Решение задачи

На сфере радиуса R равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью σ. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, задаётся выражением

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \;=\; \frac{q_1\, q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{\,1+a}}.$$

Требуется найти силу, действующую на пробный точечный заряд q, расположенный внутри сферы (на расстоянии $r < R$ от её центра).

1. Потенциал внутри сферы

Пусть заряд q находится в точке $\mathbf{r}$ с $|\mathbf{r}| = r < R$. Поверхностный заряд равномерно распределён на сфере радиуса R с плотностью σ. Элементарный вклад в потенциал в точке $\mathbf{r}$ от элемента площади dS' в точке $\mathbf{r}'$ сферы (где $|\mathbf{r}'| = R$) равен

$$d\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\sigma\, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\,1+a}}.$$

Тогда полный потенциал:

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \sigma \int_{\text{сфера}} \frac{dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\,1+a}}.$$

Благодаря сферической симметрии, удобно выбрать ось z вдоль вектора $\mathbf{r}$. Тогда $|\mathbf{r}| = r$, для точек на сфере $|\mathbf{r}'| = R$, а угол θ' — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Запишем:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos\theta'}.$$

Площадь элемента сферы: $dS' = R^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'$. Тогда

$$\Phi(r) = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^2\,\sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'}{\bigl(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta'\bigr)^{\frac{1+a}{2}}}.$$

Интеграция по ϕ' даёт множитель 2π. Получаем

$$\Phi(r) = 2\pi\,\sigma\,R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{\bigl(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta'\bigr)^{\frac{1+a}{2}}}.$$

Введём $\alpha = \frac{1+a}{2}$. Сменим переменную $t = \cos\theta'$, тогда $\sin\theta'\, d\theta' = -\,dt$, и границы по t изменяются от 1 до -1. В результате:

$$\Phi(r) = 2\pi\,\sigma\,R^2 \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\bigl(R^2 + r^2 - 2Rr\,t\bigr)^{\alpha}}.$$

Обозначим $x = R^2 + r^2 - 2Rr\,t$, тогда $dx = -2Rr\,dt$. При $t = -1$ будет $x = (R+r)^2$, при $t = 1$ — $x = (R-r)^2$. Значит

$$\Phi(r) = 2\pi\,\sigma\,R^2 \int_{(R+r)^2}^{(R-r)^2} \frac{-\,dx}{2Rr\,x^{\alpha}} = \frac{\pi\,\sigma\,R^2}{R\,r} \int_{(R+r)^2}^{(R-r)^2} x^{-\alpha}\,dx.$$

Учитывая $\alpha = \frac{1+a}{2}$ и интеграл

$$\int x^{-\alpha}\,dx = \int x^{-\frac{1+a}{2}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{1-a}\,x^{\frac{1-a}{2}}, & a \neq 1, \\ \ln x, & a = 1, \end{cases}$$

для $a \neq 1$ получаем:

$$\Phi(r) = \frac{\pi\,\sigma\,R^2}{R\,r} \cdot \frac{2}{1-a} \Big[\big((R-r)^2\big)^{\frac{1-a}{2}} - \big((R+r)^2\big)^{\frac{1-a}{2}} \Big].$$

С учётом порядка пределов эта запись эквивалентна более удобному виду:

$$\Phi(r) = \frac{2\pi\,\sigma\,R}{(1-a)\,r} \Big[(R+r)^{\,1-a} - (R-r)^{\,1-a}\Big], \quad r < R,\ a \neq 1.$$

При $a = 0$ (обычный кулоновский случай $1/r$) внутри равномерно заряженной сферы потенциал оказывается константой, а поле (и сила) — равным нулю.

2. Сила на пробный заряд q

Сила на заряд q равна

$$\mathbf{F}(r) = -\,q\,\nabla\Phi(r).$$

Из-за симметрии $\mathbf{F}(r)$ направлена вдоль радиуса $\mathbf{r}$. Пусть $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Тогда

$$\mathbf{F}(r) = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}, \quad F(r) = -\,q\,\frac{d\Phi(r)}{dr}.$$

С учётом

$$\Phi(r) = \frac{2\pi\,\sigma\,R}{1-a}\,\frac{(R+r)^{1-a} - (R-r)^{1-a}}{r},$$

получаем

$$F(r) = -\,q\,\frac{d}{dr}\left[\frac{2\pi\,\sigma\,R}{1-a}\,\frac{(R+r)^{1-a} - (R-r)^{1-a}}{r}\right].$$

Раскрывая производную, можно оставить ответ в виде:

$$\mathbf{F}(r) = -\,q\,\nabla\Phi(r) = -\,q\,\frac{2\pi\,\sigma\,R}{1-a}\,\frac{d}{dr}\Big[\frac{(R+r)^{\,1-a} - (R-r)^{\,1-a}}{r}\Big]\,\hat{\mathbf{r}}, \quad r < R,\ a \neq 1.$$

Либо выписать полностью:

$$\mathbf{F}(r) = -\,q\,2\pi\,\sigma\,R\left[\frac{(R+r)^{-a} + (R-r)^{-a}}{r} - \frac{1}{1-a}\,\frac{(R+r)^{1-a} - (R-r)^{1-a}}{r^2}\right]\hat{\mathbf{r}}.$$

В частности, в центре сферы ($r = 0$) сила равна нулю, что согласуется с физической симметрией задачи.

3. Итоговый ответ

$$\boxed{\mathbf{F}(r) = -\,q\,\nabla\Phi(r) = -\,q\,\frac{2\pi\,\sigma\,R}{1-a}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{(R+r)^{1-a} \;-\; (R-r)^{1-a}}{r}\right]\hat{\mathbf{r}}, \quad r < R,\; a \neq 1.}$$

При $a = 0$ (обычном кулоновском законе) сила внутри сферы равна нулю. При $a = 1$ требуется отдельное рассмотрение интеграла с логарифмом, однако метод решения аналогичен.