Modelli ARCH e GARCH

Luigi Amedeo Bianchi

1 ARCH

Come già accennato in precedenza, il nostro scopo è modellizzare serie temporali finanziarie. Per fare ciò non possiamo adoperare in modo soddisfacente modelli di tipo ARMA. Vogliamo qualcosa che riesca a rappresentare uno dei comportamenti tipici delle serie finanziarie, ossia il clustering della volatilità, cioè il fatto per cui si alternano periodi di alta volatilità con periodi di bassa volatilità, fatto che ci dice che non possiamo usare un rumore bianco per il nostro modello.

Il modello, o meglio la famiglia di modelli, ARCH fu introdotto da Engle nel 1982. ARCH sta per AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, ossia modello di autoregressione con eteroschedasticità condizionale, che significa che la varianza condizionale cambia al variare del parametro temporale. I modelli ARCH hanno la seguente struttura:

$$\begin{aligned} X_t &= \mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \varepsilon_t \\ \mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= f\left(\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ Var\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

da cui abbiamo che media e varianza condizionali dipendono da $\mathcal{F}_{t-1}$, cioè dall'insieme delle informazioni che abbiamo sulla serie temporale fino all'istante $t-1$. Prendiamo per ipotesi di modello che le innovazioni (o termini d'errore)

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_t^2\right).$$

Ma come possiamo prendere $\mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \sigma_t^2$? Se consideriamo il modello ARCH(p), la varianza condizionale è una funzione (lineare) dei quadrati delle ultime p innovazioni ε_i:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

con $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ per $i > 0$.

Se poniamo $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ possiamo riscrivere il modello ARCH(p) come

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \nu_t$$

e, dal momento che $\mathbb{E}\left[\nu_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$, abbiamo che questo è proprio in modello AR(p) per i quadrati delle innovazioni ε_t^2.

Un'ultima osservazione: per stimare un modello ARCH si usa (è una delle possibilità, ma è la più semplice) il metodo dei minimi quadrati.

Esercizio 1. Un facile esercizio a questo punto è scrivere per esteso un ARCH(1) o ARCH(2).

Esempio 1. Se riprendete in mano il codice visto la scorsa settimana cosa potete dire del modello giocattolo proposto?

2 GARCH

I modelli ARCH hanno però un problema molto evidente: se la volatilità empirica persiste abbiamo p molto grande e, di conseguenza, molti coefficienti α_i. Per questo, nel 1986, fu proposta da Bollerslev una famiglia generalizzata di modelli ARCH: i GARCH.

Il modello GARCH(q,p) è definito nel modo seguente:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

in cui i termini ε_i sono la componente ARCH (di lunghezza p), mentre i termini σ_j sono la componente GARCH (di lunghezza q).

Come abbiamo già fatto prima per i modelli ARCH, possiamo riscrivere GARCH(q,p) come

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \nu_{t-j} + \nu_t$$

che ci dà un modello ARMA($\max\left(p,q\right),q$) per ε_t^2.

Nella famiglia dei modelli GARCH il più utilizzato è GARCH(1,1), cioè

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

con tutti i tre coefficienti maggiori di 0.

Possiamo osservare che possiamo riscrivere GARCH(1,1) come un modello ARCH(∞) mediante sostituzioni iterate:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \left(1 - \beta_1\right) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2$$

Questo ci dà un'idea della potenza del modello GARCH, anche solo di ordine (1,1).

Per quanto detto in generale prima GARCH(1,1) ci dà una modellizzazione ARMA(1,1) per ε_t^2:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\,\varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1\nu_{t-1} + \nu_t.$$

Se indichiamo con

$$\sigma^2 = \alpha_0\,(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$$

la varianza non condizionale abbiamo che la previsione a k passi nel futuro della varianza condizionale è

$$\hat{\sigma}_{t+h|t}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}\left(\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2\right),$$

che ci dice che la previsione della varianza condizionale si schiaccia sulla varianza non condizionale con un andamento esponenziale, dato da $\alpha_1 + \beta_1$.

Osservazione 1. I modelli GARCH sono simmetrici, cioè non ci interessiamo del segno di ε_t. Chiaramente questo non è un dettaglio da poco nel momento in cui vogliamo usare modelli di questo genere per studiare delle serie finanziarie, per le quali il segno è estremamente importante. Si può osservare infatti il cosiddetto effetto leva (*leverage effect* introdotto da Black nel 1972), che sostiene che ci sia una correlazione negativa tra volatilità e ritorni: se i prezzi delle azioni crollano, questo mette sotto pressione l'azienda, che risulta quindi più rischiosa agli occhi degli operatori del mercato, causando volatilità. Viceversa se la volatilità aumenta, investire in quei titoli è più rischioso, quindi i prezzi diminuiscono. Per poter tenere conto anche di questo fenomeno, a partire dai modelli GARCH, sono stati sviluppati dei modelli generalizzati asimmetrici (AGARCH) che rispondono in modo differente alla volatilità dovuta alle *buone notizie* e a quella dovuta alle *cattive notizie.*