

Преобразования Лоренца

В физике преобразования Лоренца - линейная группа преобразований пространства времени, относительно которой законы физики должны быть инварианты.

А именно, если $A_1(\vec{r}; ct); \dots; A_n(\vec{r}; ct)$ - физические величины, $F(A_1; \dots, A_n) = 0$ - закон, связывающий их, то после преобразований Λ :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Новые величины $A'_1(\vec{r}'; ct'); \dots; A'_n(\vec{r}'; ct')$ будут подчиняться тому же закону $F(A'_1; \dots, A'_n) = 0$.

Группа Лоренца состоит из 3-х групп: поворотов, сдвигов и Лоренцевых бустов. Про первые 2 все понятно. Мы знаем как выглядит общая матрица поворота и сдвиг:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Я получу матрицу Лоренцево буста в общем виде.

Всем достаточно хорошо известна эта матрица в случае сонаправленности скорости с одной из осей (например x):

$$\Lambda^i_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

А если обозначить $\beta := \frac{v}{c}$; $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ то:

$$\Lambda^i_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Но что делать если нужно совершить буст в направлении не совпадающим с осями, например когда $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$? Из 1-ого случая мы видим что какое-либо изменение происходит по оси, параллельной направлению скорости.

Распишем:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r_{\parallel} + r_{\perp} \\ \vec{r}' &= r'_{\parallel} + r'_{\perp} \end{aligned} \quad (5)$$

Где:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\parallel} &= \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{\vec{v}}{v} \\ \vec{r}_{\perp} &= \vec{r} - \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{\vec{v}}{v} \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \left(\vec{\beta} \cdot \vec{r}_{\parallel} \right) \right) \\ \vec{r}_{\parallel}' &= \gamma \left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta} ct \right) \\ \vec{r}_{\perp}' &= \vec{r}_{\perp} \end{aligned} \quad (7)$$

В общем виде:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \beta \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \right) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1) \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{\vec{v}}{v} - \gamma \vec{\beta} ct \end{aligned} \quad (8)$$

И матрица преобразования Лоренца в общем случае:

$$\Lambda^i_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_x}{c} & -\gamma \frac{v_y}{c} & -\gamma \frac{v_z}{c} \\ -\gamma \frac{v_x}{c} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_y}{c} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_z}{c} & (\gamma - 1) \frac{v_z v_x}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_z v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Для скорости тоже общий вид напишу для красоты, получить который можно расписав дифференциалы:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{u}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt} \\ \gamma_v &:= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{u}' &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}} \left(\frac{\vec{u}}{\gamma_v} - \vec{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Ну и на десерт формула, которую я мало понимаю, но выглядящую красиво. Преобразование общего *невзаимодействующего* многочастичного состояния (состояния из пространства Фока) в квантовой теории поля:

$$\begin{aligned} &U(\Lambda; a) \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \\ &= e^{-ia_\mu [(\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots]} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \left(\sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)} [W(\Lambda; p_1)] D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)} [W(\Lambda; p_2)] \dots \right) \Psi_{\Lambda p_1 \sigma'_1 n_1; \Lambda p_2 \sigma'_2 n_2; \dots} \end{aligned} \quad (11)$$

Где $W(\Lambda; p)$ - вигнеровское вращение, а $D^{(j)}$ - $(2j + 1)$ -мерное представление группы $SO(3)$.