Ecuación de Bernoulli

A una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

con n un número real, se le llama **ecuación de Bernoulli**.

Si $n = 0$ o $n = 1$, (2.65) es una ecuación diferencial lineal. Además si $n = 1$, la ecuación se puede resolver mediante separación de variables. Así que nos concentramos en el caso en que $n \neq 0, 1$.

El método para resolver una ecuación de Bernoulli consiste en transformarla en una ecuación diferencial lineal mediante un cambio de variable, veamos.

Dividiendo ambos lados de (2.65) por y^n, resulta

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x).$$

Sea

$$w = y^{1-n},$$

entonces

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

por lo cual

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo (2.67) y (2.68) en la ecuación diferencial (2.66) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)w &= f(x) \\ \frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w &= (1-n)f(x), \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial lineal.

EJEMPLO 1. Resolver

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2.$$

Solución. Dividiendo la ecuación (2.69) por y^2, resulta

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = e^x.$$

Sea

$$w = y^{-1}, \quad \frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}, \quad -\frac{dw}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo en (2.70)

$$\begin{aligned} -\frac{dw}{dx} - w &= e^x \\ \frac{dw}{dx} + w &= -e^x. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal tenemos

$$w = -\frac{1}{2}e^x + c_1 e^{-x},$$

y recordando que $w = y^{-1}$

$$y^{-1} = \frac{-e^x + 2c_1 e^{-x}}{2},$$

de donde

$$y = \frac{2}{ce^{-x} - e^x}.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0.$$

Solución. Veamos si es una ecuación de Bernoulli.

$$\begin{aligned} y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy &= 0 \\ 6y^3 - xy - y + 2x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2x\frac{dy}{dx} - (x+1)y &= -6y^3 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{x+1}{2x}y &= -\frac{3}{x}y^3 \end{aligned}$$

Así, efectivamente se trata de una ecuación de Bernoulli. Dividiendo por y^3, se sigue que

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{x+1}{2x}y^{-2} = -\frac{3}{x}.$$

Sea $w = y^{-2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \\
-\frac{1}{2}\frac{dw}{dx} &= y^{-3}\frac{dy}{dx} \\
-\frac{1}{2}\frac{dw}{dx} - \frac{x+1}{2x}w &= -\frac{3}{x} \\
\frac{dw}{dx} + \frac{x+1}{x}w &= \frac{6}{x}.
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal se obtiene

$$\begin{aligned}
w &= (6+ce^{-x})x^{-1} \\
y^{-2} &= (6+ce^{-x})x^{-1} \\
y &= \sqrt{\frac{x}{6+ce^{-x}}}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3x^2}.$$

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x+y^3x^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x(1+y^3x)},
\end{aligned}$$

luego la ecuación (2.72) no es de Bernoulli en la variable y, pero si la escribimos como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3x^2}{y},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} + \frac{y^3}{y}x^2 \\
\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x &= y^2x^2,
\end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial de Bernoulli en x. Dividiendo por x^2, resulta

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-1} = y^2.$$

Sea $w = x^{-1}$, entonces $\dfrac{dw}{dy} = -x^{-2}\dfrac{dx}{dy}$. Sustituyendo en (2.73) resulta

$$-\frac{dw}{dy} - \frac{1}{y}w = y^2,$$

y resolviendo la ecuación diferencial lineal en w obtenemos

$$w = \frac{-y^4 + c}{4y}.$$

Ya que $w = x^{-1}$, se tiene

$$x^{-1} = \frac{-y^4 + c}{4y},$$

de donde

$$x = \frac{4y}{c - y^4}.$$

EJERCICIOS

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

1. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$
2. $2x^2 + 2xyy' = x^2 + y^2$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$
4. $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$
5. $y^2y' + 2xy^3 = 6x$
6. $y^2dx + (2xy - 5x^3)dy = 0$
7. $(1 - x^2)y' - xy = 7xy^2$
8. $y^3y' + 4xy^4 = 8x$
9. $(y\ln x - 2)ydx = xdy$
10. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$

SOLUCIONES

1. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{c-x}}$
2. $x^2 + y^2 = cx$
3. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{2} + cx}$
4. $y = (x + cx^2)^{-3}$
5. $y = \sqrt[3]{3 + ce^{-3x^2}}$
6. $x^2 = \dfrac{y}{2 + cy^5}$
7. $y = \dfrac{1}{c\sqrt{1-x^2} - 7}$
8. $y = \sqrt[4]{ce^{-8x^2} + 2}$
9. $y(1 + 2\ln x + cx^2) = 4$
10. $x(2 - y^2 + ce^{-y^2/2}) = 1$