Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
25.09.2024

Условие:

ЗАДАЧА 3 (4 БАЛЛА)

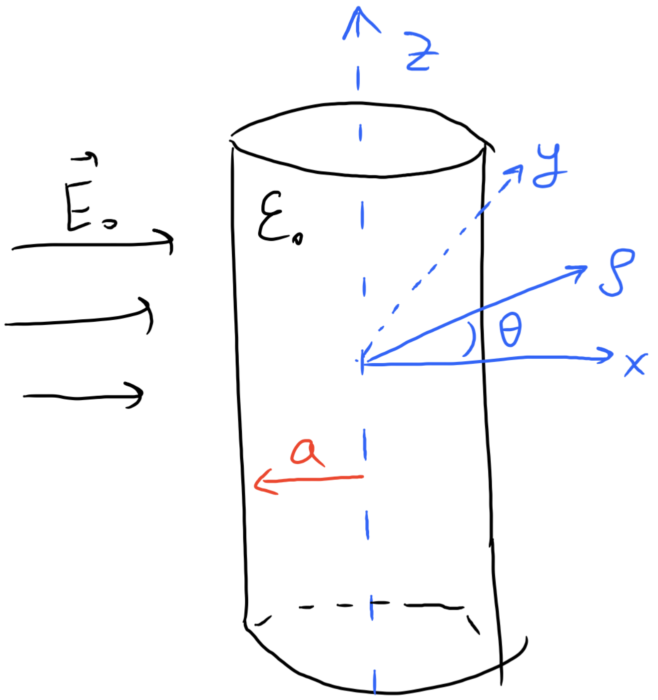
Бесконечный провод радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε помещён в постоянное электрическое поле амплитуды E_0 направленное поперек провода. Найти потенциал в пространстве и определить поле внутри провода.

Подсказка

Можно искать потенциал в виде:

$$\varphi(\rho) = \left[\begin{array}{lll} -E_i\rho\cos\theta\,, & \text{при} & \rho < a \\ -E_0\rho\cos\theta + \dfrac{d\cos\theta}{\rho}\,, & \text{при} & \rho > a \end{array}\right.$$

ρ — расстояние до центра циллиндра.



Решение:

$$div\left(\overrightarrow{D}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{D_{n_1}} = \overrightarrow{D_{n_2}}$$

$$\overrightarrow{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\overrightarrow{E}(\vec{r})$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1; \rho > a \\ \varepsilon; \rho \leq a \end{cases}$$

На границе:

$$E_n \mid_{\rho=a+0} = \varepsilon E_n \mid_{\rho=a-0}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\varphi \Rightarrow E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \mid_{\rho=a+0} = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \mid_{\rho=a-0}$$

Так же учтём непрерывность φ:

$$\varphi\mid_{\rho=a+0}=\varphi\mid_{\rho=a-0}$$

Воспользуемся подсказкой и граничными условиями для нахождения коэффициентов

$$\begin{cases}-E_0 a\cdot cos(\theta)+\frac{d\cdot cos(\theta)}{a}=-E_i a\cdot cos(\theta)\\ -E_0\cdot cos(\theta)-\frac{d\cdot cos(\theta)}{a^2}=-E_i\varepsilon\cdot cos(\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-E_0+\frac{d}{a^2}=-E_i\\ E_0+\frac{d}{a^2}=E_i\varepsilon\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0\\ E_i=\frac{2E_0}{\varepsilon+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\varphi=\begin{cases}-\frac{2E_0}{\varepsilon+1}\rho cos(\theta);\rho\leqslant a\\ -E_0\rho cos(\theta)+\frac{E_0}{\rho}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}cos(\theta);\rho>a\end{cases}$$

В цилиндрических координатах:

$$\overrightarrow{\nabla}=\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$$

В силу симметрии задачи по $z\Rightarrow\frac{\partial}{\partial z}=0$

$$\overrightarrow{E}_{\text{внутр}}=-\overrightarrow{\nabla}\varphi;\ \text{при }\rho\leqslant a$$

$$\overrightarrow{E}_{\text{внутр}}=\frac{2E_0}{\varepsilon+1}cos(\theta)\vec{e_\rho}-\frac{2E_0}{\varepsilon+1}sin(\theta)\vec{e_\theta}$$

Ответ:

$$\varphi=\begin{cases}-\frac{2E_0}{\varepsilon+1}\rho cos(\theta);\rho\leqslant a\\ -E_0\rho cos(\theta)+\frac{E_0}{\rho}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}cos(\theta);\rho>a\end{cases}$$

$$\overrightarrow{E}_{\text{внутр}}=\frac{2E_0}{\varepsilon+1}cos(\theta)\vec{e_\rho}-\frac{2E_0}{\varepsilon+1}sin(\theta)\vec{e_\theta}$$