



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

НАПРАВЛЕНИЕ 03.03.01 Прикладные математика и физика

ПРОФИЛЬ Теоретическая Физика

ЗАДАНИЕ

**о прохождении практики по получению профессиональных
умений и опыта профессиональной деятельности**

студента Кононова Александра Михайловича

Курс 2 Группа 201

Форма обучения: очная

Сроки прохождения практики с 01.07.2024 по 14.07.2024

Форма представления на кафедру выполненного задания: отчет в письменной форме

Дата выдачи задания: 01.07.2024

Задание для прохождения практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности: Нахождение условия параметрического резонанса в системе с периодическим δ -образным потенциалом.

С заданием ознакомлен

Оценка

Руководитель практики Аверкиев Н.С.

(Ф.И.О. полностью, должность, звание, подпись).



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

**ОТЧЕТ по практике по получению профессиональных умений и
опыта профессиональной деятельности**

Весенний семестр 2023/2024 учебного года

**Тема: Нахождение условия параметрического резонанса в системе
с периодическим δ -образным потенциалом.**

Студент: Кононов Александр Михайлович

Руководитель практики: Аверкиев Никита Сергеевич

Должность, звание:

Оценка:

Содержание

1	Введение	2
1.1	Актуальность	2
1.2	Цель и задачи практики	2
2	Ход выполнения задания	3
2.1	Задача с одним δ -образным потенциалом	3
2.2	Задача с двумя δ -образными потенциалами	4
2.3	Задача на условие возникновения параметрического резонанса в колебательной системе за счет двойного δ -образного потенциала	6
3	Заключение	9
4	Список литературы	10

1 Введение

1.1 Актуальность

Параметрический резонанс — это явление, при котором колебательная система начинает усиливаться при периодическом изменении параметров тех элементов колебательной системы, в которых сосредоточена энергия колебаний. Введение периодического дельта-образного потенциала добавляет дополнительную сложность к исследованию этого явления, позволяя изучить, как такие особенности потенциала влияют на поведение системы, включая условия возникновения резонанса, его интенсивность и устойчивость. Параметрический резонанс в системах с дельта-образным потенциалом может найти применение в современных технологиях, например, в разработке новых типов резонаторов, сенсоров или фильтров. Понимание поведения таких систем помогает в создании устройств, которые могут адаптивно изменять свои свойства в зависимости от внешних воздействий.

1.2 Цель и задачи практики

Цель:

Получить условие на параметры колебательной системы с δ -образным потенциалом для возникновения параметрического резонанса.

Задачи:

- Найти коэффициент прохождения волны через 1 δ -образный потенциал
- Найти коэффициент прохождения волны через 2 δ -образных потенциала
- Найти условие на параметры системы для возникновения параметрического резонанса в колебательной системе за счет двойного δ -образного потенциала

2 Ход выполнения задания

2.1 Задача с одним δ -образным потенциалом

Уравнение описывающее волну в среде с некоторым потенциалом имеет вид:

$$C^2(x;t)U''(x;t) = \ddot{U}(x;t) \quad (1)$$

В нашем случае потенциал от времени не зависит и представляет собой лишь δ -функцию, и решение мы будем искать в виде $U(x;t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, а значит уравнение принимает вид:

$$C^2(x)U''(x) = \omega^2 U(x) \quad (2)$$

Записав потенциал в явном виде получаем уравнение:

$$U''(x) - k_0^2 \cdot a\delta(x) \cdot U(x) = 0 \quad (3)$$

Где $k_0 = \frac{\omega}{C_0}$.

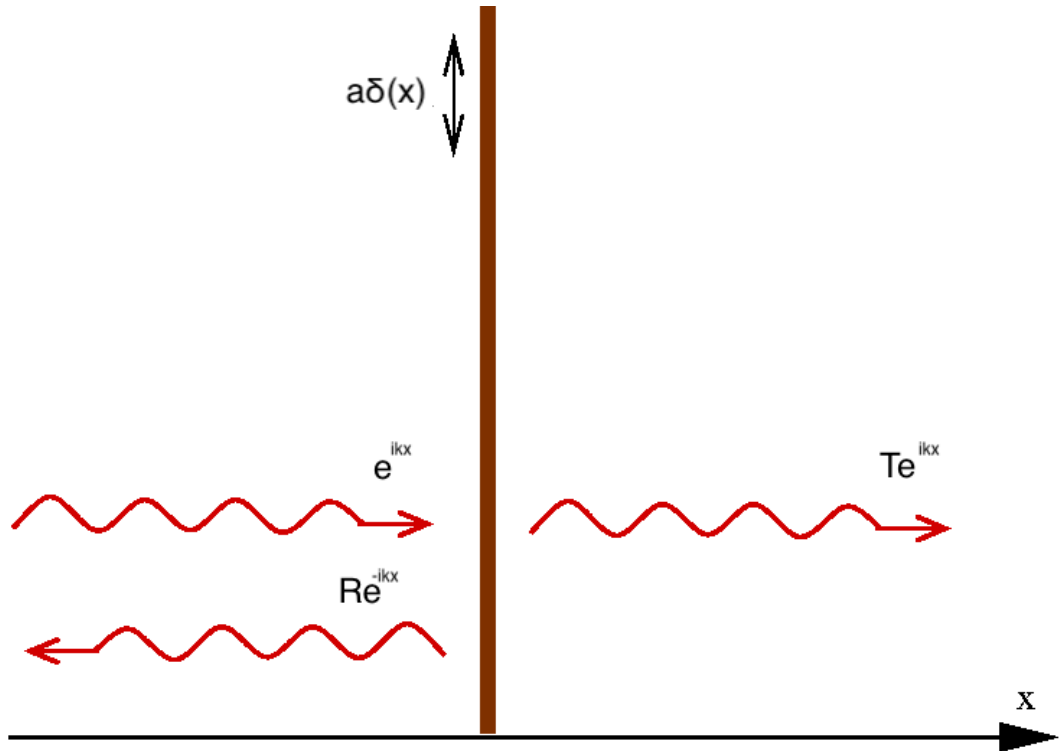


Рисунок 1: Прохождение волны через δ -образный потенциал

Будем искать решение в двух областях. В первой области в виде $U(x) = e^{ik_0x} + Re^{-ik_0x}$, во второй $U(x) = Te^{ik_0x}$. Условия на границе двух областей такое:

1) Непрерывность $U(0)$

2) Условие на скачок производной: $U'_{x=0+} - U'_{x=0-} + k_0^2 a \cdot U(0) = 0$

Составив и решив систему уравнений - получаем значения R и T :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ik_0 - ik_0R - (ik_0T) + k_0^2 a T = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Получили:

$$\begin{cases} R = \frac{-i \frac{ka}{2}}{1 + i \frac{ka}{2}} \\ T = \frac{1}{1 + i \frac{ka}{2}} \end{cases} \quad (5)$$

2.2 Задача с двумя δ -образными потенциалами

В этой задачи условия похожи, однако теперь в пространстве на расстоянии b друг от друга расположены 2 δ -образных потенциала одинаковой величины a .

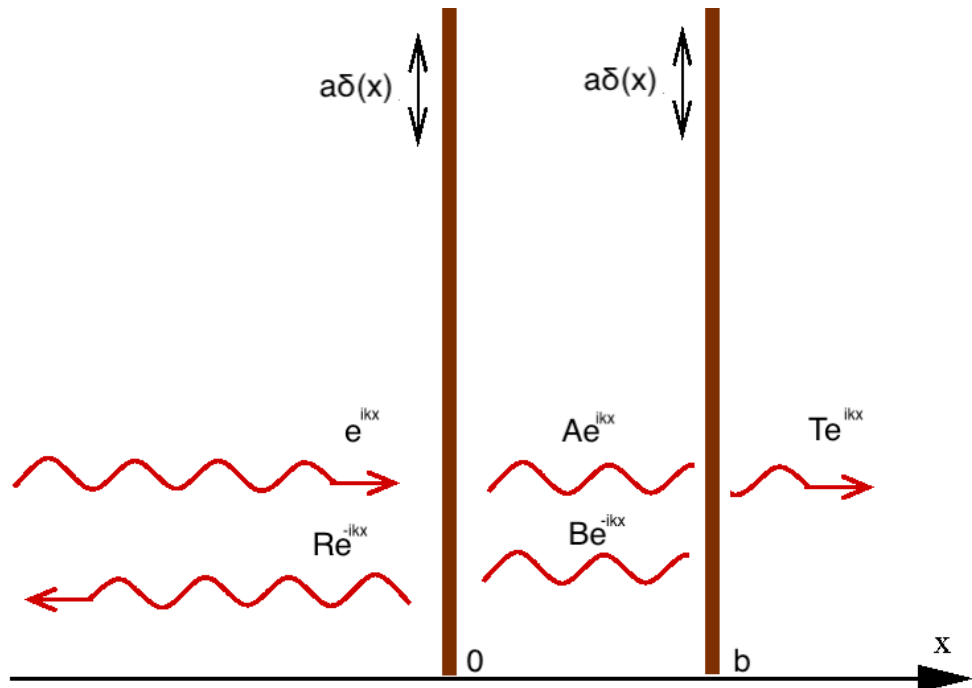


Рисунок 2: Прохождение волны через 2 δ -образных потенциала

Решение же теперь будем искать в 3 областях:

$$\begin{cases} U(x) = e^{ik_0x} + Re^{-ik_0x} & x < 0 \\ U(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x} & 0 < x < b \\ U(x) = Te^{ik_0x} & x > b \end{cases} \quad (6)$$

А граничных условий теперь будет 4, по 2 на каждую границу областей:

$$\begin{cases} U_{x=0+} - U_{x=0-} = 0 & , \text{непрерывность в } 0 \\ U'_{x=0+} - U'_{x=0-} + k_0^2 a \cdot U(0) = 0 & , \text{скачѐк производной в } 0 \\ U_{x=b+} - U_{x=b-} = 0 & , \text{непрерывность в } b \\ U'_{x=b+} - U'_{x=b-} + k_0^2 a \cdot U(b) = 0 & , \text{скачѐк производной в } b \end{cases} \quad (7)$$

Получаем следующую систему уравнений на амплитуды волн:

$$\begin{cases} 1 + R = A + B \\ ik_0 A - ik_0 B - (ik_0 - ik_0 R) + k_0^2 a(1 + R) = 0 \\ Ae^{ik_0 b} + Be^{-ik_0 b} = Te^{ik_0 b} \\ ik_0 Te^{ik_0 b} - (Ae^{ik_0 b} - Be^{-ik_0 b}) + k_0^2 a Te^{ik_0 b} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решив эту систему уравнений получили выражения на коэффициенты отражения R и пропускания T :

$$\begin{cases} R = \frac{(\cos(ik_0 b) + 2\sin(k_0 b))ie^{ik_0 b}}{k_0 a(e^{2ik_0 b} - (1 + 2i/k_0 a)^2)} \\ T = \frac{4}{k_0^2 a^2 e^{2ik_0 b} - (k_0 a + 2i)^2} \end{cases} \quad (9)$$

Эти результаты сходятся с результатами полученными в статье [1].

Посмотрим теперь при каких значения параметров $|T| = 1$. Физически это значит что волна проходит через оба барьера полностью. Получаем следующие уравнение на параметры системы:

$$2(1 - \cos(2kb)) + 8\frac{1}{k^2 a^2}(1 + \cos(2kb)) - 8\frac{1}{ka}\sin(2kb) = 0 \quad (10)$$

Это трансцендентное уравнение на k , однако оно имеет не корни, согласно этому графику:

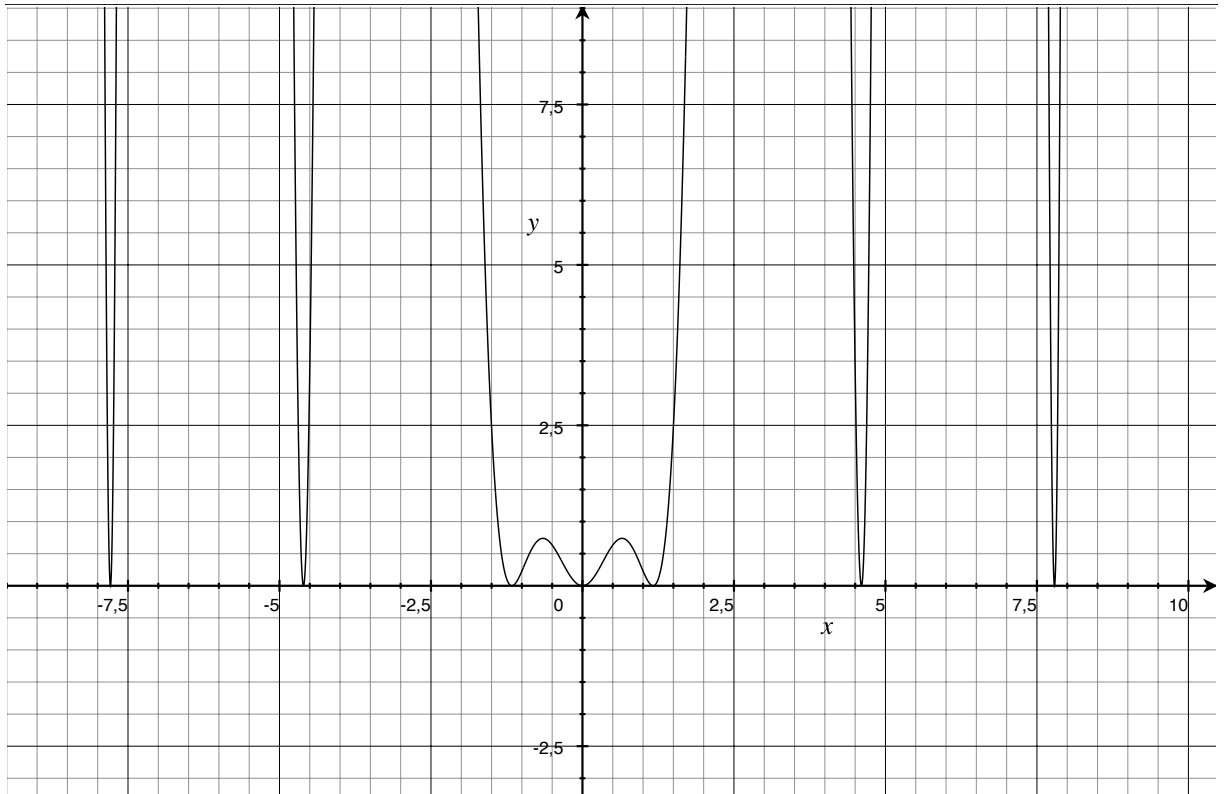


Рисунок 3: График уравнения (10)

А значит при некоторых значениях k волна проходит полностью через 2 δ -образных барьера.

2.3 Задача на условие возникновения параметрического резонанса в колебательной системе за счет двойного δ -образного потенциала

Рассмотрим теперь гармонический ассцилятор, который колеблется под действием периодического потенциала следующего вида:

$$\begin{cases} \chi(t) = \frac{1}{\Omega}(\delta(t - T/4) - \delta(t - 3T/4)) & 0 < t < T \\ \chi(t + T) = \chi(t) \end{cases} \quad (11)$$

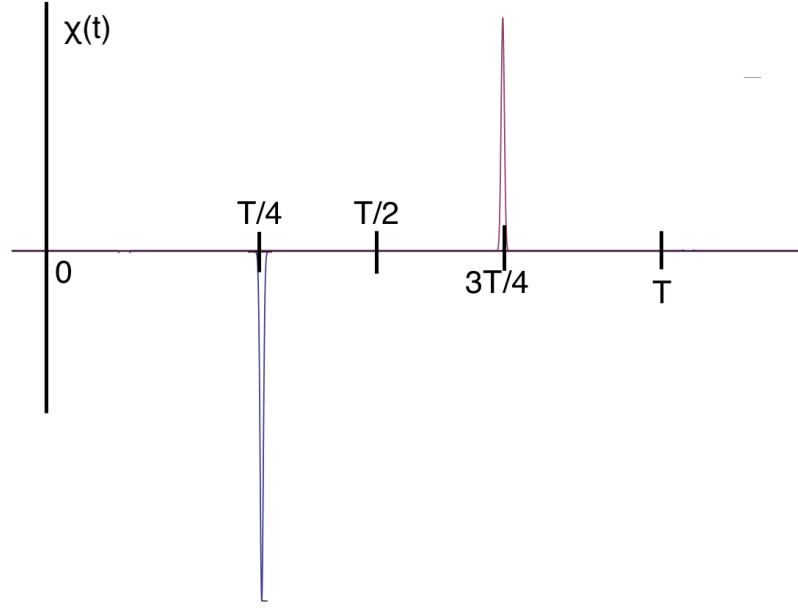


Рисунок 4: График потенциала $\chi(t)$

Тогда уравнение на функцию принимает вид:

$$\ddot{U} + \omega_0(1 + \chi(t))U = 0 \quad (12)$$

Так как потенциал имеет периодическую структуру во времени, то решение данного уравнения можно получить из теоремы Блоха [2], а именно:

$$U(t) = e^{\lambda t} \tilde{U}(t) \quad (13)$$

Где:

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t + T) \quad (14)$$

То есть, $U(t)$ можно переписать в виде:

$$U(t + T) = e^{\lambda T} U(t) \quad (15)$$

Учитывая, что на интервале между δ -функциями $U(t)$ имеет вид:

$$U(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (16)$$

А также граничные условия аналогичные (7) и дополнительные на непрерывность в точке $t = T$: $U(T) = e^{\lambda T} U(0)$, $\dot{U}(T) = e^{\lambda T} \dot{U}(0)$. Подставляя в них

решение, получим:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta - e^{\lambda T})A + (\gamma + \delta - e^{\lambda T})B = 0 \\ (\alpha - \beta - e^{\lambda T})A + (\gamma - \delta + e^{\lambda T})B = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Где:

$$\begin{cases} \alpha = e^{i\omega_0 T} + \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T} - \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2} \\ \beta = \frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{-i\omega_0 T/2} + \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T/2} - \frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{i\omega_0 T/2} - \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T/2} \\ \gamma = -\frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{i\omega_0 T/2} - \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T/2} + \frac{i\omega_0}{2\Omega}e^{-i\omega_0 T/2} + \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{i\omega_0 T/2} \\ \delta = e^{-i\omega_0 T} + \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}e^{-i\omega_0 T} - \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2} \end{cases} \quad (18)$$

Для того, чтобы система уравнений имела решение необходимо, чтобы ее определитель был равен 0.

$$\det = e^{2\lambda T} - (\alpha + \beta)e^{\lambda T} + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0 \quad (19)$$

Из выражений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ получается, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Значит $e^{\lambda_1 T} \cdot e^{\lambda_2 T} = 1$.

Тогда, получаем выражение:

$$e^{\lambda_1 T} = \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2}\cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2} \pm \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} + 2\right)\left(\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} + 2\right) - 2\right)}$$

Необходимо, чтобы это выражение было вещественным, иначе мы получим что обе экспоненты имеют чисто мнимые показатели:

$$e^{\lambda_1 T} = \alpha + i\beta$$

$$e^{\lambda_2 T} = \alpha - i\beta$$

$$e^{\lambda_1 T} \cdot e^{\lambda_2 T} = 1 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = i\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Так как нас интересует параметрический резонанс, необходимо чтобы $e^{\lambda T} \in \mathbb{R}$. Значит:

$$\sin^2\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right) > \frac{1}{1 + \omega_0^2/4\Omega^2} \quad (20)$$

$$\frac{2\pi}{T} = 2\omega_0 + \gamma$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{1 + \gamma/2\omega_0}\right) > \frac{1}{1 + \omega_0^2/4\Omega^2}$$

Это трансцендентное неравенство, решением которого будет область допустимых значений T для возникновения параметрического резонанса.

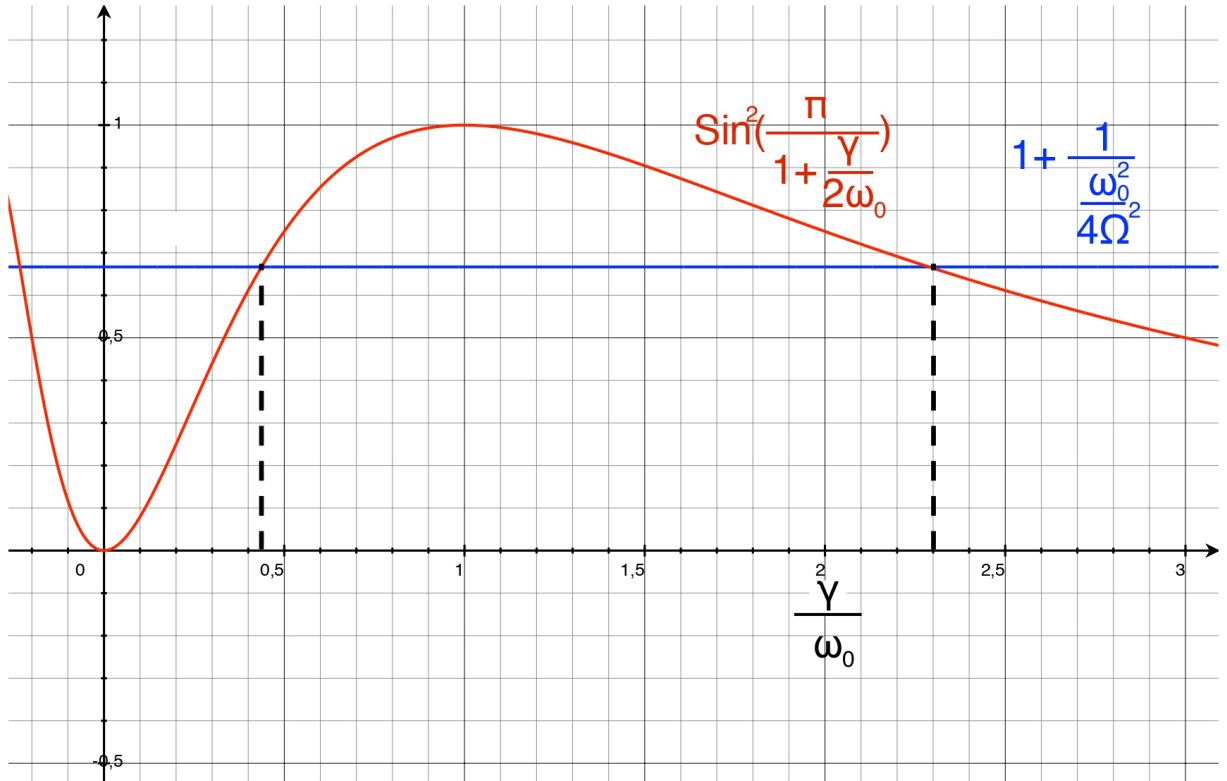


Рисунок 5: Графическое представление неравенства

Из графика можно видеть, что существует диапазон значений T , при которых выполняется неравенство, а следовательно и осуществляется параметрический резонанс.

3 Заключение

В данной работе представлено решение задачи о возникновении параметрического резонанса в системе с δ -образным периодическим потенциалом. Стоит отметить также, что система с данным потенциалом, не может быть описан через теорию возмущений и приближением малого взаимодействия,

как это принято в классическом подходе решения задач о параметрическом резонансе. С помощью данного подхода можно попробовать описывать не слабые периодические потенциалы, раскладывая их по δ -функциям, что увеличивает класс решаемых задач.

4 Список литературы

1. Zafar Ahmed, 'Revisiting double Dirac delta potential', European Journal of Physics (March 2016)
2. Dr Siegfried Flugge, 'Practical Quantum Mechanics', Springer (1994)