Distribución muestral de la varianza:

Sea una población donde se observa la variable aleatoria X. Supongamos que $X \rightarrow N\ (\mu, \sigma)$.

Consideramos una muestra aleatoria simple, de tamaño n, formada por las variables aleatorias, $X_1, X_2, \dots, X_n$.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \begin{cases} Indepentiendes\ entre\ si \\ X_i \rightarrow N(\mu, \sigma) \end{cases}$$

Teorema:

El estadístico X^2, definido como:

$$X^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Tiene una distribución Chi-Cuadrado con n – 1 grados de libertad.

$$X^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow X^2_{n-1}$$

Ejemplo:

Se considera una medición física realizada con un instrumento de precisión, donde el interés se centra en la variabilidad de la lectura. Se sabe que la medición es una variable aleatoria con distribución Normal y desviación típica 4 unidades. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Obtener la probabilidad de que el valor de la varianza muestral sea mayor de 12.16 unidades cuadradas.

$$X_i: \text{"Medición"} \rightarrow N(\mu; 4)$$
$$n = 25$$
$$X^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow X^2_{n-1}$$
$$P(S^2 \geq 12.16) = P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq 12.16\right) =$$
$$= P\left(X^2_{n-1}\ \geq \frac{25 \times 12.16}{16}\right)$$
$$= P(X^2_{n-1}\ \geq 19)$$
$$= 0.75$$