Домашняя работа
Кононов Александр Михайлович
26.10.2024

Условие:

ЗАДАЧА 7 (5 БАЛЛОВ)

В парамагнетике динамика намагниченности описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}_L \times \boldsymbol{M}] - \frac{\boldsymbol{M}_\parallel - \boldsymbol{M}_0}{T_1} - \frac{\boldsymbol{M}_\perp}{T_2}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_L = \gamma \boldsymbol{B}$ – частота ларморовской прецессии магнитного момента в магнитном поле $\boldsymbol{B}$, γ – гиромагнитная постоянная, $\boldsymbol{M}_0 = \tilde{\chi}_M \boldsymbol{B}$ – намагниченность в стационарных условиях, $\boldsymbol{M}_\parallel$ и $\boldsymbol{M}_\perp$ – компоненты вектора $\boldsymbol{M}$, параллельные и перпендикулярные $\boldsymbol{B}$, T_1, T_2 – продольное и поперечное время релаксации намагниченности.

Рассмотрите парамагнетик, помещённый в постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B}_0 \parallel z$. Пусть к системе дополнительно приложено переменное магнитное поле $\boldsymbol{B}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{B}_1^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $|\boldsymbol{B}_1| \ll |\boldsymbol{B}_0|$. Найдите обусловленную этим полем поправку к намагниченности вида $\boldsymbol{M}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{M}_1^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ и определите тензор восприимчивости $\tilde{\chi}_{1,ij}(\omega)$, описывающий линейный отклик $\boldsymbol{M}_{1,i} = \tilde{\chi}_{1,ij} \boldsymbol{B}_{1,j}$. Постройте график зависимости компонент тензора $\tilde{\chi}_{1,ij}(\omega)/\tilde{\chi}_M$ от ω при $\gamma B_0 T_2 = 10$, $T_1 = T_2/2$.

Решение:
Будем считать, что поле направлено по оси z.

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_1} e^{-i\omega t}$$
$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{M_1} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{d\left(\overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{M_1} e^{-i\omega t}\right)}{dt} = \gamma \cdot \left(\overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_1} e^{-i\omega t}\right) \times \left(\overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{M_1} e^{-i\omega t}\right) - \\ - \frac{\left(\overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{M_1} e^{-i\omega t}\right)_{||} - \overrightarrow{M_0}}{T_1} - \frac{\left(\overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{M_1} e^{-i\omega t}\right)_{\perp}}{T_2}$$

$$-i\omega \overrightarrow{M_1} = \gamma \cdot \left(\overrightarrow{B_0} \times \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{B_1} \times \overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{B_1} \times \overrightarrow{M_1}\right) - \frac{\overrightarrow{M_{1||}}}{T_1} - \frac{\overrightarrow{M_{1\perp}}}{T_1}$$

Слагаемое $\overrightarrow{B_1} \times \overrightarrow{M_1} = 0$, так как это следующий порядок малости:

$$-i\omega \overrightarrow{M_1} = \gamma \cdot \left(\overrightarrow{B_0} \times \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{B_1} \times \overrightarrow{M_0}\right) - \frac{\overrightarrow{M_{1||}}}{T_1} - \frac{\overrightarrow{M_{1\perp}}}{T_1}$$

Считаем что поле по z не меняется в силу малости поля $\overrightarrow{B_1}$ и $M_z = M_0$
Проецируем на оси x и y и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -i\omega M_{1x} = \gamma\left(-B_0 M_1 1y + B_{1y} M_1 0\right) - \frac{M_{1x}}{T_2} \\ -i\omega M_{1y} = \gamma\left(B_0 M_1 1x - B_{1x} M_1 0\right) - \frac{M_{1y}}{T_2} \end{cases}$$

В матричном виде получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} (1 - i\omega T_2) & \gamma B_0 T_2 \\ \gamma B_0 T_2 & -(1 - i\omega T_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \end{pmatrix} = \gamma B_0 T_2 \chi_M \begin{pmatrix} B_{1y} \\ B_{1x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \end{pmatrix} = \gamma B_0 T_2 \chi_M \cdot \begin{pmatrix} (1 - i\omega T_2) & \gamma B_0 T_2 \\ \gamma B_0 T_2 & -(1 - i\omega T_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{1y} \\ B_{1x} \end{pmatrix}$$

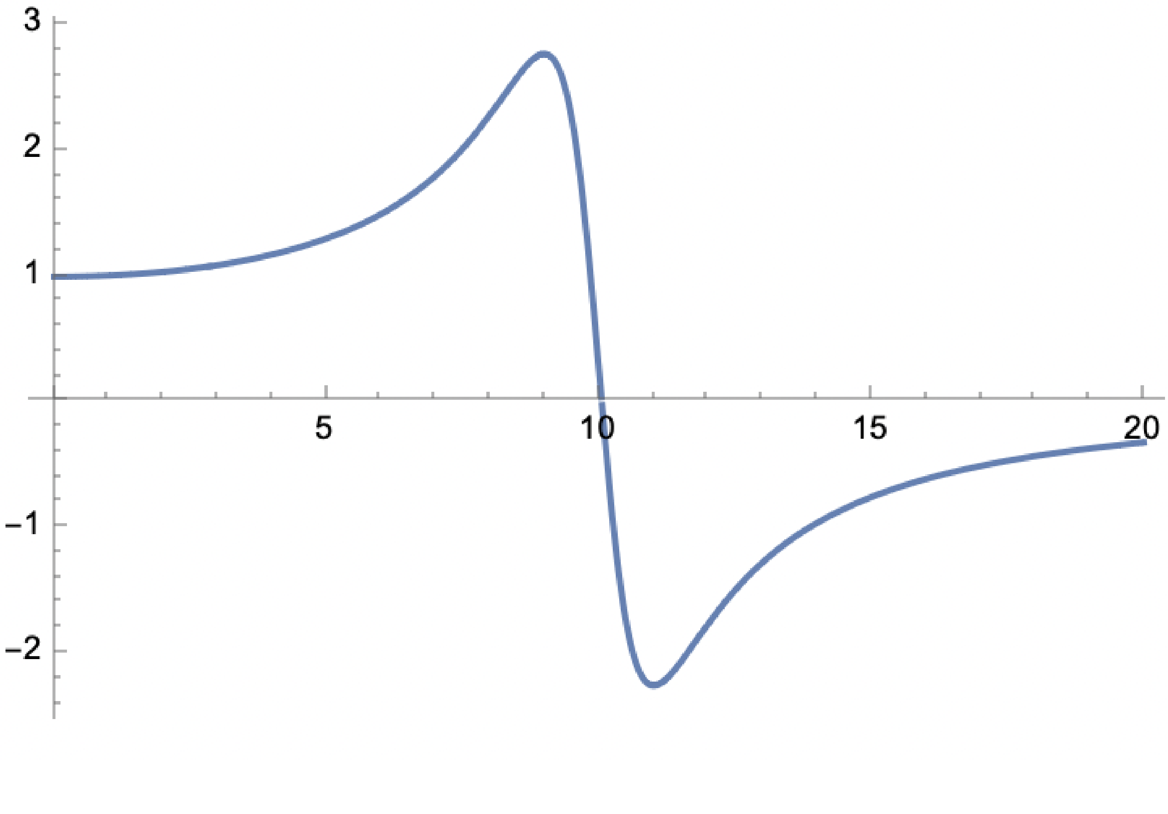
$$\begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \end{pmatrix} = \gamma B_0 T_2 \chi_M \frac{1}{(1 - i\omega T_2)^2 + (\gamma B_0 T_2)^2} \cdot \begin{pmatrix} (1 - i\omega T_2) & \gamma B_0 T_2 \\ \gamma B_0 T_2 & -(1 - i\omega T_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1y} \\ B_{1x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \end{pmatrix} = \gamma B_0 T_2 \chi_M \frac{1}{(1 - i\omega T_2)^2 + (\gamma B_0 T_2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \gamma B_0 T_2 & (1 - i\omega T_2) \\ -(1 - i\omega T_2) & \gamma B_0 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \end{pmatrix}$$

Очевидно что $\chi_{zz} = \chi_M$ в силу линейности поля B, а $\chi_{zx} = \chi_{zy} = \chi_{xz} = \chi_{yz} = 0$
Графики:
$\chi_{xx} = -\chi_{yy}$

```
In[26]:= Plot[Re[100/((1 - I*x)^2 + 100)], {x, 0, 20}]
         гра···  действительная часть
```

Out[26]=



$\chi_{xy} = \chi_{yx}$

$$\texttt{Plot}\left[\texttt{Re}\left[\frac{10*(1-I*x)}{(1-I*x)^2+100}\right], \{x, 2, 18\}\right]$$

гра··· действительная часть

Out[34]=