MachineLearning for Visual Computing
Aufgabenblock 1

Christian Brändle - Gruppe 5

November 26, 2014

Chapter 1

Einfaches Perceptron - Datengeneration

Gegeben sind vier Datensets a 100 Beobachtungen von 2-dimensionalen Eingangsdaten, welche normalverteilt sind. Die Figuren in Tabelle 1.1 verdeutlichen dies.

1.1 Einfaches Perceptron - Perceptrontraining

Im Folgenden wird auf die verschiedenen Trainingsalgorithmen des Perceptrons eingegangen. Die dabei gestellten Fragen nach Geschwindigkeit, Konvergenz und Berechenbarkeit werden in den entsprechenden Punkten behandelt.

1.2 Anzahl Iterationen

Die Anzahl der Iterationen hängt maßgeblich von der *margin* der separierbaren Daten ab. Je kleiner die margin, das heißt der Minimalabstand zwischen den beiden Mengen, desto mehr Iterationen sind notwendig, bis der Algorithmus terminiert. Dies ist aus der Angabe der Iterationen aus 1.3 ersichtlich. Weiters ist zu sehen, dass nur der online Perceptron-Trainingsalgorithmus seine Iterationszahl ändert, die Werte für den batch Perceptron-Trainingsalgorithmus bleiben konstant.

Bei größeren Datensätzen und extrem geringer margin ist ein deutlicher Sprung in der notwendigen Anzahl der Iterationen zu sehen. Exemplarisch wird dies für die gegebenen vier Datenmengen in Figur 1.1 verdeutlicht.

1.3 Welchen Einfluß hat die Schrittweite γ

Der Einfluß der Schrittweite γ hat keinerlei Einfluß auf die Anzahl der notwendigen Iterationen sowohl der online als auch der batch Variante des Perceptron-

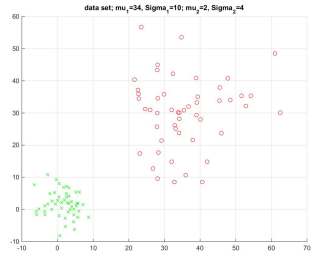
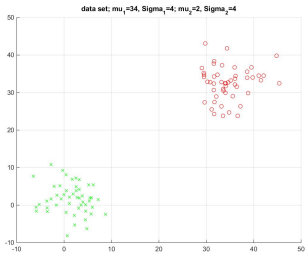
 set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 10$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 2$	 set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 8$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 3$
 set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 6$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 4$	 set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 4$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 5$

Table 1.1: data sets of separatable data

Trainingsalgorithmus. Die konstante Verteilung der Iterationen über ein γ von 0.1 bis 4 für die jeweiligen unterschiedlichen Datensätze in Tabelle 1.2 sowohl für online als auch batch Variante des Perceptron-Trainingsalgorithmus zu sehen.

1.4 Daten und Entscheidungsgrenzen im $\mathbb{R}^2$

Die ermittelten Entscheidungsgrenzen des batch-learning sowie des online-learning Algorithmus sind für die einzelnen Datensätze und ein gegebenes $\gamma = 1$ in Tabelle 1.3 zu sehen.

Es ist zu sehen, daß meistens wesentlich bessere Entscheidungsgrenzen gefunden werden könnten, welche quasi normal auf die margin stehen würden und somit besser noch unbekannte Samples einer korrekten Klasse zuweisen würden.

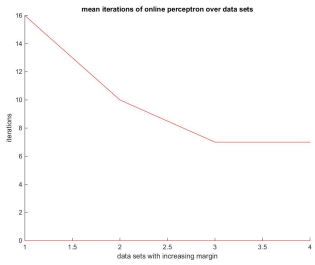


Figure 1.1: iterations of online training for increasing margins

1.5 Wie ist das Verhalten bei nicht linear separierbaren Daten

Der Algorithmus terminiert nicht da bei jedem Durchlauf Daten gefunden werden, welche in der falschen Klasse landen.

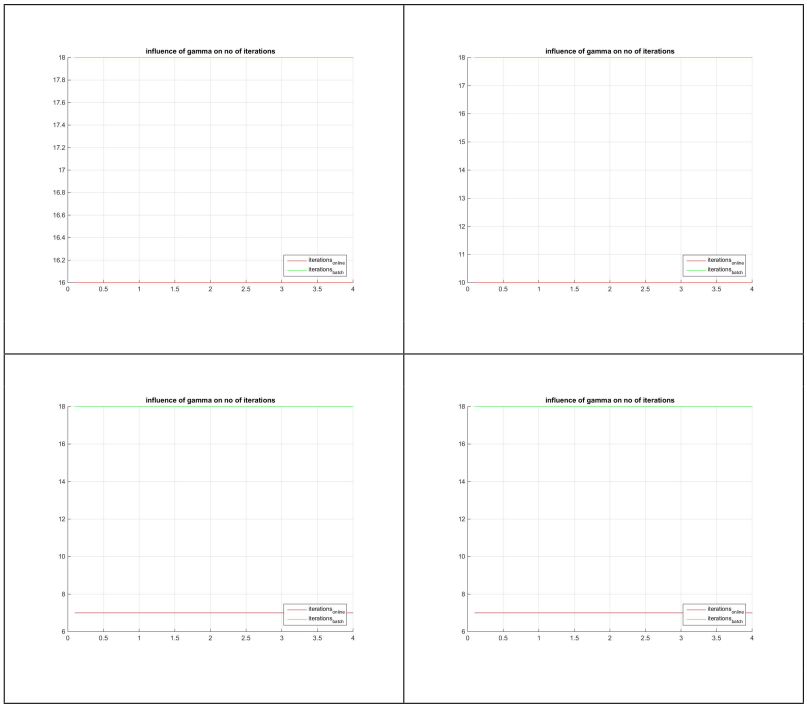


Table 1.2: iteration distribution over gamma

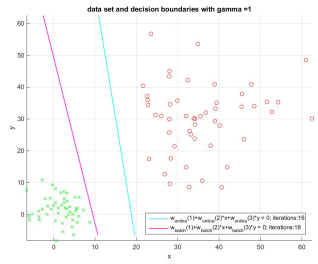
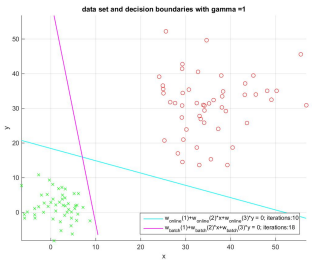
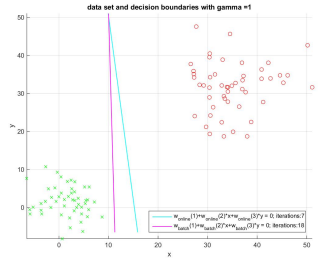
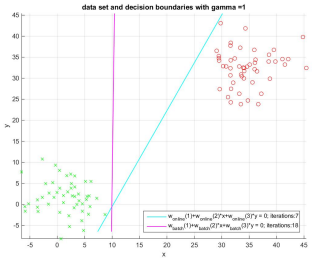
	
set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 10$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 2$	set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 8$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 3$
	
set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 6$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 4$	set_1: $\mu_1 = 34$, $\Sigma_1 = 4$ set_2: $\mu_2 = 2$, $\Sigma_2 = 5$

Table 1.3: data sets and decition boundaries

Chapter 2

Lineare Regression

Wir erstellen Daten im Bereich von $[0, 5]$ mit einer Schrittweite von 0.1 aus der Funkion:

$$y = x^2 - Gx + 1 \tag{2.1}$$

wobei $G = 10$ angenommen wird.

Des weiteren erstellen wir eine Trainingsmenge aus jedem sechsten Datenpunkt und fügen je einen Zufallswert aus $N(\mu = 0, \Sigma = 0.7)$ hinzu.

2.1 Gewichtsvektor w_{online} mittels Gradientenabstieg bei quadratischer Fehlerfunktion

Der Gewichtsvektor w_{online} welcher aufgrund des online Verfahrens für *LMS* (least mean square) ermittelte wurde kommt in der Anwendung auf die Funktion $f(x) = x^2 - Gx + 1$ dem optimalen w^* zwar nahe, erreicht dessen Qualität aber nicht. Eine Verringerung der Fehlertoleranz würde hier sicher Abhilfe schaffen. In der Anwendung auf die Funktion $f(x)$ ergeben sich wie in Figur 2.1 gezeigt für die Dimensionalität 3 die gezeigten Kurven.

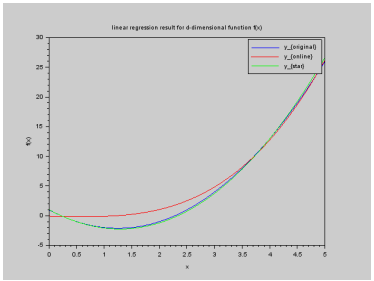


Figure 2.1: online vs batch LMS

2.2 Optimaler Gewichtsvektor w^*

Den optimalen Gewichtsvektor w^* kann man über die Bestimmung der Pseudoinversen A^+ für die Gleichung $Aw^* = b$ ermitteln. Die Gleichung $w^* = A^+b$ bestimmt das optimale w^*. Dabei berechnet sich A^+ wie folgt:

$$A^+ = (AA^T)^{-1} \quad \text{für invertierbare } AA^T \tag{2.2}$$

$$A^+ = (AA^T)^{-1} + \lambda I \quad \text{für nicht invertierbare} AA^T \text{ mit } \lambda << 1 \tag{2.3}$$

Das ermittelte Ergebnis für w^* mit normalisierten Daten aus dem $\mathbb{R}^2$ lautet: $w^* = (1.0106678, -10.0086, 1.8960336, 0.0262634)$.

2.3 Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von Lernrate γ

In Figur 2.2 ist zu sehen, daß die Anzahl der notwendigen Iterationen um zu einem Optimum zu gelangen mit der Größe von *gamma* exponentiell abnimmt bis sie bei einem Wert von $\gamma^{hat} \approx 0.0001$ ein Minimum erreichen. Danach steigt die Anzahl der notwendigen Iterationen wieder an.

In Figur 2.3 ist zu sehen, daß bei Erhöhung von γ über den optimalen Wert von $\gamma^{hat} \approx 0.0001$ hinaus die Anzahl der Iterationen wieder zunimmt um anschließend einen etwas willkürlichen Verlauf anzunehmen. Auf jeden Fall ist festzustellen, dass nach dem erneuten Fallen der Iterationen kein brauchbares Resultat mehr zustande kommt. Exemplarisch wurde dies für ein $\gamma = 0.0035$ durchgerechnet und in Figur 2.4 dargestellt. Eigentlich wäre erwartet worden, daß der Algorithmus über einem gewissen γ einfach die maximal zulässige Anzahl an Iterationen durchführt und dann ohne konvergiertes Ergebnis terminiert.

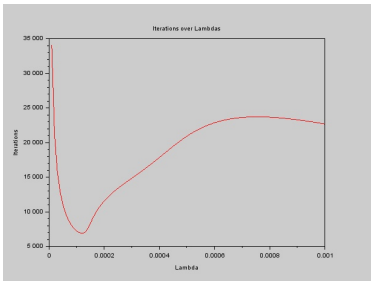


Figure 2.2: convergence over gamma

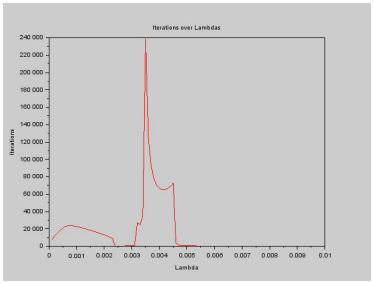


Figure 2.3: convergence over gamma beyond opmital region

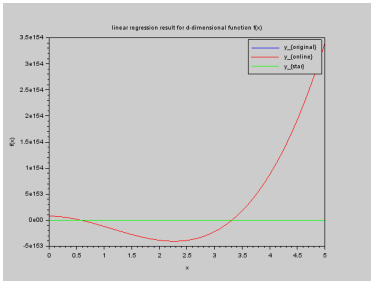


Figure 2.4: $f(x)$ of diverged w_{online}

2.4 Erwartungswert und Varianz von w^* im Bezug zu Dimensionalität d von $f(x)$

Die Varianz von w^* im Bezug zu Dimensionalität d von $f(x)$ zeigt, daß je höher die Dimensionalität d steigt, umso höher auch die Varianz Σ der ermittelten Werte für w^* für verrauschte Eingangsdaten wird. Dies ist auch klar, da höherdimensionale Koeffizienten von w^* höhere Frequenzen repräsentieren, welche durch das Verrauschen der Eingangsdaten stärker betroffen sind als niedrigere Frequenzen. Interessanterweise steigt die Varianz aller Koeffizienten von w^* in Tabelle 2.1 nur bis zu einer Dimensionalität des Problems von 6, danach fällt sie wieder ab. Es ist anzunehmen, dass dies zum Einen aufgrund in Unzulänglichkeiten beim generieren der Pseudoinversen zur Berechnung von w^* liegt und zum Anderen in der Tatsache begründet liegt, daß Frequenzen höherer Ordnung wohl im gegebenen Problem nicht vorkommen.

Für den Mittelwert verhält es sich ähnlich. Da das Problem im wesentlichen von der quadratischen Komponente abhängt ist diese naturgemäß am deutlichsten vertreten. Höherdimensionale Gewichtsanteile sind nur marginal vertreten.

Des weiteren ist in Figur 2.5 festzustellen, dass für höherdimensionale Gleichungen $f(x)$ basierend auf w^* das overfitting der Kurve $f(x)$ zunimmt, zu sehen in den Schwingungen der Kurven.

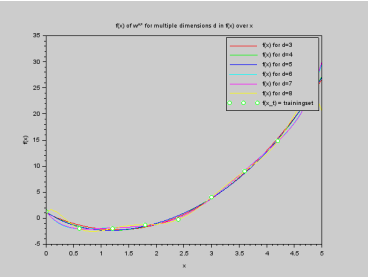


Figure 2.5: overfitting of $f_{w^*}(x)$ curves over dimension

2.5 Mittlere quadratische Abweichung von $f_{w^*}(x^*)$

Wie erwartet, steigt auch die mittlere quadratische Abweichung von $f_{w^*}(x^*)$ mit der Zunahme der Dimension d an, wie in Figur 2.6 zu sehen ist.

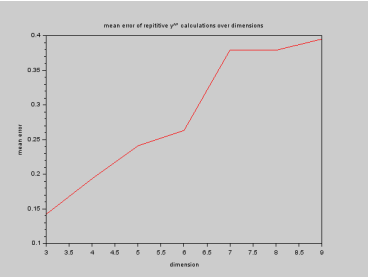


Figure 2.6: mean error of $f_{w^*}(x^*)$ curves over dimension

2.6 Gewichtsvektor w^* bei ungestörter Trainingsmenge über Dimension d

Die resultierenden Kurven für $f_{w^*}(x)$ welche aus der ungestörten Trainingsmenge ermittelt wurden fitten die Originalpunkte aus der Originalkurve $y = 2x^2 - Gx + 1$ naturgemäß wesentlich besser als die Kurven, welche auf der verrauschen Trainingsmenge basieren. Dies ist in Tabelle 2.2 zu sehen. Der Ausreißer bei Dimension 9 ist wiederum auf Schwächen in der Bestimmung der Pseudoinversen zurückzuführen.

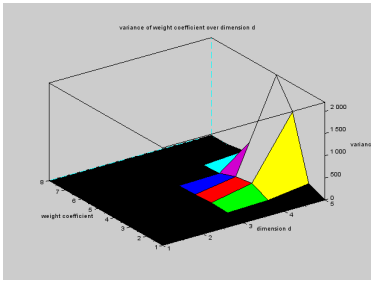
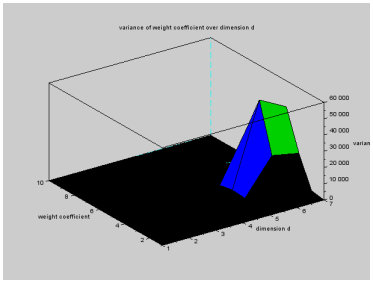
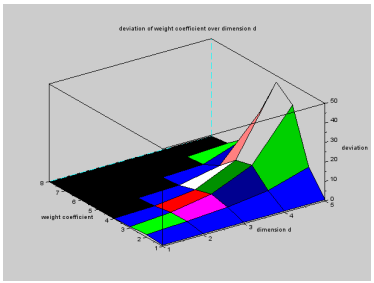
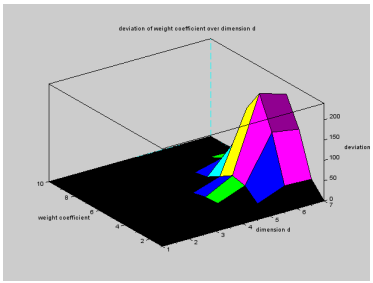
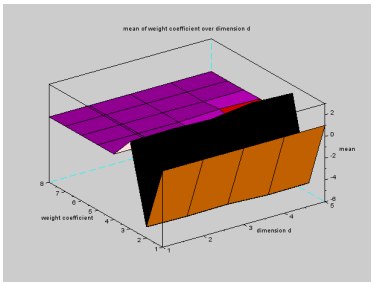
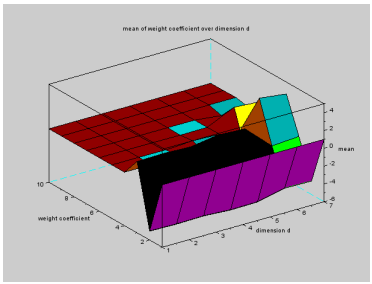
 variance of weight coefficients for max. dimension $d = 7$	 variance of weight coefficients for max. dimension $d = 9$
 deviation of weight coefficients for max. dimension $d = 7$	 deviation of weight coefficients for max. dimension $d = 9$
 mean of weight coefficients for max. dimension $d = 7$	 mean of weight coefficients for max. dimension $d = 9$

Table 2.1: variance, deviantion and mean of w^* coefficient over dimension

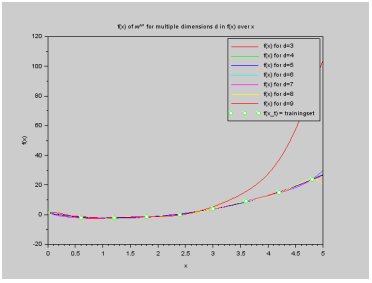
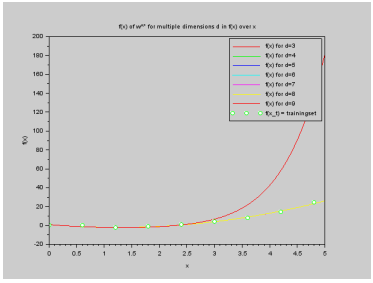
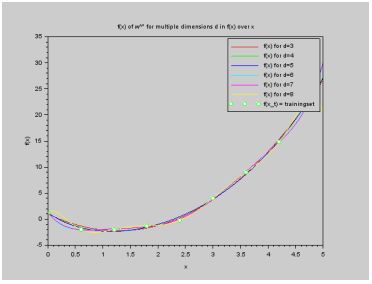
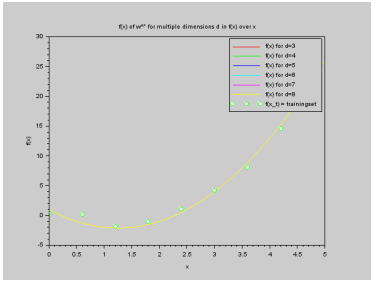
	
	
w^* based on preturbed trainingsset	w^* based on not preturbed trainingsset

Table 2.2: $f_{w^*}(x)$ over dimension