Преобразования Лоренца

В физике преобразования Лоренца - линейная группа преобразований пространства времени, относительно которой законы физики должны быть инварианты.

А именно, если $A_1(\vec{r};ct);\ldots;A_n(\vec{r};ct)$ - физические величины, $F(A_1;\ldots,A_n)=0$ - закон, связывающий их, то после преобразований Λ:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Новые величины $A'_1(\vec{r'};ct');\ldots;A'_n(\vec{r'};ct')$ будут подчиняться тому же закону $F(A'_1;\ldots,A'_n)=0$.

Группа Лоренца состоит из 3-х групп: поворотов, сдвигов и Лоренцевых бустов. Про первые 2 все понятно. Мы знаем как выглядит общая матрица поворота и сдвиг:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix};\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Я получу матрицу Лоренцево буста в общем виде.

Всем достаточно хорошо известна эта матрица в случае сонаправленности скорости с одной из осей (например x):

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

А если обозначить $\beta \coloneqq \frac{v}{c}$; $\gamma \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}$ то:

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Но что делать если нужно совершить буст в направлении не совпадающим с осями, например когда $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$? Из 1-ого случая мы видим что какое-либо изменение происходит по оси, параллельной направлению скорости.

Распишем:

$$\begin{gathered} \vec{r} = \vec{r_\parallel} + \vec{r_\perp} \\ \vec{r}\,' = \vec{r_\parallel}' + \vec{r_\perp}' \end{gathered} \tag{5}$$

Где:

$$\vec{r_\parallel} = \left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v}$$
$$\vec{r_\perp} = \vec{r} - \left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} \tag{6}$$

Тогда:

$$ct' = \gamma\left(ct - \left(\vec{\beta}\cdot\vec{r_\parallel}\right)\right)$$
$$\vec{r_\parallel}' = \gamma\left(\vec{r_\parallel} - \vec{\beta}ct\right) \tag{7}$$
$$\vec{r_\perp}' = \vec{r_\perp}$$

В общем виде:

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta\left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\right)$$
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma-1)\left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} - \gamma\vec{\beta}ct \tag{8}$$

И матрица преобразования Лоренца в общем случае:

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_x}{c} & -\gamma\frac{v_y}{c} & -\gamma\frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & 1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma\frac{v_y}{c} & (\gamma-1)\frac{v_y v_x}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma\frac{v_z}{c} & (\gamma-1)\frac{v_z v_x}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_z v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Для скорости тоже общий вид напишу для красоты, получить который можно расписав дифференциалы:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$
$$\gamma_v \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$
$$\vec{u}\,' = \frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}}\left(\frac{\vec{u}}{\gamma_v} - \vec{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{v}\right)$$

Ну и на десерт формула, которую я мало понимаю, но выглядящую красиво. Преобразование общего *невзаимодействующего* многочастичного состояния (состояния из пространства Фока) в квантовой теории поля:

$$U(\Lambda;a)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\ldots} =$$
$$= e^{-ia_\mu\left[(\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \ldots\right]}\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0\,(\Lambda p_2)^0\ldots}{p_1^0 p_2^0\ldots}}\left(\sum_{\sigma_1'\sigma_2'\ldots} D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}[W(\Lambda;p_1)]D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}[W(\Lambda;p_2)]\ldots\right)\Psi_{\Lambda p_1\sigma_1' n_1;\Lambda p_2\sigma_2' n_2;\ldots} \tag{11}$$

Где $W(\Lambda;p)$ - вигнеровское вращение, а $D^{(j)}$ - $(2j+1)$-мерное представление группы $SO(3)$.