Решение задачи

Пусть в группе 14 человек, каждый с уникальным днём рождения (все 365 дней равновероятны). Определим случайную величину:

$$X = \text{число месяцев, в которых есть хотя бы один день рождения.}$$

Требуется найти математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$ и дисперсию $\mathrm{D}[X]$.

Математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$

Обозначим индикатор события «в месяце m есть хотя бы один ДР» как I_m. Тогда

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_{12}, \quad \mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{12} \mathbb{E}[I_m].$$

Заметим, что $\mathbb{E}[I_m] = P(\text{в месяце } m \text{ есть хотя бы один ДР})$. Обозначим n_m за число дней в m-м месяце. Тогда вероятность, что **ни** один из 14 разных дней рождений не попадает в месяц m, равна

$$\frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}[I_m] = 1 \; - \; \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{12} \left[1 - \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}\right].$$

Для упрощения делим месяцы на группы:

- Месяцы по 31 дню: 7 штук (январь, март, май, июль, август, октябрь, декабрь).
- Месяцы по 30 дней: 4 штуки (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь).
- Февраль (28 дней, в невисокосном году): 1 штука.

Обозначим:

$$a_{31} = \frac{C_{365-31}^{14}}{C_{365}^{14}}, \quad a_{30} = \frac{C_{365-30}^{14}}{C_{365}^{14}}, \quad a_{28} = \frac{C_{365-28}^{14}}{C_{365}^{14}},$$

и

$$p_{31} = 1 - a_{31}, \quad p_{30} = 1 - a_{30}, \quad p_{28} = 1 - a_{28}.$$

Приближённые численные значения:

$$a_{31} \approx 0.291 \;\Rightarrow\; p_{31} \approx 0.709,$$

$$a_{30} \approx 0.300 \;\Rightarrow\; p_{30} \approx 0.700,$$
$$a_{28} \approx 0.328 \;\Rightarrow\; p_{28} \approx 0.672.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[X] = 7\,p_{31} + 4\,p_{30} + 1\,p_{28} \approx 7 \times 0.709 \;+\; 4 \times 0.700 \;+\; 1 \times 0.672 \approx 8.44.$$

Дисперсия $\mathrm{D}[X]$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

При этом

$$X^2 = \left(\sum_{m=1}^{12} I_m\right)^2 = \sum_{m=1}^{12} I_m + 2 \sum_{1\le i<j\le 12} I_i I_j,$$

откуда

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{m=1}^{12} \mathbb{E}[I_m] + 2 \sum_{1\le i<j\le 12} \mathbb{E}[I_i I_j].$$

Здесь $\mathbb{E}[I_m] = p_m$ уже известны, а

$$\mathbb{E}[I_i I_j] = P\big(M_i \cap M_j\big),$$

где $M_m = \{$в месяце m есть хотя бы один ДР$\}$.

Чтобы найти $P(M_i \cap M_j)$, используем

$$P(M_i \cap M_j) = 1 \;-\; P(\overline{M_i} \cup \overline{M_j}) = 1 \;-\; \Big[P(\overline{M_i}) + P(\overline{M_j}) - P(\overline{M_i} \cap \overline{M_j})\Big].$$

$$P(\overline{M_i}) = \frac{C_{365-n_i}^{14}}{C_{365}^{14}} = a_i, \quad P(\overline{M_i} \cap \overline{M_j}) = \frac{C_{365-n_i-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Тогда

$$P(M_i \cap M_j) = 1 - a_i - a_j + \frac{C_{365-n_i-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Приближённо получаем для разных сочетаний (31–31, 31–30, ...):

$$a_{31,31} \approx \left(\frac{303}{365}\right)^{14} \approx 0.074 \quad\Longrightarrow\quad p_{31,31} \approx 1 - 0.291 - 0.291 + 0.074 \approx 0.492,$$

$$a_{30,30} \approx \left(\frac{305}{365}\right)^{14} \approx 0.080 \quad\Longrightarrow\quad p_{30,30} \approx 0.48,$$

$$a_{31,30} \approx \left(\frac{304}{365}\right)^{14} \approx 0.078 \quad\Longrightarrow\quad p_{31,30} \approx 0.487,$$

$$a_{31,28} \approx \left(\frac{306}{365}\right)^{14} \approx 0.085 \quad \Longrightarrow \quad p_{31,28} \approx 0.466,$$

$$a_{30,28} \approx \left(\frac{307}{365}\right)^{14} \approx 0.088 \quad \Longrightarrow \quad p_{30,28} \approx 0.46.$$

Число пар:

$C_7^2 = 21$ (месяцы 31–31), $C_4^2 = 6$ (30–30), $7 \times 4 = 28$ (31–30), $7 \times 1 = 7$ (31–28), $4 \times 1 = 4$ (30–28).

Сумма:

$$\sum_{i<j} p_{i,j} \approx 21 \times 0.492 + 6 \times 0.48 + 28 \times 0.487 + 7 \times 0.466 + 4 \times 0.46 \approx 31.95.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{m=1}^{12} p_m + 2 \cdot 31.95 = 8.435 + 63.9 \approx 72.335.$$

$$\mathrm{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \approx 72.335 - (8.435)^2 \approx 72.335 - 71.11 = 1.225.$$

Итого:

$$\boxed{\mathbb{E}[X] \approx 8.44, \quad \mathrm{D}[X] \approx 1.23.}$$

Решение задачи (точными выражениями)

Пусть в группе имеется 14 человек, каждый из которых имеет **уникальный** день рождения (никакие двое не родились в один и тот же день). Считаем, что все 365 дней года равновероятны и независимы (исключая то, что дни рождения не совпадают). Определим случайную величину:

$$X = \text{число месяцев, в которых есть хотя бы один день рождения.}$$

Требуется найти:

$$\mathbb{E}[X] \quad \text{и} \quad \mathrm{D}[X].$$

Обозначения

Для каждого месяца $m \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ пусть n_m — количество дней в месяце. Тогда:

$$n_1 = 31, \quad n_2 = 28, \quad n_3 = 31, \quad n_4 = 30, \quad n_5 = 31, \quad n_6 = 30, \quad n_7 = 31, \quad n_8 = 31,$$

$$n_9 = 30, \quad n_{10} = 31, \quad n_{11} = 30, \quad n_{12} = 31.$$

(Исходим из невисокосного года, чтобы сумма была 365.)

Определим событие M_m: «в месяце m есть хотя бы один день рождения». Тогда индикатор I_m этого события равен:

$$I_m = \begin{cases} 1, & \text{если в месяце } m \text{ хотя бы один ДР}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда:

$$X \;=\; \sum_{m=1}^{12} I_m.$$

Математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\Big[\sum_{m=1}^{12} I_m\Big] = \sum_{m=1}^{12} \mathbb{E}[I_m].$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}[I_m] \;=\; P(M_m).$$

А именно, $P(M_m)$ — вероятность того, что хотя бы у одного из 14 человек день рождения попадает в месяц m. Обозначим:

$$P(\overline{M_m}) = \text{вероятность того, что в месяце } m \text{ нет ни одного ДР.}$$

Так как дни рождения **различны** и равновероятны по всем 365 дням,

$$P(\overline{M_m}) \;=\; \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}},$$

то есть нам нужно *выбрать* все 14 дат рождения *только* из оставшихся $365 - n_m$ дней. Отсюда:

$$P(M_m) \;=\; 1 - P(\overline{M_m}) \;=\; 1 - \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{12} \Big[1 - \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}\Big].$$

Это **точное** выражение, без каких-либо приближений.

Развёрнуто (по месяцам):

$$\mathbb{E}[X] = \Big[1 - \frac{C_{334}^{14}}{C_{365}^{14}}\Big] + \Big[1 - \frac{C_{337}^{14}}{C_{365}^{14}}\Big] + \Big[1 - \frac{C_{334}^{14}}{C_{365}^{14}}\Big] + \Big[1 - \frac{C_{335}^{14}}{C_{365}^{14}}\Big] + \dots$$

причём каждый месяц «вклад» в сумму даёт ровно $1 - \frac{C_{365-n_m}^{14}}{C_{365}^{14}}$.

Дисперсия $\mathrm{D}[X]$

По определению дисперсии:

$$\mathrm{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Для вычисления $\mathbb{E}[X^2]$ удобно воспользоваться формулой:

$$X^2 = \Big(\sum_{m=1}^{12} I_m\Big)^2 = \sum_{m=1}^{12} I_m \ + \ 2 \sum_{1 \le i < j \le 12} I_i \, I_j.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{m=1}^{12} \mathbb{E}[I_m] \ + \ 2 \sum_{1 \le i < j \le 12} \mathbb{E}[I_i \, I_j].$$

Заметим, что $\mathbb{E}[I_m] = P(M_m)$, а

$$\mathbb{E}[I_i \, I_j] = P(M_i \cap M_j),$$

то есть вероятность того, что **оба** месяца i и j содержат хотя бы один день рождения.

Вычисление $P(M_i \cap M_j)$.

$$P(M_i \cap M_j) = 1 - P\big(\overline{M_i} \cup \overline{M_j}\big) = 1 - \Big[P(\overline{M_i}) + P(\overline{M_j}) - P(\overline{M_i} \cap \overline{M_j})\Big].$$

$$P(\overline{M_i}) = \frac{C_{365-n_i}^{14}}{C_{365}^{14}}, \quad P(\overline{M_j}) = \frac{C_{365-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}},$$

а событие $\overline{M_i} \cap \overline{M_j}$ означает «в месяцах i *и* j нет ни одного ДР», значит

$$P(\overline{M_i} \cap \overline{M_j}) = \frac{C_{365-n_i-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}}$$

(опять же, мы выбираем все 14 дат из $365 - n_i - n_j$ «доступных» дней, исключая месяцы i и j). Следовательно,

$$P(M_i \cap M_j) = 1 - \left[\frac{C_{365-n_i}^{14}}{C_{365}^{14}} \ + \ \frac{C_{365-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}} \ - \ \frac{C_{365-n_i-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}}\right].$$

Итого $\mathbb{E}[I_i I_j] = P(M_i \cap M_j)$ будет

$$P(M_i \cap M_j) = 1 \ - \ \frac{C_{365-n_i}^{14}}{C_{365}^{14}} \ - \ \frac{C_{365-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}} \ + \ \frac{C_{365-n_i-n_j}^{14}}{C_{365}^{14}}.$$

Итоговое выражение для $\mathbb{E}[X^2]$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{m=1}^{12}\Bigl[1-\frac{C^{14}_{365-n_m}}{C^{14}_{365}}\Bigr] + 2\sum_{1\le i<j\le 12}\Bigl[1-\frac{C^{14}_{365-n_i}}{C^{14}_{365}}-\frac{C^{14}_{365-n_j}}{C^{14}_{365}}+\frac{C^{14}_{365-n_i-n_j}}{C^{14}_{365}}\Bigr].$$

Отсюда:

$$\mathrm{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] \;-\; \bigl(\mathbb{E}[X]\bigr)^2.$$

Все слагаемые $\binom{a}{b}$ (или C_a^b) здесь считаются точно, без приближений, и упрощать можно лишь *комбинаторно*, если захочется.

Итоговые точные формулы

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{12}\Bigl[1-\frac{C^{14}_{365-n_m}}{C^{14}_{365}}\Bigr],\quad \mathrm{D}[X] = \sum_{m=1}^{12}\Bigl[1-\frac{C^{14}_{365-n_m}}{C^{14}_{365}}\Bigr] + 2\sum_{1\le i<j\le 12}\Bigl[1-\frac{C^{14}_{365-n_i}}{C^{14}_{365}}-\frac{C^{14}_{365-n_j}}{C^{14}_{365}}+\frac{C^{14}_{365-n}}{C^{14}_{36}}}$$

Другими словами, все «числа» в этих выражениях представляют собой *точные* комбинаторные величины, вычисляемые по формуле $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.