Решение задачи (в стиле пошаговой инструкции)

Ниже разбираем задачу достаточно подробно и «шаг за шагом», чтобы был понятен общий метод решения рассеяния эллиптически поляризованного света на таком «составном параболоиде». Стиль ответа немного неформальный, как просили.

1. Геометрия задачи и исходные данные

1. **Фигура.** Дана фигура, образованная склеиванием двух параболоидов вращения с радиусом R и высотой $h = \frac{3}{2}R$. Ось фигуры совмещена с осью x. Центр – в начале координат. Уравнение (в упрощённом виде):

   $$|x| < h\Big(1 - \tfrac{y^2+z^2}{R^2}\Big).$$

   Диэлектрическая проницаемость: $\varepsilon = 9$.

2. **Падающая волна.** Распространяется вдоль оси z, имеет эллиптическую поляризацию с параметрами Стокса:

   $$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \tfrac{24}{25}, \quad \xi_3 = -\tfrac{7}{25}.$$

   Эти ξ_i обычно определяются как $\xi_i = S_i/S_0$, где S_i – компоненты вектора Стокса падающей волны.

3. **Что нужно найти.** Требуется определить параметры Стокса рассеянной волны $\big(\xi_1', \xi_2', \xi_3'\big)$ в направлении, заданном сферическими координатами θ и φ, причём θ – угол с осью z, а φ – угол между плоскостью рассеяния и плоскостью xz.

4. **Подсказка.** В условии советуют вычислить «коэффициенты деполяризации» и «поляризуемости» α_i вдоль главных осей (здесь x, y, z):

   $$\alpha_i = \frac{p_i}{E_{0,i}}, \quad i = x, y, z,$$

   где p_i – проекции индуцированного дипольного момента, а $E_{0,i}$ – проекции падающего электрического поля.

2. Выбор аппроксимации и идея решения

Чаще всего подобные задачи (особенно если размер фигуры мал по сравнению с длиной волны) решают в **дипольном (или квазистатическом) приближении**:

1. **Предположение о малости.** Считаем, что фигура намного меньше длины волны λ. Тогда рассеяние описывается как рассеяние на электрическом диполе, который индуцируется внешним полем внутри частицы.

2. **Главные оси и поляризуемости.** В квазистатической модели поляризуемость вдоль главных осей эллипсоидальной (или близкой к эллипсоидальной) частицы задаётся формулой:

$$\alpha_i = \frac{V\,(\varepsilon - 1)}{1 + (\varepsilon - 1)\,N_i},$$

где V – объём частицы, а N_i – деполяризационный коэффициент вдоль i-й оси. Для сферических или эллипсоидальных тел N_x, N_y, N_z можно взять из стандартных таблиц.

В твоём случае тело не строго эллипсоид, а *составной параболоид*. Тем не менее при не слишком большом вытягивании его часто *приближённо* заменяют «prolate spheroid» (вытянутым эллипсоидом), у которого две полуоси равны R (по y и z), а третья равна h (по x). Тогда можно применять формулы для prolate spheroid, считая $a = R$, $c = h$.

3. **Итоговое дипольное поле.** Индуцированный диполь $\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{E}_0$. Далее, в дальней зоне (far field) амплитуда рассеянного поля $\mathbf{E}_{\mathrm{scat}}$ пропорциональна $\mathbf{p} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p})$ и зависит от угла θ, φ.

4. **Вычисление параметров Стокса.** Имея $\mathbf{E}_{\mathrm{scat}}$ во вращающемся базисе (или в базисе $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$) для данного направления θ, φ, можно выписать компоненты (скажем, E_θ, E_φ). Затем стандартными формулами переходят к $\mathbf{S}' = (S_0', S_1', S_2', S_3')$. И уже нормируют их на S_0', получая $\xi_i' = S_i'/S_0'$.

3. Формальная последовательность шагов

Шаг 1. Определи деполяризационные факторы N_i.

Для вытянутого сфероида с полуосями (c, a, a) (пусть $c = h$ вдоль x, а $a = R$ вдоль y, z) известны аналитические выражения. Если $c > a$ (prolate), то

$$N_x \;=\; \frac{1 - e^2}{e^3}\Big(\tfrac{1}{2}\ln\frac{1 + e}{1 - e} \;-\; e\Big), \quad N_y = N_z = \tfrac{1}{2}\big(1 - N_x\big),$$

где $e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$.

Шаг 2. Поляризуемости α_i.

Пусть объём приблизительно $V \approx \frac{4}{3}\pi a^2 c$. Тогда:

$$\alpha_x = \frac{V(\varepsilon - 1)}{1 + (\varepsilon - 1)\,N_x}, \quad \alpha_y = \alpha_z = \frac{V(\varepsilon - 1)}{1 + (\varepsilon - 1)\,N_y}.$$

Зная α_i, можно найти индуцированный диполь $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, где

$$p_i = \alpha_i\,E_{0,i}.$$

Шаг 3. Падающая волна и её разложение по осям.

У нас эллиптическая поляризация со Стоксами $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 24/25$, $\xi_3 = -7/25$.

- $\xi_1 = 0$ говорит о равенстве интенсивностей «по горизонтали и вертикали» (если смотреть на волновой вектор вдоль z).
- $\xi_2 \neq 0$ и $\xi_3 \neq 0$ отражают фазовые сдвиги и форму эллипса.

Чтобы найти $E_{0,x}, E_{0,y}, E_{0,z}$, надо аккуратно учесть, как волна падает вдоль z. Обычно для волны, идущей вдоль z, компоненту $E_{0,z}$ часто берут близкой к нулю в приближении плоской поперечной волны, а основные компоненты – $E_{0,x}$ и $E_{0,y}$. Но форму эллиптической поляризации можно задать так:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{с некоторым относительным фазовым сдвигом.}$$

Далее, используя связь с ξ_2, ξ_3, ты можешь точно восстановить фазу и амплитуды.

Шаг 4. Индуцированный диполь p.

Так как $\mathbf{p} = (\alpha_x E_{0,x},\, \alpha_y E_{0,y},\, \alpha_z E_{0,z})$, в нашем случае $E_{0,z} \approx 0$, значит $p_z \approx 0$. Главные компоненты будут p_x и p_y.

Шаг 5. Дальняя зона и поле рассеяния.

В дипольном приближении поле в направлении $\hat{\mathbf{n}}$ (с углами θ, φ) пропорционально

$$\mathbf{E}_{\text{scat}} \;\propto\; \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}).$$

В сферических координатах базис можно брать $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$. Но чаще для поляризации используют пару $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.

Шаг 6. Параметры Стокса рассеянной волны.

1. Находишь компоненты E_θ, E_φ рассеянной волны.
2. Вычисляешь вектор Стокса по стандартным формулам:
$$S_0' \;=\; |E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2, \qquad S_1' \;=\; |E_\theta|^2 - |E_\varphi|^2,$$
$$S_2' \;=\; 2\,\Re\{E_\theta E_\varphi^*\}, \quad S_3' \;=\; 2\,\Im\{E_\theta E_\varphi^*\}.$$
3. Наконец, $\xi_i' = S_i'/S_0'$. Это и будут искомые параметры Стокса в направлении (θ, φ).

4. Короткая иллюстрация на простом примере

Для закрепления возьмём *линейно поляризованную* волну (по x) и *сферу* (то есть $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$). Тогда:

- Индуцированный диполь $\mathbf{p} = \alpha(E_0, 0, 0)$.
- Поле рассеяния $\mathbf{E}_{\text{scat}} \propto \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}})$. Если $\hat{\mathbf{n}}$ лежит под углом θ к оси z, то подставляем $\mathbf{p} = (p_x, 0, 0)$ и $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Получаем компоненты, из которых нетрудно найти S_0', S_1', и т.д.

У нас случай сложнее (эллиптическая поляризация + неравные α_i), но суть та же.

5. Итоги

1. **Сначала** (по подсказке) ищешь $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ через деполяризационные коэффициенты.
2. **Далее** раскладываешь падающее поле по x, y, z. С учётом эллиптической поляризации тебе придётся аккуратно восстановить реальные и мнимые части амплитуд $E_{0,x}, E_{0,y}$ так, чтобы удовлетворить ξ_2, ξ_3.
3. **Находишь** $\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{E}_0$.
4. **Вычисляешь** рассеянное поле $\mathbf{E}_{\text{scat}}(\theta, \varphi)$ в дипольном приближении.
5. **Считаешь** ξ_1', ξ_2', ξ_3' по стандартным формулам для параметров Стокса.

Таким образом, задача сводится к технике расчёта индуцированного диполя и переводу его в наблюдаемое поле в дальней зоне. Точная подстановка чисел (например, $\varepsilon = 9$, $h = 1.5\,R$, $\xi_2 = 24/25$, и т.д.) уже дело «чистой вычислительной рутины», где аккуратно прогонишь формулы.

Если нужен финальный вид $\xi_i'(\theta, \varphi)$, то обычно получают выражения вида

$$\xi_i'(\theta,\varphi) \;=\; \frac{(\text{комбинации } \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z,\ E_{0,x}, E_{0,y}, \theta, \varphi)}{(\text{другая комбинация тех же величин})},$$

причём сами «комбинации» могут быть громоздкими, поэтому их часто в явном виде не пишут, ограничиваясь *алгоритмом* расчёта.

Заключение

В итоге *решение* в общем виде выглядит как описанный **пошаговый алгоритм**:

1. Принимаешь модель дипольного рассеяния.
2. Используешь приближённую форму поляризуемости вдоль главных осей.
3. Раскладываешь поле, находишь $\mathbf{p}$.
4. Находишь $\mathbf{E}_{\text{scat}}$.
5. Считаешь ξ_1', ξ_2', ξ_3' по стандартным формулам для параметров Стокса.

Подстановка конкретных чисел – это уже «техническая» часть, зато основные формулы даны выше. Если аккуратно всё «проткнуть» числами, то получится явная зависимость $\xi_i'(\theta, \varphi)$.