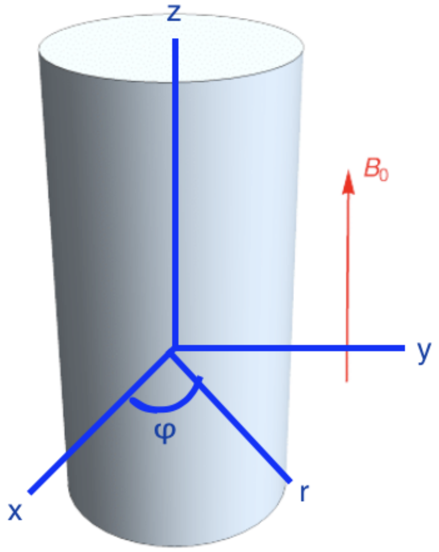
Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
17.09.2024

Условие:

Задача 2 (4 балла)

Найти распределение магнитного поля и тока в бесконечном сверхпроводящем проводе с радиусом r_0, к которому приложено поле B_0 вдоль его оси.



Подсказка: Общее решение уравнения

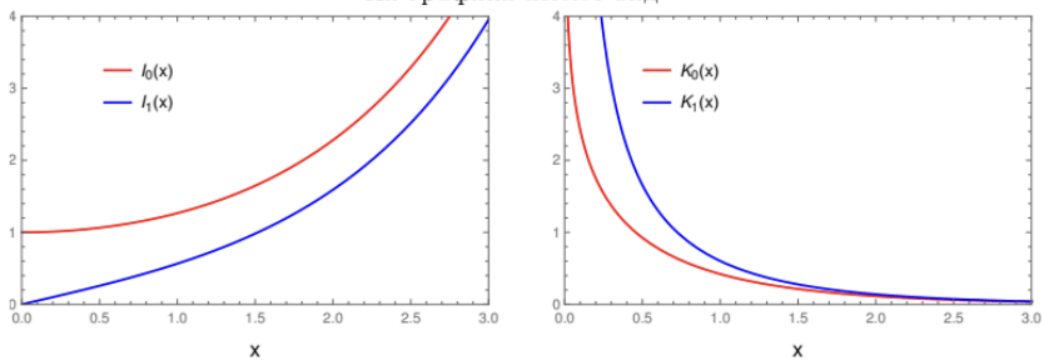
$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0\,,$$

имеет вид

$$y(x) = C_1Y_n(x) + C_2K_n(x)\,,$$

где I_n и K_n — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Их графики имеют вид



Некоторые их свойства

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \qquad K_n(x) = K_{-n}(x)$$

$$2I'_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) \qquad 2K'_n(x) = -K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x)$$

Решение:

$$\Delta\overrightarrow{B} = \frac{4\pi e^2 n}{c^2 m}\overrightarrow{B} \Rightarrow \Delta\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\Lambda^2}$$

Введем цилиндрические координаты

Лапласиан:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

При $r > r_0$

$$\Delta \overrightarrow{B} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{B}(r) = \overrightarrow{B_0}$$

При $r \leqslant r_0$

$$\Delta \overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\Lambda^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial r}\right) = \frac{\overrightarrow{B}}{\Lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial r} - \frac{\overrightarrow{B}}{\Lambda^2} = 0$$

Замена: $r = \Lambda\rho$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial \rho} - \overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{B} = B_z \overrightarrow{e_z}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \rho} - B_z = 0$$

Будем искать решение уравнения в виде:

$$B_z(\rho) = C \cdot I_0(\rho) + D \cdot K_0(\rho)$$

Функция $K_0(\rho) \to +\infty$ при $\rho \to 0$
$B_z(\rho)$ - ограничена при $\rho = 0 \Rightarrow D = 0$

$$\Rightarrow B_z(\rho) = C \cdot I_0(\rho)$$

$$\Rightarrow B_z(r) = C \cdot I_0(r/\Lambda)$$

Непрерывность тангенсеальной компоненты поля:

$$B_\tau|_{r_0+0} - B_\tau|_{r_0-0} = 0$$

$$B_0 = C \cdot I_0(r_0/\Lambda) \Rightarrow C = \frac{B_0}{I_0(r_0/\Lambda)}$$

Получаем:

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{B_0 \overrightarrow{e_z}}{I_0(r_0/\Lambda)} I_0(r/\Lambda);\ \text{при } r \leqslant r_0$$

$$\overrightarrow{B}(r) = B_0 \overrightarrow{e_z};\ \text{при } r > r_0$$

Найдем $\vec{j}$

$$rot\overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\vec{j} \;=\; \frac{c}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} \;+\; \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\varphi} \;+\; \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_z} \;=$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial B_z}{\partial r}\overrightarrow{e_\varphi} = -\frac{c}{4\pi}\frac{B_0\overrightarrow{e_\varphi}}{I_0(r_0/\Lambda)}\frac{1}{\Lambda}I_0'(r/\Lambda)$$

Используя рекуррентные соотношения, получаем:

$$\vec{j} = -\frac{c}{8\pi}\frac{B_0\overrightarrow{e_\varphi}}{I_0(r_0/\Lambda)}\frac{1}{\Lambda}\left(I_{-1}(r/\Lambda) + I_{+1}(r/\Lambda)\right) = -\frac{c}{4\pi}\frac{B_0\overrightarrow{e_\varphi}}{I_0(r_0/\Lambda)}\frac{1}{\Lambda}I_{+1}(r/\Lambda)$$

Ответ:

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{B_0\overrightarrow{e_z}}{I_0(r_0/\Lambda)}I_0(r/\Lambda);\ \text{при } r \leqslant r_0$$

$$\overrightarrow{B}(r) = B_0\overrightarrow{e_z};\ \text{при } r > r_0$$

$$\vec{j}(r) = -\frac{c}{4\pi}\frac{B_0\overrightarrow{e_\varphi}}{I_0(r_0/\Lambda)}\frac{1}{\Lambda}I_{+1}(r/\Lambda)$$