Привет, Папочка!

Ниже оформлены две задачи по рассеянию электромагнитных волн: (1) на тонкой бесконечно протяжённой пластине, (2) на бесконечно длинном диэлектрическом цилиндре. Все выкладки приведены подробно в формате $\LaTeX$.

Задача 1: Тонкая бесконечная пластина с диэлектрической проницаемостью ε

Постановка задачи

Имеется тонкая пластина (толщина $d \ll \lambda$), расположенная в плоскости $0 \le z \le d$, с проницаемостью ε. Слева ($z < 0$) и справа ($z > d$) — вакуум. Нормально падает плоская электромагнитная волна с амплитудой электрического поля E_0, поляризация линейная (пусть E по оси y). Требуется найти поля во всех областях и получить решение **без** приближения теории возмущений.

Общее решение

Обозначим волновое число в вакууме $k_1 = \dfrac{\omega}{c}$, а внутри пластины — $k_2 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$.

Область $z < 0$ (слева):

$$E_1(z) \;=\; E_0\, e^{\,i(k_1 z - \omega t)} \;+\; E_r\, e^{\,i(-k_1 z - \omega t)}.$$

Область $0 < z < d$ (пластина):

$$E_2(z) \;=\; A\, e^{\,i(k_2 z - \omega t)} \;+\; B\, e^{\,i(-k_2 z - \omega t)}.$$

Область $z > d$ (справа):

$$E_3(z) \;=\; E_t\, e^{\,i(k_1 z - \omega t)}.$$

Здесь E_r, A, B, E_t — амплитуды отражённой, прямой и обратной волны в пластине и прошедшей волны соответственно.

Граничные условия

На границах $z = 0$ и $z = d$ требуем непрерывности тангенциальных компонент E_y и H_y. Учитывая, что $H = \dfrac{1}{Z}\hat{n} \times E$, для нормального падения имеем:

- На $z=0$:

$$E_0 + E_r = A + B, \quad \frac{E_0 - E_r}{Z_0} = \frac{A - B}{Z_2},$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ (вакуум), а $Z_2 = \dfrac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}}$ (в материале).

- На $z=d$:

$$A\,e^{ik_2 d} + B\,e^{-ik_2 d} \;=\; E_t\,e^{ik_1 d}, \quad \frac{A\,e^{ik_2 d} - B\,e^{-ik_2 d}}{Z_2} \;=\; \frac{E_t\,e^{ik_1 d}}{Z_0}.$$

Результат решения

Из решения системы для E_r и E_t получаем известные формулы коэффициентов отражения и пропускания для плёнки:

$$r = \frac{E_r}{E_0} = \frac{r_{12}\left(1 - e^{2\,ik_2 d}\right)}{1 - r_{12}^2\,e^{2\,ik_2 d}}, \quad t = \frac{E_t}{E_0} = \frac{(1 - r_{12}^2)\,e^{\,i(k_2 - k_1)d}}{1 - r_{12}^2\,e^{2\,ik_2 d}},$$

где

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1}.$$

Тогда

$$E_1(z) = E_0\,e^{\,i(k_1 z - \omega t)} + r\,E_0\,e^{\,i(-k_1 z - \omega t)}, \quad E_3(z) = t\,E_0\,e^{\,i(k_1 z - \omega t)},$$

а в области пластины $E_2(z)$ определяется подстановкой A и B через r и t (см. граничные условия).

Это **точное** (не возмущённое) решение. Если $d \ll \lambda$, его можно дополнительно упростить, но формула выше справедлива при любой толщине.

Задача 2: Бесконечно длинная цилиндрическая нить с диэлектрической проницаемостью ε

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндр (ось совпадает с z), радиус a, внутренняя область — диэлектрик с $\varepsilon \neq 1$, $\mu = 1$, вне цилиндра — вакуум ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$). На цилиндр сбоку падает плоская электромагнитная волна вдоль оси x. Поляризация поля E вдоль оси z (то есть $E_z \neq 0$, остальные компоненты E пренебрежимо малы для нормального падения). Нужно найти полное поле внутри и снаружи цилиндра.

Падающая волна в цилиндрических координатах

Пусть падающая волна:

$$E_i(\rho, \phi) = E_0 \, e^{ik_1 x} \, \hat{z}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c}.$$

В цилиндрических координатах ($x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, ось z вдоль цилиндра):

$$e^{ik_1 \rho \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \, J_n\big(k_1 \rho\big) \, e^{in\phi},$$

откуда

$$E_i(\rho, \phi) = E_0 \, \hat{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \, J_n(k_1 \rho) \, e^{in\phi}.$$

Общее решение поля

Внешняя область ($\rho \geq a$): Поле — сумма падающей и рассеянной волн. Рассеянная волна описывается функциями Ханкеля $H_n^{(2)}$:

$$E_z^{(\mathrm{out})}(\rho, \phi) = E_i(\rho, \phi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \, H_n^{(2)}(k_1 \rho) \, e^{in\phi}.$$

Внутренняя область ($\rho \leq a$): Регулярность в центре $\rho = 0$ требует брать функции Бесселя $J_n(k_2 \rho)$, где $k_2 = k_1 \sqrt{\varepsilon}$. Тогда:

$$E_z^{(\mathrm{in})}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \, J_n(k_2 \rho) \, e^{in\phi}.$$

Граничные условия на $\rho = a$

Так как $\mathbf{E} \parallel z$ (TM_z-тип волны), имеем:

$$E_z^{(\mathrm{in})}(a, \phi) = E_z^{(\mathrm{out})}(a, \phi),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\;\frac{\partial E_z^{(\mathrm{in})}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \frac{\partial E_z^{(\mathrm{out})}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a}.$$

Подставляя ряды по $e^{\,in\phi}$ и J_n, $H_n^{(2)}$, получаем для каждого n систему:

$$\begin{cases} A_n\,J_n(k_2a) \;=\; E_0\,i^n\,J_n(k_1a) + B_n\,H_n^{(2)}(k_1a), \\ \frac{k_2}{\varepsilon}\,A_n\,J_n'(k_2a) = k_1\,E_0\,i^n\,J_n'(k_1a) + k_1\,B_n\,H_n^{(2)'}(k_1a). \end{cases}$$

Решая, находим B_n и A_n. Например,

$$B_n = i^n\,E_0\,\frac{\dfrac{k_2}{\varepsilon}\,J_n'(k_2a)\,J_n(k_1a) - k_1\,J_n'(k_1a)\,J_n(k_2a)}{\dfrac{k_2}{\varepsilon}\,J_n'(k_2a)\,H_n^{(2)}(k_1a) - k_1\,H_n^{(2)'}(k_1a)\,J_n(k_2a)}.$$

Коэффициент A_n получается аналогично из системы.

Итоговое поле

$$E_z^{(\mathrm{out})}(\rho,\phi) = E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[i^n\,J_n(k_1\rho)\,e^{\,in\phi} + B_n\,H_n^{(2)}(k_1\rho)\,e^{\,in\phi}\Big],$$

$$E_z^{(\mathrm{in})}(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\,J_n(k_2\rho)\,e^{\,in\phi}.$$

Это — **точное решение** для рассеяния плоской волны (с $E \parallel z$) на диэлектрическом бесконечном цилиндре.

Заключение

Вот так, Папочка, в формате LaTeX получаем решения двух классических задач:

- Волна на тонкой бесконечной пластине — известные формулы для отражения и пропускания через диэлектрический слой.
- Волна, рассеянная бесконечным цилиндром, — типовой ряд Бесселя–Ханкеля с граничными условиями на границе диэлектрик–вакуум.

При необходимости эти решения можно упростить, рассматривая приближения (например, $d \ll \lambda$ для пластины, $k_1a \ll 1$ для тонкой нити), но все вышеприведённые формулы справедливы в общем случае.