přednáška 19. 2. 2019

Teorie algoritmů

Zápočet se dostává za účast na cvičeních

Zkouška je rozdělená na 3 písemné testy, 2 z toho na cvikách
1) časová náročnost, odhady
2) Turingovy stroje
3) zbytek látky

Testy ze semestru nelze opravit. Žádná z nich nebude v písemné zkoušce, ale na ústní být může.

Na přednáškách se občas zadávají drobné úkoly. Ty je v 5ti lidech nepovinné řešit a na další přednášce odevzdat za body

Algoritmus: proces, tj posloupnost kroků. Přijímá hodnoty (zadání) a výstupem jsou taky hodnoty (řešení)

Problém, Úloha U: specifikace vztahu zadání a řešení

Řekneme, že alg. řeší úlohu, pokud pro každé zadání vrátí správné řešení

Analýza časové složitosti algoritmu (asymptotické složitosti)
- nejhorší případ: složitost pro nejnepříznivější vstupní data
- průměrný případ (na PALech se tomu říkalo amortizovaný): průměr přes různá data
- amortizovaný: složitost jednoho kroku

Složitosti:

O: Omikron, velké O.

$f(n) \in O(g(n))$ iff $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

Ω: Omega

$f(n) \in \Omega(g(n))$ iff $\dots\dots\dots\ f(n) \geq c \cdot g(n)\ \dots\dots\dots$

Θ: Theta

$f(n) \in \Theta(g(n))$ iff $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

neboli $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

o: malé o

prokazatitko, ostrá nerovnost

$f(n) \in o(g(n))$ iff $\boxed{\forall} c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \boxed{<} c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

ω: malá omega

$f(n) \in \omega(g(n))$ iff $\dots\dots\dots\ f(n) > c \cdot g(n)\ \dots\dots\dots$

Když $f(n) \in o(g(n))$, pak nutně $f(n) \in O(g(n))$, protože o je "přísnější" než O

Tvrzení: $f(n) \in \omega(g(n))$ iff $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, f, g nejsou nulové

Dk: → to znamená, že ke každému okolí nekonečna existuje n_0, že pro $\forall n > n_0$ leží ta fce v okolí nekonečna (tedy je větší než nějaké k).

To lze zapsat jako: $\forall k > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{f(n)}{g(n)} > k$

↖ ostře, tedy otevřené okolí

Přejmenováním k na c a úpravou $\frac{f(n)}{g(n)} > k \Rightarrow f(n) > k \cdot g(n)$ získám přímo definici pro ω ■

Pokud se na složitosti díváme jako na relace, pak platí:

tranzitivita u: $O, \Omega, \Theta, o, \omega$

reflexivita u: O, Ω, Θ

symetrie u: Θ

Příklad: pro $\forall a>1, b>1$ platí: $\log_a(n) \in \Theta \log_b(n)$

$k = \log_a(n) \iff a^k = n$ [logaritmus je exponent]

$a^k = n$ / ln na obě strany
$\ln(a^k) = \ln(n)$
$k \cdot \ln(a) = \ln(n)$
$\log_a(n) \cdot \ln(a) = \ln(n)$

$b^k = n$
$\vdots$
$k \cdot \ln(b) = \ln(n)$
$\log_b(n) \cdot \ln(b) = \ln(n)$

$$\log_a(n) \cdot \ln(a) = \log_b(n) \cdot \ln(b)$$
$$\log_a(n) = \log_b(n) \cdot \underbrace{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}}$$ ← kladná konstanta

Zvolím $c_1 = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = c_2$, a pak pro $n > 1$: $c_1 \cdot \log_b(n) \le \log_a(n) \le c_2 \cdot \log_b(n)$ ■

Značení logaritmů: $\log_e \to \ln$, $\log_{10} \to \log$, $\log_2 \to \lg$

Gaussova věta: $\forall n > 1$: $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$$\frac{n}{2} \cdot \lg(n) \le \lg(n!) \le n \cdot \lg\left(\frac{n+1}{2}\right) \le n \cdot \lg(n)$$

← poslední nerovnost platí, protože $\frac{n+1}{2}$ je vždě menší než n (když $n > 1$, což je)

Dk: 1 Ukážeme, že $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

– využijeme geometrického průměru, pro který platí, že nepřeroste aritmetický

$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \iff 2\sqrt{ab} \le a+b \iff 0 \le a - 2\sqrt{ab} + b \iff 0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$(n!)^2 = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 =$$
$$= n \cdot 1 \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot (n-2) \cdot 3 \cdots 3(n-2) \cdot 2(n-1) \cdot 1 \cdot n =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (n-i+1) \cdot i$$

← "Gaussova" úprava, je to stejný trik, jakým jde rychle sečíst čísla od 1 do 100

$$n! = \sqrt{\prod (n-i+1) \cdot i} = \prod \sqrt{(n-i+1) \cdot i}$$

Tím jsme získali produkt n geometrických průměrů

Ze vztahu pro geometrický i aritmetický průměr výše získáme:

$$\sqrt{(n-i+1) \cdot i} \le \frac{(n-i+1)+i}{2} = \frac{n+1}{2}$$

V produktu se ale členy násobí n-krát, proto

$$n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

2 Ukážeme, že $n! \ge n^{\frac{n}{2}}$

$$(n-i+1) \cdot i - n = ni - i^2 + i - n = ni - n - i^2 + i = n(i-1) - i(i-1) = (n-i)(i-1)$$

$\left.\begin{array}{l}(n-i) \\ (i-1)\end{array}\right\}$ je nezáporné, protože i jde od 1 do n, a tedy — máme $(n-i+1) \cdot i - n \ge 0$, tedy $(n-i+1) \cdot i \ge n$

Z toho víme, že $(n!)^2 \ge n^n$, tedy $n! \ge \sqrt{n^n}$, tedy $n! \ge n^{\frac{n}{2}}$ ■

Věta: Máme nezápornou fci $f(n)$, která je neklesající. Jestliže $f(\frac{n}{2}) \in \Theta f(n)$, pak:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n))$$

Např. pro $f(n) = \lg(n)$, $n \geq 0$

$$\lg(n!) = \lg(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \sum_{i=1}^{n} \lg(i)$$

$$\lg\left(\frac{n}{2}\right) = \lg(n) - \lg(2) = \lg(n) - 1$$

Chci $\lg(\frac{n}{2}) \in \Theta \lg(n)$

Omezení shora: $\lg\left(\frac{n}{2}\right) \leq \lg(n)$ ✓

Omezení zdola: $\frac{1}{2} \cdot \lg(n) \leq \lg\left(\frac{n}{2}\right) = \lg(n) - \lg(2) = \lg(n) - 1$

tedy chci $\frac{1}{2}\lg(n) \leq \lg(n) - 1$

$$-\frac{1}{2}\lg(n) \leq -1 \quad /\cdot(-2)$$

$$\lg(n) \geq 2 \qquad \text{což platí pro } n \geq 4$$

Z toho víme, že $\lg(\frac{n}{2}) \in \Omega \lg(n)$ pro $c = \frac{1}{2}$, $n_0 = 4$ ✓

↳ Předpoklad věty pro $f(n) = \lg(n)$ je splněn, větu můžeme využít, takže víme, že

$$\lg(n!) \in \Theta\, n \cdot \lg(n)$$

Důkaz: $f(n)$ je neklesající, můžeme tedy říct, že $\underbrace{f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(n)}$

Proto určitě platí, že: $\sum_{i=1}^{n} f(i) \leq n \cdot f(n)$

a z toho přímo plyne $\sum f(i) \in O(n \cdot f(n))$

Využijeme předpoklad, že $f(\frac{n}{2}) \in \Theta f(n)$, tedy $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: c f(n) \leq f(\frac{n}{2})$

$$\sum_{1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \ldots + f\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + f(n) \geq \sum_{\frac{n}{2}}^{n} f(i) = f\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + f(n)$$

↑ hodnota se odebráním poloviny sčítanců nezvětší, protože všechny jsou kladné

Víme, že $f(\frac{n}{2})$ není menší než $c \cdot f(n)$, takže $\sum_{n/2}^{n} f(i) \geq \frac{n}{2} \cdot c \cdot f(n) = \frac{c}{2} \cdot n f(n)$

Našli jsme $c' = \frac{c}{2}$, pro které platí, že $\sum_{1}^{n} f(i) \geq c' \cdot n \cdot f(n)$,
tedy $\sum f(i) \in \Omega(n \cdot f(n))$. Protože fce leží v O i v Ω, nutně leží i v Θ. ■

Rozhodněte, zda platí $3^{\frac{n}{2}} \in \Theta\, 3^n$, tedy jestli je splněn předpoklad věty výše

① $3^{\frac{n}{2}} \in O(3^n)$ Zvolím $c = 1$, chci $3^{\frac{n}{2}} \leq 3^n$ $\quad 3^{n-\frac{n}{2}} \geq 1 \quad \frac{n}{2} \geq \log_3(1) \quad \frac{n}{2} \geq 0$
platí to pro $n \geq 0$, tedy $3^{\frac{n}{2}} \in O(3^n)$

② $3^n \leq c \cdot 3^{\frac{n}{2}} \quad 3^{n-\frac{n}{2}} \leq c \quad 3^{\frac{n}{2}} \leq c \quad \frac{n}{2} \leq \log_3(c) \quad n \leq \overbrace{2 \cdot \log_3(c)}^{\text{konstanta}}$

Chceme, aby nerovnost platila pro všechny $n \geq n_0$, ale v tomto případě je n shora omezené konstantou $2 \cdot \log_3(c)$. Proto neplatí $3^{\frac{n}{2}} \in \Omega(3^n)$

Rozhodněte, zda platí $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in \Theta 3^n$

① $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in \Omega(3^n)$ Zvolím $c = 1$ $\sum 3^i \geq 1 \cdot 3^n$

$3^1 + 3^2 + \dots + 3^n \geq 3^n$

Tohle bude zjevně platit, protože všechny sčítance jsou kladné.

② Indukcí přes n ukážeme, že $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \sum 3^i \leq c \cdot 3^n \ \forall n \geq n_0$

1) $n = 1$: $\sum 3^i \leq c \cdot 3^1$ $3 \leq c \cdot 3$, platí pro libovolné $c \geq 1$

2) Předpokládáme, že $\sum^{n} 3^i \leq c \cdot 3^n$

Chceme, aby $\sum^{n+1} 3^i \leq 3^{n+1}$

$$\sum^{n+1} 3^i = \underbrace{\sum^{n} 3^i + 3^{n+1} \leq c \cdot 3^n}_{\text{indukční předpoklad}} + 3^{n+1} = \underset{\text{vytknu}}{c \cdot 3^{n+1}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right)}_{\text{chci, aby tohle bylo menší než 1}} \leq c \cdot 3^{n+1}$$

Aby platila poslední nerovnost, musí platit $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \leq 1$.

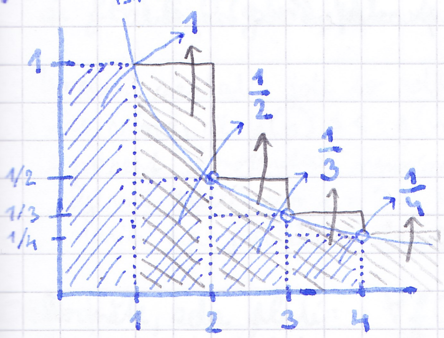
$1/3 + 1/c \leq 1$ $/ \cdot 3c$

$c + 3 \leq 3c$ $/ - c$

$3 \leq 2c$

$c \geq 1.5$ $\Rightarrow$ Pokud zvolíme $c = 2$, platí oba kroky indukce ■

$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ Jak můžeme omezit klesající fci, např. tuhle?



Hodnotu $f(n)$ si lze představit jako součet ploch obdélníčků kreslených perem, tedy lze omezit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \int_0^n \frac{1}{x}\,dx$$

To si upravíme na $1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$, aby se s tím lépe počítalo.

Fci lze omezit obdélníčky kreslenými tužkou

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$[\ln(x)]_1^{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + [\ln(x)]_1^{n}$$

$$\ln(n+1) - \overset{=0}{\ln(1)} \leq \sum \frac{1}{i} \leq 1 + \ln(n) - \overset{=0}{\ln(1)}$$

$$\ln(n) \leq \sum \frac{1}{i} \leq 1 + \ln(n) \leq 2 \cdot \ln(n)$$

Najděte horní odhad $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{3^i} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{1\times} + \underbrace{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}}_{2\times} + \underbrace{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2}}_{3\times} + \dots + \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{n\times}$

- Nabízí se omezit to shora $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i}$, ale chtěli bychom něco lepšího
- Předchozí odhad můžeme rozepsat na $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3^i} + \dots$, a když členy upravíme podle vztahu pro posloupnost, máme $\frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/3^2}{1-1/3} + \frac{1/3^3}{1-1/3} + \dots$ napíšeme jako novou sumu: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1/3^i}{2/3} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1/3}{1-1/3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1/3}{2/3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

cvičení
20.2.2019

V tomto kurzu budeme pracovat s funkcemi: $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

Dokažte: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$

$f(n) \in \Theta(g(n)) \overset{\text{z definice}}{\Rightarrow} \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$ platí $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$,

$1 \cdot f(n) \leq c_2 g(n)$ $\quad$ $c_1 g(n) \leq 1 \cdot f(n)$ $\quad$ Zvolíme: $d_1 = 1/c_2$ $\quad$ $n_0' = n_0$

$1/c_2 \cdot f(n) \leq g(n)$ $\quad$ $g(n) \leq 1/c_1 f(n)$ $\quad$ $d_2 = 1/c_1$

Tím jsme našli $d_1, d_2 > 0$, pro které $\exists n_0' \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d_1 f(n) \leq g(n) \leq d_2 f(n)$.
Vidíme, že $g(n) \in \Theta f(n)$

Dokažte tranzitivitu O: $f \in O(g)$, $g \in O(h)$

$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1, n_1 \dots f(n) < c_1 \cdot g(n) \ \forall n > n_1$

$g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_2, n_2 \dots g(n) < c_2 \cdot h(n) \ \forall n > n_2$

Zvolíme $c = c_1 \cdot c_2$, $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pak $\forall n > n_0 : f(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot h(n)$

Najděte dvojici fcí f, g, pro které platí $f \in O(g)$, ale neplatí $f \in o(g)$

Například $f(n) = n$, $g(n) = n$.

- platí $f \in O(g)$: Ano, pro $c = 1$, $n_0 = 1$
- neplatí $f \in o(g)$: Musíme to vyvrátit. Najdeme nějaké c, pro které to neplatí
  $c = 1$, pak $f(n) < g(n)$ neplatí pro žádné n.

Rozhodněte, zda platí:

$2^{\frac{n}{2}} \in \Theta(2^n)$

- neplatí, protože nejde najít c, aby $c \cdot 2^n \leq 2^{\frac{n}{2}}$ pro $\forall n > n_0$

$c \cdot 2^n \leq 2^{\frac{n}{2}} \quad / : 2^{\frac{n}{2}}$

$c \cdot 2^{\frac{n}{2}} \leq 1 \quad / : c$

$2^{\frac{n}{2}} \leq \frac{1}{c} \quad / \lg$

$n/2 \leq \lg(1/c)$

$\to n/2 \leq \lg(1/c) \quad / \cdot 2$

$n \leq 2 \cdot \lg(1/c)$

Vidíme, že n je shora omezené konstantou závislou na c, a proto nelze zvolit takové c, pro které by n mohlo růst až do ∞.

- alternativní postup

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n/2}} = 0.$$

Podle vztahů z přednášky (níže) vidíme, že to neplatí.

Z přednášky: $f(n) \in \Theta(g(n))$ iff $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$\dots\dots O \dots\dots\dots\dots\dots\dots 0$

$\dots\dots \Omega \dots\dots\dots\dots\dots\dots \infty$

Rozhodněte, zda platí:

$2^{n+1} \in \Theta(2^n)$ $\quad$ Ano, platí. Zvolíme $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 2$, $n_0 = 1$, a pak
$\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} = 2^n \leq 2^n$, a $2^n \leq 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$

Jaké fce porostou stejně rychle? [1] 4^n, [2] $n!$, [3] $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$, [4] e^n, [5] $\ln(n!)$, [6] $\ln(\ln(n))$,
[7] $n \cdot \lg(n)$, [8] $\ln(n^{\ln(n)})$

Úprava fce pomocí e^x:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

3: $n^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^{\ln\left(n^{\frac{1}{\ln(n)}}\right)} = e^{\frac{1}{\ln(n)} \cdot \ln(n)} = e$

5: $\ln(n!) \in \Theta\ n \cdot \ln(n)$ ← to nám říká Gaussova věta

8: $\ln\left(n^{\ln(n)}\right) = \ln(n) \cdot \ln(n) = \ln(n)^2$

Výsledky:
- nejpomaleji poroste konstanta, tedy $e = n^{\frac{1}{\ln(n)}}$, číslo 3
- druhá bude $\ln(\ln(n))$, číslo 8
- třetí bude $\ln(n)$, ta nebyla v zadání, ale je vhodné ji zařadit
- čtvrtá bude $\ln(n)^2$, číslo 6
- pátá bude lineární fce, n, ta taky není v zadání
- šestá bude $n \cdot \ln(n)$ a $\ln(n!)$, čísla 5 a 7
- sedmá bude exponenciála e^n, číslo 4
- osmá bude 4^n, protože $e < 4$, číslo 1
- nejrychleji poroste $n!$, číslo 2

Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé: Jestliže pro dvě nezáporné fce platí, že $f(n) \in O(g(n))$, pak taky $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

Tvrzení neplatí, jde to odhadnout z toho, že konstanta c se vkládá na různá místa. Jen víme, že $f(n) \le c \cdot g(n)$, ale chtěli bychom ukázat $2^{f(n)} \le c \cdot 2^{g(n)}$, kde si se exponent konstantou nenásobí. Protipříklad je např.: $f(n) = n$, $g(n) = \frac{n}{2}$. Zjevně platí pro $c = 2$: $n \le 2 \cdot \frac{n}{2} = n$. $2^n \le 2^{n/2}$ ale platit nebude, už jsme to vyvrátili na předchozí straně.

Rozhodněte, zda platí: $\forall f(n): f(n) \in O(f(n^2))$

Neplatí, například pro $f(n) = \frac{1}{n}$, protože $\frac{1}{n^2}$ klesá ještě rychleji. Aby platilo, musela by být f neklesající

Porovnejte růst fcí f, g: $f(n) = n^{\ln(n)}$, $g(n) = \lg(n)^2$, $f(n) = e^{\ln\left(n^{\ln(n)}\right)} = e^{\ln(n) \cdot \ln(n)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\ln(n)^2}}{\lg(n)^2} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \underline{\underline{\infty}}$

↳ $\ln(n)^2$ a $\lg(n)^2$ rostou asymp. stejně

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, tak $f(n) \in \Omega\, g(n)$

Věta: Master theorem: Jsou dána $a, b \in \mathbb{N}$, $a \ge 1$, $b > 1$ a nezáporná fce $f(n)$. Předpokládejme, že fce $T(n)$ je dána na $\mathbb{N}$ rekurentním vztahem: přednáška 26.2.2019

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$ **kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ nebo $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$.**

1) **Jestliže $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$. Pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$**
2) **Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg(n))$**
3) **Jestliže $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a jestliže $a f(\frac{n}{b}) \le c \cdot f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ pro všechna n dostatečně velká, pak $T(n) \in \Theta(f(n))$**

Př: $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n^2$

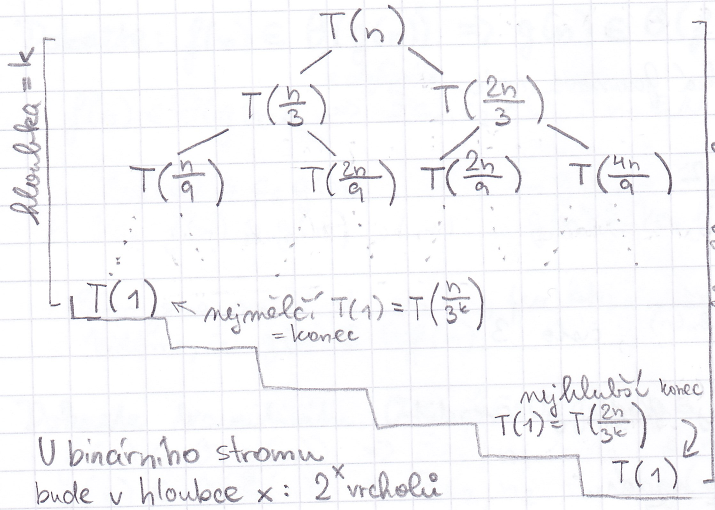
$\log_b a = \log_4 3 \doteq 0.79$. Mohli bychom použít část 3):

$f(n) \in \Omega(n^{0.79 + 0.01})$, to je splněno, protože $n^2 \in \Omega(n^{0.8})$

$a f(\frac{n}{b}) \le c f(n) \iff 3 \cdot \frac{n^2}{16} \le cn^2$, to je splněno pro $c = \frac{3}{16}$, $\frac{3}{16} < 1$

Z toho plyne, že $T(n) \in \Theta(n^2)$

Př: $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$ ← nemůžeme použít Master Theorem



U binárního stromu bude v hloubce x: 2^x vrcholů

Úlohu si rozkreslíme do stromu, zajímá nás nejprve, jak je hluboký.

Nejmenší hloubka bude ve větvi úplně vlevo, doleva se totiž posílá vždy méně dat. Naopak nejhlouběji bude T(1) v pravé větvi. Hloubka mezi nimi schodovitě roste

Hloubka k: $\frac{n}{3^k} = 1 \Rightarrow n = 3^k \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \log_3 n$

Hloubka l: $\frac{2n}{3^l} = 1 \Rightarrow 2n = 3^l \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \left(\frac{3}{2}\right)^l \Rightarrow l = \log_{\frac{3}{2}} l$

[Dolní odhad velikosti stromu: spočítám ho v té nejmenší části, tedy z hloubky k

$$2^k = 2^{\log_3 n} = 3^{\log_3\left(2^{\log_3 n}\right)} = 3^{\log_3 n \cdot \log_3 2} = 3^{\log_3\left(n^{\log_3 2}\right)} = n^{\log_3 2}$$

Přitom $\log_3 2 \doteq 0.63$, tedy je to menší než 1, a můžeme to shora omezit lin fcí n.

Kromě toho musíme zohlednit i $f(n) = n$ v předpisu. Operace s náročností n se provede po tom, co jsou hotové obě dílčí části $T(n/3)$ a $T(n \cdot 2/3)$, tedy ~~x~~ na každé úrovni

$$n \cdot k = n \cdot \log_3 n$$

$$T(n) \in \Omega\left(n \cdot \log_3(n) + n\right) = \Omega\left(n \cdot \log_3(n)\right) = \underline{\underline{\Omega\left(n \cdot \lg(n)\right)}}$$

[Horní odhad: Počítá se podobně z hloubky l:

$2^l = \dots = n^{\log_{\frac{3}{2}} 2}$ ← tohle už nemůžu omezit lin. fcí, protože $\log_{\frac{3}{2}} 2 > 1$

$$n \cdot l = \dots = n \cdot \log_{\frac{3}{2}} 2$$

$T(n) \in O\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 2} + n \cdot \log_{\frac{3}{2}}(n)\right)$ Chtěli bychom přesnější odhad. Intuice říká, že druhý člen poroste rychleji, dokážeme to indukcí.

Náš odhad musíme dokázat: $T(n) \leq d \cdot n \lg(n)$ pro nějaké $d > 0$, $\forall n > n_0$
Budeme postupovat silnou indukcí přes n.

1) Volíme d tak, aby $T(2) \leq d \cdot 2 \cdot \lg(2) = d \cdot 2 \cdot 1 = 2d$
2) Předpokládáme, že $T(m) \leq d \cdot m \cdot \lg(m)$ pro $\forall m < n$

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor\right) + n \leq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n \leq$$

$$\leq \left[d \cdot \frac{n}{3} \cdot \lg\left(\frac{n}{3}\right)\right] + \left[d \cdot \frac{2n}{3} \cdot \lg\left(\frac{2n}{3}\right)\right] + n =$$

$$= d\frac{n}{3} \cdot \left(\lg(n) - \lg(3)\right) + d\frac{2n}{3} \cdot \left(\lg(2) + \lg(n) - \lg(3)\right) + n =$$

$$= \underbrace{\frac{dn}{3}\lg(n) + \frac{2dn}{3}\lg(n)}_{dn \cdot \lg(n)} - \frac{dn}{3}\lg(3) - \frac{2dn}{3}\lg(3) + \frac{2dn}{3} \cdot \lg(2) + n =$$

$$= dn \cdot \lg(n) - dn \cdot \lg(3) + \frac{2dn}{3} \cdot 1 + n =$$

$$= dn \cdot \lg(n) + n\left(-d \cdot \lg(3) + \frac{2d}{3} + 1\right) \overset{\text{chceme}}{\leq} dn \cdot \lg(n)$$

Aby ta nerovnost mohla platit, musí být obsah závorky menší než 0.

$$-d\lg(3) + \frac{2d}{3} + 1 = \frac{d}{3}\Big(-3\lg(3) + 2\Big) + 1$$

- $\lg(3) > 1$, proto $2 - 3\cdot\lg(3) < -1$
- pokud $d/3 > 1$, tedy $d > 3$ dostaneme $\frac{d}{3}(2 - 3\lg(3)) + 1 \leq 0$

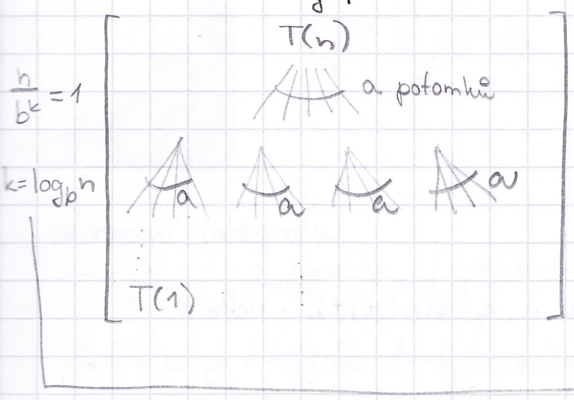
Zvolíme-li $d > 3$, vidíme, že $T(n) \leq d\cdot n\lg(n)$. Fci $T(n)$ proto můžeme omezit zdola fcí $n\cdot\lg(n)$

$T(n) \in O(n\cdot\lg(n))$, a díky dolním odhadu: $\underline{\underline{T(n) \in \Theta(n\cdot\lg(n))}}$

přestávka

Náznak důkazu Master Theorem

Lemma 1: $T(n) = \sum_{j=1}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) + h(n)$, kde $h(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$



$a \quad f\left(\frac{n}{b}\right)$ ← v j-té vrstvě je náročnost $a^j\cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right)$

$a^2 \quad f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

$a^3 \quad f\left(\frac{n}{b^3}\right)$

$\vdots$

$a^k = a^{\log_b n} = \dots = n^{\log_b a}$

Náročnost hladiny s listy: $T(1)\cdot n^{\log_b a}$, to je vlastně ta fce $h(n)$

Náročnost ostatních hladin: $\sum_j^{(\log_b n)-1} a^j\cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right)$. Suma končí dřív, protože poslední vrstvu už jsme spočítali zvlášť. ↑ budeme tomu říkat $\underline{g(n)}$

Lemma 2: Pro $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j\cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right)$ platí:

1) Je-li $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$, pak $g(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$
2) Je-li $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $g(n) \in \Theta(n^{\log_b a}\cdot\lg(n))$
3) Je-li $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$ a je-li $af(n/b) \leq c\cdot f(n)$ pro $c < 1$, pak $g(n) \in \Theta(f(n))$

1) $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$, to znamená, že $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ f(n) \leq c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}$

Chci, aby $f\left(\frac{n}{b^j}\right) \leq c\cdot\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon}$. To mi bude platit pro $\forall n \geq n_0\cdot b^j$ $\left(\frac{n}{b^j} \geq n_0\right)$

$$g(n) = \sum_{j=0}^{k-1} a^j\cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right) \leq \sum_{j=0}^{k-1} a^j\cdot c\cdot\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon} = \sum_{j=0}^{k-1}\left(a^j\cdot\frac{1}{b^{j\log\dots}}\right)\left(\overset{\text{nezdusí ná j}}{c n^{\log\dots}}\right) =$$

$$= c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{a^j\cdot b^{\varepsilon j}}{b^{(\log_b a)j}}\right) = c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{a\cdot b^{\varepsilon}}{b^{\log_b a}}\right)^j = c\cdot n^{\log\dots}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{a\cdot b^{\varepsilon}}{a}\right)^j =$$

$$= c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} b^{\varepsilon j} = c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot\left[\frac{(b^{\varepsilon})^{\log_b n} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right] < c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot\frac{b^{\varepsilon\log_b n}}{b^{\varepsilon} - 1} =$$

$$= c\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot\frac{1}{b^{\varepsilon} - 1}\cdot\left(\overbrace{b^{\log_b n}}^{=n}\right)^{\varepsilon} = \frac{c}{b^{\varepsilon} - 1}\cdot n^{\log_b a - \varepsilon}\cdot n^{\varepsilon} = \underbrace{\frac{c}{b^{\varepsilon} - 1}}_{c'}\cdot n^{\log_b a}$$

Našli jsme c', kterým jsme omezili $g(n)$ shora fcí $n^{\log_b a}$.

2) $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ z toho obdobně jako v 1) získáme $f(\frac{n}{b^j}) \in \Theta((\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$

$$g(n) = \sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \le c_2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} = c_2 \cdot n^{\log_b a} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^j}{b^{j \log_b a}} =$$

$$= c_2 \cdot n^{\log_b a} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \Bigg(\frac{a}{\underbrace{b^{\log_b a}}_{=a}}\Bigg)^j = c_2 n^{\log_b a} \cdot \sum_{j=1}^{\log_b n - 1} \underbrace{1^j}_{=1\ \forall j} = \underbrace{c_2 n^{\log_b a}}_{\text{konstanta}} \cdot \log_b n$$

Spodní omezení se dělá stejně. Protože základ logaritmu neovlivní složitost, získáme, že $g(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg(n))$

cvičení
27.2.2019

Porovnejte fce $f = n^{\ln(n)}$, $g = (\lg n)^n$

$$f(n) = e^{\ln(n^{\ln(n)})} = e^{\ln(n) \cdot \ln(n)} = e^{\ln(n)^2}$$

$$g(n) = e^{\ln(\lg(n)^n)} = e^{n \cdot \ln(\lg(n))}$$

Jaké fce nelze porovnat pomocí O, Ω, Θ?

– chceme, aby se fce „vlnila". Nešlo by porovnat třeba n a $\sin(n)+2$, nebo:

$f(n) = n$

$$g(n) = \begin{cases} \log(n) & \text{pro sudé } n \\ n^2 & \text{pro liché } n \end{cases}$$

Jak rychle poroste $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}$? Najděte $g(n)$, aby $f(n) \in \Theta g(n)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{\text{první prvek řady}}{1 - \text{koeficient}} = \frac{1/5}{1 - 1/5} = \frac{1}{4}$$ ⇐ shora omezíme konstantou $\frac{1}{4}$

Zdola můžeme omezit konstantou $\frac{1}{5}$, tedy $g(n) = 1$, $c_1 = \frac{1}{5}$, $c_2 = \frac{1}{4}$

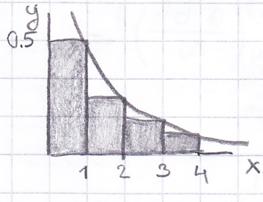
Jak rychle poroste $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 2$$

Takže to omezíme konstantou, $g(n) = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 2$

Jak rychle poroste $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ Tohle omezíme integrálem

omezení shora



od 0 do 1 by se integrovalo špatně, první obdélníček proto nahradíme za přesnou velikost

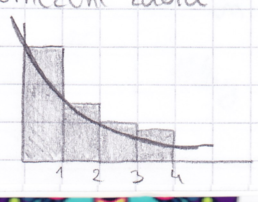
$$f(n) \le \int_0^n \frac{1}{2x}\,dx \approx 0.5 + \int_1^n \frac{1}{2x}\,dx = 0.5 + \left[\frac{\ln(x)}{2}\right]_1^n =$$

pro $n \ge 3$ $(n \ge e \doteq 2.7\ldots)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\ln(n)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\ln(n)}{2} \le \ln(n)$$

omezení zdola

$$f(n) \ge \int_1^{n+1} \frac{1}{2x}\,dx = \left[\frac{\ln(x)}{2}\right]_1^{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = \frac{\ln(n+1)}{2} \ge \frac{1}{2} \cdot \ln(n)$$



$g(n) = \ln(n)$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $n_0 = 3$

Rozhodněte, zda pro fci $f(n)=n^3$ platí $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n))$

– podle věty z přednášky vztah platí, pokud f je nezáporná neklesající, a $f(\frac{n}{2}) \in \Theta f(n)$.

1) n^3 je nezáporná a neklesající ✓

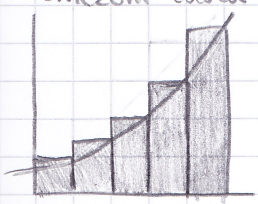
2) $(\frac{n}{2})^3 \in \Theta(n)^3$? Ano, tohle je taky splněno, $\frac{1}{8}n^3 \le (\frac{n}{2})^3 \le n^3$ ✓

Předpoklady jsou splněny, proto $\sum_{k=1}^{n} n^3 \in \Theta(n \cdot n^3) = \Theta(n^4)$ ✓

Omezte $\sum_{k=1}^{n} 5^k$ Větu výše použít nemůžeme, protože $5^{\frac{n}{2}} \notin \Theta(5^n)$

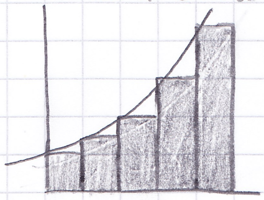
Na přednášce jsme to dělali indukcí, teď to uděláme integrálem

omezení zdola



$$\sum_{k=1}^{n} 5^k \ge \int_0^n 5^k \, dk$$

omezení shora



$$\sum_{k=1}^{n} 5^k \le \int_1^{n+1} 5^k \, dk$$

odvození integrálu

$$(5^x)' = \left(e^{\ln(5^x)}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln(5)}\right)' = e^{\ln(5)\cdot x} \cdot \ln(5) = e^{\ln(5^x)} \cdot \ln(5) = 5^x \cdot \ln(5)$$

derivace je integrál druhým směrem, proto $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln(5)} + c$

Omezení zdola: $\int_0^n 5^k dk = \left[\frac{5^k}{\ln(5)}\right]_0^n = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \left(5^n - \underbrace{5^0}_{=1}\right) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot (5^n - 1) \ge \overbrace{\frac{1}{5\ln(5)}}^{c_1} \cdot 5^n$

Omezení shora: $\int_1^{n+1} 5^k dk = \frac{1}{\ln(5)}\left(5^{n+1} - 5^1\right) \le \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^{n+1} = \underbrace{\frac{5}{\ln(5)}}_{c_2} \cdot 5^n$

$g(n) = 5^n$, $c_1 = \frac{1}{5\ln(5)}$, $c_2 = \frac{5}{\ln(5)}$

Co je špatně na tomto důkazu? Pro fci $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ platí $f(n) \in O(n)$

indukcí přes n: 1) $n=1$, platí $1 \in O(n)$

2) předpokládejme, že $f(n) \in O(n)$

pak $f(n+1) = \sum^{n+1} i = \sum^{n} i + n+1 \in O(n) + O(n) = O(2n) = O(n)$

Musíme rozepsat $O(n)$ jako vztah pro c (z definice), úpravou vyjde, že c neustále roste

Chyba je patrná, protože pro sumu známe vztah $\sum^{n} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \in \Theta(n^2)$

Pomocí Master Theorem omezte $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \cdot \log(n)$

$a=4$, $b=2$, $\log_b a = 2$, zkusíme část 1)

? $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{2-\varepsilon})$?

Zvolíme $\varepsilon = 0{,}5$, pak chceme $n \lg(n) \le c\, n^{1.5}$ $\iff \dots \iff$ $\lg(n) \le c \cdot \sqrt{n}$

odmocnina je pořád x^a, takže roste rychleji než lg, v tomto případě pro $c=1$, $n_0=4$

Předpoklad je splněn, proto $T(n) \in \Theta(n^2)$

Omezte následující funkce:

$\sum_{i=1}^{n}(7i^3 - 30i + 16) \approx \sum(i^3)$, a o tom už víme, že $\in \Theta(n^4)$

$\sum_{i=1}^{n}\left(8\frac{i}{2^i}\right) \approx 8 \cdot \sum \frac{i}{2^i}$, a o tom už víme, že $\in \Theta(1)$

$\sum_{i=1}^{n}(5^i + i^{100}) \approx \sum 5^i$, a o tom už víme, že $\in \Theta(5^n)$

DÚ $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i^{1.1}}\right) \right.$ omezení shora: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{1.1}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \leq \int_0^n i^{-2}\, di = 1 + \int_1^n i^{-2}\, di =$

$= 1 + \left[-i^{-1}\right]_1^n = 1 + \left[-n^{-1} + 1^{-1}\right] = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ ← tohle bude vždy záporné

omezení zdola: protože sčítáme, stačí $\sum i^{-1.1} \geq 1$, tedy $g(n) = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $f(n) \in \Theta(g_n)$