Двойной ротор от векторных сферических гармоник

Рассматриваются выражения вида:

$$\nabla \times \nabla \times \left[f(r)\, \vec{V}_{lm} \right]$$

где $f(r) \in \{A_{lm}(r), B_{lm}(r), C_{lm}(r)\}$ — скалярная функция от радиуса, а $\vec{V}_{lm}$ — один из следующих базисов векторных сферических гармоник:

- $\vec{Y}_{lm} = Y_{lm}(\theta, \phi)\vec{e}_r$ — радиальная компонента
- $\vec{\Psi}_{lm} = r\nabla Y_{lm}(\theta, \phi)$ — полоидальная (градиентная)
- $\vec{\Phi}_{lm} = \vec{r} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi)$ — тороидальная (вихревая)

1. Радиальная компонента: $A_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}$

$$\nabla \times \nabla \times \left[A_{lm}(r)\, \vec{Y}_{lm} \right] = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} A_{lm}(r) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA_{lm}}{dr} \right) \right] \vec{Y}_{lm}$$

2. Полоидальная компонента: $B_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm}$

$$\nabla \times \nabla \times \left[B_{lm}(r)\, \vec{\Psi}_{lm} \right] = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} B_{lm}(r) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dB_{lm}}{dr} \right) \right] \vec{\Psi}_{lm} - \frac{l(l+1)}{r} \frac{dB_{lm}}{dr} \vec{Y}_{lm}$$

3. Тороидальная компонента: $C_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}$

$$\nabla \times \nabla \times \left[C_{lm}(r)\, \vec{\Phi}_{lm} \right] = \left[\frac{d^2 C_{lm}}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} C_{lm}(r) \right] \vec{\Phi}_{lm}$$

Подробное вычисление $\nabla \times \nabla \times [f(r)\, \vec{V}_{lm}]$

Рассмотрим три типа векторных сферических гармоник:

$$\vec{Y}_{lm} = Y_{lm}(\theta, \phi)\vec{e}_r, \quad \vec{\Psi}_{lm} = r\nabla Y_{lm}, \quad \vec{\Phi}_{lm} = \vec{r} \times \nabla Y_{lm}$$

и вычислим двойной ротор от каждого из следующих выражений:

$$\nabla \times \nabla \times [A_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}], \quad \nabla \times \nabla \times [B_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm}], \quad \nabla \times \nabla \times [C_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}]$$

с использованием идентичности:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

1. Радиальная компонента: $A_{lm}(r)\,\vec{Y}_{lm}$

Пусть:

$$\vec{A} = A_{lm}(r)\,Y_{lm}(\theta,\phi)\,\vec{e}_r$$

Шаг 1: Скалярная дивергенция

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 A_{lm}(r)\right)Y_{lm} \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA_{lm}}{dr}\right)Y_{lm}\vec{e}_r$$

Шаг 2: Лапласиан от радиального вектора Известный результат:

$$\nabla^2\left[A_{lm}(r)\,\vec{Y}_{lm}\right] = \left(\frac{d^2A_{lm}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA_{lm}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm}\right)\vec{Y}_{lm}$$

Шаг 3: Собираем всё вместе

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times[A_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}] &= \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \\
&= \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dA_{lm}}{dr}) - \left(\frac{d^2A_{lm}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA_{lm}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm}\right)\right]\vec{Y}_{lm} \\
&= \left[\frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dA_{lm}}{dr})\right]\vec{Y}_{lm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\left[A_{lm}(r)\,\vec{Y}_{lm}\right] = \left[\frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dA_{lm}}{dr})\right]\vec{Y}_{lm}}$$

2. Полоидальная компонента: $B_{lm}(r)\,\vec{\Psi}_{lm}$

Пусть:

$$\vec{A} = B_{lm}(r)\,r\nabla Y_{lm} = B_{lm}(r)\,\vec{\Psi}_{lm}$$

Из литературы известно (см. Jackson, Barron), что:

$$\nabla\times\nabla\times[B_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm}] = \left[\frac{l(l+1)}{r^2}B_{lm}(r) - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dB_{lm}}{dr})\right]\vec{\Psi}_{lm} - \frac{l(l+1)}{r}\frac{dB_{lm}}{dr}\vec{Y}_{lm}$$

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\left[B_{lm}(r)\,\vec{\Psi}_{lm}\right] = \left[\frac{l(l+1)}{r^2}B_{lm} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dB_{lm}}{dr})\right]\vec{\Psi}_{lm} - \frac{l(l+1)}{r}\frac{dB_{lm}}{dr}\vec{Y}_{lm}}$$

3. Тороидальная компонента: $C_{lm}(r)\,\vec{\Phi}_{lm}$

Пусть:

$$\vec{A} = C_{lm}(r)\,\vec{\Phi}_{lm}$$

Используем тот факт, что:

$$\nabla \times \vec{\Phi}_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r} Y_{lm}\vec{e}_r = -\frac{l(l+1)}{r}\vec{Y}_{lm}$$

Следовательно:

$$\nabla \times \nabla \times \left[C_{lm}(r)\,\vec{\Phi}_{lm}\right] = \left[\frac{d^2 C_{lm}}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} C_{lm}\right]\vec{\Phi}_{lm}$$

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \left[C_{lm}(r)\,\vec{\Phi}_{lm}\right] = \left[\frac{d^2 C_{lm}}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} C_{lm}\right]\vec{\Phi}_{lm}}$$

НОВАЯ ПОПЫТКА

1 Вычисление двойного ротора в сферических координатах

Рассмотрим векторные поля, заданные через сферические гармоники:

$$\vec{Y}_{lm} = \vec{e}_r Y_{lm}, \quad \vec{\Psi}_{lm} = r\nabla Y_{lm}, \quad \vec{\Phi}_{lm} = \vec{r} \times \nabla Y_{lm}$$

где Y_{lm} - сферические гармоники, а $A_{lm}(r)$, $B_{lm}(r)$, $C_{lm}(r)$ - радиальные функции.

1.1 Случай 1: $\nabla \times \nabla \times [A_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}]$

Используем тождество:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

Для поля $\vec{V} = A_{lm}(r)\vec{Y}_{lm} = A_{lm}(r)Y_{lm}\vec{e}_r$:

1. Дивергенция:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} r(r^2 A_{lm} Y_{lm}) = \left(\frac{2}{r}A_{lm} + A'_{lm}\right) Y_{lm}$$

где $A'_{lm} = A_{lm} r$.

2. Градиент дивергенции:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) = \vec{e}_r r\left[\left(\frac{2}{r}A_{lm} + A'_{lm}\right) Y_{lm}\right] + \frac{1}{r}\nabla_\Omega\left[\left(\frac{2}{r}A_{lm} + A'_{lm}\right) Y_{lm}\right]$$

$$= \vec{e}_r \left(-\frac{2}{r^2} A_{lm} + \frac{2}{r} A'_{lm} + A''_{lm} \right) Y_{lm} + \left(\frac{2}{r} A_{lm} + A'_{lm} \right) \frac{\nabla_\Omega Y_{lm}}{r}$$

3. Лапласиан:

$$\nabla^2 \vec{V} = \left(\nabla^2 (A_{lm} Y_{lm}) - \frac{2 A_{lm} Y_{lm}}{r^2} \right) \vec{e}_r - \frac{2 A_{lm}}{r^2} \nabla_\Omega Y_{lm}$$

$$= \left(A''_{lm} + \frac{2}{r} A'_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} A_{lm} - \frac{2 A_{lm}}{r^2} \right) Y_{lm} \vec{e}_r - \frac{2 A_{lm}}{r^2} \nabla_\Omega Y_{lm}$$

4. Комбинируя результаты:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \frac{l(l+1)}{r^2} A_{lm} Y_{lm} \vec{e}_r + \frac{A'_{lm}}{r} \nabla_\Omega Y_{lm}$$

$$= \boxed{\frac{l(l+1)}{r^2} A_{lm}(r) Y_{lm} \vec{e}_r + \frac{A'_{lm}(r)}{r} \vec{\Psi}_{lm}}$$

1.2 Случай 2: $\nabla \times \nabla \times [B_{lm}(r) \vec{\Psi}_{lm}]$

Для $\vec{V} = B_{lm}(r) \vec{\Psi}_{lm} = B_{lm}(r) r \nabla Y_{lm}$:

1. Дивергенция:

$$\nabla \cdot \vec{V} = B_{lm} \nabla \cdot (r \nabla Y_{lm}) = B_{lm} \left(\frac{2}{r} + r \right) r Y_{lm} r + \text{угловые члены} = 0$$

(так как $\nabla^2 Y_{lm} = 0$ при $r \neq 0$).

2. Ротор:

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla \times (B_{lm} r \nabla Y_{lm}) = \nabla B_{lm} \times (r \nabla Y_{lm}) + B_{lm} \nabla \times (r \nabla Y_{lm})$$

$$= B'_{lm} \vec{e}_r \times (r \nabla Y_{lm}) = B'_{lm} r \vec{e}_r \times \nabla Y_{lm} = B'_{lm} \vec{\Phi}_{lm}$$

3. Второй ротор:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \times (B'_{lm} \vec{\Phi}_{lm}) = \nabla B'_{lm} \times \vec{\Phi}_{lm} + B'_{lm} \nabla \times \vec{\Phi}_{lm}$$

$$= B''_{lm} \vec{e}_r \times \vec{\Phi}_{lm} + B'_{lm} \left(-\frac{l(l+1)}{r} Y_{lm} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \vec{\Psi}_{lm} \right)$$

После упрощений:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \boxed{-\frac{l(l+1)}{r} \left(\frac{B_{lm}(r)}{r} + B'_{lm}(r) \right) Y_{lm} \vec{e}_r - \frac{2B'_{lm}(r) + r B''_{lm}(r)}{r} \vec{\Psi}_{lm}}$$

1.3 Случай 3: $\nabla \times \nabla \times [C_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}]$

Для $\vec{V} = C_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm} = C_{lm}(r)\vec{r} \times \nabla Y_{lm}$:

1. Дивергенция:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{поскольку } \vec{\Phi}_{lm} \text{ соленоидально})$$

2. Ротор:

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla C_{lm} \times \vec{\Phi}_{lm} + C_{lm} \nabla \times \vec{\Phi}_{lm}$$
$$= C'_{lm}\vec{e}_r \times \vec{\Phi}_{lm} + C_{lm}\left(-\frac{l(l+1)}{r}Y_{lm}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\vec{\Psi}_{lm}\right)$$

3. Второй ротор:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \times \left(C'_{lm}\vec{e}_r \times \vec{\Phi}_{lm} - \frac{l(l+1)}{r}C_{lm}Y_{lm}\vec{e}_r - \frac{C_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\right)$$

После вычислений:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \boxed{\left(\frac{l(l+1)}{r^2}C_{lm}(r) - \frac{2C'_{lm}(r)}{r} - C''_{lm}(r)\right)\vec{\Phi}_{lm}}$$

ГПТ 2

Сферические векторные гармоники и двойные роторы

Обозначения

$$Y_{\ell m} = Y_{\ell m}\,\hat{e}_r, \qquad \Psi_{\ell m} = r\,\nabla Y_{\ell m}, \qquad \Phi_{\ell m} = r \times \nabla Y_{\ell m}, \tag{1}$$
$$\lambda = \ell(\ell+1). \tag{2}$$

Полезные однократные роторы

$$\nabla \times Y_{\ell m} = -\frac{1}{r}\,\Phi_{\ell m}, \tag{3}$$
$$\nabla \times \Psi_{\ell m} = \frac{1}{r}\,\Phi_{\ell m}, \tag{4}$$
$$\nabla \times \Phi_{\ell m} = -\frac{\lambda}{r}\,Y_{\ell m} - \frac{1}{r}\,\Psi_{\ell m}. \tag{5}$$

Двойные роторы

1. $\nabla \times \nabla \times \big[A(r)\,Y_{\ell m}\big]$**.**

$$\nabla \times \nabla \times \big[A(r)\,Y_{\ell m}\big] = -\frac{\lambda\,A(r)}{r^2}\,Y_{\ell m} + \frac{A'(r)}{r}\,\Psi_{\ell m}. \tag{6}$$

2. $\nabla\times\nabla\times\big[B(r)\,\Psi_{\ell m}\big]$**.**

$$\nabla\times\nabla\times\big[B(r)\,\Psi_{\ell m}\big] = -\frac{\lambda}{r}\left(B'(r)+\frac{B(r)}{r}\right)Y_{\ell m} - \left(B''(r)+\frac{2B'(r)}{r}\right)\Psi_{\ell m}. \quad (7)$$

3. $\nabla\times\nabla\times\big[C(r)\,\Phi_{\ell m}\big]$**.**

$$\nabla\times\nabla\times\big[C(r)\,\Phi_{\ell m}\big] = \left(\frac{\lambda\,C(r)}{r^2} - C''(r) - \frac{2C'(r)}{r}\right)\Phi_{\ell m}. \quad (8)$$

Проверка для диполя ($\ell = 1$)

$C(r)$	$\big(\nabla\times\nabla\times[C(r)\Phi_{1m}]\big)$
const	$\dfrac{2}{r^2}\Phi_{1m}$
r	0
r^2	$-4\,\Phi_{1m}$