TALLER 1
Posición y Orientación

Ejercicios

1. Utilizando el hecho que $v_1 \cdot v_2 = v_1^T v_2$, demuestre que el producto punto de dos vectores libres no depende de los marcos de referencia seleccionados.

2. Responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué es una base?

   b) ¿Qué es un sistema de coordenadas?

3. Halle la combinación lineal que genera el elemento w en términos de los elementos del conjunto S dado, para los casos a y b.

   a) $w = [0, -4]', S = \{[1, -3]', [2, -2]'\}$

   b) $w = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

4. En $\mathbb{R}^3$ se denomina base canónica a la formada por los vectores $\hat{\boldsymbol{\imath}} = [1\ 0\ 0]'$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}} = [0\ 1\ 0]'$, $\hat{\boldsymbol{k}} = [0\ 0\ 1]'$.

   - Expresar el vector $\boldsymbol{d} = [4, \quad 2, \ -1]'$, como la combinación lineal de los vectores de la base canónica.
   - Calcular la proyección del vector sobre cada uno de los vectores de la base canónica.
   - Calcular el coseno del ángulo entre el vector $\boldsymbol{d}$ y los vectores de la base canónica.
   - En Matlab realice las gráficas de la base canónica, el vector $\boldsymbol{d}$ y las proyecciones calculadas.

5. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -15 & 24 & -2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 8 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

   Realice las siguientes operaciones (En caso de que alguna no sea posible de realizar, indique la razón:

   a) $(A \cdot B)^t$

   b) $D^t \cdot A^t$

   c) $B^t[(B^t \cdot B)^{-1}]B^t$

   d) $B \cdot C - C \cdot B$

   e) $B \cdot C - C \cdot B$

   f) $[B^t \cdot (2B)] \cdot [C \cdot B]$

6. Sea $\boldsymbol{R_1}$ una matriz de rotación:

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.7500 & -0.5000 \\ 0.4356 & 0.6597 & -0.6124 \\ 0.7891 & 0.0474 & 0.6124 \end{bmatrix}$$

   - Confirme que se cumplen al menos **3** de las propiedades de este tipo de matrices.
   - ¿Qué efecto tiene la precisión numérica en el cálculo de matrices inversas y determinantes?. Consulte el comando de MATLAB que genera la cantidad más pequeña con la que dicho software es capaz de trabajar.

7. Dados los sistemas de coordenadas $\{\boldsymbol{A}\}$, $\{\boldsymbol{B}\}$ y $\{\boldsymbol{C}\}$, suponga que:

$$\boldsymbol{R}_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_C^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Encuentre la matriz $\boldsymbol{R}_C^B$.

8. Encuentre la representación en en ángulos fijos (*roll, pitch, yaw*) de la matriz de rotación $\boldsymbol{R}_B^A$.

$$\boldsymbol{R}_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

9. Encuentre la representación en ángulos de Euler de la matriz de rotación $\boldsymbol{R}_B^A$.

$$\boldsymbol{R}_B^A = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.2500 & 0.8660 \\ 0.8839 & 0.3062 & -0.3536 \\ -0.1768 & 0.9186 & 0.3536 \end{bmatrix}$$

10. Dados $k = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)'$ y $\theta = 90°$. Encuentre la matriz $\boldsymbol{R}_k(\theta)$.

11. Un marco de referencia $\{\boldsymbol{B}\}$ inicialmente se encuentra coincidente con el marco $\{\boldsymbol{A}\}$. Se rota $\{\boldsymbol{B}\}$ alrededor de $\hat{\boldsymbol{y}}_B$ 45° y luego alrededor de $\hat{\boldsymbol{z}}_B$ resultante un ángulo de 30°. ¿Cuál es la MTH que relaciona ambos marcos luego de las rotaciones?

    Manejo de Toolbox
    Haciendo uso de las funciones del Toolbox Peter Corke:

    - Compruebe el cálculo previo de la MTH que relaciona los marcos de referencia $\{\boldsymbol{A}\}$ y $\{\boldsymbol{B}\}$.
    - Exprese el marco de referencia $\{\boldsymbol{B}\}$ en representación por ángulos fijos (*roll, pitch, yaw*), ángulos de euler y ángulo-eje equivalente.
    - Realice la gráfica de los marcos de referencia $\{\boldsymbol{A}\}$ y $\{\boldsymbol{B}\}$.

12. Considere el sistema de la Figura 1, encuentre las MTH correspondientes a $\boldsymbol{T}_1^0, \boldsymbol{T}_2^0$ y $\boldsymbol{T}_2^1$. Demuestre que $\boldsymbol{T}_2^0 = \boldsymbol{T}_1^0 \boldsymbol{T}_2^1$.

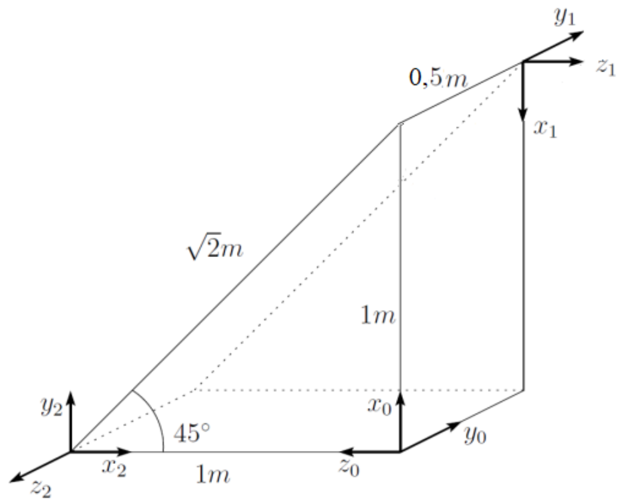

Figura 1: Sistemas de referencia $\{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{1}\}$, $\{\mathbf{2}\}$.

Manejo de Toolbox
Haciendo uso de las funciones del Toolbox RVCtools de Peter Corke:

- Compruebe el resultado obtenido anteriormente.
- En una gráfica presente de los 3 marcos de referencia.

13. En la Figura 2 se muestran 4 marcos de referencia en el espacio de trabajo de un robot, el marco fijo $\{\boldsymbol{a}\}$, el marco TCP $\{\boldsymbol{b}\}$, el marco de cámara $\{\boldsymbol{c}\}$ y el marco de la pieza de trabajo $\{\boldsymbol{d}\}$.
    - Encuentre $\boldsymbol{T}_d^a$ y $\boldsymbol{T}_d^c$.
    - Encuentre $\boldsymbol{T}_b^a$ sabiendo que:

$$\boldsymbol{T}_c^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Manejo de Toolbox
    Haciendo uso de las funciones del Toolbox RVCtools de Peter Corke:

    - De las MTH calculadas en los literales anteriores represente las orientaciones en ángulos de Euler y ángulos Fijos.
    - Realice la gráfica de los 4 marcos de referencia.

14. La figura 3 representa tres marcos de referencia ubicados en las esquinas de una cuña, estos han sido denominados $\{\boldsymbol{A}\}$, $\{\boldsymbol{B}\}$ y $\{\boldsymbol{C}\}$.

    Manejo de Toolbox
    Haciendo uso de las funciones del Toolbox RVCtools de Peter Corke:

    - Determine las MTH encuentre las MTH correspondientes a $\boldsymbol{T}_C^A, \boldsymbol{T}_C^B$ y $\boldsymbol{T}_A^C$.
    - Realice la gráfica de los 3 marcos de referencia.
    - Exprese los marcos de referencia $\{\boldsymbol{B}\}$ y $\{\boldsymbol{C}\}$ en representación por ángulos fijos y angulos de euler (respecto a $\{\boldsymbol{A}\}$).

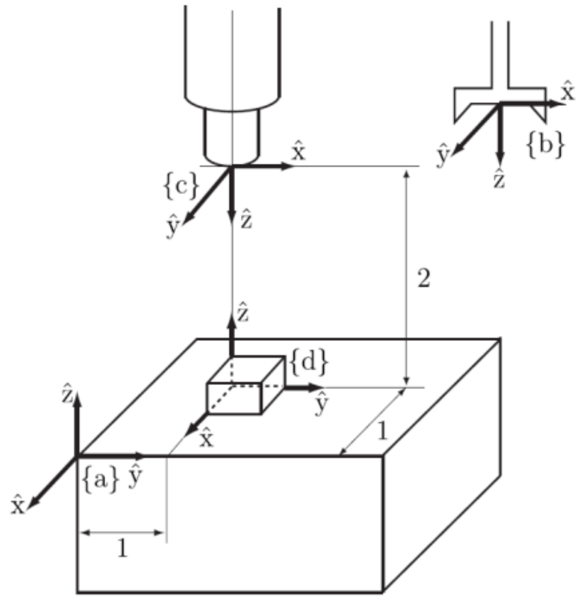

Figura 2: Marcos de referencia definidos en el espacio de trabajo de un robot.

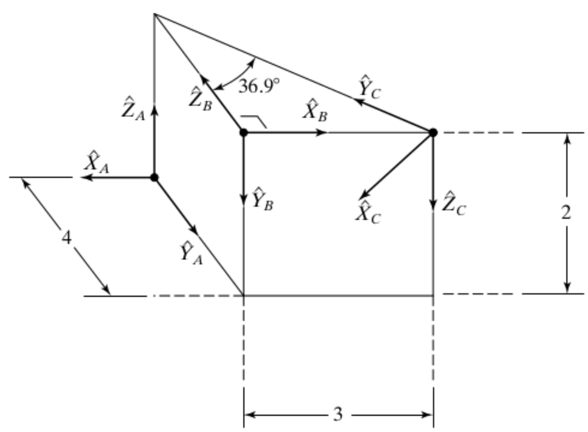

Figura 3: Marcos de referencia cuña

15. Encuentre la representación en matriz de rotación dada la representación ángulo-eje equivalente $\theta = pi/3$, $\hat{\boldsymbol{K}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Compruebe usando las funciones del **Toolbox RVCtools de Peter Corke**.
16. Del punto anterior obtenga la representación en cuaternio. Compruebe usando las funciones del **Toolbox de Peter Corke**.

Observaciones:

1. **Forma de trabajo:** Individual.
2. Para la entrega subir en Moodle el archivo de codigo fuente *.m* o *.mlx* y el reporte en PDF generado con la herramienta publish

Referencias

[1] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. 2004.

[2] Peter Corke. *Robotics Toolbox for Matlab, Release 9*. 2015.

[3] John J. Craig *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. 2005

[4] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. University of California, Berkeley.

[5] Selig J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*.

[6] Spong M. W. *Robot Dynamics and Control*.