Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
25.09.2024

Условие:

Задача 4 (6 баллов)

Двумерный слой расположен в вакууме в плоскости $z = 0$. Вектор поляризуемости слоя

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\rho}, z) = \delta(z)\alpha\boldsymbol{E}_{\parallel}(\rho), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ - двумерный радиус вектор и $\boldsymbol{E}_{\parallel}(\rho)$ - поле в слое

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}) = -\operatorname{grad}_{\boldsymbol{\rho}} \varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0) \tag{2}$$

Найти потенциал, который наводит в слое точечный заряд e с учетом наведенной поляризуемости слоя (1).

Подсказка:

$$\int\limits_0^\infty dx \frac{\mathrm{J}_0(ax)}{x+1} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{H}_0(a) - \mathrm{N}_0(a)), \tag{3}$$

где J_0, H_0, N_0 - функции Бесселя, Струве и Неймана, соответственно.

Решение:

Полный потенциал φ на $z = 0$ является суммой потенциала от точечного заряда φ_0 и индуцированного потенциала φ_{ind} от поляризации слоя:

$$\varphi(\vec{\rho}, z = 0) = \varphi_0(\vec{\rho}, z = 0) + \varphi_{\text{ind}}(\vec{\rho}, z = 0)$$

$$\varphi_0(\vec{\rho}, z = 0) = \frac{e}{\rho}$$

Индуцированная поверхностная плотность заряда σ_{ind} связана с поляризацией следующим образом:

$$\sigma_{\text{ind}}(\vec{\rho}, z) = -\nabla_{\vec{\rho}} \cdot \mathbf{P}_{\parallel}(\vec{\rho}, z)$$

Подставляя

$$\mathbf{P}_{\parallel}(\vec{\rho}, z) = \alpha\delta(z)\mathbf{E}_{\parallel}(\vec{\rho})$$

и

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\vec{\rho}) = -\nabla_{\vec{\rho}}\varphi(\vec{\rho}, z = 0)$$

получаем:

$$\sigma_{\text{ind}}(\vec{\rho}, z) = \alpha\delta(z)\nabla^2_{\vec{\rho}}\varphi(\vec{\rho}, z = 0)$$

$$\varphi_{\text{ind}}(\vec{\rho}, z) = \int \frac{\sigma_{\text{ind}}(\vec{\rho}\,')}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|} d^2\rho'\delta(z - z')dz' =$$

$$= \int \frac{\sigma_{\text{ind}}(\vec{\rho}\,')}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|} d^2\rho'$$

Фурье:

$$\tilde{f}(\vec{k},\chi) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}-iz\chi} f(\vec{\rho},z)\, d^2\rho dz$$

$$f(\vec{\rho},z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}+iz\chi}\tilde{f}(\vec{k},\chi)\, d^2k d\chi$$

Для точечного заряда знаем:

$$\tilde{\varphi}_0(\vec{k},\chi) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\frac{e}{\rho}\, d^2\rho = 2\pi\frac{e}{k}$$

Из интегрального представления для индуцироного потенциала получаем уравнение на Фурье образы. Так как под интегралом стоит свертка, то:

$$\tilde{\varphi}_{\text{ind}}(\vec{k},\chi) = 2\pi\frac{\tilde{\sigma}_{\text{ind}}(\vec{k},\chi)}{k}$$

Используя:

$$\sigma_{\text{ind}}(\vec{\rho}) = \alpha\delta(z)\nabla^2_{\vec{\rho}}\varphi(\vec{\rho},z=0)$$

получаем:

$$\tilde{\sigma}_{\text{ind}}(\vec{k},\chi) = -\alpha k^2\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi)$$

Подставляем:

$$\tilde{\varphi}_{\text{ind}}(\vec{k},\chi) = -2\pi\alpha k\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi)$$

Так как:

$$\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi) = \tilde{\varphi}_0(\vec{k}),\chi + \tilde{\varphi}_{\text{ind}}(\vec{k},\chi) = \tilde{\varphi}_0(\vec{k},\chi) - 2\pi\alpha k\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi)$$

$$(1+2\pi\alpha k)\,\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi) = 2\pi\frac{e}{k}$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{k},\chi) = \frac{2\pi e}{k\,(1+2\pi\alpha k)}$$

Обратный Фурье:
По $z=0$ ничего не меняется:

$$\tilde{\varphi}(\vec{k},z=0) = \frac{2\pi e}{k\,(1+2\pi\alpha k)}$$

$$\varphi(\vec{\rho},z=0) = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\cdot\frac{2\pi e}{k\,(1+2\pi\alpha k)} =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\frac{kdkd\theta}{(2\pi)^2}\cdot e^{ik\rho\cos(\theta)}\cdot\frac{2\pi e}{k\,(1+2\pi\alpha k)} =$$

$$= \int\limits_0^\infty\frac{dk}{2\pi}\cdot\frac{2\pi e}{(1+2\pi\alpha k)}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\cdot e^{ik\rho\cos(\theta)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{2\pi e}{(1+2\pi\alpha k)} \cdot J_0(k\rho) =$$

$$= \frac{2\pi e}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty dx \frac{J_0(x \cdot \rho/2\pi\alpha)}{1+x}$$

$$= \frac{e}{4\alpha} \left[H_0(\rho/2\pi\alpha) - N_0(\rho/2\pi\alpha) \right]$$

Ответ:

$$\varphi(\vec{\rho}, z=0) = \frac{e}{4\alpha} \left[H_0(\rho/2\pi\alpha) - N_0(\rho/2\pi\alpha) \right]$$