Топология
Кононов Александр Михайлович
28.01.2025

Задача 1:

Условие:

Пусть $f : M \to N$ диффеоморфизм гладких многообразий. Определим $f_* : \Gamma(M) \to \Gamma(N)$ как

$$\forall X \in \Gamma(M), \forall g \in C^\infty(N), \forall m \in M, f_*(X)(g)_{f(m)} := X(g \circ f)_m$$

1. доказать, что $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y], \forall X, Y \in \Gamma(M)$.

Решение:

$$f_*(X)(g)_{f(m)} := X(g \circ f)_m$$
$$(f_*(X)(g) \circ f)_m = X(g \circ f)_m$$

Так как $\forall m$:

$$f_*(X)(g) \circ f = X(g \circ f)$$

Теперь для $[X; Y]$:

$$f_*([X; Y])(g) \circ f = [X; Y](g \circ f) = ((XY) - (YX))(g \circ f) =$$
$$= X(Y(g \circ f)) - Y(X(g \circ f)) = X(f_*(Y)[g] \circ f) - Y(f_*(X)[g] \circ f) =$$
$$= f_*(X)[f_*(Y)[g]] \circ f - f_*(Y)[f_*(X)[g]] \circ f = (f_*(X)[f_*(Y)[g]] - f_*(Y)[f_*(X)[g]]) \circ f =$$
$$= [f_*(X); f_*(Y)](g) \circ f$$

Получили

$$f_*([X; Y])(g) \circ f = [f_*(X); f_*(Y)](g) \circ f \Rightarrow f_*([X; Y])(g) = [f_*(X); f_*(Y)](g)$$

Так как для $\forall g$:

$$f_*([X; Y]) = [f_*(X); f_*(Y)]$$

QED

Задача 2:

Условие:

Пусть G связная группа Ли. Пусть $p : \tilde{G} \to G$ ее унтверсальное накрытие. Доказать, что существует структура группы Ли на $\tilde{G}$ такое что

1. $p : \tilde{G} \to G$ гладкая функция.

2. и $p : \tilde{G} \to G$ является гомоморфизьоь групп Ли.

Hint: использовать конкретное описание универсального накрытие (см лекции).

Решение:

1) Топология на $\widetilde{G}$

Из построения универсального накрытия известно, что $\widetilde{G}$ — топологическое пространство. Нужно лишь подтвердить три условия для гладкого многообразия:

1.1) Хаусдорфовость. Возьмём произвольные точки $x, y \in \widetilde{G}$. Пусть $p(x) = a$ и $p(y) = b$ в G.

- Если $a = b$, то берём в G «хорошую» окрестность $U(a)$, на которой p является гомеоморфизмом на соответствующих компонентах прообраза. Точки x и y попадают в разные компоненты, которые можно выбрать как непересекающиеся.
- Если $a \neq b$, то в G найдутся непересекающиеся «хорошие» окрестности $U(a)$ и $U(b)$, а в $\widetilde{G}$ — их прообразы, которые тоже непересекаются благодаря тому, что p локально является гомеоморфизмом.

Поскольку G — хаусдорфово, то и в $\widetilde{G}$ строятся непересекающиеся окрестности соответствующих точек.

1.2) Счётная база. Выберем в G счётный набор «хороших» окрестностей $\{U_i\}$, который возможен благодаря тому, что G имеет счётную базу. Тогда прообраз каждой U_i под p раскладывается в дизъюнктное объединение $U_{i,j}$:

$$p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_j U_{i,j}.$$

Все такие $U_{i,j}$ вместе образуют счётную базу на $\widetilde{G}$.

1.3) Атлас на $\widetilde{G}$. Пусть $x \in \widetilde{G}$ и $p(x) = a$. Так как a имеет «хорошую» окрестность $U(a)$ в G и p при этом локальный гомеоморфизм, рассмотрим соответствующий кусок $V_x \subset \widetilde{G}$, который отображается гомеоморфно на $U(a)$.

В G уже есть гладкая структура с атласом $\{\varphi_i\}$. Тогда на каждом V_x зададим карты

$$\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ p\big|_{V_x}.$$

Композиция гомеоморфизма и гладкой карты даёт гладкую карту. Собирая такие карты по всем «хорошим» окрестностям и их прообразам, получаем полный атлас на $\widetilde{G}$. Согласованность новых карт получается из согласованности исходных φ_i.

2) Гладкость $p\colon \widetilde{G} \to G$

Чтобы проверить гладкость p, достаточно проверить гладкость его локальных версий в координатных картах. Но локально p — композиция уже гладких (или гомеоморфных) отображений, следовательно, гладкое.

3) Групповая операция и обращение

На $\widetilde{G}$ определяется умножение

$$\widetilde{\mu}\big([\alpha(t)], [\beta(t)]\big) = \big[\alpha(t)\,\beta(t)\big],$$

где $[\alpha(t)]$ и $[\beta(t)]$ — классы петель в G. Корректность: гомотопные петли при умножении дают гомотопные результаты. Нейтральным элементом выступает класс $\big[e_c(t)\big]$, где $e_c(t)$ — постоянный путь в нейтральном элементе G. Обращение петли $[\alpha(t)]$ задаётся путём

$$[\alpha(t)]^{-1} = \big[\alpha(t)^{-1}\big].$$

4) Гладкость $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\mathrm{inv}}$

4.1) Гладкость $\widetilde{\mu}$. Умножение на G есть гладкое отображение $\mu\colon G \times G \to G$. На $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ по определению

$$\mu \;=\; p \;\circ\; \widetilde{\mu} \;\circ\; (p^{-1} \times p^{-1}),$$

и поскольку локально все карты согласованы с картами в $G \times G$, операция $\widetilde{\mu}$ получается гладкой.

4.2) Гладкость $\widetilde{\mathrm{inv}}$. Аналогично, $\mathrm{inv}\colon G \to G$ гладко. Тогда

$$\mathrm{inv} \;=\; p \;\circ\; \widetilde{\mathrm{inv}} \;\circ\; p^{-1}.$$

В локальных координатах эта композиция диффеоморфизмов также гладкая, значит, и $\widetilde{\mathrm{inv}}$ гладко.

Таким образом, на $\widetilde{G}$ формируется структура группы Ли.

5) Гомоморфизм групп Ли

Наконец, покажем, что $p\colon \widetilde{G} \to G$ — гомоморфизм групп Ли. Мы уже доказали его гладкость. Для свойств гомоморфизма надо лишь проверить согласованность умножений:

$$p\Big([\alpha(t)] \cdot [\beta(t)]\Big) \;=\; p\Big([\alpha(t)\,\beta(t)]\Big) \;=\; \alpha(1)\,\beta(1) \;=\; p([\alpha(t)]) \;\cdot\; p([\beta(t)]).$$

Значит, p действительно переводит произведение в произведение, то есть является гомоморфизмом групп Ли. QED

Задача 3:
Условие:

1. пусть X, Y компактные топологические пространства. доказать, что $X \times Y$ компактное топологическое пространство (на $X \times Y$ декартово топология).

2. пусть X, Y связные топологические пространства. доказать, что $X \times Y$ связное топологическое пространство (на $X \times Y$ декартово топология).

Решение:
1) Покажем компактность:

$$(X \times Y, \tau)$$

$$(X, \Omega) - \text{компакт}$$

$$(Y, \varSigma) - \text{компакт}$$

$$\forall \nu = \{U_i \in \Omega \mid i \in I\,;\ \bigcup_{i \in I} U_i = X\}\ \ \exists U_{i_1}; ...; U_{i_n} \in \nu\ \ \bigcap_{i=1}^{n} U_i = X - \text{конеч подпокрытие}$$

$$\forall \eta = \{V_j \in \varSigma \mid j \in J\,;\ \bigcup_{j \in J} V_j = Y\}\ \ \exists V_{j_1}; ...; V_{j_m} \in \nu\ \ \bigcap_{j=1}^{m} V_j = Y - \text{конеч подпокрытие}$$

$$\mu = \{W_k \in \tau \mid k \in K\,;\ \bigcup_{k \in K} W_k = X \times Y\} - \text{покрытие}$$

$$\forall W_k = U_k \times V_k - \text{декартова топология}$$

$$U_k;\ \ k \in K - \text{откр покрытие} X \Rightarrow \exists U_{k_1}; ...; U_{k_n} - \text{конеч подпокрытие} X$$

$$V_k;\ \ k \in K - \text{откр покрытие} Y \Rightarrow \exists V_{k_1}; ...; V_{k_m} - \text{конеч подпокрытие} Y$$

$$\Rightarrow \tau \supset \tau_{n;m} = \{W_{k_{i;j}} = U_{k_i} \times V_{k_j} \mid i \in \{1; ...; n\}; j \in \{1; ...; m\}\} - \text{конеч подпокрытие} X \times Y$$

QED

2) Покажем связность:
От противного. Пусть τ - несвязна. Тогда:

$$\exists a = (x_1; y_1); b = (x_2; y_2) : \forall A \in \tau\ \ a; b \notin A$$

Связность X и Y:

$$\forall x_1; x_2 \in X\ \ \exists A_x \in \Omega :\ \ x_1; x_2 \in A_x$$

$$\forall y_1; y_2 \in Y\ \ \exists A_y \in \varSigma :\ \ y_1; y_2 \in A_y$$

$$\Rightarrow A' = \{(x; y) \in X \times Y \mid x = x_1\}\ \ A'' = \{(x; y) \in X \times Y \mid y = y_2\} - \text{связаны}$$

$$A' \bigcap A'' = \{(x_1; y_2)\} \neq \varnothing \Rightarrow_{\text{крит связ}} X \times Y - \text{связное}$$

QED

Задача 4:

Условие:

1. Доказать, что $SL(n, \mathbf{R})$ допускает структуру гладкого подмногообразие $\mathbf{R}^{n^2}$.
2. Доказать, что $SU(2)$ допускает структуру гладкого многообразие.

Решение:

1) $SL_n(\mathbb{R})$:

$$det : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M \longmapsto det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$$

Докажем, что $1 \in \mathbb{R}$ - регулярное значение det.

$$D_M det = \nabla det(M) = \left(\frac{\partial det}{\partial x_{11}}; \dots ; \frac{\partial det}{\partial x_{nn}}\right)(M)$$

$$\forall M \in SL_n(\mathbb{R}) \ \ \nabla det(M) \neq 0 \Rightarrow Rank \nabla det = 1$$

Значит любая точка $SL_n(\mathbb{R})$ регулярная. По теореме о регулярном значении функции между многообразиями $SL_n(\mathbb{R})$ - гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^{n^2}$. QED

2) $SU(2)$:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \middle| a; b \in \mathbb{C}; \ \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

$$SU(2) \subseteq \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$$

$$S^3 = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

$$f : S^3 \longrightarrow SU(2) \subseteq \mathbb{R}^8$$

$$(x; y; z; t) \longmapsto \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix} - \text{непр, биекция}$$

$$\Rightarrow SU(2) \cong S^3$$

$$g : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; y; z; t) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

$$SU(2) = g^{-1}(1)$$

Докажем, что $1 \in \mathbb{R}$ - регулярное значение g.

$$\nabla g = (2x; 2y; 2z; 2t) \neq 0 \ \ \forall (x; y; z; t) \in SU(2)$$

Теорема регулярном значении функции между многообразиями
$\Rightarrow$ QED

Задача 5:

Условие:

Доказать что не существует гомеоморфизма между $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^5$.

Решение:

От противного. Пусть $\mathbb{R}^2 \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^5$ - гомеоморфны.

Тогда

$$\mathbb{R}^2 - \{0\} \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^5 - \{f(0)\} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \overset{f}{\simeq} \mathbb{R}^5 - \{0\}$$

Знаем

$$\mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1$$

$$\mathbb{R}^5 - \{0\} \overset{g}{\simeq} S^4$$

$$g : \vec{x} \longmapsto \frac{\vec{x}}{x}$$

$$S^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} = \pi_1\left(S^1; \vec{x}\right) = \pi_1\left(\mathbb{R}^2 - \{0\}; \vec{x}\right) = \pi_1\left(\mathbb{R}^5 - \{0\}; f(\vec{x})\right) = \pi_1\left(S^4; \frac{f(\vec{x})}{|f(\vec{x})|}\right) = 0$$

Противоречие. QED

Задача 6:

Условие:

Пусть G линейно связная группа Ли, размерности n.

Пусть

$$\Gamma(G) = \text{Можество гладких полей на G.}$$

1. доказать, что существует изоморфизм $C^\infty(G)$-модулей:

$$\Omega^1(G) \cong \underbrace{C^\infty(G) \oplus \cdots \oplus C^\infty(G)}_{n-times}$$

где

$$\Omega^1(G) = \{\mathbf{f} : \Gamma(G) \to C^\infty(G) | \text{такое что } \mathbf{f} \text{ является } C^\infty(G) - \text{линейная}\}$$

Hint: использовать лево-инвариантные поля.

Решение:

Обозначим за $\mathfrak{g} = T_eG$ алгебру Ли в единице $e \in G$ и выберем базис $\{X_1; \ldots; X_n\} \subset \mathfrak{g}$. Для каждого i определим лево-инвариантное поле $\widetilde{X}_i$ на G путём переноса X_i с помощью левых сдвигов. Тогда $\{\widetilde{X}_1; \ldots; \widetilde{X}_n\}$ образуют базис в $\Gamma(G)$.

Любое векторное поле $Y \in \Gamma(G)$ можно разложить в этом базисе:

$$Y[f](g) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j(g)\, \widetilde{X}_j[f](g) \quad \text{где } a_j \in C^\infty(G)\ \forall f \in C^\infty(G)\ \forall g \in G$$

Рассмотрим 1-форму $\omega \in \Omega^1(G)$. По опруделению:

$$\omega\left(hY + kZ\right) = h\omega\left(Y\right) + k\omega\left(Z\right) \ \forall h; k \in C^\infty(G)\ Y; Z \in \Gamma(G)$$

Определим ω на базисных полях X_j и получим n гладких функций:

$$\omega(X_j) \ \in \ C^\infty(G), \quad j = 1, \dots, n.$$

Зададим отображение

$$\Phi\colon \Omega^1(G) \ \longrightarrow \ \big(C^\infty(G)\big)^n, \quad \omega \ \mapsto \ \big(\omega(X_1), \dots, \omega(X_n)\big).$$

Проверим биективнось:

1) Инъективность:

$$\omega(\widetilde{X}_j) = 0 \Rightarrow \omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(g)\, \widetilde{X}_j[f](g)\right) = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

2) Сюрьективность:

$$\omega(\widetilde{X}_j) \ = \ f_j \Rightarrow \ \forall Y = \sum_j a_j \widetilde{X}_j \ \ \omega(Y) = \sum_j a_j f_j \in \Omega^1(G)$$

Получили

$$\Omega^1(G) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} C^\infty(G)$$

По сути доказали:

$$\Omega^1(G) = \Gamma(G)^*$$

QED

Задача 7:

Условие:

Пусть $T^2 = S^1 \times S^1$ тор размерности 2. Пусть $m \in T^2$.
Доказать через теорему Seifert-Van Kampen, что $\pi_1(T^2, m)$ изоморфно группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

На $\mathbf{R}^2$ стандартная топология. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, с индуцированной топологией. На торе T^2 декартово топология.

Решение:

$$\mathbb{T}^2 \cong [0;1] \times [0;1]/\sim \text{с фактор топологией}$$

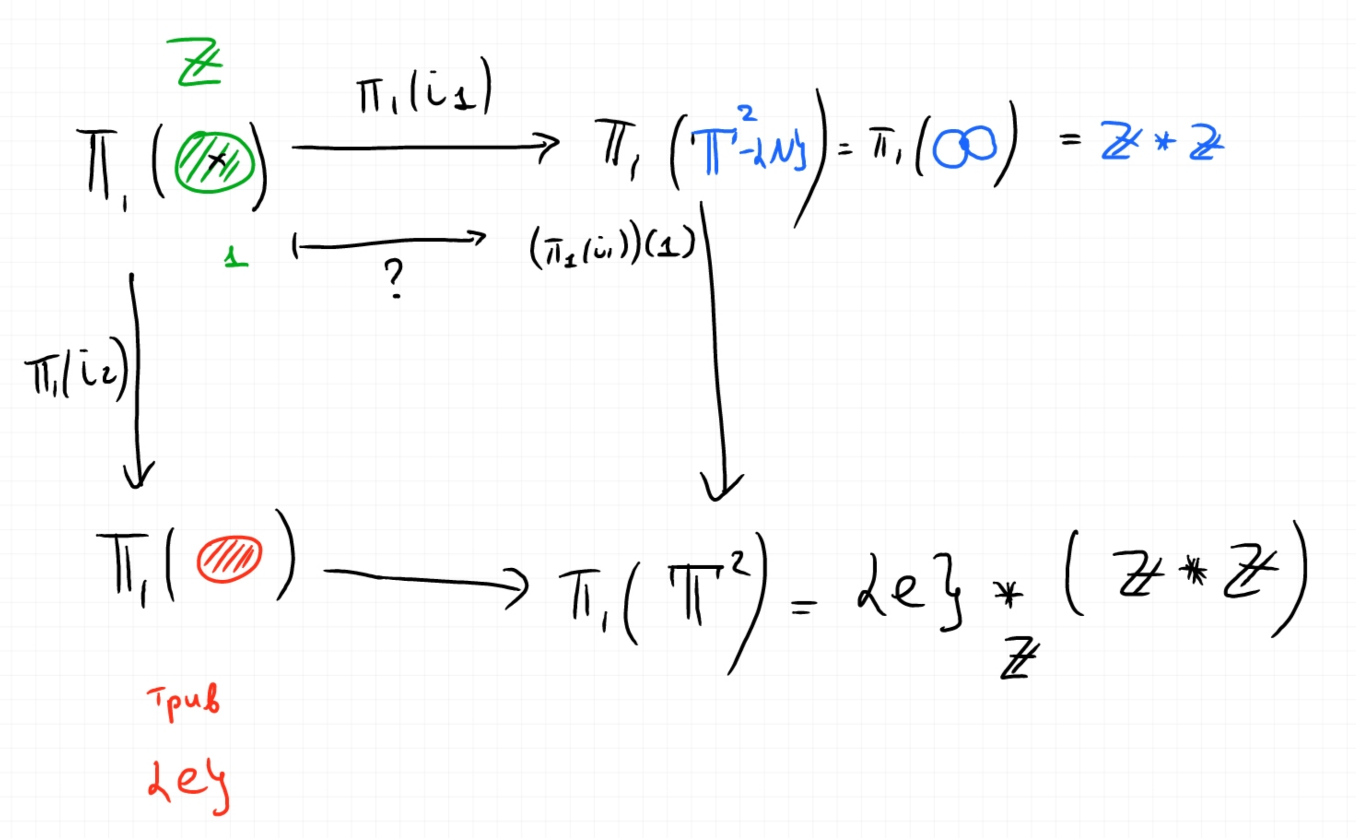
$$(0; s) \sim (1; s)\ (t; 0) \sim (t; 1) \ \ \forall t; s \in [0;1]$$

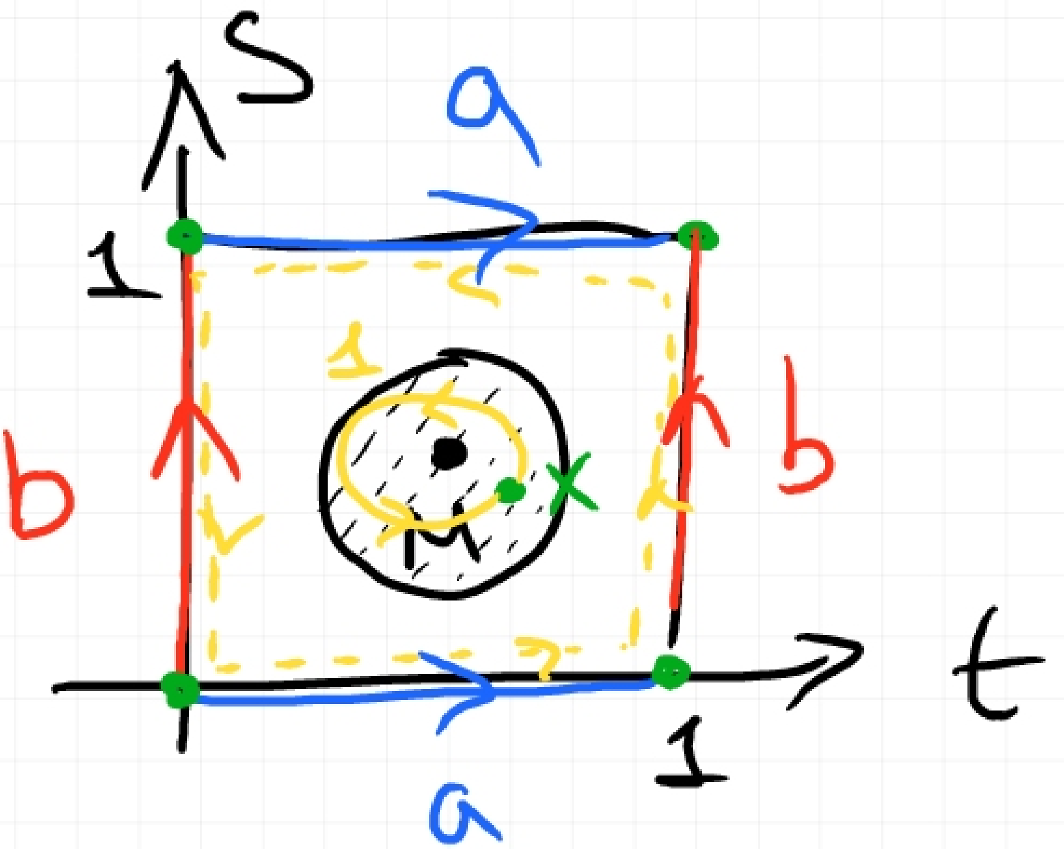
$$U_1 = \mathbb{T}^2 - \{M\} - \text{откр, лин связ}$$

$$U_2 = B_\varepsilon(M) - \text{откр, лин связ}$$

$$U_1 \bigcap U_2 = U_2 - \{M\} - \text{откр, лин связ}$$

По Теореме Ван-Кампана:





Чтобы получить генератор $\mathbb{Z}$ - обойдем тор по петле

$$\Rightarrow 1 \overset{\pi_1(i_1)}{\longmapsto} aba^{-1}b^{-1}$$

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2) = \{e\} \underset{\mathbb{Z}}{*} (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \left\langle a; b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

QED

Задача 8:

Условие:

Теорема Риманна утверждает следующее: Если M двухмерное топологическое многообразие такое, что M линейно связное и $\pi_1(M) = 0$ тогда существует гомеоморфизм межу M и $\mathbf{R}^2$.

Определение : Пусть X топологическое пространство, пусть Γ группа действующая (непрерывно) на X гомеоморфизмами. Мы будет говорить, что Γ действует хорошо если

$$\forall x \in X, \exists U_x \subset X \text{ такое что } \forall g \in \Gamma - \{e\}, \text{ следует что } g.U \cap U = \emptyset$$

где e нейтральный элемент в Γ а U_x открытый в X и $x \in U_x$.

Цель этой задачи это доказать следующий результат:

Лемма: Пусть $F(2) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ свободная группа с двумя порождающими. Тогда существует хорошее (непрерывное) действо $F(2)$ на $\mathbf{R}^2$.

1. Пусть X двухмерное линейно-связное топологическое многообразие. Доказать, что универсальное накрытие $\tilde{X}$ является двухмерным топологическим многообразием.

2. Пусть $x \in X$, найдите действие $\pi_1(X, x)$ на $\tilde{X}$ такое, что это действие хорошее.

3. Пусть $T^2 = S^1 \times S^1$ и пусть $x, y \in T^2$. Доказать, что $\pi_1(T^2 - \{y\}, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

4. Доказать Лемму используя Теорему Риманна.

Решение: :(