Решение задачи 4

Условие задачи

Двумерный слой расположен в вакууме в плоскости $z = 0$. Вектор поляризуемости слоя задан как

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}, z) = \delta(z)\,\alpha\,\mathbf{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}),$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — двумерный радиус-вектор в плоскости, α — скалярная поляризуемость, а $\mathbf{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho})$ — электрическое поле в плоскости $z = 0$:

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}) = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0).$$

Найти потенциал, который наводит в слое точечный заряд e, с учётом наведённой поляризуемости слоя.

Решение

1. Понимание системы

Рассматривается точечный заряд e, расположенный в начале координат ($\boldsymbol{\rho} = 0, z = 0$), рядом с двумерным поляризуемым слоем в плоскости $z = 0$. Заряд создаёт электрическое поле, которое наводит в слое поляризацию, влияющую на общий потенциал. Требуется найти полный потенциал $\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$ в плоскости слоя.

2. Формулировка задачи

Полный потенциал φ на $z = 0$ является суммой потенциала от точечного заряда φ_0 и наведённого потенциала φ_{ind} от поляризации слоя:

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \varphi_0(\boldsymbol{\rho}, z = 0) + \varphi_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}, z = 0).$$

Потенциал от точечного заряда

В системе СГС потенциал от точечного заряда в двумерном пространстве при $z = 0$ равен:

$$\varphi_0(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \frac{e}{\rho},$$

где $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$.

Наведённая поверхностная плотность заряда

Наведённая поверхностная плотность заряда σ_{ind} связана с поляризацией следующим образом:

$$\sigma_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}) = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{P}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}, z = 0).$$

Подставляя $\mathbf{P}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \alpha\mathbf{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho})$ и $\mathbf{E}_{\parallel}(\boldsymbol{\rho}) = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$, получаем:

$$\sigma_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}) = \alpha\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}}\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0).$$

Наведённый потенциал

Наведённый потенциал на $z = 0$ от σ_{ind} выражается через интеграл:

$$\varphi_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \int \frac{\sigma_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}')}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} \, d^2\rho'.$$

3. Применение преобразования Фурье

Для упрощения свёртки воспользуемся двумерным преобразованием Фурье по переменной $\boldsymbol{\rho}$.

Определения преобразования Фурье

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются как:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} f(\boldsymbol{\rho}) \, d^2\rho,$$

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \, d^2k.$$

Преобразование Фурье потенциала от точечного заряда

Преобразование Фурье от $\varphi_0(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$:

$$\tilde{\varphi}_0(\boldsymbol{k}) = \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \frac{e}{\rho} \, d^2\rho = 2\pi \frac{e}{k},$$

где $k = |\boldsymbol{k}|$.

Преобразование Фурье наведённого потенциала

В преобразованном пространстве наведённый потенциал связан с $\tilde{\sigma}_{\text{ind}}(\boldsymbol{k})$ следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_{\text{ind}}(\boldsymbol{k}) = 2\pi \frac{\tilde{\sigma}_{\text{ind}}(\boldsymbol{k})}{k}.$$

Преобразование Фурье наведённой плотности заряда

Используя $\sigma_{\text{ind}}(\boldsymbol{\rho}) = \alpha \nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} \varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$, получаем:

$$\tilde{\sigma}_{\text{ind}}(\boldsymbol{k}) = -\alpha k^2 \tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}).$$

Общий потенциал в преобразованном пространстве

Комбинируя результаты:

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}) = \tilde{\varphi}_0(\boldsymbol{k}) + \tilde{\varphi}_{\text{ind}}(\boldsymbol{k}) = \tilde{\varphi}_0(\boldsymbol{k}) - 2\pi\alpha k \tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}).$$

Переносим все члены с $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k})$ в левую часть:

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}) + 2\pi\alpha k \tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}) = \tilde{\varphi}_0(\boldsymbol{k}).$$

Выносим $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k})$ за скобки:

$$(1 + 2\pi\alpha k)\,\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}) = 2\pi\frac{e}{k}.$$

Решаем относительно $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k})$:

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}) = \frac{2\pi e}{k\,(1 + 2\pi\alpha k)}.$$

4. Обратное преобразование Фурье

Теперь выполним обратное преобразование Фурье для нахождения $\varphi(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$.

Упрощение с учётом радиальной симметрии

Благодаря радиальной симметрии, обратное преобразование сводится к интегралу:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\tilde{\varphi}(k)J_0(k\rho)\,dk,$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Подстановка $\tilde{\varphi}(k)$

Подставляем найденное выражение для $\tilde{\varphi}(k)$:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\left(\frac{2\pi e}{k\,(1 + 2\pi\alpha k)}\right)J_0(k\rho)\,dk.$$

Упрощаем выражение:

$$\varphi(\rho, z = 0) = e\int_0^\infty \frac{J_0(k\rho)}{1 + 2\pi\alpha k}\,dk.$$

Введение новой переменной

Введём замену:

$$\beta = 2\pi\alpha, \quad s = \beta k \implies k = \frac{s}{\beta}, \quad dk = \frac{ds}{\beta}.$$

Тогда интеграл принимает вид:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{e}{\beta}\int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{s\rho}{\beta}\right)}{1 + s}\,ds.$$

5. Применение подсказки

Согласно подсказке:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(ax)}{x + 1}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(H_0(a) - N_0(a)\right),$$

где H_0 — функция Струве, а N_0 — функция Неймана нулевого порядка.

Пусть $a = \frac{\rho}{\beta}$, тогда:

$$\int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{s\rho}{\beta}\right)}{1+s}\,ds = \frac{\pi}{2}\left(H_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right) - N_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right)\right).$$

6. Итоговое выражение для потенциала

Подставляем обратно в выражение для $\varphi(\rho, z = 0)$:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{e}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2}\left(H_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right) - N_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right)\right).$$

Зная, что $\beta = 2\pi\alpha$, получаем:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{e}{2\pi\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}\left(H_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right) - N_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right)\right).$$

Упрощаем константы:

$$\varphi(\rho, z = 0) = \frac{e}{4\alpha}\left(H_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right) - N_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right)\right).$$

Ответ

Явное выражение для потенциала:

$$\boxed{\varphi(\rho, z = 0) = \frac{e}{4\alpha}\left[H_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right) - N_0\left(\frac{\rho}{2\pi\alpha}\right)\right]}$$

где:

- H_0 — **функция Струве** нулевого порядка.
- N_0 — **функция Неймана** (функция Бесселя второго рода) нулевого порядка.
- α — константа поляризуемости.