# Опорный конспект

# Теория функции комплексного переменного

# Содержание

# 1. Комплексные числа и операции над ними.

## 1.1. Комплексные числа

**Определение 1.1.1.** Комплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b.

Множество всех комплексных чисел обозначается через **C**. Во множестве комплексных чисел имеется элемент, квадрат которого равен – 1. Это число называется мнимой единицей: $i^2 = -1$.

**Обозначение**: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ , a – действительная часть комплексного числа, b – мнимая часть комплексного числа.

**Правило сложения:**

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\, i$$

**Правило умножения:**

$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i$$
$$\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi$$

Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым к числу $z = x + iy$. У сопряжённых чисел равны действительные части, а мнимые отличаются только знаком.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными: $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Для комплексных чисел не вводятся понятия больше или меньше.

Для целых положительных степеней $i$ получим (можно доказать по индукции):

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = -1, \qquad i^6 = -1,$$
$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

Дополнительные формулы:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$
$$z - \bar{z} = 2iy, \quad z + \bar{z} = 2x.$$

## 1.2. Комплексная плоскость

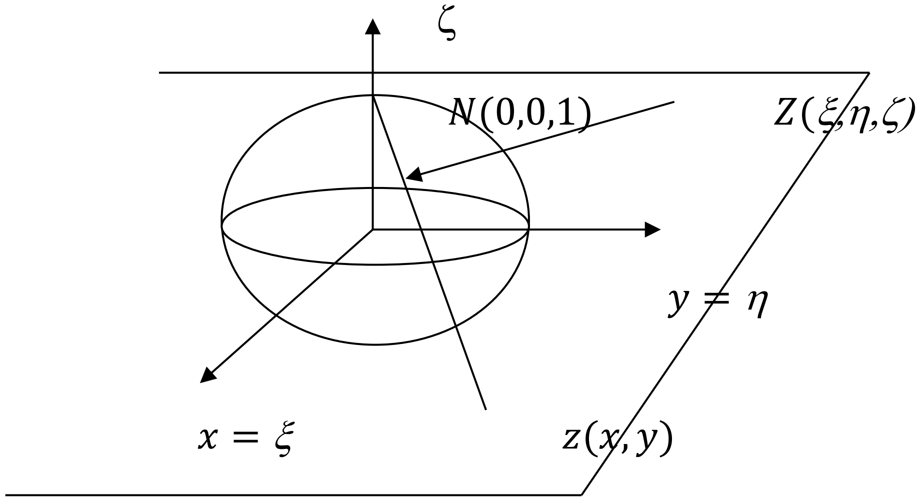
В заданной декартовой системе координат каждому комплексному числу соответствует определённая точка плоскости. При этом, проекция точки на ось абсцисс равна действительной части комплексного числа, а проекция точки на ось ординат равна мнимой части комплексного числа.

Такая плоскость с декартовой системой координат, где на оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а на оси ординат – мнимая часть комплексного числа, называется комплексной плоскостью. На комплексной плоскости каждому комплексному числу соответствует определённая точка и наоборот. Как правило, комплексную плоскость обозначают буквой **C**.

От обычной плоскости с декартовой системой координат $\mathbf{R}^2$ комплексная плоскость отличается тем, что для её точек введена операция умножения.

В некоторых вопросах удобно компактифицировать множество комплексных чисел $\mathbf{C}$. Это делается добавлением к нему идеального элемента, который называется бесконечной точкой $z = \infty$. В отличии от конечных точек $(z \neq \infty)$ бесконечная точка не участвует в алгебраических действиях. Компактифицированную плоскость комплексных чисел (т.е. плоскость $\mathbf{C}$, пополненную бесконечной точкой) мы будем называть расширенной плоскостью (иногда называют полной или замкнутой) и обозначать символом $\bar{\mathbf{C}}$. Когда нужно подчеркнуть различие, $\mathbf{C}$ называют открытой плоскостью.

Описанную компактификацию можно сделать наглядной, если вместо изображения комплексных чисел точками плоскости воспользоваться их сферическим изображением. Для этого выберем в трёхмерном евклидовом пространстве декартовую систему координат $\xi, \eta, \zeta$, оси $\xi$ и $\eta$ которой соответственно совпадают с осями $x$ и $y$, и рассмотрим в этом пространстве единичную сферу $S: \ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Каждой точке $z(x, y) \in \mathbf{C}$ поставим в соответствие точку $Z(\xi, \eta, \zeta,)$ пересечения с $S$ луча, соединяющего “северный полюс” $N(0,0,1)$ сферы с точкой $z$. Такое соответствие $z \to Z$ называется стереографической проекцией.




Стереографическая проекция $z \to Z$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $\mathbf{C}$ и $S \backslash N$ (точке $N$ не соответствует ни одной точки $z$). Принимается, что точке $N$ соответствует бесконечная точка $z = \infty$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие $\bar{\mathbf{C}}$ с $S$. Обычно, вообще отождествляют $\bar{\mathbf{C}}$ со сферой $S$, которая называется сферой комплексных чисел или сферой Римана. Открытую плоскость $\mathbf{C}$ можно отождествить с S\N – сферой с выколотой точкой N (северным полюсом).

## 1.3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Имеем формулы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, а также $\lambda(x + iy) = \lambda x + i\lambda y$. С их учётом получим другую запись комплексного числа:

$$z = (x, y) = x + iy = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это так называемая тригонометрическая форма записи комплексного числа. Число r называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Число $\varphi$ называется аргументом комплексного числа.

$\varphi$ – это угол между положительным направлением оси $x$ и направлением вектора $\vec{z}$. Иначе, $\varphi$ изображает угол, на который нужно повернуть положительное направление оси $x$, чтобы оно совпало с направлением вектора $\vec{z}$, считая этот угол положительным, если вращение совершается против часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае.

Для каждого числа $z$ его аргумент $\varphi$ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число кратное $2\pi$.

Для числа 0 аргумент не определён. Для аргументов остальных чисел используется обозначение

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

где $\arg z$ есть наименьшее по абсолютной величине значение $\operatorname{Arg} z$, называется его главным значением и определяется условием: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Все значения аргумента $\varphi$ удовлетворяют соотношениям :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \ \sin\varphi = \frac{y}{r}, \ \cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{если } x > 0, \text{т. е. в I и IV четвертях,} \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{если } x < 0, y \ge 0, \text{т. е. во II четверти,} \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{если } x < 0, y < 0, \ \text{т. е. в III четверти,} \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Два числа в тригонометрической форме будут *равны***,** если равны их модули, аргументы отличаются друг от друга на величину кратную $2\pi$:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \Rightarrow r = \rho, \qquad \varphi = \psi \pm 2k\pi.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа удобна и используется для умножения комплексных чисел.

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\, r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей. Аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.

Также получаем

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)).$$

В частности, если все слагаемые равны между собой, то получаем формулу Муавра:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

## 1.4. Обратные операции

Вычитание определяется как операция обратная сложению. Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ по определению будет число $z$, удовлетворяющее равенству $z_2 + z = z_1$.

Прибавляя к обеим частям этого равенства число $(-1)z_2$, получим $z = z_1 + (-1)z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

Деление определяется как операция обратная умножению. Частным двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ по определению будет число $z$, удовлетворяющее равенству $z_2 \cdot z = z_1$. Оно эквивалентно двум равенствам: $x_2 x - y_2 y = x_1$ и $y_2 x + x_2 y = y_1$. Найдём $x$ и $y$.

$$\begin{cases} x_2^2 x - x_2 y_2 y = x_1 y_1, \\ y_2^2 x + x_2 y_2 y = y_1 y_2 \end{cases} \Rightarrow \qquad x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

$$\begin{cases} x_2 y_2 y - y_2^2 = x_1 y_2, \\ x_2 y_2 y + x_2^2 = y_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \qquad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Это выражение можно получить и непосредственно:

$$z=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

В тригонометрической форме деление двух комплексных чисел будет выглядеть так:

$$z_2z=z_1\Rightarrow\ r_2\,r\ =\ r_1,\varphi_2+\varphi\ =\ \varphi_1\pm 2k\pi\ \Rightarrow\ \ r=\frac{r_1}{r_2},\varphi\ =\ \varphi_1-\varphi_2\pm 2k\pi\Rightarrow$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

## 1.5. Уравнения кривых

## 1.6. Примеры и упражнения

**Пример 1.6.1.** Вычислить $z_1\ =\ \left(1+\ i\sqrt{3}\right)^3$.

**Решение.** Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z\ =\ 1+\ i\sqrt{3}$: $x\ =\ 1,\ y\ =\sqrt{3},\ \ r\ =\ \sqrt{1+3}\ =\ 2$ т.к. $x\ >\ 0, y\ >\ 0$, то комплексное число $z$ находится в первой четверти, аргумент будет равен $\varphi\ =\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ =\operatorname{arctg}\sqrt{3}\ =\ \frac{\pi}{3}$. Комплексное число $z\ =\ 1+\ i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме запишется $z\ =\ 2(\cos\frac{\pi}{3}\ +\ i\sin\frac{\pi}{3})$. Возведём данное число в третью степень:

$$\mathrm{z}_1\ =\ \mathrm{z}^3\ =\ 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{3}\ +\ i\sin\frac{3\pi}{3}\right)\ =\ 8(\cos\pi\ +\ \mathrm{i}\sin\pi)\ =\ -8.\ \blacksquare$$

**Пример 1.6.2.** Вычислить $z_1\ =\ \left(\sqrt{3}-\ i\right)^5$.

**Решение.** Модуль данного числа $r\ =\ 2$, т.к. $x\ >\ 0, y\ <\ 0$, то число $z$ в 4 четверти, аргумент $\varphi\ =\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ =\ -\frac{\pi}{6}$. Комплексное число $z=\sqrt{3}-\ i$ в тригонометрической форме запишется $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Возведём данное число в 5-ую степень: $z^5=2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-16\left(\sqrt{3}+i\right)$. $\blacksquare$

# 2. Функции комплексного переменного.

## 2.1. Элементарные функции

**Определение 2.1.1.** Если каждому z из области D комплексной плоскости $\mathbf{C}$ поставлено в соответствие одно или несколько значений $\mathrm{w} = \mathrm{f(z)} \in \mathbf{C}$, то в области D определена функция комплексного переменного.

Задание $f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, т.е. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – действительная и мнимая части функции $f(z)$.

Если каждому $z$ соответствует одно значение $w$, то функция называется *однозначной,* в противном случае – *многозначной.* Функция $f(z)$ называется взаимно однозначной или *однолистной,* если она преобразует различные точки $z_1, z_2 \in D$ в различные, иными словами, если из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$ ( для $z_1, z_2 \in D$).

В комплексном анализе основные элементарные функции имеют те же названия и обозначения, что и вещественном анализе, но они должны быть предварительно определены для комплексного переменного, иначе неизвестно, что понимать под $e^z, \sin z$ и т.д.

**Степенная функция** $w = z^n$ (n – натуральное)

**Целая рациональная функция** $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots .. + a_n$

Так как каждое слагаемое $a_k z^{n-k}$ $(k = 0,1, \dots, n)$ есть однозначная непрерывная функция на всей плоскости z, то и целая рациональная функция однозначна и непрерывна на всей открытой плоскости.

**Дробная рациональная функция** $w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$

Эта функция, как частное двух многочленов, есть функция однозначная и непрерывная на всей открытой плоскости, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Целая и дробная рациональные функции называются просто рациональными. Параметры $a_k, b_k$, и переменная $z$ – комплексные.

**Показательная функция** $w = e^z$ определяется с помощью равенства

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Так как $u(x, y) = e^x \cos y$ , $v(x, y) = e^x \sin y$ однозначны при всех $x$ и $y$, то показательная функция однозначна. В частности, из написанной формулы получается формула Эйлера (при $x = 0$):

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

на которую можно смотреть как на определение чисто мнимой степени $e$.

Показательную функцию определяют также и так:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \quad \text{или} \quad e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ \dots+\frac{z^n}{n!}+\ \dots.$$

Все эти три определения равносильны.

Из трёх равенств, принимаемых за определение $e^z$, при $y = 0$ получим вещественную функцию $e^x$, которая является частным случаем функции $e^z$.

Известное свойство функции $e^x$, выражаемое равенством $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ справедливо и для $e^z$. Действительно,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Функция $e^z$ периодическая с периодом $\omega = 2\pi i$. В самом деле,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

Далее $e^{z-z} = 1 \Rightarrow e^z\cdot e^{-z} = 1$. По определению деления $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Также $e^{z_1}e^z = e^{z_2} \Rightarrow e^z = e^{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{e^{z_2}}{e^{z_1}} = e^{z_2-z_1}$.

Пользуясь тождеством Эйлера, получаем так называемую показательную форму комплексного числа, которая также как тригонометрическая употребляется для умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi};$$
$$z_1\cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$
$$z^n = r^ne^{in\varphi};\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}.$$

**Тригонометрические функции**

$$w = \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad w = \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$
$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}, \qquad w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Все эти функции однозначны во всех точках комплексной плоскости, исключая точки $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ для $\operatorname{tg} z$ и точки $z = k\pi$ для $\operatorname{ctg} z$. В этих точках соответственно, $e^{iz}+e^{-iz} = (e^{2iz}+1)e^{-iz} = 0$ и $e^{iz}-e^{-iz} = (e^{2iz}-1)e^{-iz} = 0$.

Функции «синус» и «косинус» также определяют с помощью рядов

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!}+\ \dots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ \dots\ ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots .$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют периоды вида $2k\pi$, а $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ – вида $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Известные формулы для тригонометрических функций вещественного аргумента справедливы для соответствующих функций комплексного аргумента. Например:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1,$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

**Замечание 2.1.1.** Синус и косинус комплексного аргумента могут быть по модулю больше единицы. Например:

$$\cos i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1{,}575.$$

**Гиперболические функции**

$$w = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad w = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$w = \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \qquad w = \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Все гиперболические функции однозначно определены на всей плоскости комплексной переменной за исключением точек $z = (2k + 1)\frac{\pi i}{2}$ для $\operatorname{th} z$ и точки $z = k\pi i$ для $\operatorname{cth} z$. Гиперболические функции связаны с тригонометрическими простыми зависимостями, а именно:

$$\sin iz = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z;$$
$$\cos iz = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z;$$
$$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z; \qquad \operatorname{ctg} iz = -\operatorname{cth} z.$$

Эти соотношения позволяют получать из формул для тригонометрических функций формулы для гиперболических функций. Для этого достаточно, взяв любую тригонометрическую формулу, заменить в ней $\sin z$ на $-i \operatorname{sh} iz$, $\cos z$ на $\operatorname{ch} iz$, $\operatorname{tg} z$ на $-i\operatorname{th} iz$, $\operatorname{ctg} z$ на $\operatorname{cth} iz$. Например:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$
$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1,$$
$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

**Функция «корень квадратный» $\mathbf{w = \sqrt{z}}$ как обратная к степенной $\mathbf{w = z^2}$.**

Взяв $z = \rho e^{i\varphi}$, получим $w = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{2}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}} e^{i\pi k},\ k = 1{,}2.$ Обозначим значения $w$, соответствующие $k = 0$, через $w_1$, а соответствующие $k = 1$, через $w_2$. В результате получим две функции $w_1 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\quad w_2 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i\pi} = -w_1$, которые называются ветвями многозначной функции.

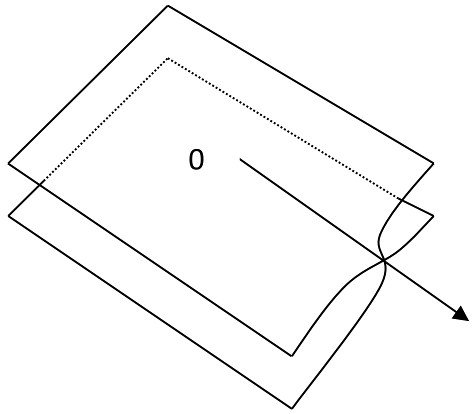
Посмотрим, как меняются значения $w_1$ и $w_2$ с изменением $z$. Если точка $z$ будет перемещаться по линии, окружающей точку $z = 0$, начиная, например, с точки $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, то после одного полного оборота, совершённого вокруг начала координат в положительном направлении, возвращение в точку $z_0$ будет уже с аргументом $\varphi_0 + 2\pi$. Ещё один полный оборот вокруг начала координат в положительном направлении снова даст прирост аргументу $z_0$ величиной $2\pi$. И так каждый раз. Если движение будет в отрицательном направлении, то аргумент при каждом полном обороте будет изменяться на $2\pi$. Значение $w_1 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ от каждого полного оборота будет приобретать множитель $e^{i\pi} = -1$ или $e^{-i\pi} = -1$ и, следовательно, будет давать уже значения $w_2$, а после ещё одного оборота того же направления будет возвращаться к своему первоначальному значению. Так же будет вести себя и $w_2$. Отсюда следует, что функция $w_1$ (а также $w_2$), которая определена на плоскости $z$, будет в ней однозначна лишь в том случае, если невозможен обход вокруг точки $z = 0$.

Этого можно достичь видоизменением плоскости, сделав разрез плоскости от точки $z = 0$ до точки $z = \infty$ вдоль положительной части вещественной оси. На такой видоизменённой плоскости каждая из функций $w_1$ и $w_2$ будет однозначна. В любой конечной точке $z \neq 0$ они различны и лишь при $z = 0$ имеем $w_1 = w_2 = 0$ (на расширенной плоскости есть ещё бесконечно удалённая точка, где считаем, что $w_1$ и $w_2$ обращаются в $\infty$ ).

## 2.2. Двулистная поверхность Римана

Двузначную функцию $w = \sqrt{z}$ можно представить как однозначную, если ввести в рассмотрение два экземпляра плоскости $z$, разрезанные вдоль положительной части вещественной оси, которые расположены один над другим так, что точки с одинаковыми координатами находятся одна над другой, точки $z = 0$ и $z = \infty$ совпадают, а разрезы соединены крест-накрест. Луч, соединяющий точки $z = 0$ и $z = \infty$ считается при этом дважды, исключая точки $z = 0$ и $z = \infty$.

Когда точка $z$ находится на одном листе построенной поверхности, то функция имеет значения одной из своих ветвей, например $w_1$, обойдя точку $z = 0$ точка $z$ попадает на другой лист этой поверхности, где она принимает уже значения ветви $w_2$.




Построенная двулистная поверхность называется поверхностью Римана. Чтобы говорить о точке $z$ на поверхности Римана, надо указать её координаты и номер листа поверхности. Если пользоваться поверхностью Римана, то можно сказать, что соответствие между множеством точек $z$, построенной двулистной поверхности и множеством точек плоскости $w$, устанавливаемое соотношением $w=\sqrt{z}$ (или, что то же самое, $z = w^2$ ) взаимно однозначно и непрерывно.

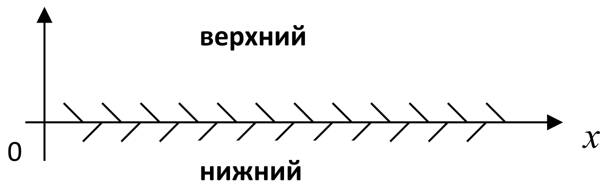
Точка $z = 0$, обход вокруг которой меняет значение функции $w=\sqrt{z}$, а двойной обход одного направления приводит к прежнему значению, называется точкой разветвления второго порядка для этой функции.

**Функция $\mathbf{w=\sqrt[n]{z}}$ как обратная к $\mathbf{z^n}$**

Взяв $z=\rho e^{i\varphi}$, получим $w=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$. Полагая $k=0,1,\dots,n-1$, найдём $n$ различных функций $w_1=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $w_2=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i\frac{2\pi}{n}}=w_1e^{i\frac{2\pi}{n}}$, ..., $w_n=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}=w_{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}}$, которые называются *ветвями* многозначной функции. В любой конечной точке $z\neq 0$ они различны и лишь в точке $z = 0$ имеют значение равное нулю (а если рассматривать расширенную плоскость, то в точке $z=\infty$ все они обращаются в бесконечность).

Если, начав с точки $z = z_0$, обойти в положительном направлении точку $z = 0$ так, чтобы она оказалась внутри контура обхода, то после одного обхода мы возвратимся в точку $z_0$ с аргументом, увеличенным на $2\pi$, после двух обходов на $4\pi$ и т.д., а через $n$ обходов на $2n\pi$ (при отрицательном направлении эти числа будут соответственно $-2\pi,-4\pi,\dots,-2n\pi$).

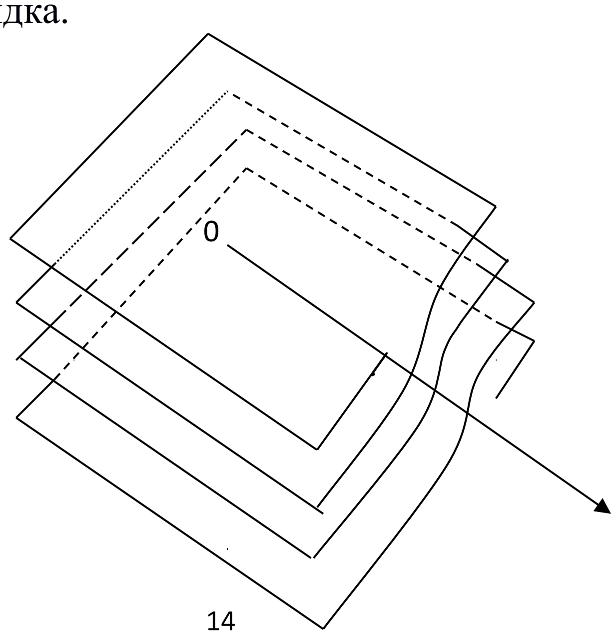
Поэтому значение каждой функции $w_1,w_2,\dots,w_n$ после одного такого обхода приобретает множитель $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, отчего $w_1$ перейдёт в $w_2$, а $w_2$ перейдет в $w_3$ и т.д. После $n$ обходов в положительном направлении (или $n$ – в отрицательном) каждая функция примет в точке $z_0$ своё первоначальное значение. Отсюда видно, что если сделать такой же разрез плоскости, какой был сделан для функции $w = \sqrt{z}$, то каждая из функций $w_1, w_2, \dots, w_n$ будет однозначна и непрерывна на такой видоизменённой плоскости (последнее за исключением точки $z = \infty$).




Заметим, что -значную функцию $w = \sqrt[n]{z}$ можно представить как однозначную на $n$-листной поверхности Римана. Для этого возьмем $n$ одинаковых экземпляров плоскости, разрезанной по лучу, идущему из точки $z = 0$ в направлении положительной части вещественной оси. Наложим их одну на другую так, чтобы точки с одинаковыми координатами расположились одна над другой, а точки $z = 0$ и $z = \infty$ совпали (см. рис. выше).

После этого нижний берег первого листа соединим с верхним берегом второго листа, нижний берег второго листа с верхним берегом третьего и т.д., пока не будут использованы все $n$ листов. Наконец, соединим верхний берег первого листа с нижним берегом последнего. При этом во всех листах точки $z = 0$ и $z = \infty$ считаются совпадающими, а лучи, по которым соединяются листы – различными. На такой -листной поверхности функция $w = \sqrt[n]{z}$ однозначная (см. рис. ниже).

Точка 0, обход вокруг которой меняет значение функции, а $n$ обходов одного направления приводит к исходному, называется точкой разветвления n-го порядка.



**Натуральный логарифм $\mathbf{w = Ln\,z}$ как функция обратная к $\mathbf{z = e^w}$.**

Положим $w = u + iv, z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда получим:

$z = e^w$; $\rho e^{i\varphi} = \rho e^{u+iv} \Rightarrow e^u e^{iv} = \rho e^{i\varphi}$; $e^u = \rho, v = \varphi + 2k\pi$ или $u = \ln\rho,\ v = \varphi + 2k\pi,\ k$ – целое.

Итак: $w = \operatorname{Ln} z = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi),\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots$.

Как видно из полученной формулы, функция $\operatorname{Ln} z$ бесконечнозначная. Возьмем $\varphi = \arg z$, т.е. $-\pi < \varphi \le \pi$. Тогда при $k = 0$ получим главную ветвь логарифма; она обозначается $\ln z$ , т.е.

$$\ln z = \ln\rho + i\varphi, \text{ где } -\pi < \varphi \le \pi.$$

При $k = \pm1, \pm2, \dots$ получим другие ветви: $w_1, w_2, \dots, w_{-1}, w_{-2}, \dots$. Их будет бесконечное множество. Точка 0 является точкой разветвления бесконечного порядка или логарифмической точкой разветвления. Один обход вокруг неё в положительном направлении переводит главную ветвь в ветвь $w_1$, следующий в $w_2$, и т.д. Обход в отрицательном направлении переводит главную ветвь в $w_{-1}$, следующий в $w_{-2}$, и т.д. Сколько бы ни было сделано обходов одного направления, возврат к исходному значению ветви невозможен.

Каждая ветвь логарифма, в том числе и главная, определена, однозначна и непрерывна на всей плоскости с разрезом от точки $z = 0$ до $z = \infty$ в направлении отрицательной части вещественной оси за исключением $z = 0$ до $z = \infty$. На такой плоскости функция $\varphi = \arg z$ непрерывна, в то время как на плоскости, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси, она разрывна.

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена, однозначна и непрерывна во всех точках некоторой бесконечнолистной поверхности Римана, за исключением $z = 0$ и $z = \infty$. Эта поверхность получается, если разрезанные от точки $z = 0$ в направлении отрицательной части вещественной оси, листы комплексной плоскости расположить один над другим в порядке возрастания их номеров и соединить верхний берег каждого листа с нижним берегом следующего (т.е. имеющим номер на единицу больше).

Главная ветвь $\ln z = \ln\rho + i\varphi$ для положительных чисел, у которых $\varphi = 0$ дает обычный логарифм. Ряд свойств логарифмов, известных из алгебры, верен и для $\ln z$. Например, если аргументы чисел $z_1, z_2$ и их сумма лежат в интервале $(-\pi, \pi)$, то справедлива формула:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(\rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2}) = \ln\left(\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\right) =$$

$$= \ln(\rho_1\rho_2) + i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = \ln\rho_1 + i\varphi_1 + \ln\rho_2 + i\varphi_2 = \ln z_1 + \ln z_2.$$

Из определения следует формула $e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

Также справедлива формула $\operatorname{Ln} e^z = z + 2k\pi i$.

Именно, пусть $z = x + iy$, $e^z = e^x e^{iy}$.

Тогда $\operatorname{Ln} e^z = \operatorname{Ln}(e^x e^{iy}) = \ln e^x + i(y + 2k\pi) = x + iy + 2k\pi i = z + 2k\pi i$.

Перепишем формулы определения логарифма с использованием понятий модуля и аргумента:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad \ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

**Общая степенная функция $\mathbf{w = z^a}$, где $\mathbf{a}$ – любое комплексное число.**

Она определяется равенством $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Тогда $w = e^{a(\ln r + i(\varphi + 2\pi k))} = e^{a(\ln r + i\varphi)} e^{2\pi k i a}$. Отсюда вытекают следующие случаи:

- $a$ – целое число. Тогда функция $z^a$ – однозначная, т.к. в этом случае $e^{2\pi k i a} = 1$.
- $a = \frac{m}{n}$ – рациональное число. Тогда для всякого $z = 0$ функция $z^a$ будет иметь $n$ и только $n$ различных значений. Модули всех их равны $e^{\frac{m}{n}\ln r} = r^{\frac{m}{n}}$, а аргументы: $a\varphi, a\varphi + \frac{2\pi m}{n}, a\varphi + \frac{4\pi m}{n} \dots; a\varphi + \frac{2(n-1)\pi m}{n}$, то есть ситуация будет такая же, как для функции $\sqrt[n]{z^m}$, что естественно, ибо $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$.
- $a$ – иррациональное. Тогда функция $w = z^a$, будет бесконечнозначной.
- $a = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$. Функция

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha + i\beta)(\ln r + i(\varphi + 2\pi k))} =$$
$$= e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} e^{-2\pi k \beta} e^{i(\alpha\varphi + \beta \ln r)} e^{2\pi k \alpha i}.$$

бесконечнозначная, причем здесь обход $z$ вокруг нуля меняет и значение модуля $w$.

**Общая показательная функция** определяется аналогично

$$w = a^z := e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

**Функции, обратные к тригонометрическим и гиперболическим,** определяются при помощи формул:

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \qquad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{iz - 1};$$

$$\operatorname{Arcsin} z = i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \qquad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}; \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{z - 1};$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right); \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).$$

## 2.3. Примеры и упражнения

**Пример 2.2.1.** Вычислить $e^z$ при $z = 3+\frac{\pi}{2}i$.

**Решение:** $e^{3+\frac{\pi}{2}i} = e^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^3(0+i) = ie^3.$ ■

**Пример 2.2.3.** Вычислить $\sin z$ при $z = -5-i$ .

**Решение:**

$$\sin(-5-i) = \frac{e^{i(-5-i)}-e^{-i(-5-i)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{1-5i}-e^{-1+5i}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}[e(\cos 5 - i\sin 5) - i(\cos 5 + i\sin 5)] =$$

$$= -\frac{e+e^{-1}}{2}\sin 5 - i\frac{e-e^{-1}}{2}\cos 5 = -\sin 5\operatorname{ch} 1 - i\cos 5\operatorname{sh} 1.$$ ■

**Пример 2.2.8.** Вычислить $\operatorname{Ln} z$ при $z = -1$.

**Решение:**

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1)+2\pi k) = i(\pi+2\pi k) = i(1+2k)\pi.$$ ■

# 3. Предел. Непрерывность. Производная. Дифференциал. Условия Коши-Римана.

## 3.1. Предел последовательности

**Определение 3.1.1.** *Число* $\alpha = a + bi$ называется пределом последовательности $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что все значения $z_n$, у которых номера $n > N$, удовлетворяют неравенству $|z_n - \alpha| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ и говорят, что $z_n$ стремится к α. В частности, если α = 0, то $\{z_n\}$ называют бесконечно малой. Последовательность $\{z_n\}$, имеющую конечный предел, называют сходящейся.

**Замечание 3.1.1.** Геометрически последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к α, соответствует последовательности таких точек плоскости или сферы комплексных чисел, которые сгущаются у точки α. Это означает, что каким бы малым ни был круг с центром в точке α, в нем всегда найдется точка этой последовательности, а следовательно, и бесконечное множество их.

Все основные теоремы о пределах, известные для вещественной переменной, в частности, теоремы о пределе суммы, произведения и частного, а также способы доказательства этих теорем справедливы и для комплексной переменной.

## 3.2. Предел функции

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ задана в окрестности конечной точки $z_0$, за исключением, быть может, самой точки $z_0$.

**Определение 3.2.1.** Число A называется пределом функции f(z) при z стремящемся к $z_0$, если какова бы ни была последовательность $\{z_n\}$, имеющая пределом $z_0$, соответствующая последовательность $\{f(z_n)\}$ имеет предел A. Это записывается так:

$f(z) \to A$ при $z \to z_0$ или $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$.

Точно так же, как в вещественном анализе, можно доказать, что для конечных $z_0$ и $A$ это определение равносильно следующему определению.

**Определение 3.2.2.** Число A является пределом функции f(z) при z, стремящемся к $z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Геометрически это определение для конечных $z_0$ и $A$ означает, что для всех точек плоскости $z$, лежащих внутри круга $|z - z_0| < \delta$, соответствующие им значения функции $w = f(z)$ изображаются точками плоскости $w$, которые лежат внутри круга $|w - A| < \varepsilon$.

**Замечание 3.2.1.** Из формулировки определения предела функции следует, что предел функции не зависит от способа приближения $z \to z_0$.

Основные теоремы о пределах, в частности, теоремы о пределе суммы, произведения и частного переносятся со случая последовательности на случай функции.

## 3.3. Непрерывность функции

**Определение 3.3.1.** Пусть однозначная функция $w = f(z)$ задана в точке $z_0$ и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется непрерывной в конечной точке $z = z_0$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

причем $f(z_0)$ конечное число.

Пользуясь понятием предела функции для конечной точки $z_0$, это можно сформулировать ещё так: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z = z_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Наконец, если назвать $z - z_0 = \Delta z$ приращением независимой переменной, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ – приращением функции, то непрерывность функции в точке можно выразить так: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z = z_0$, если бесконечно малому приращению $\Delta z$ независимой переменной в этой точке соответствует бесконечно малое приращение $\Delta w$ функции.

Если $\lim_{z \to \infty} f(z) = A$ и $A$ – конечное, то будем называть функцию $f(z)$ непрерывной в бесконечно удаленной точке и число $A$ принимать за значение $f(z)$ в этой точке. Например, $f(z) = 1/z$, $A = 0$.

Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Функция называется непрерывной вдоль линии, если условия непрерывности выполняются для точек, взятых на этой линии.

## 3.4. Производная и дифференциал

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в конечной точке $z$ и её окрестности. Дадим $z$ приращение $\Delta z$. Тогда функция $w$ получит приращение $\Delta w$. Составим отношение

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если предел этого отношения при $\Delta z \to 0$ существует, то он называется производной функции $f(z)$ в точке $z$ и обозначается $f'(z)$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

**Замечание 3.4.1.** Из дифференцируемости функции в точке следует её непрерывность. В самом деле, при $\Delta z \to 0$ будем иметь $\Delta w = \frac{\Delta w}{\Delta z}\Delta z \to 0$. Обратного утверждать нельзя.

Так как определение производной формулируется так же, как для функций вещественной переменной, то и основные теоремы о дифференцировании функций в комплексном анализе формулируются и доказываются схожим образом.

Например, если $w_1 = f_1(z), w_2 = f_2(z)$ дифференцируемы в точке $z = z_0$, то в ней дифференцируемы их сумма, произведение и частное, причем производные вычисляются по формулам:

$$(w_1 \pm w_2)' = w_1' \pm w_2'; \qquad (w_1\, w_2)' = w_1'\, w_2 + w_1 w_2';$$
$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)' = \frac{w_1'\, w_2 - w_1 w_2'}{w_2^2}$$

при $w_2 = f_2(z_0) \neq 0$.

Если $\omega = F(z)$ имеет в точке $z = z_0$ производную $F'(z_0)$, а функция $w = \varphi(\omega)$ имеет в точке $\omega_0 = F(z_0)$ производную $\varphi'(\omega_0)$, то сложная функция $w = f(z) = \varphi\big(F(z)\big)$ имеет в точке $z_0$ производную $f'(z_0) = \varphi'(\omega_0) F'(z_0) = \varphi'(\omega_0)\, \omega'(z_0)$.

Если $w = f(z)$ имеет в точке $z = z_0$ производную $f'(z_0)$ и отображает некоторую окрестность этой точки на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$ взаимно однозначно (однолистно), то в окрестности точки $w_0$ существует функция $z = \varphi(w)$, обратная для $w = f(z)$, которая имеет в точке $w = w_0$ производную $\varphi'(w_0)$, причём $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)}$.

**Определение 3.4.1.** Функция однозначная и дифференцируемая в каждой точке некоторой области называется регулярной в этой области.

**Замечание 3.4.2.** Регулярную функцию называют также аналитической. Однако, понятие аналитичности шире понятия регулярности. Аналитическая функция может быть и многозначной.

**Определение 3.4.2.** Функция называется регулярной (аналитической) в точке, если она регулярна (аналитична) в некоторой окрестности этой точки.

Правила дифференцирования основных элементарных функций те же, что и в вещественном анализе. Например:

$$(z^a)' = az^{a-1}; \qquad (e^z)' = e^z; \qquad (\mathrm{Ln}\, z)' = 1/z;$$

$(\sin z)' = \cos z$;  $(\cos z)' = -\sin z$;  $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$;

$(\operatorname{Arcsin} z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;  $(\operatorname{Arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$;  $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$; $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

При этом для любой ветви многозначной функции мы имеем одну и ту же формулу дифференцирования.

Все основные функции являются функциями регулярными, но каждая в своей области. Так $e^z, \sin z, \cos z, z^n$, многочлен, $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ имеют областью регулярности всю открытую плоскость. Дробная рациональная функция регулярна всюду, за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Области регулярности $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ получаются из открытой комплексной плоскости, если исключить из неё для $\operatorname{tg} z$ точки $z_k = (2k+1)\pi/2$, а для $\operatorname{ctg} z$ точки $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Ветви функций $\operatorname{Ln} z, \sqrt[n]{z}, \operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arcctg} z$ не будут регулярны соответственно в точках $z = 0, z = 0$, $z = \pm 1, z = \pm i$. Однако, чтобы получить для них области регулярности, недостаточно исключить указанные точки из открытой плоскости, надо ещё сделать разрезы. Так $\operatorname{Ln} z$, $\sqrt[n]{z}$ для нужно разрезать плоскость от точки $z = 0$ до $z = \infty$, для $\operatorname{Arcsin} z$ – от $z = -1$ до $z = 1$, и для $\operatorname{Arcctg} z$ – от $z = -i$ до $z = i$. Разрезы необходимы для однозначности функций.

Из равенства $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ следует, что при $\Delta z \to 0$ разность $\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \to 0$, т.е. является бесконечно малой величиной. Обозначив $\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z)$, получим $\Delta w = f'(z)\,\Delta z + \alpha \Delta z$.

**Определение 3.4.3.** Линейная относительно $\Delta z$ часть приращения функции $f(z)$ называется дифференциалом функции $f(z)$ и обозначается $dw$ или $df$.

Таким образом, по определению $dw = f'(z)\,\Delta z$. Применив это правило к функции $w = f(z) = z$, найдем, что $dw = f'(z)\,\Delta z = 1\Delta z = \Delta z$. Откуда получим $dw = f'(z)dz$ и $f'(z) = dw/dz$.

**Замечание 3.4.3.** Дифференциал функции отличается от приращения функции на бесконечно малую величину высшего порядка, чем $f'(z)\,\Delta z$ *(если $f'(z) \neq 0$).* Поэтому дифференциал называется ещё главной частью приращения функции.

## 3.5. Условия Коши-Римана

Не всякая функция имеет производную. Установим необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции

**Теорема 3.5.1.** Если функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ имеет производную в точке $z = x + iy$, то функции $\mathrm{u}(x,y)$ *и* $v(x,y)$ имеют частные производные первого порядка в точке $(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1}$$

**Доказательство.** По определению $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z}$. Поскольку $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от способа стремления $\Delta z$ к нулю, то выберем два таких способа , при которых: 1) $\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \Delta x$;

2) $\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta z = i\Delta y$.

В первом случае получим $f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x}$. Докажем , что существуют

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Обозначим $\alpha + i\beta = f'(z)$. В силу дифференцируемости $f(z)$ имеем, что при достаточно малом $\Delta x$ для любого $\varepsilon > 0$ будет выполнятся неравенство $\left|\alpha + i\beta - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\right| < \varepsilon$. Это значит $\sqrt{\left(\alpha - \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} < \varepsilon$.

Отсюда следует, что $\left|\alpha - \frac{\Delta u}{\Delta x}\right| < \varepsilon$ и $\left|\beta - \frac{\Delta v}{\Delta x}\right| < \varepsilon$. Эти неравенства подтверждают существование пределов (3.2). А тогда мы вправе записать

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Во втором случае аналогично получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда вытекает , что $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$. Окончательно имеем

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. ■

**Теорема 3.5.2.** Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в точке $(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям *(3.1)*, то функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$.

**Доказательство.** Известно, что при условии непрерывности частных производных первого порядка функций $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ их полные приращения $\Delta u$, $\Delta v$ можно представить как

$$\Delta u = du + \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha,$$

$$\Delta v = dv + \beta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ – бесконечно малые высшего порядка по сравнению с $|z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. С учетом уравнений (3.1) получим

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta\right)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta z}.$$

Но $\frac{\alpha+i\beta}{\Delta z} \to 0$ при любом стремлении $\Delta z$ к нулю. Следовательно, существует $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, т.е. $f(z)$ дифференцируема. ■

**Определение 3.5.1.** Равенства *(3.1)* называют условиями (или уравнениями) Коши-Римана.

Пользуясь условиями Коши-Римана для производной $f'(z)$, имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Пример 3.5.1.** Исследовать аналитические свойства функции $w = |z|^2$ и найти ее производную.

**Решение.** Найдем действительную и мнимую части функции $w = |z|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$. Получаем $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$. Находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Частные производные, очевидно, непрерывны всюду, и, следовательно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ всюду дифференцируемы.

Условия Коши-Римана выполняются только в точке $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, функция $|z|^2$ дифференцируема в единственной точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Вычислим производную функции $|z|^2$ в точке $z = 0$, например по формуле:

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0{,}0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0{,}0) = 0. \blacksquare$$

**Пример 3.5.2.** Исследовать аналитические свойства функции $w = \bar{z}$.

**Решение.** Найдем действительную и мнимую части функции $w = \bar{z} = x - iy$. Получаем $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Частные производные, очевидно, непрерывны всюду, и, следовательно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ всюду дифференцируемы.

Условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке. Следовательно, функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема и не аналитична. ■

**Упражнения для самостоятельной работы**

**1.** Исследовать аналитические свойства функции $w = f(z)$ и найти ее производную.

1. $f(z) = \mathrm{Re} z$
2. $f(z) = \mathrm{Im}\, z$
3. $f(z) = |z| \mathrm{Re}\, z$
4. $f(z) = \mathrm{Re} z^2$
5. $f(z) = (\mathrm{Re}\, z)^2$
6. $f(z) = (\bar{z})^2$
7. $f(z) = \sin z$
8. $f(z) = 1/z$.

**Ответы***:* 1. Нигде не дифференцируема и не аналитична. 2. Нигде не дифференцируема и не аналитична. 3. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 4. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 5. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 6. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 7. Аналитична при всех $z, f'(z) = \cos z$. 8. Аналитична при всех $z \neq 0$, $f'(z) = -1/z^2$.

## 3.6. Определение аналитической функции по ее вещественной или мнимой части

Пусть для функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана и обладают частными производными второго порядка. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Отсюда в силу равенства $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Аналогично получаем $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Таким образом, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – гармонические функции.

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные уравнениями Коши-Римана (3.1), называют сопряженными между собой гармоническими функциями.

Последнее обстоятельство позволяет по данной вещественной (или мнимой) части аналитической функции найти саму функцию (с точностью до постоянного слагаемого).

Действительно, пользуясь уравнениями Коши-Римана , найдем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy. \qquad (3.3)$$

Напомним что выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ будет полным дифференциалом, если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Правая часть равенства (3.3) есть полный дифференциал, так как в силу равенства $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ имеем $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$. Зная полный дифференциал, по нему можно найти саму функцию.

Если известна функция $v(x,y)$, то сначала из уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ определяют $u(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}dx + c(y)$, а затем, дифференцируя по $y$, получим $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial v}{\partial y}dx + c'(y)$. Далее из уравнения $-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial v}{\partial y}dx + c'(y)$ определяют $c(y)$.

Если известна функция $u(x,y)$, то сначала из уравнения $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ определяют $v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}dx + c(y)$, а затем, дифференцируя по $y$, получают $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial v}{\partial y}dx + c'(y)$. Далее из уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial v}{\partial y}dx + c'(y)$ определяют $c(y)$.

**Пример 3.6.1.** Найти аналитическую функцию $f(z)$, если $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ и $f(i) = 2$.

**Решение.** Найдем частные производные функции $u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 2.$$

Из второго условия Коши-Римана (3.1)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 2$$

находим

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x}dx + \varphi(y) = \int (6xy - 2)dx + \varphi(y) = 3x^2y - 2x + \varphi(y).$$

Дифференцируя $v$ по $y$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + \varphi'(y).$$

Для нахождения функции $\varphi(y)$ используем первое условие Коши-Римана (2.1). Приравнивая $\partial v/\partial y = 3x^2 + \varphi'(y)$ производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\varphi'(y) = 3y^2,$$

из которого определяем $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = -\int 3y^2 dy = -y^3 + C.$$

Таким образом, получаем функцию

$$v(x, y) = 3x^2 y - 2x - y^3 + C.$$

Записываем искомую функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2y + i(3x^2 y - y^3 - 2x + C_1).$$

Преобразуем полученное выражение к функции переменной $z$, используя равенства

$$z = x + iy, \quad z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3).$$

Получаем

$$f(z) = z^3 - 2iz + C,$$

где $C$ – произвольная комплексная постоянная.

Найдем значение $C$ из условия $f(i) = 2$:

$$2 = i^3 - 2i \cdot i + C.$$

Получаем $C = i$ и, следовательно,

$$f(z) = z^3 - 2iz + i. \blacksquare$$

**Упражнения для самостоятельной работы**

**1.** Найти аналитическую функцию $f(z)$, если заданы ее действительная или мнимая часть и значение $f(z)$ в некоторой точке $z_0$.

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 2x, \qquad f(i) = 2i - 1.$$

$$\operatorname{Re} f(z) = x/(x^2 + y^2), \qquad f(\pi) = 1/\pi.$$

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{actg}(x/y), \qquad f(1) = 0.$$

$$\operatorname{Re} f(z) = 3x^2 - 4xy - 3y^2, \qquad f(-i) = -3 - 2i.$$

$$\operatorname{Im} f(z) = 10xy - 6y, \qquad f(1/5) = -1.$$

$$\operatorname{Im} f(z) = \sin y \operatorname{ch}(x + 1), \qquad f\left(-1 + \frac{\pi}{2}\right) = i.$$

$$\operatorname{Im} f(z) = 2y[y^2 + (x + 1)^2], f(i) = i.$$

$\operatorname{Im} f(z) = x/(x^2 + y^2) + x, f(1) = -2i.$

***Ответы*** : 1. $f(z) = z^2 + 2z$; 2. $f(z) = \frac{1}{z}$; 3. $f(z) = \ln z$;
4. $f(z) = z^2(3 + 2i)$; 5. $f(z) = 5z^2 - 6z$; 6. $f(z) = \operatorname{sh}(z + 1)$;
7. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$; 8. $f(z) = \frac{i}{z} + iz$.

# 4. Интегрирование.

## 4.1. Определение и существование интеграла от функции комплексного переменного

Пусть в области $D$ плоскости комплексной переменной $z$ задана однозначная и непрерывная и непрерывная функция $w = f(z)$ и пусть $L$ есть кусочно-гладкая линия, лежащая в $D$ и имеющая своим началом точку $z_0$, а концом – точку $z_n$. Разобьем кривую на части с помощью точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, идущих в направлении от $z_0$ к $z_n$. На каждом отрезке кривой $z_{k-1}z_k$ возьмем произвольную точку $\xi_k$ и составим сумму:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Если при $\max|\Delta z_k| \to 0$ сумма $S_n$ имеет конечный предел, который не зависит ни от способа разбиения кривой $L$ на части, ни от выбора точек $\xi_k$, то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$, взятым по кривой $L$ от точки $z_0$ до точки $z_n$, и обозначается $\int_L f(z)dz$, т.е.

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

**Теорема 4.1.1 (∃ интеграла).** Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, *где* функции $u, v$ непрерывны *в* $D$ и однозначны, $L$ – кусочно-гладкая линия в $D$, тогда интеграл $\int_L f(z)dz$ существует и справедлива формула

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy. \qquad (4.1)$$

**Доказательство.** Обозначим $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \big(u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\big)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k)$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k).$$

Так как функции $u, v$ непрерывные, то существуют криволинейные интегралы:

$$\int_L udx - vdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k| \to 0 \\ \max|\Delta y_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k),$$

$$\int_L vdx + udy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k| \to 0 \\ \max|\Delta y_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} (v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k).$$

Но тогда существует предел

$$\lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

т.е. существует интеграл $\int_L f(z)dz$ и справедлива (4.1). ■

Интеграл от функции комплексной переменной часто называют комплексным интегралом .

**Следствие 4.1.1.** Если кривая $L$ задана уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, *где* $t_1 \leq t \leq t_2$, причем при изменении $t$ от $t_1$ *до* $t_2$ точка $z(t)$ движется от начальной точки к конечной, то контурный интеграл преобразуется по формуле:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

**Доказательство.** Из (4.1) следует

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} u(x(t), y(t))x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t))y'(t)dt +$$

$$+ i\left(\int_{t_1}^{t_2} u(x(t), y(t))y'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t))x'(t)dt\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt. ■$$

**Следствие 4.1.2.** Если обозначить

$$R(t) = u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t),$$
$$Q(t) = u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t),$$

то справедлива формула

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} R(t)dt + i\int_{t_1}^{t_2} Q(t)dt\,.\ \blacksquare$$

## 4.2. Основные свойства контурных интегралов

Из формулы (4.1) видно, что контурный интеграл сводится к криволинейным интегралам от функции вещественных переменных. Отсюда следует сходство некоторых свойств контурных интегралов и криволинейных интегралов второго типа.

$1^0$ $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$;

$2^0$ $\int_{AB} f(z)dz = \int_{AC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz$ (равенство сохраняется при любом расположении точек $A, B, C$);

$3^0$ $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz,\ \ \forall a \in \mathbb{C}$;

$4^0$ $\int_L (f(z) + g(z))dz = \int_L f(z)dz + \int_L g(z)dz$.

**$5^0$ (об оценке интеграла или неравенство Дарбу).** Если на кривой $L$ выполняется неравенство $|f(z)| \le M$ *и* $|L|$ – длина этой кривой, то

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le M|L|.$$

**Доказательство.** Используя определение длины кривой, будем иметь следующую цепочку неравенств:

$$\left|\int_L f(z)dz\right| = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\,\xi_k)\Delta z_k\right| \le \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(\,\xi_k)|\cdot|\Delta z_k| \le$$

$$\le \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} M\,|\Delta z_k| \le M \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = M|L|.\ \blacksquare$$

$6^0$ $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds.$

Здесь интеграл в правой части неравенства – криволинейный интеграл первого типа от действительной (не отрицательной) непрерывной функции $|f(z)|$, взятый вдоль кривой $L$, т.е.

$$\lim_{\max|\Delta l_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta l_k,$$

где $\Delta l_k$ – длина дуги $z_{k-1}z_k$, а $\xi_k$ – точка этой дуги.

**Доказательство.** По аналогии с доказательством неравенства Дарбу, имеем

$$\left|\int_L f(z)dz\right| = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \leq \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\cdot|\Delta z_k| \leq$$

$$\leq \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\,\Delta l_k = \int_L |f(z)|ds. \blacksquare$$

**Замечание 4.2.1.** Интеграл $\int_L |f(z)|ds$ нередко записывают в виде $\int_L |f(z)|\cdot|dz|$ и тогда свойство $6^0$ приобретает вид

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq \int_L |f(z)|\cdot|dz|.$$

### 4.3. Теорема Коши

**Определение 4.3.1.** Функция называется регулярной (аналитической) в замкнутой области $\overline{D}$, если она регулярна (аналитична) в некоторой области, содержащей внутри себя область $D$ и её границу.

**Теорема 4.3.1 (Коши).** Если функция $w = f(z)$ регулярна (аналитична) в замкнутой односвязной области $\overline{D}$, то интеграл от этой функции по контуру $L$ области $D$ равен нулю.

**Доказательство.** Пусть $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Будем считать функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, а также их первые частные производные по $x$ и $y$ непрерывным в $\overline{D}$. Воспользуемся равенством, доказанным в теореме 4.1.1,

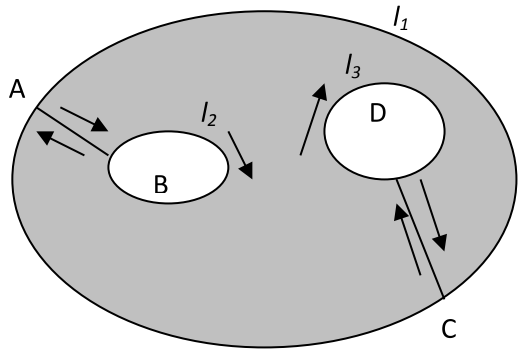
$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy. \tag{4.2}$$

Для равенства нулю интеграла $\int_L Pdx + Qdy$ по любому замкнутому контуру $L$ достаточно выполнения условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Но в силу условий Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, требуемые условия выполнены. Следовательно, $\int_L f(z)dz = 0$. ■

**Следствие 4.3.1.** Утверждение теоремы сохраняет свою справедливость, если вместо контура области $L$ взять любой замкнутый контур $\gamma$, лежащий в области $\overline{D}$.

**Теорема 4.3.2 (Коши).** Если функция $f(z)$ регулярна в многосвязной замкнутой области $\overline{D}$, то интеграл от этой функции, взятый по внешнему контуру области в положительном направлении, равен сумме интегралов от неё по всем внутренним контурам, взятым в отрицательном направлении (относительно заданной области).

**Доказательство.** Будем для определенности рассматривать трехсвязную область, границей которой служат замкнутые линии $l_1$ (внешний контур), $l_2$ и $l_3$ (внутренние контуры). Проведём два разреза $AB$ и $CD$ так, как это показано на рисунке ниже.




Тогда к границе области добавятся отрезки $AB, BA, CD, DC$, а область станет односвязной. Применяя теорему 4.3.1 (Коши) и замечая, что

$$\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz\,, \qquad \int_{CD} f(z)dz = -\int_{DC} f(z)dz,$$

получим

$$\int_{l_1^+} f(z)dz + \int_{l_2^+} f(z)dz + \int_{l_3^+} f(z)dz = 0.$$

Здесь надо помнить, что дыры внутри $l_2$ и внутри $l_3$ – внешние области для заданной области.

Если изменить направление обхода на всех внутренних контурах (в данном случае на $l_2$ и $l_3$) на противоположное, то предыдущее равенство запишется так

$$\int_{l_1^+} f(z)dz - \int_{l_2^-} f(z)dz - \int_{l_3^-} f(z)dz = 0,$$

откуда

$$\int_{l_1^+} f(z)dz = \int_{l_2^-} f(z)dz + \int_{l_3^-} f(z)dz\,. \blacksquare$$

**Замечание 4.3.1.** Иначе в рассматриваемом случае Теорему 4.3.2 (Коши) можно сформулировать так:

Интеграл по внешнему контуру, взятый в положительном направлении относительно области, равен сумме интегралов по внутренним контурам, взятым в положительном направлении относительно дыр.

**Теорема 4.3.3 (о независимости интеграла от регулярной функции от пути).** Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области $D$. Тогда контурный интеграл от $f(z)$ по кривой $L$, взятой в области $D$, независит от вида кривой, а зависит лишь от начальной и конечной точек.

**Доказательство.** Возьмем точки $z_0$ и $z$ в области и соединим их любыми линиями $l_1$ и $l_2$. Пусть $l_2^-$ – путь, проходимый от $z$ к $z_0$. Тогда $l_1 \cup l_2^-$ образует контур и по теореме 4.3.1 (Коши) $\int_{l_1 \cup l_2^-} f(z)dz = 0$. Но

$$\int\limits_{l_1 \cup l_2^-} f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz + \int\limits_{l_2^-} f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz - \int\limits_{l_2} f(z)dz,$$

откуда

$$\int\limits_{l_1} f(z)dz = \int\limits_{l_2} f(z)dz\,.\blacksquare$$

В связи с доказанной теоремой контурный интеграл от регулярной функции принято обозначать $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$. Числа $z_0$ и $z$ будем в этом случае называть нижним и верхним пределами интеграла.

Если теперь не менять нижнего предела, то величина $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ будет зависеть лишь от верхнего предела, т.е. будет функцией верхнего предела.

**Теорема 4.3.4 (основная формула интегрального исчисления).** Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области $D$, то и функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ также регулярна в этой области, причем $F'(z) = f(z)$.

**Доказательство.** Нам нужно убедиться, что $F(z)$ однозначна в рассматриваемой области и имеет там в каждой точке производную. Но мы только что доказали, что интеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ не зависит от пути, т.е. всегда имеет одно и то же значение при данном $z$ ($z_0$ – фиксировано). Следовательно, $F(z)$ – однозначная функция.

Переходя к доказательству дифференцируемости $F(z)$, условимся писать под знаком интеграла вместо буквы $z$ букву $\xi$, во избежания смешивания с верхним пределом $z$. Подсчитаем теперь приращение $\Delta F(z)$. Имеем

$$\Delta F(z)=F(z+\Delta z)-F(z)=\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi-\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(z)+f(\xi)-f(z)\big)d\xi=f(z)\int\limits_{z}^{z+\Delta z}d\xi+\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi=$$

$$=f(z)\Delta z+\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}=f(z)+\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi,$$

$$\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi.$$

В виду рассматриваемого интеграла от пути будем считать путь интегрирования от точки $z$ до точки $z+\Delta z$ прямолинейным. Тогда длина пути интегрирования будет $|\Delta z|$. В силу непрерывности $f(z)$ для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенства $|\xi-z|\le|\Delta z|<\delta$ следует неравенство $|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$.

Поэтому на основании теоремы об оценке интеграла или неравенства Дарбу получим:

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)d\xi\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon.$$

Итак, для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенства $|\xi-z|\le|\Delta z|<\delta$ следует неравенство $\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$, т.е. $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}=f(z)$. Так как с другой стороны $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}=F'(z)$, то $F'(z)=f(z)$. ■

**Определение 4.3.2.** Функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$, если $F'(z)=f(z)$.

Если $F(z)$ есть первообразная $f(z)$, то и $F(z)+C$, где $C$ – постоянная, также будет её первообразной.

**Теорема 4.3.5.** Любые две первообразные $F_1(z)$ *и* $F_2(z)$ одной и той же функции $f(z)$ отличаются на постоянную.

**Доказательство.** Обозначим $F_1(z)-F_2(z)=u+iv$. Тогда

$$\big(F_1(z)-F_2(z)\big)'=f(z)-f(z)=0=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad u=const, \qquad v=const.$$

Следовательно, $F_1(z)-F_2(z)=C=const$ и $F_1(z)=F_2(z)+C$. ■

Если $F(z)$ есть первообразная $f(z)$, то множество всех первообразных этой функции содержится в формуле $F(z)+C$. Это множество называется неопределенным интегралом $f(z)$, который обозначается знаком $\int f(z)dz$. Итак,

$$\int f(z)dz=F(z)+C, \text{где } F'(z)=f(z).$$

Техника разыскания неопределенных интегралов в комплексном анализе сходна с той, что и в вещественном анализе. В частности, таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова. Только в каждом конкретном случае надо определять области регулярности функций $f(z)$ и $F(z)$, где формулы справедливы.

Пусть $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$. Тогда, как доказано выше, $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ тоже является первообразной $f(z)$, а значит отличается от $F(z)$ на постоянную величину. Если в равенстве $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=F(z)+C$ положим $z=z_0$, то, учитывая равенство $\int_{z_0}^{z_0} f(\xi)d\xi=0$, получим $C=-F(z_0)$. Отсюда получаем

**Теорема 4.3.6 (Формула Ньютона-Лейбница).** Величина контурного интеграла равна приращению первообразной функции на пути интегрирования

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=F(z)-F(z_0).$$

**Пример 4.3.1.** Найти $\int_l z^3dz$, где:

$l$ – парабола $x=y^3$ с концами в точках $z_0=0, z_1=1+i$;

$l$ – прямая с концами в точках $z_0=0, z_1=1+i$.

Вычислить этот интеграл по формуле Ньютона –Лейбница.

**Решение.** Будем вычислять интеграл по формуле (3.2). Так как

$$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3),$$

то действительная и мнимая части функции $z^3$ равны $u=x^3-3xy^2$, $v=3x^2y-y^3$. Отсюда

$$\int_l z^3dz=\int_l (x^3-3xy^2)dx-(3x^2y-y^3)dy+$$

$$+i\int_l (3x^2y - y^3)dx + (x^3 - 3xy^2)dy.$$

Заменяя $x = y^3$, $dx = 3y^2dy$, получим

$$\int_l z^3dz = \int_0^1 (y^9 - 3y^5)3y^2dy - (3y^7 - y^3)dy +$$

$$+i\int_0^1 (3y^7 - y^3)3y^2dy + (10y^9 - 6y^5)dy =$$

$$= \left(\frac{3}{12}y^2 - \frac{12}{8}y^8 + \frac{1}{4}y^4\right) + i(y^{10} - y^6)\Big|_0^1 = -1.$$

Поскольку точки (0,0) и (1,1) соединяет прямая $y = x$, то $dy = dx$ и

$$\int_l z^3dz = \int_0^1 (x^3 - 3x^3)dx - (3x^3 - x^3)dx +$$

$$+i\int_0^1 (3x^3 - x^3)dx + (x^3 - 3x^3)dx = -4\int_0^1 x^3dx = -1.$$

Проверка показывает, что функция $z^3$ является аналитической всюду и поэтому интеграл можно вычислять, используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{1+i} z^3dz = \frac{z^4}{4}\Big|_0^{1+i} = -1. \blacksquare$$

**Пример 4.3.2.** Найти интеграл $\int_l (z + 2\bar{z})dz$ по следующим линиям:

$l$ – отрезок прямой от $z_0 = -2i$ до $z_1 = 2i$.

$l$ – дуга окружности $|z| = 2, -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

**Решение.** Действительная и мнимая часть функции $z + 2\bar{z}$ равны $u = 3x, v = -y$. Отсюда

$$\int_l (z + 2\bar{z})dz = \int_l 3xdx + ydy + i\int_l (-y)dx + 3xdy.$$

Уравнение прямой $x = 0, -2 \le y \le 2$. Следовательно,

$$\int_l (z + 2\bar{z})dz = \int_{-2}^{2} ydy = 0.$$

Запишем уравнение окружности $|z| = 2$ параметрически: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, при этом $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда $dx = -2\sin t\, dt$, $dy = 2\cos t\, dt$ и

$$\int\limits_l (z+2\bar{z})dz = 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos t\,(-2\sin t)dt + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sin t\, 2\cos t\, dt +$$

$$+i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (-2\sin t)(-2\sin t)dt + i3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos t\, 2\cos t\, dt = 8\pi i.$$

Отметим, что функция $z+2\bar{z}$ не является аналитической. ■

**Упражнения для самостоятельной работы**

**1.**Вычислить интегралы от функций комплексной переменной по заданным кривым.

. $\int\limits_L \bar{z}dz$, $L$ – полуокружность $|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0$.

. $\int\limits_L z\operatorname{Re} z\, dz$, $L$ – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=i$.

. $\int\limits_L z^2|z|dz$, $L$ – полуокружность $|z|=2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$.

. $\int\limits_L z\operatorname{Im} z\, dz$, $L$ – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2 = 1+i$.

. $\int\limits_L e^{|z|}dz$, $L$ – полуокружность $|z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0$.

. $\int\limits_L \operatorname{Im} z\, dz$, $L$ – полуокружность $|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0$.

**Ответы:** 1. $\pi i$. 2. 0. 3. $-16\pi/3$. 4. $2i/3$. 5. $-2ei$. 6. $-\pi/2$.

**2.** Вычислить интегралы от аналитических функций

. $\int\limits_i^0 z\cos z\, dz$. . 3 $\int\limits_0^{2i} 4\cos^2 z\, dz$.

. $\int\limits_0^i (z^2+\sin z)dz$. . 4 $\int\limits_i^{2i} 2ze^{z^2}dz$.

**Ответы:** 1. $1-e^{-1}$. 2. $1-\operatorname{ch} 1 - i/3$. 3. $(4+\operatorname{sh} 4)i$. 4. $e^{-4}-e^{-1}$.

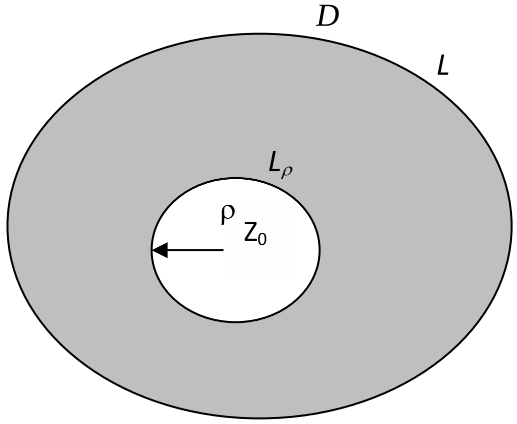
## 4.4. Формула Коши и её следствия

**Теорема 4.4.1.** Пусть функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области $\overline{D}$ (односвязной или многосвязной) и $L$ – граница области. Тогда значение функции $f(z)$ в любой точке $z = z_0$ области $D$ может быть вычислено по формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \qquad (4.2)$$

где L проходится в положительном направлении.

**Доказательство.** Функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ является регулярной всюду, за исключением точки $z_0$. Но если изолировать точку $z_0$, проведя окружность $L_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в $z_0$, то в новой замкнутой области с границей $L \cup L_\rho$ функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ будет регулярной во всех точках (см. рис. ниже).




Применяя теорему Коши, получим

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int\limits_{L_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Обозначим $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ и подставим $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ и $dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ в правую часть равенства

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi})i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi})d\varphi =$$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi + i\int\limits_0^{2\pi} \Big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\Big)d\varphi =$$

$$= if(z_0)2\pi + \int\limits_0^{2\pi} \Big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\Big)d\varphi.$$

Отсюда

$$\left|\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0)\right| \le \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+\rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\right| d\varphi.$$

В силу непрерывности $f(z)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\left|(z_0+\rho e^{i\varphi}) - z_0\right| = \left|\rho e^{i\varphi}\right| = \rho < \delta$ следует неравенство $\left|f(z_0+\rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\right| < \varepsilon$.

Тогда будем иметь

$$\left|\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0)\right| \le \int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\varphi = 2\pi\varepsilon.$$

Следовательно, левая часть может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно малым радиус $\rho$ окружности $L_\rho$. Но от $\rho$ она не зависит. Значит $\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0) = 0$. ■

**Теорема 4.4.2.** Если функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром $L$, то она бесконечно дифференцируема в $D$ и её производные вычисляются по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \qquad (4.3)$$

**Схема доказательства.** Пусть $z_0 \in D$. В силу формулы Коши

$$\Delta f(z_0) = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right)d\xi.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\xi - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z_0} = \frac{\Delta z}{(\xi - z_0)(\xi - z_0 - \Delta z)}$$
$$= \Delta z \frac{\xi - z_0 - \Delta z + \Delta z}{(\xi - z_0)^2(\xi - z_0 - \Delta z)} =$$
$$= \Delta z\left(\frac{1}{(\xi - z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(\xi - z_0)^2(\xi - z_0 - \Delta z)}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi + \underbrace{\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2(\xi - z_0 - \Delta z)}d\xi}_{\Delta z I(z_0)}.$$

Можно показать, что $\Delta z I(z_0) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, откуда

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Тем же способом доказывается существование $f''(z_0), \dots, f^{(n)}(z_0), \dots$ . ■

**Теорема 4.4.3 (Гаусса о среднем).** Значение регулярной функции в точке $z$ равно ее среднему арифметическому значению на окружности с центром в точке $z$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\varphi})d\varphi.$$

**Доказательство.** В ходе вывода формулы Коши было получено соотношение

$$\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = i\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi.$$

С учетом самой формулы Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$, получим требуемую формулу. ■

**Теорема 4.4.4 (Принцип максимума модуля).** Если регулярная в замкнутой области $\bar{D}$ функция $f(z)$ не является постоянной в этой области, то модуль этой функции достигает своего наибольшего значения на контуре этой области и только на нем.

**Доказательство.** Предположим, что в точке $z_0 \in D$ функция $|f(z)|$ достигает максимума. Обозначим $M = |f(z_0)| = \max_{z\in D}|f(z)|$. Тогда найдется такая окружность радиуса $\rho$, что на ней всей или на ее части $L_0$: $\max|f(z)| = m < M$. Тогда по теореме Гаусса о среднем

$$M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\varphi_0} Md\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} md\varphi + \int_{\varphi_1}^{2\pi} Md\varphi\right) =$$

$$= \frac{M}{2\pi}(\varphi_0 + 2\pi - \varphi_1) + \frac{m}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$= M - \frac{M}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{m}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_0) =$$

$$= M - (M-m)\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi} < M,$$

что невозможно. ■

**Теорема 4.4.5 (Принцип минимума модуля).** Если регулярная в замкнутой области $\bar{D}$ функция $f(z)$ не является постоянной и не обращается там в нуль, то модуль этой функции достигает своего наименьшего значения на контуре этой области и только на нем.

**Доказательство.** В самом деле, если $f(z) \neq 0$, то функция $\varphi(z) = 1/f(z)$ является регулярной в области $\bar{D}$, поэтому $|\varphi(z)|$ не может иметь максимума внутри $D$, а значит $|f(z)|$ не может иметь минимума. ■

Формула для производной регулярной функции $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ позволяет получить оценку для производной. Пусть $f(z)$ регулярна в замкнутом круге с центром в точке $z$ и радиусом $R$. Обозначим $\max|f(z)|=M$. Он достигается функцией на границе этого круга, где $|\xi-z|=R$. Пользуясь неравенством Дарбу для границы $L$ этого круга, получим:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi\right|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R=\frac{Mn!}{R^n}.$$

т.е. $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{Mn!}{R^n}$. В частности, $|f'(z)|\le\frac{M}{R}$.

Из последнего неравенства следует

**Теорема 4.4.6 (Лиувилля).** Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена на всей открытой плоскости, то она постоянна.

**Доказательство.** Действительно, если функция $\max|f(z)|\le M$ на всей плоскости, то при $R\to\infty$ получим из неравенства $|f'(z)|\le\frac{M}{R}$, что $|f'(z)|=0$, и, следовательно, $f'(z)=0$. Но тогда $f(z)=const.$ ■

**Теорема 4.4.7.** Пусть $f(z)$ регулярна на всей комплексной плоскости, причем $|f(z)|\le|z|^n$. Тогда $f(z)=cz^n$.

**Доказательство.** В силу условия $|f(z)|\le|z|^n$ имеет место оценка

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{Mn!}{R^n}=\frac{R^n n!}{R^n}=n!,$$

т.е. $f^{(n)}(z)$ ограничена на всей открытой плоскости. Применяя теорему 4.4.6 (Лиувилля) к $f^{(n)}(z)$, получаем $f^{(n)}(z)=N=const.$ Отсюда

$$f^{(n-1)}(z)=Nz\ \Rightarrow\ f^{(n-2)}(z)=\frac{Nz^2}{2}\ \Rightarrow\ \ldots.\ \Rightarrow\ f(z)=\frac{N}{n!}z^n. ■$$

**Теорема 4.4.8 (Основная теорема алгебры).** Любой многочлен $P(z)$ с комплексными коэффициентами положительной степени имеет хотя бы один корень в **C**.

**Доказательство.** Предположим противное, то есть $P(z)\ne 0$, $\forall z\in$ **C**. Тогда $|P(z)|\ge m>0$ и функция $f(z)=1/P(z)$ всюду определена, а значит, регулярна в **C** и ограничена по модулю числом $1/m$. По теореме 4.4.6 (Лиувилля) $f(z)=const$. Значит, $P(z)=const$. Противоречие. ■

## 4.5. Вычисление интегралов с помощью интегральной формулы Коши

**Пример 4.5.1.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)}\,dz.$$

**Решение.** Внутри контура интегрирования лежит лишь одна особая точка $z=0$ подынтегральной функции. Поэтому воспользуемся интегральной формулой Коши (3.2)

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)}\,dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\cos z}{z-2}}{z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z-2}\right|_{z=0} = -\pi i. \blacksquare$$

**Пример 4.5.2.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^2}\,dz.$$

**Решение.** Внутри контура интегрирования лежит одна особая точка $z=2$ подынтегральной функции. При этом знаменатель содержит выражение вида $(z-2)^2$. Поэтому воспользуемся формулой (3.3)

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^2}\,dz = \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{1/z}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i \left.\left(\frac{1}{z}\right)'\right|_{z=2} = -2\pi i \left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=2}$$

$$= -\frac{\pi i}{2}. \blacksquare$$

**Пример 4.5.3.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)}\,dz.$$

**Решение.** Внутри контура интегрирования лежит две особые точки $z=0$ и $z=1$ подынтегральной функции. Поэтому непосредственное использование формулы Коши (4.2) невозможно. Приведем два способа вычисления интеграла.

***1 способ.*** Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби и проинтегрируем почленно, применив к каждому интегралу формулу Коши (4.2):

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{2}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{2}{z-1}\,dz - \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z}\,dz =$$

$$= 2\pi i \cdot 2 - 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

***2 способ.*** Деформируем контур интегрирования как это показано на рис. При деформации мы не пересекали особых точек, а потому согласно теореме 4.3.3 значение интеграла не измениться, причем теперь

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1+z}{z(z-1)}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{1+z}{z(z-1)}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{1+z}{z(z-1)}dz.$$

Каждый из интегралов вычисляется по интегральной формуле Коши (4.2):

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{1+z}{z(z-1)}dz = 2\pi i \left.\frac{1+z}{z-1}\right|_{z=0} = -2\pi i,$$

$$\oint\limits_{\gamma_2} \frac{1+z}{z(z-1)}dz = 2\pi i \left.\frac{1+z}{z}\right|_{z=1} = 4\pi i.$$

Складывая значения, окончательно получаем $2\pi i$. ■

**Упражнения для самостоятельной работы**

**1.** Вычислить интегралы**:**

. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(i-z)(z-3)}$.    . $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$.

. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\, dz}{z^2(z+2)}$.    . $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2y} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}z}{z^2+1}dz$.

. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}\pi iz\, dz}{z^2+4z+3}$.    . $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$.

**Ответы*:*** 1. $\frac{2\pi i}{3-i}$.   2. $-2\pi\operatorname{ch}1$.   3. $\pi i$.  4. $\frac{\pi\sqrt{2}i}{2}$.   5. $-\pi i$.   6. $\frac{\pi i}{3}(e^{36}-1)$.

**2.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{L} \frac{\operatorname{ch} z\, dz}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2 (z-\pi i)^2},$$

где $L$ – окружность: a) $\left|z+\frac{\pi i}{2}\right| = 1$;   b) $|z-\pi i| = 1$;    c) $|z| = 1$.

**Ответы*:*** a) $-\frac{8}{9\pi}$;   b) $-\frac{32}{27\pi}$;    c) 0.

# 5. Ряды с комплексными членами.

## 5.1. Числовые ряды с комплексными членами

**Определение 5.1.1.** Ряд

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \qquad (5.1)$$

называется числовым рядом с комплексными числами. Число $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ называется частичной суммой этого ряда. Ряд (5.1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ сходится, т.е. $lim_{n\to\infty} S_n = S,$ *где* $S$ – конечное число, называемое суммой ряда (5.1).

Для сходимости ряда (5.1) необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots.$$

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

то ряд (5.1) сходится и называется абсолютно сходящимся.

**Замечание 5.1.1.** Для исследования сходимости ряда (5.1) применимы все признаки сходимости рядов в действительной области.

## 5.2. Функциональные ряды с комплексными членами

Пусть дана последовательность $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ функций комплексной переменной $z = x + iy$, заданных в области $D$ (на кривой $L$).

**Определение 5.2.1**. Ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (5.2)$$

называется функциональным рядом. Если ряд (5.2) сходится для всех $z \in D$ (или $z \in L$), то он называется сходящимся в области $D$ (на кривой $L$), а его сумма будет функцией от $z$.

Обозначив эту сумму $S(z)$, можно написать

$$S(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

Обозначим $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$, $r_n(z) = S(z) - S_n(z)$.

Если ряд (5.2) сходится, то $\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0$ для каждой точки $z$ из рассматриваемой области. Иначе, если ряд (5.2) сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon, z)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|r_n(z)| < \varepsilon$.

**Определение 5.2.2.** *Ряд (5.2)* называется равномерно сходящимся в области $D$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой независящий от $z$ номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|r_n(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in D$.

**Теорема 5.2.1 (Признак Вейерштрасса).** Если для членов ряда (5.2) в области $D$ выполняются неравенства $|f_n(z)| \leq a_n, n = 1,2, \dots$, и если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то данный ряд (5.2) равномерно сходится в области $D$.

**Замечание 5.2.1.** Вопросы сходимости ряда (5.2) решаются с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Для рядов в комплексной области справедливы все теоремы о свойствах равномерно сходящихся рядов, известные для рядов в действительной области.

Но кроме того, для функциональных рядов в комплексном анализе существует теорема Вейерштрасса, которая позволяет значительно усилить теорему о возможности почленного дифференцирования функционального ряда, известную из вещественного анализа.

**Теорема 5.2.2 (Вейерштрасса).** Если все члены ряда (5.2) регулярны в области $D$ и этот ряд сходится в $D$ и равномерно сходится в любой замкнутой области $\overline{D_1}$, лежащей в области $D$, то его сумма $S(z)$ есть функция, регулярная (аналитичная) в $D$, ряд (5.2) можно почленно дифференцировать и полученный ряд

$$f_1'(z) + f_2'(z) + \dots + f_n'(z) + \dots$$

равномерно сходится в $\overline{D_1}$.

**Следствие 5.2.1.** Функциональный ряд вида (5.2) с регулярными (аналитичными) членами, равномерно сходящийся в любой замкнутой области из $D$ и сходящийся в любой точке из $D$, можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. При этом получающиеся ряды будут равномерно сходиться в любой замкнутой подобласти из $D$.

## 5.3. Степенные ряды с комплексными членами

**Определение 5.3.1.** Степенным рядом называется ряд

$$c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - a)^n \qquad (5.3)$$

*где* $z, a, c_n, n = 0,1,2, \dots,$ – комплексные. При $a = 0$ степенной ряд (5.3) имеет вид

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \qquad (5.4)$$

Те значения $z$, при которых степенной ряд сходится, называются точками сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости.

**Теорема 5.3.1 (Абеля).** Если степенной ряд (5.4) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $K_0 : |z| < |z_0|$, а в любом круге меньшего радиуса $K_1 : |z| \leq R_1 < |z_0|$ этот ряд сходится равномерно.

**Доказательство.** В силу сходимости ряда (5.4) в точке $z_0$ имеем $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$ и, следовательно, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $n$ имеет место неравенство $|c_n z_0^n| < M$. Пусть $z$ – произвольная точка круга $K_0$. Тогда

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < M\big(q(z)\big)^n,$$

где $q(z) < 1$. Отсюда вытекает абсолютная сходимость ряда (5.4) в круге $K_0$. Если $z \in K_1$, то

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < M q_1^n,$$

где $q_1 = \frac{R_1}{|z_0|} < 1$ не зависит от $z$ и по признаку Вейерштрасса ряд (5.4) сходится равномерно в круге $K_1$. ■

**Замечание 5.3.1.** Пусть $R$ – точная верхняя грань расстояний от точки $z = 0$ до точек $z$, в которых ряд (5.4) сходится. Тогда при $|z| > R$ этот ряд расходится.

Из теоремы Абеля и замечания к ней следует, что для степенного ряда областью сходимости, является круг с центром в точке $a$ и радиусом $R$. Если $R = \infty$, то степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости, если $R = 0$, то ряд сходится лишь в точке $a$ в центре круга.

Круг сходимости степенного ряда на комплексной плоскости находится аналогично интервалу сходимости для степенного ряда в действительной области.

Степенной ряд абсолютно сходится внутри круга сходимости; вне круга сходимости ряд расходится. На границе круга сходимости степенной ряд может, как сходиться, так и расходиться.

Если степенной ряд абсолютно сходится в какой-нибудь точке границы, то он абсолютно сходится во всех точках границы. Если же ряд расходится в какой-либо точке границы, то отсюда не следует его расходимость во всех точках этой границы. Он может в одних точках расходиться, а в других точках сходиться условно.

**Лемма 5.3.1.** Степенной ряд (5.3) равномерно сходится в любом круге $|z-a| \leq r < R$, *где* $R$ – радиус сходимости данного ряда.

**Доказательство**. Действительно, ряд (5.3) при $z = a + r$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$|c_0| + |c_1 r| + |c_2 r^2| + \ \dots + |c_n r^n| + \ \dots,$$

а так как при $|z-a| \leq r$ имеем $|c_n(z-a)^n| \leq |c_n r^n|$, то по признаку Вейерштрасса рассматриваемый ряд сходится равномерно в круге $|z-a| \leq r$. ■

**Замечание 5.3.2.** Радиус $r$ можно взять как угодно близким к радиусу сходимости, но нельзя взять равным ему. Например, ряд

$$1 + z + z^2 + \ \dots + z^n + \ \dots$$

имеет круг сходимости $|z| < 1$, но не во всём круге сходимости он сходится равномерно, а лишь в круге $|z| \leq r < 1$.

Так как члены степенного ряда (5.3) регулярны (аналитичны), а сам ряд равномерно сходится в круге $|z-a| \leq r < R$, где $R$ – радиус сходимости, то по теореме Вейерштрасса и замечанию к ней сумма его есть функция регулярная (аналитическая) в круге сходимости, и ряд можно там дифференцировать и интегрировать почленно. При этом радиус сходимости получающихся рядов тоже будут $R$. Докажем это.

Пусть ряды

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-a) + \ \dots + n a_n (z-a)^{n-1} + \ \dots,$$

$$\int_0^z f(\xi) d\xi = a_0(z-a) + \frac{a_1}{2}(z-a)^2 + \ \dots + \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1} + \ \dots$$

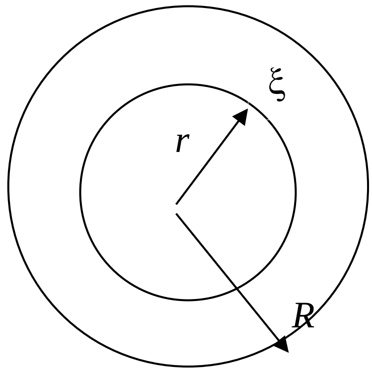
имеют радиусы сходимости $R_1$ и $R_2$. Так как эти ряды сходятся для каждой точки круга $|z-a| < R$, то $R_1$ и $R_2$ не могут быть меньше $R$, т.е. $R_1 \geq R$ и $R_2 \geq R$.

Однако они не могут быть и больше $R$, так как, проинтегрировав первый ряд и продифференцировав второй, мы в обоих случаях придём к исходному ряду, радиус сходимости которого $R$. Но как было сказано выше, почленное дифференцирование не уменьшает радиус сходимости, т.е. $R \geq R_1$ и $R \geq R_2$. Сопоставив это с ранее полученным, находим, что $R_1 = R_2 = R$.

## 5.4. Ряд Тейлора

**Теорема 5.4.1.** Всякая функция $f(z)$, регулярная в круге $|z-a| < R$, разлагается внутри этого круга в степенной ряд по степеням $z - a$ *и* такое разложение единственно.

**Доказательство.** Возьмем любую, но определенную точку $z$ внутри круга $|z-a|<R$ и построим концентрический с ним круг радиуса $r<R$ так, чтобы точка $z$ лежала внутри этого круга. Пусть окружность круга $|z-a|\le r$ будет $L$.




Поскольку функция $f(z)$ регулярна в замкнутом круге $|z-a|\le r$, то по формуле Коши можно написать

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\frac{d\xi}{1-\frac{z-a}{\xi-a}},$$

где интеграл по $L$ берется в положительном направлении.

Так как $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|=\frac{|z-a|}{r}=q<1,$ то ряд

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}=1+\frac{z-a}{\xi-a}+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2+\ \ldots+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n+\ \ldots$$

представляет бесконечно убывающую по модулю геометрическую прогрессию. Модуль его общего члена

$$\left|\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n\right|=\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|^n=q^n$$

и, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на линии $L$, потому что числовой ряд $1+q+q^2+\ \ldots+q^n+\ \ldots$ сходится. Умножение его на величину $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-a}$ не изменит равномерной сходимости, потому что $f(\xi)$ в силу непрерывности ограничена на $L$, т.е. $|f(z)|<M.$ Так как $|\xi-a|=r,$ то $\left|\frac{f(\xi)}{\xi-a}\right|<\frac{M}{r}$, то есть $\frac{f(\xi)}{\xi-a}$ ограничена на $L$. Интегрируя почленно ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-a}+\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\frac{z-a}{\xi-a}+\ \ldots+\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n+\ \ldots,$$

получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi+\frac{z-a}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi+\ \dots,$$

Обозначая $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi=a_k, k=0,1,2,\dots$ будем иметь, $f(z)=a_0+a_1(z-a)+\ \dots+a_n(z-a)^n+\ \dots$, что и доказывает первую часть теоремы. Заметим, что в силу теоремы 5.3.2

$$a_0=f(a), a_1=\frac{f'(a)}{1!}, a_2=\frac{f''(a)}{2!}, \dots, a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

поэтому ряд можно записать так

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\ \dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ \dots. \qquad (5.5)$$

**Определение 5.4.1.** Ряд (5.5) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$.

Для доказательства единственности разложения предположим, что $f(z)$ внутри того же круга представлена ещё таким рядом $f(z)=b_0+b_1(z-a)+\ \dots+b_n(z-a)^n+\ \dots$. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, то

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-a)+3b_3(z-a)^2+\ \dots,$$

$$f''(z)=1\cdot 2b_2+2\cdot 3b_3(z-a)+\ \dots,$$

$$f'''(z)=1\cdot 2\cdot 3b_3+2\cdot 3\cdot 4b_4(z-a)+\ \dots.$$

Полагая во всех этих равенствах $z=a$, получим $b_0=f(a)=a_0$, $b_1=\frac{f'(a)}{1!}=a_1$, $b_2=\frac{f''(a)}{2!}=a_2$, $b_3=\frac{f'''(a)}{3!}=a_3,\dots$ т.е. этот ряд совпадает с рядом Тейлора для функции $f(z)$. Следовательно, если функция разложена по степеням $z-a$ двумя способами, то коэффициенты при одинаковых степенях $z-a$ в этих разложениях должны совпадать. ■

**Теорема 5.4.2.** Если $R$ есть максимальный радиус круга с центром в точке $z=a$, в котором регулярная (аналитическая) функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $z-a$, то на окружности этого круга $f(z)$ не может быть регулярной во всех точках.

**Доказательство.** Если это было бы так, то каждая точка окружности имела бы некоторую круговую окрестность, в которой $f(z)$ была бы регулярна, поэтому можно было бы найти круг большего радиуса, чем $R$, в котором $f(z)$ была бы регулярна, а это противоречит предположению, что $R$ наибольший радиус. ■

**Определение 5.4.2.** Точку, в которой функция $f(z)$ регулярна, называют регулярной, правильной или обыкновенной точкой этой функции. Если же точка не является регулярной для функции $f(z)$, но в любой её окрестности есть регулярные точки $f(z)$, то такую точку называют особой (или особенной) точкой этой функции.

Поэтому можно сказать, что наибольший радиус круга с центром в точке $a$, в котором функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд по степеням $z-a$, равен расстоянию от центра этого круга до ближайшей к нему особой точки. Этот наибольший радиус и есть радиус круга сходимости ряда $a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots$ к своей сумме $f(z)$.

В заключении отметим одно полезное для решения задач следствие.

**Следствие 5.4.1.** Если ряд $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$ равномерно сходится в круге $|z-a| < R$ и функции $f_k(z), k = 1,2, \ldots$, представимы там степенными рядами

$$f_k(z) = a_{k0} + a_{k1}(z-a) + \ldots + a_{kn}(z-a)^n + \ldots,$$

то в этом круге $f(z)$ представляется рядом

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots,$$

у которого коэффициенты $a_k = a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk} + \ldots, k = 0,1,2, \ldots$ Таким образом, в этом случае ряды суммируются как полиномы.

**Доказательство.** По теоремы Вейерштрасса $f(z)$ как сумма равномерно сходящегося ряда регулярных функций есть функция регулярная внутри круга $|z-a| < R$. Но тогда она разлагается там в ряд Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_k(z-a)^k + \ldots,$$

где $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = 0,1,2, \ldots.$ Однако, по той же теореме Вейерштрасса

$$f^{(k)}(a) = f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a) + \ldots + f_n^{(k)}(a) + \ldots,$$

откуда получаем

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f_1^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f_2^{(k)}(a)}{k!} + \ldots + \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} + \ldots$$
$$= a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk} + \ldots . \blacksquare$$

**Теорема 5.4.3.** Справедливы следующие разложения в ряды Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \quad |z| < 1,$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \qquad |z| < \infty,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad |z| < \infty.$$

## 5.5. Ряд Лорана и изолированные особые точки

В комплексном анализе наряду со степенными рядами вида

$$a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots,$$

большую роль играют ряды более общего вида, а именно двусторонние ряды, содержащие как целые положительные, так и целые отрицательные степени $z - a$:

$$\dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{5.6}$$

Ряд (5.6) представляет собой сумму двух рядов

$$a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{5.7}$$

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{5.8}$$

Ряд (5.7) – это обычный степенной ряд и если он сходится, то его область сходимости – круг $|z-a| < R_1$.

Ряд (5.8) можно рассматривать как полученный заменой $\xi = 1/(z-a)$ из степенного ряда $a_{-1}\xi + a_{-2}\xi^2 + \dots + a_{-n}\xi^n + \dots$ .

Если область сходимости последнего ряда есть круг $|\xi| < 1/R_2$, то область сходимости ряда (5.8) будет внешность круга радиусом $R_2$ с центром в точке $z = a$, т.е. $|z-a| > R_2$.

Таким образом, если $R_1 > R_2$, то областью сходимости ряда (4.6) будет круговое кольцо $R_1 > |z-a| > R_2$. Если же $R_1 \le R_2$, то никакой области сходимости не будет.

**Теорема 5.5.1.** Всякая функция $f(z)$, регулярная в круговом кольце $r < |z-a| < R$ разлагается внутри этого кольца в ряд вида (5.6) и такое разложение единственное.

**Доказательство.** Выберем некоторую точку $z$ внутри данного кольца $r < |z-a| < R$ и построим концентрическое с ним кольцо $r_1 < |z-a| < R_1$, радиусов $r < r_1 < R_1 < R$ так, чтобы точка $z$ лежала внутри этого кольца. Обозначим меньшую окружность кольца $r_1 < |z-a| < R_1$ через $L_1$, большую через $L_2$. Поскольку функция $f(z)$ регулярна в замкнутом кольце $r_1 \le |z-a| \le R_1$, то по теореме Коши для многосвязной области будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (5.9)$$

где интегралы по $L_2$ и $L_1$ берутся против часовой стрелки.

Что касается первого интеграла, то его можно представить в заданном кольце в виде

$$a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots, \qquad (5.10)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, n = 0,1,2,\ldots$$

Для доказательства этого пришлось бы повторить все сказанное при выводе ряда Тейлора, с той лишь разницей, что здесь

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \ne \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

так как $f(z)$ не регулярна в круге $|z-a| \le R_1$.

Второй интеграл равенства (5.9) преобразуем так:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f(\xi)}{z - a - (\xi - a)} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\int_{L_1} f(\xi)\frac{1}{1 - \dfrac{\xi - a}{z - a}} d\xi.$$

Так как на линии $L_1$

$$\left|\frac{\xi - a}{z - a}\right| = \frac{|\xi - a|}{|z - a|} = \frac{r_1}{|z-a|} = q < 1,$$

то ряд

$$\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}=1+\frac{\xi-a}{z-a}+\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n+\ldots, \qquad (5.11)$$

представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Модуль его общего члена $\left|\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n\right|=\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|^n=q^n$, а так как числовой ряд $1+q+\ldots+q^n+\ldots$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на линии $L_1$. Умножение ряда (5.11) на величину $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{z-a}$ не изменит равномерной сходимости т.к. эта величина ограничена $\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{z-a}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r}$. Интегрируя почленно этот равномерно сходящийся ряд, получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\int_{L_1}f(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-a)^2}\int_{L_1}f(\xi)(\xi-a)d\xi+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-a)^n}\int_{L_1}f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi$$
$$+\ldots$$

Обозначая

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f(\xi)d\xi,\quad a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f(\xi)(\xi-a)d\xi,\ldots,$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi,\ldots$$

получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{a_{-1}}{z-a}++\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots \qquad (5.12)$$

Подставив этот ряд и ряд (5.10) в правую часть равенства (5.9), найдем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n. \qquad (5.13)$$

*Первая часть теоремы доказана.*

Подынтегральные функции в формулах для $a_n$ и $a_{-n}$ есть функции регулярные внутри рассматриваемого кольца. Поэтому можно вместо различных контуров $L_2$ и $L_1$ взять общий, причем любой замкнутый контур $L$, лежащий в этом кольце и окружающий точку $z=a$. По теореме Коши для многосвязной области получим

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} f(\xi)(\xi - a)^{n-1}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} f(z)(z-a)^{n-1}dz,\ \ n = 1,2,\dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\,, n = 0,1,2,\dots$$

или, объединяя две формулы в одну для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

**Лемма 5.5.1.** *Для любого замкнутого контура L, охватывающего точку* $a$,

$$\int_L (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \forall n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

*Если же* $a$ *вне контура L, то*

$$\int_L (z-a)^n dz = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Доказательство леммы.** В случае, когда $n \geq 0$, или точка $a$ лежит снаружи контура $L$, то $\int_L (z-a)^n dz = 0$ по теореме Коши.

Пусть $n < 0$ и точка $a$ лежит внутри контура $L$. Проведем окружность $Q$ с центром в точке $z = a$ такого радиуса $\rho$, чтобы $Q$ находилась внутри $L$. Положив $z - a = \rho e^{i\varphi},\ dz = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$, получим

$$\int_L (z-a)^n dz = \int_Q (z-a)^n dz = \rho^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi.$$

Если $n \neq -1$, то

$$\int_L (z-a)^n dz = \rho^{n+1} i \left.\frac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1\right) = 0.$$

Если $n = -1$, то

$$\int_L (z-a)^{-1} dz = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \blacksquare$$

*Вернемся к доказательству единственности.*

Пусть внутри кольца $r < |z-a| < R$ имеет место разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$. Возьмем в этом кольце замкнутый контур $L$, окружающий точку $a$, умножим равенство на ограниченную функцию $(z-a)^{-k-1}$ и проинтегрируем по $L$ почленно этот ряд. Все интегралы в правой части, кроме одного, у которого $(z-a)^{-1}$, обратятся в нуль, а $b_k \int_L (z-a)^{-1} dz = 2\pi i b_k$. Поэтому получим

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = a_k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ . \blacksquare$$

**Определение 5.5.1.** Полученный ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ называют рядом Лорана для $f(z)$, *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ называют правильной или регулярной частью, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ – главной частью.

**Замечание 5.5.1.** Ряд Лорана равномерно сходится в любом кольце, внутреннем к данному и его сумма там регулярная функция. Каждая из окружностей, ограничивающая круговое кольцо $r < |z-a| < R$ наибольшей ширины, внутри которого функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, содержащий хотя бы одну особую точку $f(z)$. Доказательство точно такое же, как для ряда Тейлора.

## 5.6. Правило разложения в ряды Тейлора и Лорана. Примеры

Пусть задана регулярная функция $f(z)$, требуется найти все ее разложения по степеням $(z-a)$. Вначале надо определить все особые точки данной функции. Затем на чертеже отметить точку $z = a$ и все особые точки данной функции. Далее надо построить концентрические окружности с центром в точке $z = a$, на которых лежат особые точки. Эти окружности разобьют всю плоскость на ряд областей: первая область – круг, окружность которого проходит через ближайшую особую точку функции $f(z)$; последняя – внешняя область будет вся часть плоскости, лежащая вне окружности, проходящей через наиболее удаленную от точки $z = a$ особую точку функции $f(z)$. В каждой из этих областей регулярная функция имеет свое разложение по степеням $(z-a)$.

**Пример 5.6.1.** Разложить функцию $f(z) = \frac{5-2z-z^2}{(z+1)(2-z)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать область сходимости.

**Решение.** Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости за исключением двух точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 2$. Для того, чтобы определить область сходимости ряда Тейлора, достаточно найти круг максимального радиуса с центром в точке $z = 1$, не пересекающий точки $z_1 = -1, z_2 = 2$. Отсюда находим, что ряд Тейлора функции $f(z)$ будет сходится в области $|z-1| < 1$.

Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби

$$f(z) = \frac{5-2z-z^2}{(z+1)(2-z)} = 1 - \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1+z}.$$

Используя стандартное разложение из теоремы 5.4.3, получим

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,$$

$$\frac{2}{1+z}=\frac{2}{2+(z-1)}=\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n.$$

Отсюда получаем

$$\frac{5-2z-z^2}{(z+1)(2-z)}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n. \blacksquare$$

**Пример 5.6.2.** Указать все области, в которых функция $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ может быть разложена в ряд Лорана с центром в точке $z_0=0$.

***Решение.*** Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости за исключением точек $\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Отсюда и из теоремы 4.5.1 следует, что эта функция допускает разложение в ряд Лорана в следующих областях

$$0<|z|<\pi, \qquad \pi<|z|<2\pi, \qquad \dots, \qquad \pi n<|z|<\pi(n+1), \qquad \dots.$$

Каждая из этих областей является кольцом максимального размера, не содержащим особых точек функции $f(z)$. При этом в каждой из указанных областей разложения в ряд Лорана будут различными. ■

**Пример 5.6.3.** Разложить функцию $e^{1/z^2}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<\infty$.

***Решение.*** Заметим, что $1/|z^2|<\infty$ в кольце $0<|z|<\infty$. Поэтому мы можем воспользоваться стандартным разложением для экспоненты из теоремы 5.4.3. Итак, будем иметь

$$e^{\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{2n}}. \blacksquare$$

**Пример 5.6.4.** Найти все разложения функции $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, где $z_0=3-i$.

**Решение.** Разложим функцию $f(z)$ на элементарные дроби

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2(z+i)}+\frac{1}{2(z-i)}.$$

Сделаем замену $\zeta=z-z_0=z-3+i$, откуда $z=\zeta+3-i$ и

$$f(\zeta)=\frac{1}{2(\zeta+3)}+\frac{1}{2(\zeta+3-2i)}.$$

Теперь разложим $f(\zeta)$ по степеням $\zeta$ в трех областях: I) $|\zeta|<3$; II) $3<|\zeta|<|2i-3|=\sqrt{13}$; III) $|\zeta|>|2i-3|=\sqrt{13}$. В дальнейшем воспользуемся известным разложением (см. теорему 5.4.3)

$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q|<1.$$

В области I имеем

$$f(\zeta)=\frac{1}{6(1+\zeta/3)}-\frac{1}{2(2i-3)\left(1-\frac{\zeta}{2i-3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^n}{3^n}+\frac{1}{2(3-2i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{(2i-3)^n}$$

или, возвращаясь к $z$,

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3+i)^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3+i)^n}{(2i-3)^{n+1}}, \qquad |z-3+i|<3.$$

В области II имеем

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\zeta(1+3/\zeta)}-\frac{1}{2(2i-3)\left(1-\frac{\zeta}{2i-3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{\zeta^n}+\frac{1}{2(3-2i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{(2i-3)^n}$$

или, возвращаясь к $z$,

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(z-3+i)^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3+i)^n}{(2i-3)^{n+1}},$$

$$3<|z-3+i|<\sqrt{13}.$$

В области III имеем

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\zeta(1+3/\zeta)}+\frac{1}{2\zeta\left(1-\frac{2i-3}{\zeta}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{\zeta^n}+\frac{1}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i-3)^n}{\zeta^n}$$

или, возвращаясь к $z$,

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(z-3+i)^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i-3)^n}{(z-3+i)^{n+1}},$$

$$|z-3+i|>\sqrt{13}. \;\blacksquare$$

## 5.7. Нули и изолированные особые точки

Пусть $f(z)$ регулярна в точке $z=a$. Тогда в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ представима рядом Тейлора

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\ \ldots+a_n(z-a)^n+\ \ldots$$

**Определение 5.7.1.** Точка а называется нулем функции $f(z)$ порядка (кратности) $m$, если в окрестности этой точки разложение функции в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \qquad a_m \neq 0. \qquad (5.14)$$

**Определение 5.7.2** (равносильное). Точка $a$ называется нулем функции $f(z)$ порядка (кратности) $m$, если выполняются условия

$$f(a) = 0, \qquad f'(a) = 0, \qquad \dots \; f^{(m-1)}(a) = 0, \qquad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Из (5.14) вытекает

**Определение 5.7.3** (равносильное). Точка $a$ называется нулем функции $f(z)$ порядка (кратности) $m$, если в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ регулярна в точке $a$ и $\varphi(z) \neq 0$.

Пусть теперь точка $z = a$ является особой для регулярной функции $f(z)$.

**Определение 5.7.4.** Точка $a$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки $a$, т.е. в некоторой окрестности точки а нет других особых точек функции $f(z)$, кроме самой точки $a$.

Если $z = a$ изолированная особая точка, то в некотором кольце с центром в точке $z = a$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (5.15)$$

При этом могут быть три случая.

<u>**1 СЛУЧАЙ**</u>. **Главная часть разложения отсутствует**. Тогда имеем

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots,$$

причем ряд сходится к функции $f(z)$ во всех точках рассматриваемой окрестности, кроме точки $z = a$, а в этой точке он сходится к числу $a_0$. Функция же $f(z)$ в точке $z = a$ не определена.

**Определение 5.7.5.** Особая точка $a$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ не содержит главной части.

**Определение 5.7.6** (равносильное). Особая точка $a$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке $a$.

**Пример 5.7.1.** Функции вида $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, у которых $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют в одной и той же точке $z_0$ нуль одинаковой кратности, имеют в $z_0$ устранимую особую точку.■

Слово “*устранимая*” проистекает из-за того, что если доопределить $f(z)$ в точке $z = a$ значением $a_0$, то получим функцию регулярную во всей окрестности.

<u>**2 СЛУЧАЙ.**</u> **Главная часть разложения имеет конечное число членов.** Тогда

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad (5.16)$$

причем $a_{-m} \neq 0$.

**Определение 5.7.7.** Точка $z =$ a называется полюсом порядка (или крайности) $m$ функции $f(z)$, если главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ содержит m членов.

В равенстве (5.16) вынесем за скобку $\frac{1}{(z-a)^m}$. Получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}(a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \ldots + a_{-1}(z-a)^{m-1} +$$

$$+a_0(z-a)^m + \ldots) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \qquad \lim_{z\to a}\psi(z) = \psi(a) = a_{-m} \neq 0.$$

**Определение 5.7.8** (равносильное). Точка $z = a$ называется полюсом порядка (или крайности) $m$ функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m},$$

где $\psi(z)$ регулярна в точке $a$ и $\psi(a) \neq 0$.

Сопоставляя определения 5.7.3 и 5.7.8 получим следующее утверждение.

**Теорема 5.7.1.** Если точка a есть нуль порядка $m$ для функции $f(z)$ (или полюс порядка $m$), то та же точка для функции $\frac{1}{f(z)}$ будет полюсом порядка $m$ (соответственно нулем порядка $m$).

Из определения 5.7.8 так же вытекает

**Определение 5.7.9.** Особая точка $a$ называется полюсом функции $f(z)$, если

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

**Определение 5.7.10.** В случае $m = 1$ полюс называется простым.

<u>**3 СЛУЧАЙ.**</u> **Главная часть разложения имеет бесконечное число членов.**

**Определение 5.7.11.** Точка $z = a$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-a)$ содержит бесконечное число членов.

Тогда в точке $a$ функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного, и для любого числа $A$ можно найти такую последовательность $z_n \to a$, что $f(z_n) \to A$ (Теорема Сохоцкого).

**Пример 5.7.2.** Для $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, так как

$$\lim_{z\to 0-0} e^{1/z} = 0, \qquad \lim_{z\to 0+0} e^{1/z} = \infty$$

или $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ \dots + \frac{1}{n!z^n} + \ \dots.$ ■

**Замечание 5.7.1.** Не надо думать, что особые точки регулярной функции обязательно изолированные. Так, для $tg\frac{1}{z}$ точка $z = 0$ является особой. Но эта точка не изолированная. Действительно, точки $z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, *где* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ являются полюсами функции $tg\frac{1}{z}$ , и при достаточно большом $|k|$ они будут находиться в окрестности точки $z = 0$, как бы мала она ни была.

**Замечание 5.7.2.** Поведение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки (т.е. при $|z| > N, N \to \infty$) можно охарактеризовать через поведение функции $\varphi(\xi) = f(1/\xi)$ в точке $\xi = 0$. Это значит, для $z = \infty$ части ряда Лорана меняют свое значение. Ряд по положительным степеням $z$ будет главной частью, а ряд по отрицательным степеням $z$ – регулярной частью. Соответственно изменятся все определения. Например, $f(z)$ имеет нуль порядка $m$ в $\infty$, если она представлена в виде $\psi(z)/z^m$, $f(z)$ имеет полюс порядка $m$ в $\infty$, если $f(z) = (z-a)^m\varphi(z)$. Аналогично изменяются все остальные определения.

**Пример 5.7.3.** Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ и указать их тип.

**Решение.** Функция имеет три изолированные особые точки $z = -1, 1, \infty$. Так как для

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-1}{2} = \frac{1}{2}(z-1)(z+1)$$

$z = \pm 1$ – простые нули, то согласно теореме 5.7.1 точки $z = \pm 1$ – простые полюса для $f(z)$. Поскольку

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2}{z^2-1} = 0,$$

то $z = \infty$ – устранимая особая точка.

**Пример 5.7.4.** Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{z}{1-\cos z^2}$ и указать их тип.

**Решение.** Особые точки функции $f(z)$ располагаются в нулях знаменателя $1 - \cos z^2$ и бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Нулями знаменателя являются точки $z = 0, z = \pm\sqrt{2\pi k}, z = \pm i\sqrt{2\pi k}, k \in \mathbb{N}$.

В окрестности $z = 0$ имеем

$$\frac{z}{1 - \cos z^2} = \frac{z}{1 - \left(1 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^8}{4!} - \ \dots\right)} = \frac{2}{z^3\left(1 - \frac{z^4}{12} + \ \dots\right)}.$$

Следовательно, $z = 0$ – полюс третьего порядка.

В окрестности точек $\tilde{z} = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}, k \in \mathbb{N}$, раскладывать функцию $f(z)$ в ряд Тейлора неудобно. Вычислим несколько первых производных

$$(1 - \cos z^2)'|_{z=\tilde{z}} = 2z \sin z^2|_{z=\tilde{z}} = 0,$$
$$(1 - \cos z^2)''|_{z=\tilde{z}} = 2 \sin z^2 + 4z^2 \cos z^2|_{z=\tilde{z}} = 4\tilde{z}^2 \neq 0.$$

Таким образом, $z = \tilde{z}$ – ноль второго порядка для знаменателя. Поскольку числитель функции $f(z)$ не обращается в ноль в точках $z = \tilde{z}$, то $\tilde{z} = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}, k \in \mathbb{N}$, – полюса второго порядка.

Так как точки $\tilde{z}$ накапливаются на бесконечности, то $z = \infty$ не является изолированной особой точкой. ■

**Пример 5.7.5.** Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1}$ и указать их тип.

**Решение.** Функция имеет три изолированные особые точки $z = -1, 0, \infty$. Поскольку не существует предела $\sin z$ при $z \to \infty$, то и не существует предела $f(z)$ при $z \to -1$, следовательно, $z = -1$ – существенно особая точка.

Точка $z = 0$ является нулем первого порядка. Действительно,

$$\left(\sin \frac{z}{z+1}\right)'\Big|_{z=\tilde{0}} = \frac{1}{(z+1)^2} \cos \frac{z}{z+1}\Big|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

Поскольку для $z^3$ точка $z = 0$ – ноль третьего порядка, то $z = 0$ – полюс второго порядка для $f(z)$.

Так как

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^3} \sin 1 = 0,$$

то $z = \infty$ – устранимая особая точка.■

**Примеры и упражнения**

1) Найти все нули функции $\sin z^4$ и указать их тип.

**Ответ:** $z = 0$ – ноль четвертого порядка, $z = \pm\sqrt[4]{\pi k}, \pm i\sqrt[4]{\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, – нули первого порядка.

2) Определить порядок нуля функции в точке $z = 0$:

$a)$ $\cos(\sin z) - 1$, $b)$ $\sin^2(e^z - z - \cos z)$.

**Ответы:** $a)$ ноль второго порядка, *b)* ноль четвертого порядка.

# 6. Вычеты.

**Определение 6.1.** Вычетом функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке $a$ называется число, обозначаемое символом $res_{z=a} f(z)$ и

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz, \tag{6.1}$$

где $\Gamma$ – замкнутый контур, окружающий единственную особую точку $z = a$ и интегрирование по $\Gamma$ совершается в положительном направлении.

Из формул, по которым определяются коэффициенты ряда Лорана, вытекает следующее утверждение.

**Предложение 6.1.** Вычет функции $f(z)$ в особой точке $z = a$ равен коэффициенту $a_{-1}$ при члене $\frac{1}{z-a}$ в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$ , т.е.

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = a_{-1}. \tag{6.1}$$

**Определение 6.2. В**ычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке называется коэффициент разложения при $1/z$, взятый с обратным знаком, т.е. $-a_{-1}$ .

**Замечание 6.1.** В окрестности бесконечно удаленной точки член $a_{-1}/z$ принадлежит не главной, а регулярной части.

**Предложение 6.2.** Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

**Доказательство.** Поскольку в устранимой особой точке $a_{-1} = 0$, то согласно Предложению 4.8.1 $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$. ■

**Предложение 6.3.** Если $z = a$ есть полюс первого порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z). \tag{6.2}$$

**Доказательство.** Если $z = a$ есть полюс первого порядка функции $f(z)$, то $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z - a) + \ \dots.$ Умножим обе части этого равенства на $z - a$ и перейдем к пределу при $z \to a$. Получим требуемое равенство.■

**Предложение 6.4.** Если $f(z)$ в окрестности точки $a$ может быть представлена как отношение регулярных функций $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, причем $\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$, точка $a$ – простой полюс, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6.3}$$

**Доказательство.** Согласно Предложению 6.3

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}$$

$$= \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \blacksquare$$

**Предложение 6.5.** Если $z = a$ есть полюс порядка $m$ функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right). \qquad (6.4)$$

**Доказательство.** Если $z = a$ есть полюс порядка $m$ функции $f(z)$, то

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots.$$

Умножив обе части этого равенства на $(z-a)^m$, получим $(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \ldots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + a_1(z-a)^{m+1} + \ldots$

Продифференцировав этот ряд $(m-1)$ раз, получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-a) + (m+1)m\ldots 3a_{-1}(z-a)^2 + \ldots$$

Переходя к пределу $z \to a$, получим требуемую формулу.■

## 6.1. Вычисление интегралов с помощью вычетов

**Теорема 6.1.1 (Основная теорема о вычетах).** Если функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром $\Gamma$, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в $D$ и являющихся полюсами или существенно особыми точками функция $f(z)$, то справедлива формула

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (6.1)$$

**Доказательство.** Окружим точки $z_k$, $k = 1, \ldots, n$, замкнутыми контурами $L_k$, $k = 1, \ldots, n$, так, чтобы эти контуры лежали внутри $\Gamma$, взаимно не пересекались и чтобы внутри каждого контура находилась только одна особая точка. Все это возможно, так как $z_k$ – изолированные особые точки. Тогда образуется многосвязная область, ограниченная внешним контуром $\Gamma$ и внутренними контурами $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Функция $f(z)$ регулярна в этой области и ее границе. Поэтому по теореме Коши для многосвязной области можем написать

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

Отсюда, используя определение 6.1, получим требуемую формулу. ■

**Пример 6.1.1.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}.$$

**Решение.** Подынтегральная функция $\frac{1}{z^2(z^2+4)}$ имеет три особые точки: 0, $\pm 2i$. Внутрь контура $|z+2i|=3$ попадает лишь две из них: $z_1=0$ и $z_2=-2i$. Очевидно, что точка $z_1=0$ является полюсом второго порядка, а точка $z_2=-2i$ — простым полюсом. Применяя теорему о вычетах, а также формулы (4.21) и (4.19), получим

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2(z^2+4)} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^2(z^2+4)}\right) + \operatorname*{res}_{z=-2i}\left(\frac{1}{z^2(z^2+4)}\right)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\left(\frac{1}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{z^2(z-2i)}\Bigg|_{z=-2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{-2z}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{16i}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}. \blacksquare$$

**Пример 6.1.2.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$$

**Решение.** Нетрудно видеть, что $z=-1$ – полюс первого порядка, а $z=0$ – полюс третьего порядка. Вычислим вычет в каждой из этих точек:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1}\left(\frac{e^z}{z^3(z+1)}(z+1)\right) = \lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z^3} = -\frac{1}{e},$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z z^3}{z^3(z+1)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{e^z}{z+1} = \frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{e^z(z^2+1)}{(z+1)^3}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right). \blacksquare$$

## 6.2. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду

Пусть требуется вычислить интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})d\varphi \tag{6.1}$$

где $f(z)$ функция, регулярная в круге $|z| < 1$ (или $|z| > 1$), за исключением конечного числа точек, и непрерывная вплоть до границы $|z| = 1$, за исключением тех же точек. Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi \quad \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$, при этом интервал интегрирования $[0,2\pi)$ при такой замене перейдет в окружность $|z| = 1$, причем обход осуществляется против часовой стрелки. Интеграл (6.1) преобразуется в контурный интеграл

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})d\varphi = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}. \tag{6.2}$$

Интеграл (6.2) можно вычислять, например, с помощью вычетов.

Если интеграл (6.1) содержит тринометрические функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$,

то их необходимо преобразовать по формуле Эйлера

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{6.3}$$

**Пример 6.2.1.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi},\ a > 1.$$

**Решение.** Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,2\pi]$, тогда

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi,\ d\varphi = \frac{dz}{iz}$.

Интеграл $I$ сводится к интегралу по замкнутому контуру $|z| = 1$:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Решая уравнение $z^2 + 2iaz - 1 = 0$, найдем особые точки подынтегральной функции $z_{1,2} = -i\left(a \mp \sqrt{a^2 - 1}\right)$. Внутрь контура $|z| = 1$ попадает только точка $z_1 = i\left(\sqrt{a^2 - 1} - a\right)$. Для подынтегральной функции эта точка является простым полюсом и, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2}{(z^2+2iaz-1)'}\bigg|_{z=z_1} = \frac{2}{2z+2ia}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}.$$

Таким образом,

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi i}{i\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Отметим, что интеграл по контуру можно было вычислить и по интегральной формуле Коши:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2iaz-1} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{2}{z-z_2}dz}{z-z_1} =$$

$$= 2\pi i \frac{2}{z-z_2}\bigg|_{z=z_1} = \frac{4\pi i}{z_1-z_2} = \frac{4\pi i}{i\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)+i\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \blacksquare$$

**Пример 6.2.2.** Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^2}.$$

**Решение.** Согласно формуле Эйлера

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2i\varphi}-2+e^{-2i\varphi}).$$

Так как подынтегральная функция зависит от $e^{2i\varphi}$, то удобнее сделать замену $z=e^{2i\varphi}$, при этом интервал интегрирования $[-\pi,\pi)$ перейдет в окружность $|z|=1$, которая обходится против часовой стрелки дважды. Отсюда $dz = 2ie^{2i\varphi}d\varphi \;\Rightarrow\; d\varphi = \frac{dz}{2iz}$ и

$$I = 2\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2iz\left(1-\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}-\frac{1}{4z}\right)^2} = \frac{16}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(6z-z^2-1)^2}.$$

Из двух корней $z_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ знаменателя только один $z_2 = 3-2\sqrt{2}$ попадает внутрь контура $|z|=1$. Поскольку $z_2 = 3-2\sqrt{2}$ - полюс второго порядка, то

$$I = 2\pi i \frac{16}{i}\operatorname*{res}_{z=z_2} \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = 32\pi\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right)'\bigg|_{z=z_2} =$$

$$= 32\pi \frac{(z_2-z_1)^2-2z_2(z_2-z_1)}{(z_2-z_1)^4} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}. \blacksquare$$

## 6.3. Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов

Рассмотрим метод вычисления несобственных интегралов с помощью теоремы о вычетах. Этот метод заключается в следующем. Пусть необходимо вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по интервалу $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Пусть $(a, b)$ можно дополнить некоторой кривой $\Gamma$, которая вместе с интервалом ограничивает некоторую область $D$ в $\mathbf{C}$. При этом $f(x)$ регулярно продолжается в $D$ (и непрерывно в замыкание $\overline{D}$) за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_j \in D, j = 1, \dots, n$, то по теореме Коши о вычетах имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z) \right).$$

Если удается вычислить итеграл $\int_\Gamma f(z)dz$, то тогда вычислен и исходный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Вообще говоря, в теореме Коши граница $\partial D$ области $D$ должна иметь конечную длину. Если $(a, b)$ совпадает со всей действительной осью $\mathbb{R}$, то в этом случае рассматривают отрезок $[-R, R]$ действительной оси, в качестве $\Gamma$ берут полуокружность $\Gamma_R$ радиуса $R$ с центром в начале координат и лежащую в верхней полуплоскости

$$\Gamma_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.3.1.** Пусть функция $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \dots, a_n$, и непрерывна вплоть до действительной оси. Если

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = 0, \tag{6.1}$$

то

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z), \tag{6.2}$$

где существование несобственного интеграла гарантируется лишь в смысле главного значения.

Укажем два случая выполнения условия (6.1).

**Лемма 6.3.2.** Пусть функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq R_0 > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $M(R) = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$, причем

$\lim_{R \to +\infty} RM(R) = 0$. Тогда $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$.

**Замечание 6.3.1.** Лемма 6.3.1 применима в случае, когда $f(z)$ - рациональная функция, то есть $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$, $Q_m(z)$ - многочены степени $n$ и $m$ соответственно, причем $Q_m(z)$ не обращается в ноль на $\mathbb{R}$. Если $m \geq n+2$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится как несобственный и формула (6.2) перепишется в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_j>0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z), \qquad (6.3)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $f(z)$, находящимся в верхней полуплоскости.

**Лемма 6.3.2 (Жордана).** Пусть функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z \in \mathbf{C} | |z| \geq R_0 > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|$, причем

$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0.$$

Тогда если $m > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

**Доказательство.** В силу условий леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > R_0$, что для всех $z$, для которых $|z| = R > K$, выполняется неравенство $|f(z)| < \varepsilon$. Возьмем за радиус полуокружности $\Gamma_R$ именно такое $R$ и положим $z = Re^{i\varphi}$. Получим

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})e^{imR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\varphi})\right|\left|e^{imR\cos\varphi}\right|\left|e^{-mR\sin\varphi}\right|R\left|ie^{i\varphi}\right|d\varphi \leq$$

$$\leq R\varepsilon \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Оценим величину $\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi$. Для этого сперва разобьем промежуток интегрирования $[0,\pi]$ на $[0,\frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2},\pi]$ и в интеграле по второму промежутку сделаем замену переменной интегрирования по формуле $\varphi = \pi - \psi$. С учетом того, что $\sin\varphi = \sin(\pi - \psi) = \sin\psi$, это дает

$$\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-mR\sin\psi}\,d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\psi}\,d\psi$$

$$=$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Заметим, что $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geq \frac{\sin^{\pi}/_2}{^{\pi}/_2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi,$ так как в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ убывающая, Действительно,

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} = \frac{\cos\varphi}{\varphi^2}(\varphi - \operatorname{tg}\varphi) < 0,$$

потому что $\operatorname{tg}\varphi > \varphi$ для $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому можем написать, что

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\frac{\sin\varphi}{\varphi}\varphi}\,d\varphi \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{\pi}{mR}e^{-\frac{2mR}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{mR}\left(1 - e^{-mR}\right) < \frac{\pi}{mR}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz\right| < R\varepsilon\frac{\pi}{mR} = \frac{\pi}{m}\varepsilon.$$

А это и значит, что $\int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz \to 0$ при $R \to +\infty$.■

**Замечание 6.3.2.** С помощью Леммы 6.3.2 можно вычислять интегралы вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,cos\,mx\,dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,sin\,mx\,dx,$$

где $f(x)$ - рациональная функция, то есть $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочены степени $n$ и $m$ соответственно, причем $Q_m(x)$ не обращается в ноль на $\mathbb{R}$ и $m \geq n + 1$. В этом случае имеем

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, cos\, mx\, dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{Im\, z_j > 0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) e^{imz}\right), \qquad (6.4)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, sin\, mx\, dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{Im\, z_j > 0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) e^{imz}\right), \qquad (6.5)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $f(z)e^{imz}$, находящимся в верхней полуплоскости.

**Пример 6.2.1.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

**Решение.** Функция $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ удовлетворяет всем требованиям леммы 4.11.1 и имеет в области $D$, ограниченной кривой $\Gamma_R, R > 1$, и отрезком $[-R, R]$, только две особые точки $z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}$. Каждая из этих точек является простым полюсом. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_j} = \frac{1}{4z_j}, j = 1,2.$$

Таким образом,

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right) = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

**Пример 6.2.2.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx.$$

**Решение.** Функция $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)(4+z^2)}$ удовлетворяет всем требованиям леммы 4.11.2. В области $D$, ограниченной кривой $\Gamma_R, R > 2$, и отрезком $[-R, R]$, функция $f(z)e^{iz}$ имеет только две особые точки $z_1 = i, z_2 = 2i$, каждая из них является простым полюсом. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)} = \frac{ie^{-1}}{2i(-1+4)} = \frac{1}{6e},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)} = \frac{2ie^{-2}}{4i(-4+1)} = -\frac{1}{6e^2}.$$

Следовательно,

$$I = \mathrm{Im}\left[2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{2\pi i}{6}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\right] = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}. \blacksquare$$

# 7. Операционные исчисления.