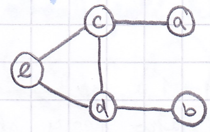
Přednáška
9.4.2019

Obarvení grafu: Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček, $G = (V, E)$.
Obarvení vrcholů je přiřazení, které každému vrcholu z V přiřazuje barvu $b(v)$, kde $b(v)$ je prvek množiny barev B. Platí, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. (pro $\{u,v\} \in E(G): b(v) \neq b(u)$).
Graf se nazývá k-barevný, když ho lze obarvit k-barevně.

Tvrzení: 3-CNF SAT $\triangleleft_p$ 3-barevnost.

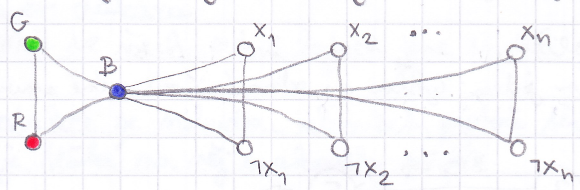
Myšlenka převodu: Je dána formule φ, která je 3-CNF. Chceme sestrojit graf G, který bude 3-barevný, právě když φ je splnitelná.

G_1:

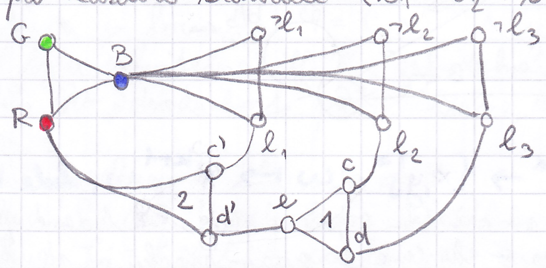


G_1 je pomocný graf, pro který platí:
- jestliže a, b mají stejnou barvu, má tuto barvu i e
- pokud jeden z vrcholů a, b má barvu z, pak lze graf obarvit tak, aby i e měl barvu z.

Ve formuli φ označme všechny logické proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vytvoříme graf $G = (V, E)$:
- V obsahuje všechny literály: $x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, \dots, \neg x_n$ a vrcholy R, G, B
- E obsahuje hrany tak, aby vznikly trojúhelníky R, G, B a $B, x_i, \neg x_i$ $\forall i = 1 \dots n$.



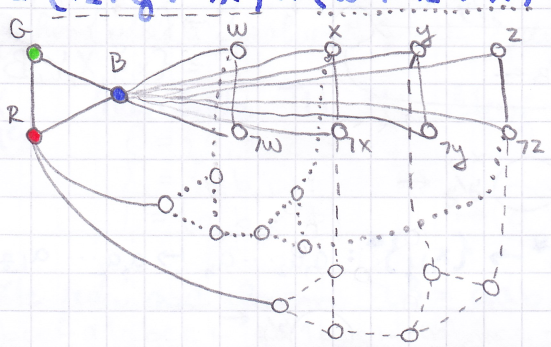
- pro každou klauzuli $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ přidáme do grafu dvě kopie grafu G_1



1: literály l_2, l_3 odpovídají vrcholům a, b v G_1, přidám c, d, e

2: literál l_1 a vrchol e odpovídají vrcholům a, b v druhém G_1. Přidám c', d', a tam, kde by měl být e', přímo připojím R.

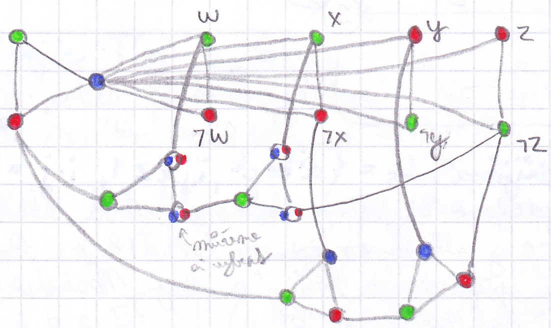
Př: $\varphi = (\neg z \vee y \vee \neg x) \wedge (w \vee \neg z \vee x)$



Předpokládejme, že φ je splnitelná. Vrcholy B, G, R mají barvy: $b(B) = m$, $b(G) = z$, $b(R) = č$.

Vrchol literálu l má barvu z, právě když l je pravdivý. Jinak je $b(l) = č$.

Je-li aspoň jeden z l_1, l_2, l_3 pravdivý, tj. zelený, pak lze najít obarvení, aby i výsledek byl zelený, to plyne z vlastností G_1.



Ohodnocení: $u(x) = 1$, $u(y) = 0$, $u(z) = 0$, $u(w) = 1$
ano, graf lze vybarvit 3-mi barvami

Tvrzení: 3-barevnost $\trianglelefteq_p$ ILP

Máme graf $G=(V,E)$, o kterém chceme určit, zda je 3 barevný. Úlohu převedeme na ILP

Převod: Pro každý vrchol uděláme 3 proměnné: $x_v^b \in \{0,1\}$, $b \in \{č, z, m\}$. Řekneme, že $x_v^b = 1$ iff $b(v) = b$, 0 pokud má jinou barvu než b. Chceme, aby každý vrchol měl právě jednu barvu: $x_v^č + x_v^m + x_v^z = 1$.

V každé hrany budeme chtít, aby její krajní vrcholy měly různé barvy (hrana $e = \{u,v\}$)

$$x_u^č + x_v^č \leq 1$$
$$x_u^z + x_v^z \leq 1$$
$$x_u^m + x_v^m \leq 1$$

Tím je úloha převedená, máme $3 \cdot |V|$ proměnných a $|V| + 3 \cdot |E|$ rovnic.

Problém rozkladu: Máme množinu X a systém podmnožin S. Chceme vybrat takové podmnožiny z S, aby byly disjunktní, a aby jejich sjednocení bylo X. Tj. dělíme X na části.

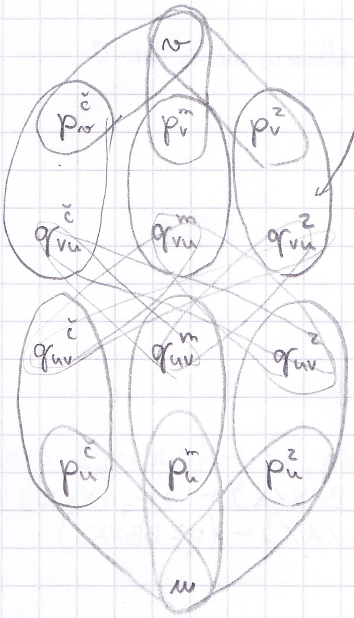
Př: $X = \{a,b,c\}$
- $S_1 = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c\}\}$ má řešení, $X = \{a,b\} \cup \{c\}$
- $S_2 = \{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ nemá řešení

Tvrzení: 3-barevnost $\trianglelefteq_p$ problém rozkladu.

Převod: Pro každý vrchol přidáme do X 4 prvky: $\{v, p_v^č, p_v^z, p_v^m\}$. Pro každou hranu e, $e=\{u,v\}$ přidáme do X 6 prvků: $\{q_{uv}^č, q_{vu}^č, q_{uv}^z, q_{vu}^z, q_{uv}^m, q_{vu}^m\}$.

Do množiny S přidám: $\{v, p_v^č\}$, $\{v, p_v^m\}$, $\{v, p_v^z\}$ tj. možné barvy vrcholu. Dál tam přidám množiny $\{p_v^b, p_{vu}^b \mid u \text{ je soused } v\}$ pro všechny barvy b. Za každou hranu u,v dáme do S množiny $\{p_{uv}^b, q_{vu}^{b'}\}$ pro všechny barvy b,b', aby $b \neq b'$.

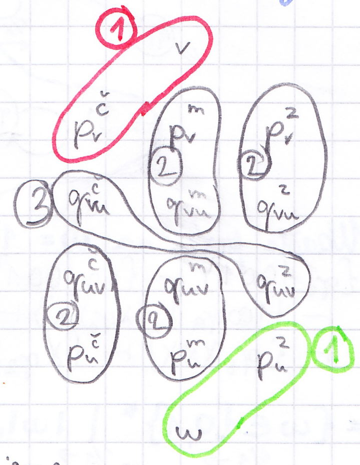
Pro jednoduchý graf $V=\{u,v\}$, $E=\{\{u,v\}\}$, $B=\{č,z,m\}$



pokud by vrchol měl dalšího souseda, třeba w, tak by tyhle množiny měly 3 prvky a to p_v^b, p_{vu}^b a p_{vw}^b.

a) když G je trojbarevný, tak najdu rozklad množiny X
pro $\ell(v) = č$, $\ell(u) = z$

1) vyberu z každého vrcholu tu množinu, ve které je barva vrcholu
2) vyberu ty množiny p_v^b, kde p_v^b ještě nebylo vybráno
3) zbydou mi nevyužité prvky, to jsou hrany a pro trojbarevný graf budou oba prvky volné



b) máme rozklad, tak že najdeme trojbarevnost grafu.

- vrchol v leží ve 3 množinách, alespoň jednu jsme museli vybrat → to je barva vrcholu v.
- spojení $q_{uv}^{b_1}$ a $q_{vu}^{b_2}$ zaručuje, že sousední vrcholy budou mít odlišné barvy
- zbydou tam množiny s nevyužitými barvami, ty jsou taky vybrané

Subset Sum: Máme kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chceme najít podmnožinu indexů I aby: $\sum_{i \in I} a_i = K$ pro nějaké dané K.

např.: $K=5$, $a_i = \{1,2,6,7\}$ nelze vyřešit.

Úloha batohu: Máme ceny předmětů $c_1, \dots, c_k$ a váhy předmětů $w_1, \dots, w_k$. Chceme vybrat předměty o ceně alespoň K a váze nejvýše W:

$$\sum w_i \le W, \quad \sum c_i \ge K.$$

Převod subset sum na batoh: Označíme $K=K$, $W=K$, $w_i = a_i$, $c_i = a_i$

Tvrzení: úloha rozkladu $\triangleleft_p$ subset sum

Převod: Označme prvky v X jako $X = \{0,1,2,\dots,n-1\}$, a $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$.
Použijeme charakteristickou fci podmnožiny $X_{S_i} = \begin{cases} 1 & \text{iff } x \in S_i \\ 0 & \text{iff } x \notin S_i \end{cases}$

	0	1	2	⋯	n-1	
S_1	0	1	1		1	$= a_1$
S_2	1	0	1		0	$= a_2$
⋮					⋮	
S_r	1	1	1		1	$= a_r$

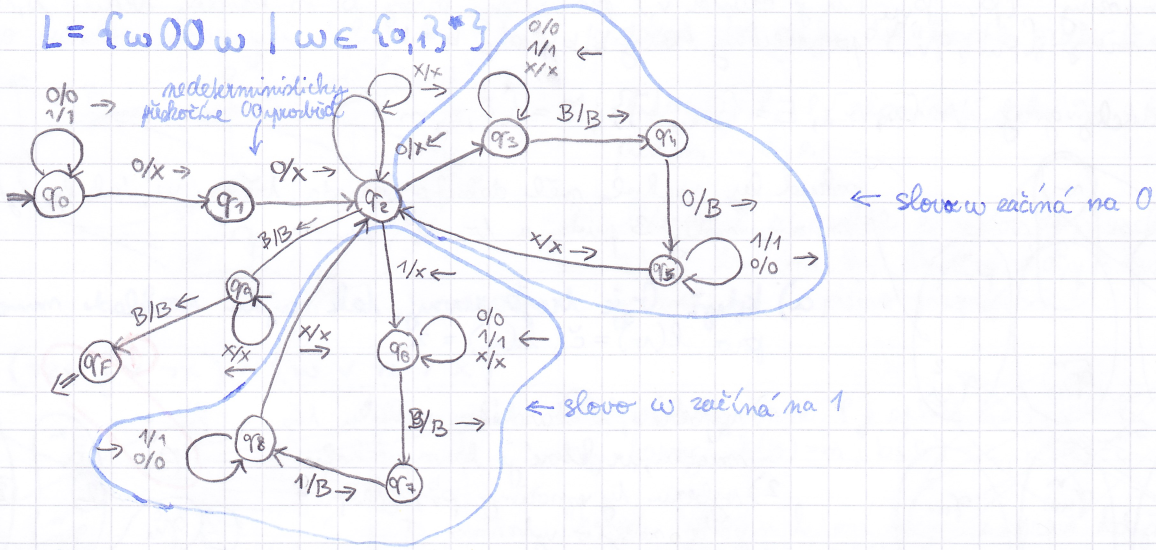
Zvolím $p > r$ a budu se na S_i dívat jako na čísla v p-ární soustavě

$a_i = \sum_{j=0}^{n-1} X_{S_i}(j) \cdot p^j$ chceme množinu, kde je každý prvek ($S_k = \{1, 1, \dots, 1\}$)

Pak $K = \sum_{0}^{n-1} 1 \cdot p^j$

problém je, že $K \approx p^n$, což není úplně polynomiální.

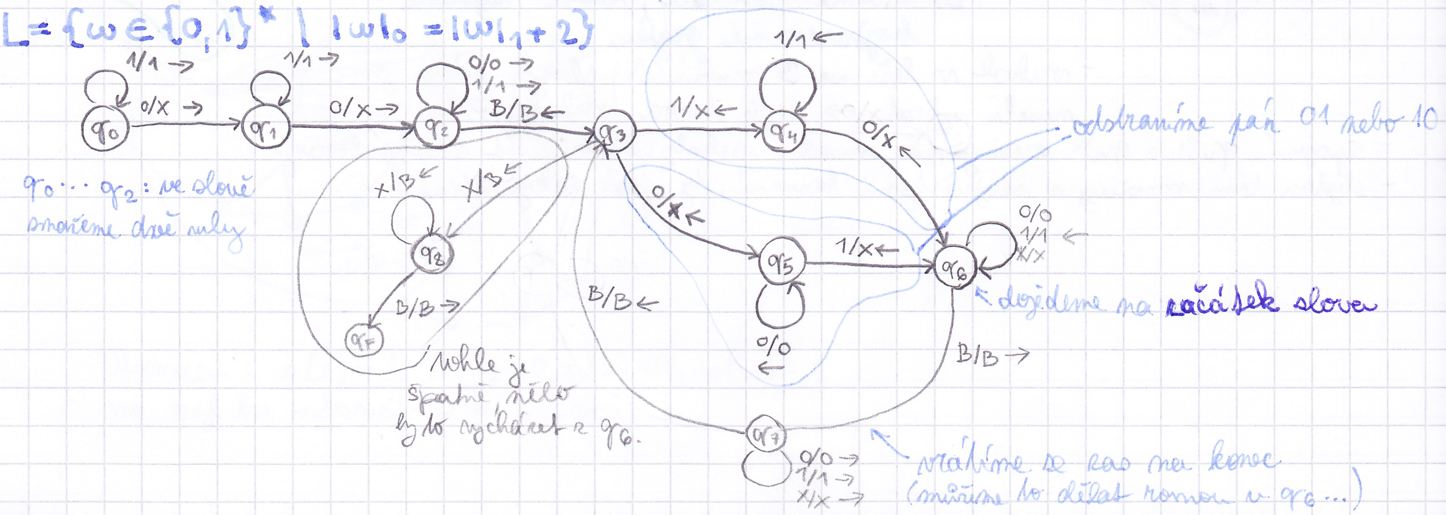
Cvičení 10.4.2019 $L = \{w00w \mid w \in \{0,1\}^*\}$



Ukažte práci na w = 1001

$\{q_0 1001\} \vdash \{1q_0 001\} \vdash \{10q_0 01, 1Xq_1 01\} \vdash \{100q_0 1, 1XXq_2 1\} \vdash \{1001q_0 B, 1XXq_6 X\}$
$\vdash \{100q_9 1, 1Xq_6 XX\} \vdash \{\text{skončí chybou}, 1q_6 XXX\} \vdash \{q_8 1XXX\} \vdash \{q_6 B1XXX\} \vdash \{q_7 1XXX\} \vdash$
$\vdash \{q_8 XXX\} \vdash \{Xq_2 XX\} \vdash^* \{XXXq_2 B\} \vdash \{XXq_9 X\} \vdash^* \{q_9 BXXX\} \vdash \{q_F BBXXX\}$

$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1 + 2\}$



$f: \{a,b,c\}^* \to \{a,b,c\}$, $f(w) = a^k b^l c^m$, $|w|_a = k$, $|w|_b = l$, $|w|_c = m$

Nápad: Označíme začátek slova speciálním znakem. Pak přesouváme všechny c před tento znak. Jakmile c dojdou, přesouváme b a nakonec a.

Nápad 2: projdeme všechna a na začátku slova, pokud najdeme b, pokusíme se to vyměnit za a někde dál. Pokud už tam žádné a není, přeskočíme b a pokračujeme b za c.

Přednáška
16.4.2019