DISTRIBUCIÓN DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL (p)

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n(grande) extraída de la población de Bernoulli B(1,p), donde p es el porcentaje de éxitos en la población y sea.

$$\bar{p} = \frac{X_1, X_2, \ldots, X_n}{n} = \frac{X}{n}$$

La proporción de éxitos en la muestra, siendo. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ una variable binomial B (n, p), entonces.

$\boldsymbol{a}) \; \mu_{\bar{p}} = E(\bar{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(np) = p$

$\boldsymbol{b}) \; \sigma^2{}_{\bar{p}} = V(\bar{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}[np(1-p)] = \frac{p(1-p)}{n}$

$\boldsymbol{c}) \; Si\ n\ es\ suficientemente\ grande, entonces\ la\ variables\ aleatoria$:

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

Tiene aproximadamente distribución N (0,1)

FORMULAS

a) Si "n" es grande: ($n.p > 5\ \wedge n.q > 5$)

- **Formula 1:**

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} \sim N(0,1)$$

- **Formula 2:** Si el muestreo es sin reemplazo y población binomial finita(N)

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}.(\frac{N-n}{N-1})}} \sim N(0,1)$$

b) Si "n" es pequeño (Se agrega el factor de corrección de continuidad) $\rightarrow\ \pm\frac{1}{2n}$

$$Z = \frac{\bar{P} \pm \frac{1}{2n} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$$

NOTAS

1. El error estándar de $\bar{P}$ $es: \sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
2. Si la población es finita de tamaño N y el muestreo es sin reposición el error estándar (desviación estándar de la hipergeometrica) es:

   $\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

   Observar que si N es grande con respecto a n el factor de corrección $\frac{N-n}{N-1}$ se aproxima a la unidad.
3. Si n es suficientemente grande $(n \geq 30)$

   $P[\ \bar{P}\ \leq c] \cong P[Z \leq \frac{(c+1/(2n))-p}{\sigma_{\bar{P}}}]$
4. Observar que las dos expresiones de Z

   $$Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\bar{P}-p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

   Donde X es binomial y $\bar{P}$ es el porcentaje de éxitos en la muestra, tienen distribución N(0,1)

EJEMPLOS:

El departamento de compras de una compañía de hardware rechaza, por sistema, remesas de refacciones si en una muestra aleatoria de 100 de un lote de 10000 partes presenta 10 o más productos defectuosos. Encuentre la probabilidad de que se rechace el lote si se tiene un porcentaje de producción del 5%.

Solución:

$X: \#\ productos\ defectuosos$

$n = 10$

$N = 10\ 000$

Rechaza si $x \geq 10$

a) $P(rechace\ el\ lote) = ?; Si\ P = 0.05$

$$P(x \geq 10)$$

$$P\left(\frac{x}{n} \geq \frac{10}{100}\right) = P(\hat{p} \geq 0.10)$$

Utilizando la fórmula 2

$$P\left(\frac{\bar{P}-p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}.\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} \geq \frac{0.10-0.05}{\sqrt{\frac{0.05\ \times 0.95}{100}\times\left(\frac{9900}{9999}\right)}}\right)$$

$$P(Z\ \geq\ 2.31)$$
$$1-P(Z\ \geq\ 2.31)$$
$$1-0.9896$$
$$0.0104$$