$f: \{a,b,c\}^* \to \{a,b,c\}$, $f(w) = a^k b^l c^m$, $|w|_a = k$, $|w|_b = l$, $|w|_c = m$

nápad: označíme začátek slova speciálním znakem. Pak přesouváme všechny c před tento znak. Jakmile c dojdou, přesouváme b a nakonec a.

nápad 2: projdeme všechna a na začátku slova, pokud najdeme b, pokusíme se ho vyměnit za a někde dál. Pokud už tam žádné a není, přečteme b a pokračujeme brac.

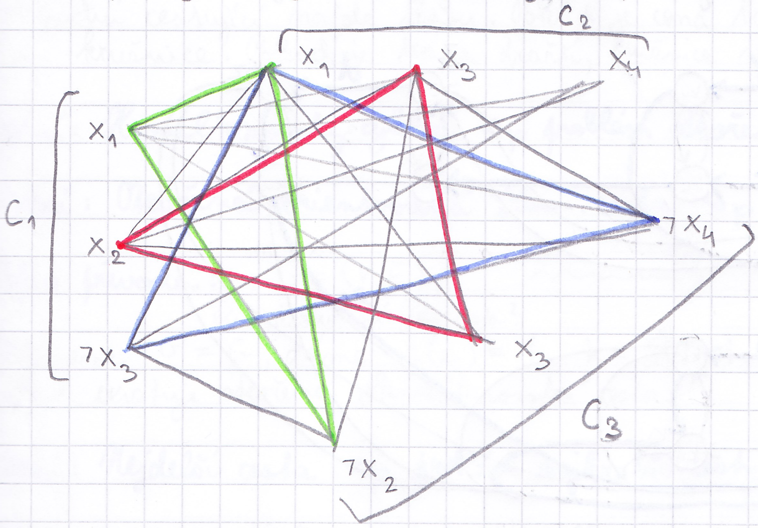
Tvrzení: 3CNF SAT $\triangleleft_p$ problém klik

Přednáška 16.4.2019

Problém klik: Je dán prostý neorientovaný graf $G=(V,E)$ bez smyček a číslo k. Chceme zjistit, zda v G existuje klika (úplný podgraf) o k vrcholech.

Nástin převodu: Je dána formule φ v CNF s klauzulemi $C_1, C_2 \cdots C_k$, kde každá klauzule má 3 literály. Pro každou klauzuli vytvoříme stranu grafu o 3 vrcholech, kde vrcholy jsou označeny literály.
Mezi vrcholy v různých hranách vedou hrany, pokud jeden literál není negací druhého.

$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$



Vrchol vybereme do kliky, pokud je příslušný literál v ohodnocení pravdivý.

Pravdivá ohodnocení
$x_1 = 1$, $x_2 = 0$
$x_2 = 1$, $x_3 = 1$
$x_1 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

Problém nezávislé množiny: Je dán prostý neorientovaný graf $G=(V,E)$ bez smyček a číslo k. Chceme zjistit, zda existuje nezávislá množina o k vrcholech. Množina vrcholů je nezávislá, jestliže mezi žádnou dvojicí vrcholů v množině nevede hrana.

Tvrzení: problém klik $\triangleleft_p$ problém nezávislé množiny

Nástin převodu: Vytvoříme doplňkový graf $G^d = (V, E^d)$, kde $\{u,v\} \in E^d$ iff $\{u,v\} \notin E$. Pak klika v G je nezávislá množina v G^d. Platí $|E| + |E^d| = (|V| \cdot (|V|-1))/2$.

Vrcholové pokrytí: Hledáme množinu vrcholů velikosti k tak, aby každá hrana měla aspoň jeden krajní vrchol v množině – např. chceme umístit na křižovatky ve vezírně lampy tak, aby všechny ulice byly aspoň na jednom konci osvětlené.

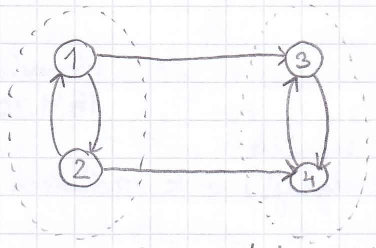
Tvrzení: problém nezávislé množiny $\triangleleft_p$ problém vrcholového pokrytí.

Nástin převodu: Máme graf $G=(V,E)$ a N je nezávislá množina. Pak $V \setminus N$ je vrcholové pokrytí. Obdobně, když B je vrcholové pokrytí, tak $V \setminus B$ je nezávislá množina.
Otázku nezávislé množiny o k vrcholech převedeme na vrcholové pokrytí o $|V| - k$ vrcholech.

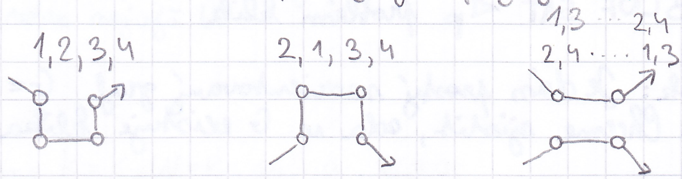
Problém Hamiltonovského cyklu: V orientovaném grafu G hledáme cyklus, který prochází všemi vrcholy.

Tvrzení: vrcholové pokrytí $\triangleleft_p$ existence Hamiltonovského cyklu

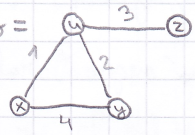
Náčrt převodu: Z vstupu $G=(V,E)$, k, kde G je neorientovaný, uděláme orientovaný $G'=(V',E')$
Vytvoříme si pro každou hranu z E konstrukci o 4 vrcholech a 6-ti hranách:

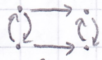


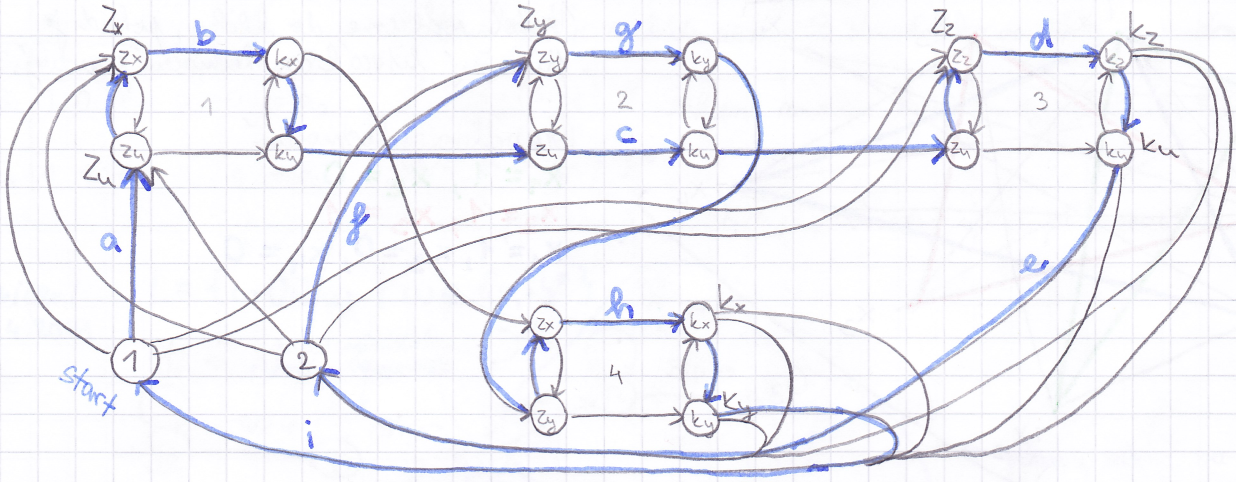
Máme 3 možné způsoby, jak podgraf projít



Nejde vstoupit do 1 a vyjít z 4 (nebylo by to Hamiltonovské)

Př: $G=$  , $k=2$. Vrcholové pokrytí určitě existuje, zvolíme si ho: $\{u, y\}$

Z každé hrany udělám konstrukci , vrcholy jsou začátky (z) a konce (k) pro oba krajní vrcholy hrany.



Mezi podgrafy přidám hrany tak, aby pro každý vrchol $v \in V$ vznikl řetízek hran z nějakého z_v do k_v; krajní vrcholy označíme Z_v a K_v.

Přidáme vrcholy $1, 2, \dots, k$, a napojíme je tak, aby $\forall a \in V,\ i \in 1..k$ vznikly hrany (i, Z_a), (K_a, i).

Na základě pokrytí $\{u, y\}$ najdu Ham. cyklus:

a) první vrchol pokrytí je u, využiju hranu $(1, Z_u)$
b) x není v pokrytí, proto projdu konstrukci skrz x delší cestou, pak vyjdu ven
c) y je v pokrytí, proto projdu kratší cestou a pryč
d) z není v pokrytí, opět to projdu celé
e) jsem v K_u, kouknu na druhý vrchol pokrytí, tj jdu $(K_u, 2)$
f) druhý vrchol je y, využiju hranu $(2, Z_y)$
g) u je v pokrytí, jdu zkratkou
h) x není v pokrytí, jdu delší cestou
i) žádné další vrcholy v pokrytí nejsou, vracím se do 1 $(k_y, 1)$

Kdybychom měli cyklus v grafu, tento cyklus musí procházet vrcholy $1 \dots k$, jinak by nešel vytvořit. Pak na cyklu leží hrany $(1, Z_a)$, $(2, Z_b)$ ..., zvolíme tedy pokrytí $B = \{a, b, \dots\}$.

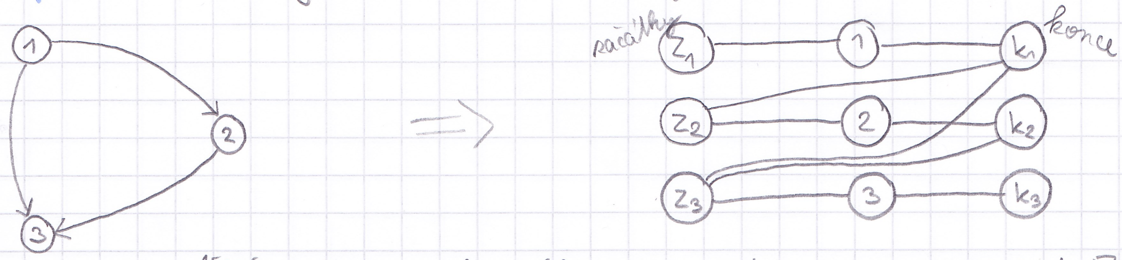
Jak se změní velikost grafu při převodu? $|V| = n$, $|E| = m$

$|V'| = k + 4m$ ← za každé k a 4 za každou hranu
$|E'| = \underbrace{2 \cdot k \cdot n}_{\text{hrany do/z } 1 \dots k} + \underbrace{6 \cdot m}_{\text{6 hran pro každou hranu}} + 2m - 2kn + 8m$

} to je polynomiální

Tvrzení: Hamiltonovský cyklus $\triangleleft_p$ Hamiltonovská kružnice

Náčrt převodu: Každý vrchol nahradíme trojicí vrcholů



Vidíme, že v grafu cyklus není, protože se nejde dostat do Z_1 a z K_3.

Tvrzení: Hamiltonovská kružnice $\triangleleft_p$ problém obchodního cestujícího (TSP)

Náčrt převodu: V grafu TSP zavedeme ceny hran podle původního grafu $G=(V,E)$ následovně:
$d(i,j) = 1$ iff $\{v_i, v_j\} \in E$
$d(i,j) = 2$ iff $\{v_i, v_j\} \notin E$
Obchodní cestující najde trasu. Pokud je cena trasy rovna počtu vrcholů, pak v G existuje Ham. kružnice. Pokud je trasa dražší, kružnice neexistuje.

Tvrzení: Hamiltonovský cyklus $\triangleleft_p$ problém otevřené Ham. cesty ← bude na úkol (ale já chyběla)

Tvrzení: Otevřená orientovaná Ham. cesta $\triangleleft_p$ hledání nejdelší cesty

Náčrt převodu: $G=(V,E)$ $\rightsquigarrow$ $G'=(V',E')$, $c: E' \to \mathbb{Z}$, k
existuje otevřená Ham. cesta? — existuje cesta délky aspoň k?
Vezmeme $G'=G$, dáme $c(e)=1$, $k=|V|-1$. Cesta být delší nemůže, a najdeme ji, pokud existuje otevřená Hamiltonovská cesta.

Tvrzení: Nejdelší cesta $\triangleleft_p$ problém nejkratší cesty

Náčrt převodu: $c'(e) = -c(e)$, $k' = -k$

Problém 3dimenzionálního párování: Máme 3 množiny X, Y, Z, všechny mají velikost n. Máme množinu S trojic prvků z $X \times Y \times Z$, otázka zní:
$\exists A \subseteq S$, $|A|=n$, if $(x,y,z) \neq (x',y',z')$ tak $x \neq x'$, $y \neq y'$, $z \neq z'$