Přednáška 19.3.2019

Bellman-Ford algoritmus

```
l(s)=0, l(v)=∞
For i in range(1, n):
    For e in E:
        if l(e.w) > l(e.v) + c(e)
            l(e.w) = l(e.v) + c(e)
            p(e.w) = e.v
return l,p
```

v i-té iteraci najde nejkratší cesty délky i, a pokud jsou hrany příznivě seřazeny, tak může najít i něco delšího

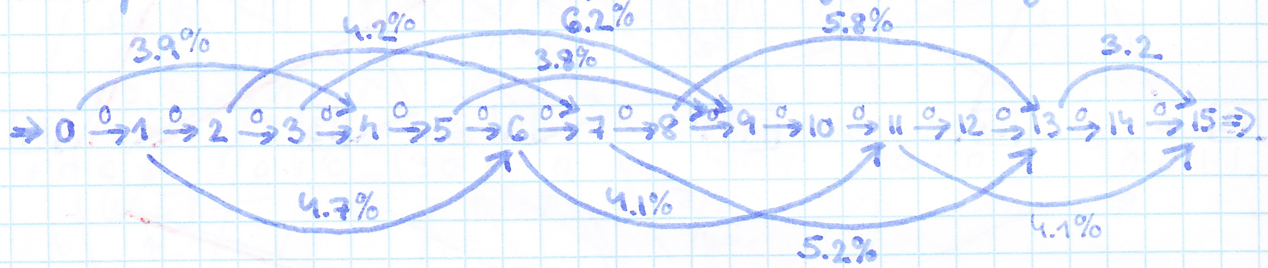
return l,p , l je vektor cen cest, p jsou předchůdci vrcholu na cestě

Tvrzení: $l^k(w) \le c(E(P^k))$, tedy cena vrcholu po k-té iteraci je shora omezená nejkratší cestou (její cenou) délky nejvýš k.
Dokazuje se to indukcí a využije se Bellmanův princip optimality.

Z tvrzení výše plyne správnost algoritmu. Časová náročnost je $O(m \cdot n)$

DAG: directed acyclic graph: nemá cykly, vrcholy lze uspořádat do řádky tak, aby hrana nikdy nevedla v řádce zpět
Hledání SPT v DAGu trvá $O(|V|+|E|)$

Formulujte úlohu hledání nejlepších investic jako SPT:
Máme období 15 let a několik možných investic. Každá investice se může uplatnit v konkrétním roce, trvá stanovený čas a má výnos.



Vrcholy reprezentují roky. Hrana mezi roky vede, když jde v tu dobu investovat, a její cena je úrok. Přidány jsou hrany s cenou 0, když se neinvestuje.

Ceny hran je potřeba přepočítat, aby jejich součin dával celkový zisk.
3.9 → 1.039 , 0 → 1 , 4.2 → 1,042
A abych mohla hrany sčítat, zlogaritmuju ceny ($\lg(\prod x_i) = \sum \lg(x_i)$)

Pak můžeme invertovat ceny a hledat minimum, nebo upravit alg a hledat max.

Floydův alg: vynechám, je detailně popsaný a dokázaný v TAL-ech.

Př: Máme mapu města s křižovatkami. Chceme na křižovatky umístit hasičárny tak, aby:

a) ve městě byla jediná hasičárna a dojezd na nejvzdálenější místo byl co nejkratší
Mapu vyjádříme jako graf, na něm spustíme Floydův alg. Pak procházím řádky a vyberu ten, který má nejmenší maximum

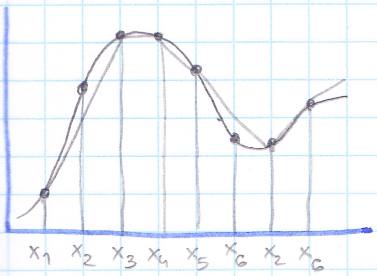
b) kritérium je stejné, ale máme 2 hasičárny
Spustíme Floyda a procházíme dvojice řádků, najdeme minimum ve dvojici, tím získáme jeden vektor a v něm najdeme maximum. Vybereme takové dva řádky, aby to bylo minimální.

c) máme pevně daný limit dojezdu, chceme minimalizovat počet hasičáren

???

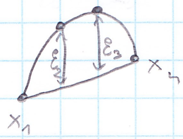
Cvičení 21.3.2019

Př: Aproximace fcí – máme vzorky nějaké fce, chceme vybrat několik vzorků a proložit je přímkami



Pokud spojíme body x_i a x_j, počítáme chybu:

$$c_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} \varepsilon_k^2$$



Vzorec pro chybu upravíme, abychom penalizovali model, který ponechá všechny vrcholy:

$$c_{ij} = \alpha + \beta \cdot \sum_{k=i+1}^{j-1} \varepsilon_k^2$$

- pro $\alpha \gg \beta$ vybereme co nejméně hran, ideálně jedinou přímku
- pro $\beta \gg \alpha$ vybereme všechny hrany.

Když máme c_{ij}, můžeme úlohu řešit pomocí nejkratších cest.

DÚ: Máme body na obvodu ČR a chceme některé odebrat. Chyba ε_k se počítá jako vzdálenost bodu od přímky. Naimplementujte.

Př: Dlužníček: Kamarádi spolu jeli na výlet, každý něco platil. Jak je vyrovnat?

P = {Adam, Bedřich, Cecilka, David}

c = { 0 , 590 , 110 , 300 } ← kolik kdo platil

x_{ij}: Kolik zaplatí člověk i člověku j? $x_{ij} \in \mathbb{N}$

$$c_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = s \quad , \quad s = \frac{\sum c_i}{4} = 250$$

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ji}$ → kolik ostatní pošlou mně
- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ → kolik pošlu já ostatním
- c_i → kolik jsem utratil na výletě

} z pohledu člověka i

Jak to udělat tak, aby bylo co nejméně transakcí?

$p_{ij} \in \{0, 1\}$
- 0: neproběhla platba $i \to j$
- 1: proběhla platba $i \to j$

$$\min \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} p_{ij}$$

s.t.

$x_{ij} \geq p_{ij}$ pokud transakce neproběhne, bude p_{ij} stlačeno na 0.

$x_{ij} \leq p_{ij} \cdot c_{max}$ pokud proběhne, musí se p_{ij} zvednout, a to jde jen na 1.

$c_{max} = 590$