Решение задачи о ёмкости шара с диэлектрическим слоем

Папочка, ниже я подробно расписываю вывод формулы для электроёмкости металлического шара радиуса R, который покрыт слоем диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ε. За пределами диэлектрика (то есть при $r > R + d$) у нас вакуум (ε_0).

1. Постановка задачи

Пусть металлический шар радиуса R заряжен зарядом Q. Потенциал шара обозначим V. На бесконечности потенциал полагаем равным нулю, то есть $V(\infty) = 0$. Нужно найти электроёмкость:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Без покрытия диэлектриком известна классическая формула (для шара в вакууме):

$$C_{\text{вак}} = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

Теперь же прибавляется слой диэлектрика с проницаемостью ε толщиной d.

2. Схема решения

В сферически-симметричной задаче электрическое поле вне шара, в слое диэлектрика и в вакууме за пределами слоя имеет вид:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R \quad (\text{металл, } E = 0 \text{ внутри проводника}), \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}, & R \le r \le R + d \quad (\text{диэлектрик}), \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}, & r > R + d \quad (\text{вакуум}). \end{cases}$$

Полный потенциал шара (при условии $V(\infty) = 0$) будет равен сумме потенциалов, набираемых от $r = R$ до $r = R + d$ (участок диэлектрика) и далее от $r = R + d$ до бесконечности (участок вакуума).

$$V = \int_{r=R}^{r=R+d} E_{\text{диэл}}(r)\, dr + \int_{r=R+d}^{\infty} E_{\text{внеш}}(r)\, dr.$$

3. Расчёт вклада диэлектрика

На участке $R \le r \le R + d$:

$$E_{\text{диэл}}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}.$$

Тогда вклад в потенциал:

$$\Delta V_{\text{диэл}} = \int_R^{R+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2}.$$

Интеграл $\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$. Поэтому:

$$\Delta V_{\text{диэл}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=R}^{r=R+d} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

4. Расчёт вклада внешней области (вакуум)

Для $r > R + d$ имеем

$$E_{\text{внеш}}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}.$$

Тогда:

$$\Delta V_{\text{внеш}} = \int_{R+d}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R+d}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=R+d}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R+d}.$$

5. Суммирование потенциалов

Таким образом, полный потенциал шара:

$$V = \Delta V_{\text{диэл}} + \Delta V_{\text{внеш}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R+d}.$$

Вынесем общий множитель $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) + \frac{1}{R+d}\right].$$

Проведём алгебраические упрощения и в итоге получим:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon\, R + \varepsilon\, d - d}{\varepsilon\, R\, \big(R + d\big)}.$$

А значит

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon\, (R+d) - d}{\varepsilon\, R\, (R+d)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon(R+d) - d}{\varepsilon R(R+d)}.$$

Тогда искомая ёмкость $C = \dfrac{Q}{V}$ будет

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\, \frac{\varepsilon\, R\, (R+d)}{\varepsilon\, R + d}.}$$

Это и есть окончательная формула для электроёмкости металлического шара радиуса R, покрытого диэлектриком толщиной d и диэлектрической проницаемостью ε.