger} \ |0\rangle \tag{8}$$

Воспользуемся свойством собственных векторов и разложением по базису:

$$\exp\left(-i\tau \hat{H}\right) \ |\psi_n\rangle = \exp\left(-i\tau E_n\right) \ |\psi_n\rangle \tag{9}$$

$$v_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0; N\rangle \pm |1; N-1\rangle\right) \tag{10}$$

получим:

$$\begin{aligned}
|\psi_{out}\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \ e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2} \sum_n e^{-\alpha \hat{b}_-^\dagger/\sqrt{2}} \Bigg[\Bigg(& \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ e^{-i\tau\omega_0} \ e^{-i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}}\right)^n}{n!} \ e^{-i\tau g\sqrt{N}/2} + \\
& + \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ e^{-i\tau\omega_0} \ e^{i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}}\right)^n}{n!} \ e^{i\tau g\sqrt{N}/2} \Bigg) \hat{b}_-^{\dagger \ n} + \\
& + \Bigg(\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ e^{-i\tau\omega_0} \ e^{-i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}}\right)^{n-1}}{\sqrt{n!}\sqrt{(n-1)!}} \ e^{-i\tau g\sqrt{N}/2} - \\
& - \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ e^{-i\tau\omega_0} \ e^{i\frac{\tau g}{2\sqrt{N}}}\right)^{n-1}}{\sqrt{n!}\sqrt{(n-1)!}} \ e^{i\tau g\sqrt{N}/2} \Bigg) \hat{b}_-^{\dagger \ n-1} \ \hat{a}_+^\dagger \Bigg] |0\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

В этом уравнении мы разложили $\sqrt{n}$ до линейного порядка вокруг N, для большого среднего значения числа фотонов $(N >> 1)$

Так как: $\tau g << 1$, $|\alpha|^2 = N$ то:

$$\begin{aligned}
|\psi_{out}\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2} \ e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2} \Big[& \left(e^{-i\delta \hat{b}_-^\dagger} \ e^{-i\theta/2} + e^{i\delta \hat{b}_-^\dagger} \ e^{i\theta/2}\right) + \\
& + \left(e^{-i\delta \hat{b}_-^\dagger} \ e^{-i\theta/2} - e^{i\delta \hat{b}_-^\dagger} \ e^{i\theta/2}\right) \hat{a}_+^\dagger \Big] |0\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

где: $\theta = \tau g \sqrt{N}$, $\delta = \frac{\tau g \alpha}{2\sqrt{2N}}$

Снова разложим до 1 порядка по δ, а так же учтем, что детектирование испущенных фотонов происходит в вертикальной поляризации

$$\left|\psi_{out}^{V}\right\rangle \approx \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \frac{i\delta - 1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle + \frac{i\delta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|2\rangle \tag{13}$$

2.2 Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, совпадающей по энергии с частотой импульса

Рассчитаем вероятность обнаружить фотон:

$$P_1(t) = \sum_m \left|\left\langle m \right| \hat{a} \left| \psi_{out}^{V} \right\rangle\right|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2} \cdot \sum_m \frac{\alpha^{2m+2}}{(m+1)!}\left(1 - \cos\left(2gt\sqrt{m+1}\right)\right) \tag{14}$$

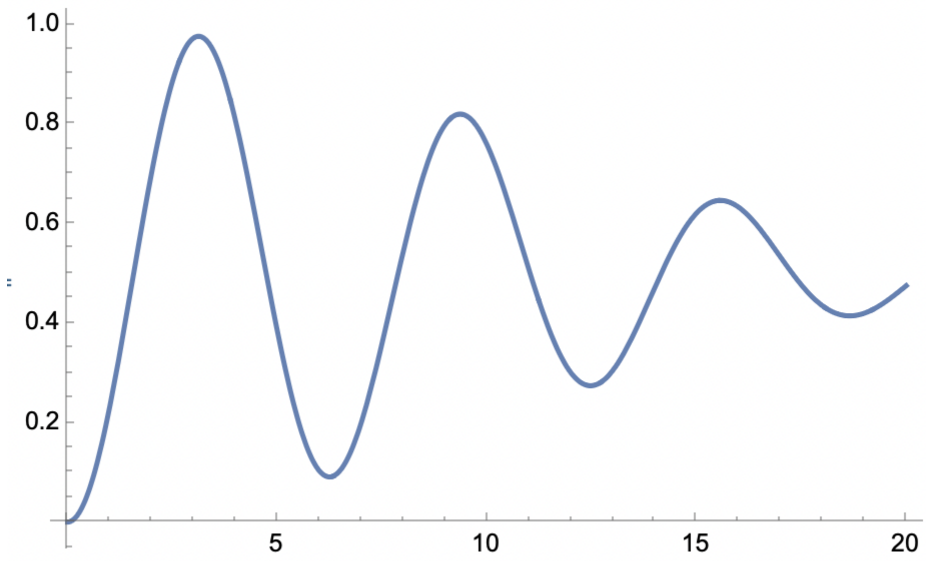

Рисунок 1: $P_1(t)$ - вероятность обнаружить фотон

$g^{(2)}(0)$ фактор показывает вероятность обнаружить 2 когерентных фотона одновременно. Он считается следующим образом:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\left\langle \psi_{out}^{V} \right| \hat{n}^2 - \hat{n} \left| \psi_{out}^{V} \right\rangle}{\left\langle \psi_{out}^{V} \right| \hat{n}^2 \left| \psi_{out}^{V} \right\rangle^2} = \frac{2|\delta|^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + |\delta|^2} \tag{15}$$

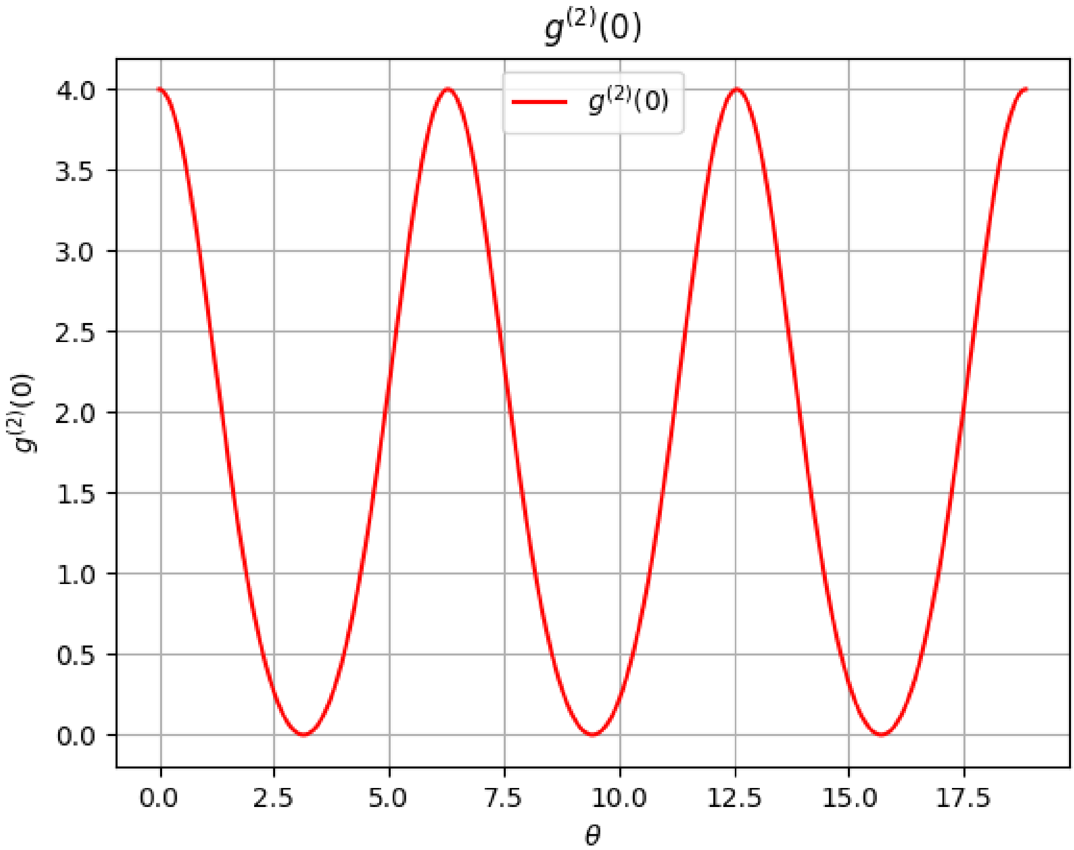

Рисунок 2: $g^{(2)}(0)$

Видно, что $g^{(2)}(0)$ становится равным 0 при нечетных площадях импульса $(\pi, 3\pi, \dots)$ и имеет максимум при нечетных площадях импульса $(2\pi, 4\pi, \dots)$

2.3 Нахождение волновой функции выходного состояния двух-уровневой системы, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

В этой задачи условия похожи, однако теперь $E_0 \neq \omega_0$.

Гамельтониан:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega_0 N & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & E_0 + \omega_0(N-1) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Собственные числа и вектора:

$$\varepsilon_N^{\pm} = \omega_0 N + \frac{1}{2}\left(E_0 - \omega_0\right) \pm \sqrt{\left(E_0 - \omega_0\right)^2 + 4g^2 N} \tag{17}$$

$$v_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{2}\left(E_0 - \omega_0\right) \pm \sqrt{\left(E_0-\omega_0\right)^2 + 4g^2 N}}{g\sqrt{n}}\right)^2}}\cdot$$
$$\cdot\left(|0;N\rangle + \left(\frac{1}{2}\left(E_0 - \omega_0\right) \pm \sqrt{\left(E_0 - \omega_0\right)^2 + 4g^2 N}\right)|1;N-1\rangle\right) \tag{18}$$

Проделав все те же шаги, получим волновую функцию после взаимодействия накачки и двух-уровневой системы:

$$\left|\psi_{out}^V\right\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}\ e^{\alpha \hat{b}_H^\dagger}}{2\sqrt{1+\delta_N^2}}\left[e^{-i\theta/2}\ e^{-i\gamma\hat{b}_-^\dagger}\left(\sqrt{1+\delta_N^2} - \delta_N\right) + \right.$$
$$+ e^{i\theta/2}\ e^{i\gamma\hat{b}_-^\dagger}\left(\sqrt{1+\delta_N^2} + \delta_N\right) +$$
$$\left. + \left(e^{-i\theta/2}\ e^{-i\gamma\hat{b}_-^\dagger} - e^{i\theta/2}\ e^{i\gamma\hat{b}_-^\dagger}\right)\hat{a}_+^\dagger\right]|0\rangle \tag{19}$$

Где $\delta_n = \frac{E_0 - \omega_0}{2g\sqrt{n}}$, $\theta = \tau g\sqrt{N}\sqrt{1+\delta_N^2}$, $\gamma = \frac{\tau g \alpha}{2\sqrt{2N}}$.

Разложим до линейного порядка по γ, а так же учтем смену поляризации

$$\left|\psi_{out}^V\right\rangle \approx \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{1+\delta_N^2}}\left[\left(\sqrt{1+\delta_N^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} + i\delta_N\sin\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{i\gamma\sqrt{1+\delta_N^2} - 1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\delta_N\gamma}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle + \frac{i\gamma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,|2\rangle\right] \tag{20}$$

2.4 Расчет $g^{(2)}(0)$ фактора в двух-уровневой системе, НЕ совпадающей по энергии с частотой импульса

$$g^{(2)}(0) = \frac{\left\langle\psi_{out}^V \mid \hat{n}^2 - \hat{n} \mid \psi_{out}^V\right\rangle}{\left\langle\psi_{out}^V \mid \hat{n}^2 \mid \psi_{out}^V\right\rangle^2} = \frac{2\left(1+\delta_N^2\right)\gamma^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{\left(\gamma^2\left(1+\delta_N^2\right) + \sin^2\frac{\theta}{2} - \delta_N\gamma\sin\theta\right)^2} \tag{21}$$

Видим, что при $\delta_N \to \infty \Rightarrow g^{(2)}(0) \to 0$. Это хороший и логичный результат, означающий что при большой разности энергий взаимодействие не происходит.

Построим зависимость $g^{(2)}(0)$ от δ_N при разных площадях импульса θ:

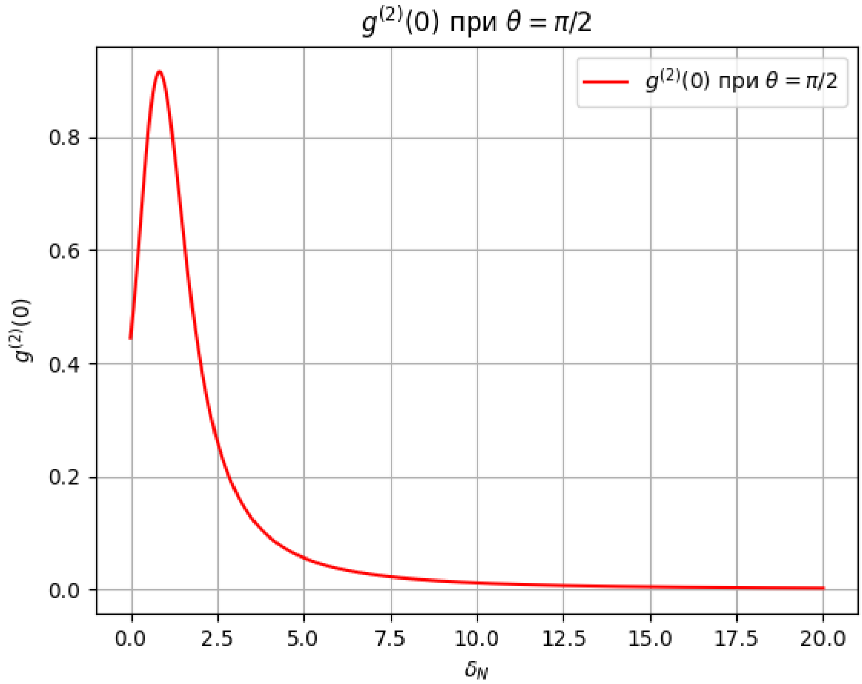

Рисунок 3: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = \pi/2$

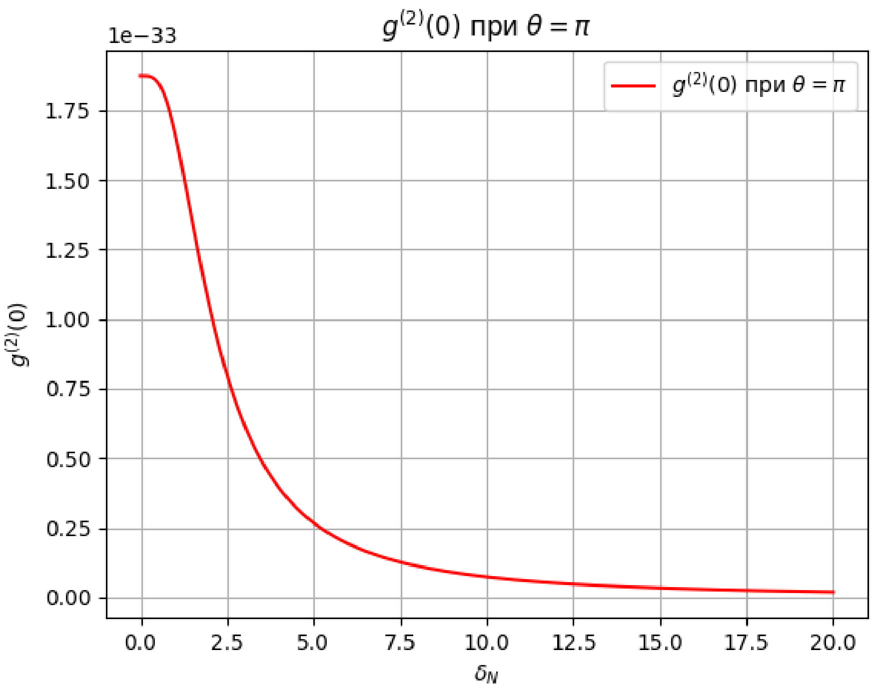

Рисунок 4: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = \pi$

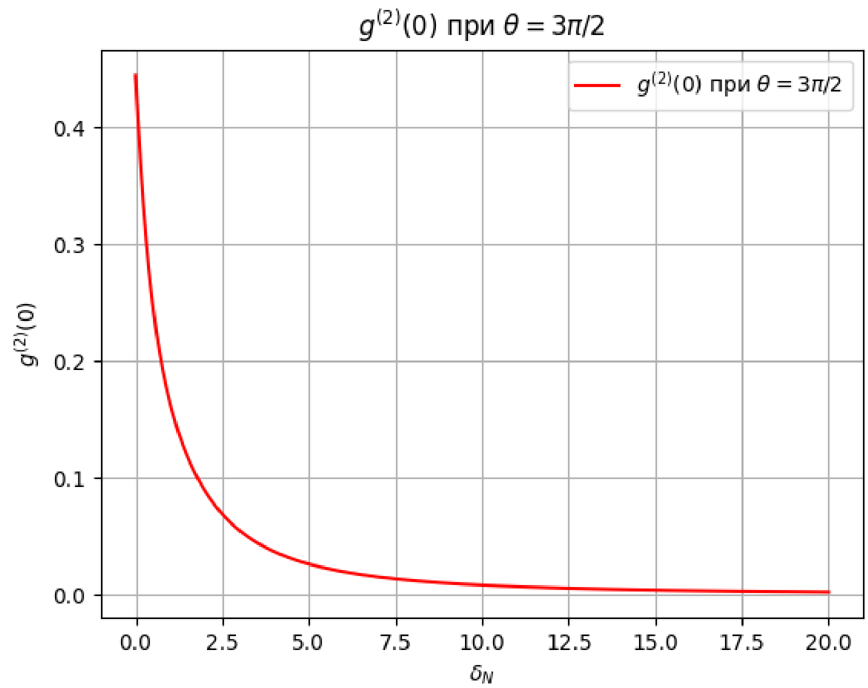

Рисунок 5: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = 3\pi/2$

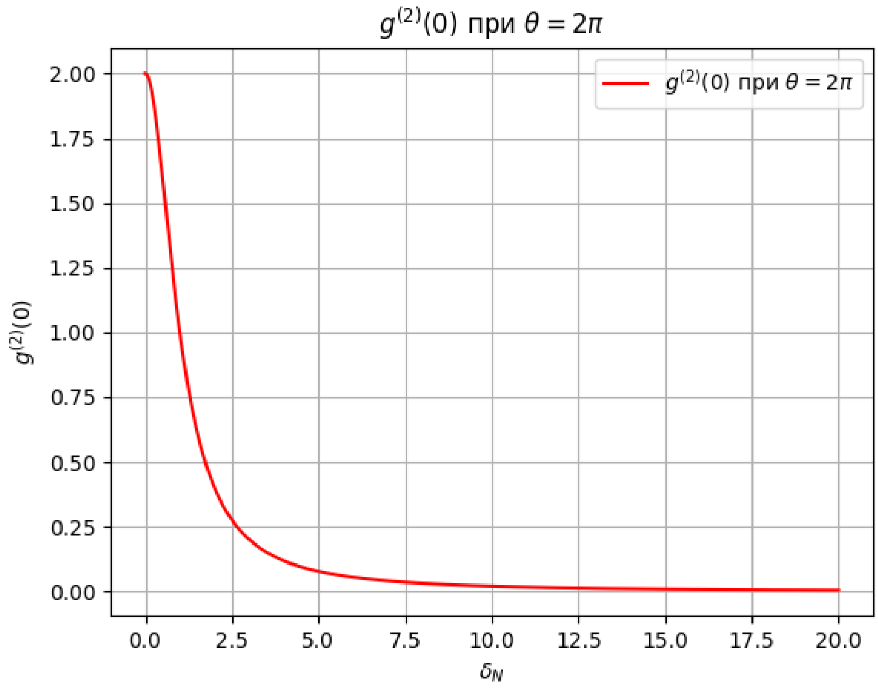

Рисунок 6: $g^{(2)}(0)$ при $\theta = 2\pi$

3 Заключение

В данной работе мы исследовали генерацию многофотонных состояний в системе — заряженной квантовой точке, расположенной в микрорезонаторе, возбуждаемой четными π-импульсами. Экспериментально полученные данные демонстрируют, что при такой форме возбуждения наблюдается скучивание двухфотонного состояния, что свидетельствует о когерентной суперпозиции излучённых и резонансно рассеянных фотонов.

Формирование таких состояний с гибко настраиваемой статистикой открывает широкие возможности для развития квантовых технологий, включая схемы квантовых вычислений и протоколы квантового распределения ключей. Данный подход предполагает эффективное управление статистикой фотонных состояний через форму и мощность возбуждающих импульсов и свойства резонансной системы.

4 Список литературы

1. Krainov I.V., 'Coherent superposition of emitted and resonantly scattered photons from a two-level system driven by an even-π pulse', Mesoscale and Nanoscale Physics (2025)

2. Marlian O. Scully and M. Suhail Zubairy, 'Quantum optics' (1996)

3. Bonch-Bruevich V.L., 'Physics of Semiconductors' (1965)

4. Anselm A.I., Introduction to Semiconductor Theory (1963)