Distribución muestral de la media ($\bar{X}$)

Es la media de la población de la que se muestrean los elementos. Si la distribución de la población es normal, es probable que la distribución muestral de la media sea normal para las muestras de todos los tamaños.

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra aleatoria de tamaño n, entonces llamamos media muestral o promedio muestral a la expresión:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

TEOREMA 1

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra de una población infinita, con media μ y varianza σ^2, entonces:

$$a)\ E(\bar{X}) = \mu$$

$$b)\ V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si la población es finita de tamaño N, entonces:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times (\frac{N-n}{N-1})$$

TEOREMA 2

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra de tamaño n de una población que se distribuye Normal con media μ y varianza σ^2, entonces:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \sim \ N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

- Distribución de la media muestral
  Si $X = N(\mu, \sigma)$

  $$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = N(0,1)$$

  Aunque la variable no sea normal, lo anterior también se cumple si n es grande (>30).
  Si la población es normal, pero σ es desconocida.

  $$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{s}/\sqrt{n}} = t_{n-1}$$

TEOREMA 3

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra aleatoria de tamaño n de una población que se distribuye Normal con media μ y varianza σ^2, entonces:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

TEOREMA 4

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra de tamaño n de una población infinita con media μ y varianza σ^2, entonces, la distribución límite de la variable aleatoria Z definida por:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Es la distribución normal estándar, cuando n tiende a infinito.

$$n \to \infty$$

$$Z \sim N(0,1)$$

<u>EJEMPLO</u>

La vida media de una máquina para hacer pasta es de siete años, con una desviación estándar de un año. Supongamos que las vidas de estas máquinas siguen aproximadamente una distribución normal.

Calcular:

a) La probabilidad de que la vida media de una muestra aleatoria de nueve de estas máquinas esté entre 6.4 y 7.2 años.

SOLUCIÓN

- $X: vida\ util\ de\ la\ maquina \sim N(\mu = 7;\ \sigma = 1)$
- Hallando el inciso “a” con el Teorema 4 $(n = 9)$

$$P(6.4 < \bar{X} < 7.2)$$

$$P\left(\frac{6.4 - 7}{\frac{1}{\sqrt{9}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{7.2 - 7}{\frac{1}{\sqrt{9}}}\right)$$

$$P(-1.8 < Z < 0.6)$$

$$P(Z < 0.6) - P(Z < -1.8)$$

$$0.7257 - 0.0359$$

$$0.6898$$