

ALP I: Funktionale Programmierung

Bearbeiter: A. Rudolph

Tutor: Stephanie Hoffmann

Tutorium 06

Abgabe: bis Montag, den 10. Februar 2020, 10:10 Uhr

1. **Aufgabe** (2 Punkte) $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y,z) = p(x) * h(z,x,y) + k(z)$

$$f(x,y,z) = \text{add}(\text{mult}(p(\Pi_1^3(x,y,z)), h(\Pi_3^3(x,y,z), \Pi_1^3(x,y,z), \Pi_2^3(x,y,z))), k(\Pi_3^3(x,y,z)))$$

\Rightarrow Reduzierbar zu: $\text{add} \circ [\text{mult} \circ [(p \circ \Pi_1^3), h \circ [\Pi_3^3, \Pi_1^3, \Pi_2^3]], (k \circ \Pi_3^3)](x,y,z)$

Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen (p, h, k sind laut Aufgabe und add, mult laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

2. **Aufgabe** (4 Punkte)

- a) $\text{max}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{max}(x,y) = y$ falls $x \leq y$ und $\text{max}(x,y) = x$, falls nicht.

$$\text{max}(x,y) = \text{sub}(\text{add}(\Pi_1^2(x,y), \Pi_2^2(x,y)), \min(\Pi_1^2(x,y), \Pi_2^2(x,y)))$$

\Rightarrow Reduzierbar zu: $\text{sub} \circ [\text{add} \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2], \min \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2]](x,y)$

Somit ist die Funktion max primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen ($\text{add}, \text{sub}, \min^{(1)}$ sind laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

⁽¹⁾ Da \min nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:

$$\min(x,y) = \text{sub} \circ [\Pi_1^2, \text{sub} \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2]](x,y)$$

- b) $\text{fac}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $0! = 1$ und $n! = \prod_{k=1}^n k$

$$\text{fac}(0) = C_1^0$$

$$\text{fac}(S(n)) = \text{mult}(S(\Pi_2^2(\text{fac}(n), n)), \Pi_1^2(\text{fac}(n), n))$$

Somit ist die Funktion fac primitiv rekursiv, da sie sich nach dem Rekursionsschema und mithilfe von primitiv rekursiven Funktionen aufstellen lässt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) $\text{and}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{and}(x,y) = \text{mult}(\Pi_1^2(x,y), \Pi_2^2(x,y))$$

$$\Rightarrow \text{Reduzierbar zu: } \text{mult} \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2](x,y)$$

Somit ist die Funktion and primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen aufstellen lässt.

b) $\text{equal}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{equal}(x,y) = \text{and}(\text{isZero}(\text{sub}(\Pi_1^2(x,y), \Pi_2^2(x,y))), \text{isZero}(\text{sub}(\Pi_2^2(x,y), \Pi_1^2(x,y))))$$

$$\Rightarrow \text{Reduzierbar zu: } \text{and} \circ [\text{isZero} \circ \text{sub} \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2], \text{isZero} \circ \text{sub} \circ [\Pi_2^2, \Pi_1^2]](x,y)$$

Somit ist die Funktion equal primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen ($\text{isZero}^{(2)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

⁽²⁾ Da isZero nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:

$$\begin{aligned} \text{isZero}(0) &= C_1^0 \\ \text{isZero}(S(n)) &= C_0^2(\text{isZero } n, n) \end{aligned}$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y,z) = x + \frac{(x+z) * (z+y+2)}{2}$

$$f(x,y,z) = \text{add}(\Pi_1^3(x,y,z), \text{half}(\text{mult}(\text{add}(\Pi_1^3(x,y,z), \Pi_3^3(x,y,z)), \text{add}(\text{add}(\Pi_3^3(x,y,z), \Pi_2^3(x,y,z)), C_2^3(x,y,z))))))$$

$$\Rightarrow \text{Reduzierbar zu: } \text{add} \circ [\Pi_1^3, \text{half} \circ \text{mult} \circ [\text{add} \circ \Pi_1^3, \Pi_3^3], \text{add} \circ [\text{add} \circ [\Pi_3^3, \Pi_2^3], C_2^3]](x,y,z)$$

Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen ($\text{half}^{(3)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

⁽³⁾ Da half nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition plus die Definition von ungerade , da diese auch gebraucht wird:

$$\begin{aligned} \text{half}(0) &= C_0^0 \\ \text{half}(S(n)) &= \text{add}(\text{half } n, \text{ungerade } (n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ungerade}(0) &= C_0^0 \\ \text{ungerade}(S(n)) &= \text{isZero}(\Pi_1^2(\text{ungerade}(n), n)) \end{aligned}$$

b) $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $p(n) = 2^n - 1$

$$p(n) = \text{sub}(\text{exp}(C_2^1(n), \Pi_1^1(n)), C_1^1(n))$$

\Rightarrow Reduzierbar zu: $\text{sub} \circ [\text{exp} \circ [C_2^1, \Pi_1^1], C_1^1](n)$

Somit ist die Funktion p primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen ($\text{exp}^{(4)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

⁽⁴⁾ Da exp nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:

$$\text{exp}(x, y) = \text{exp}'(\Pi_2^2(x, y), \Pi_1^2(x, y))$$

$$\text{exp}'(0, m) = C_1^1(m)$$

$$\text{exp}'(S(n), m) = \text{mult} \circ [\Pi_1^3, \Pi_3^3](\text{exp}'(n, m), n, m)$$

c) $\text{abst}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{abst}(n, m) = \begin{cases} (n - m), & \text{wenn } n > m \\ (m - n), & \text{wenn } n \leq m \end{cases}$

$$\text{abst}(n, m) = \text{sub}(\max(\Pi_1^2(n, m), \Pi_2^2(n, m)), \min(\Pi_1^2(n, m), \Pi_2^2(n, m)))$$

\Rightarrow Reduzierbar zu: $\text{sub} \circ [\max \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2], \min \circ [\Pi_1^2, \Pi_2^2]](n, m)$

Somit ist die Funktion abst primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen konstruieren lässt.

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 0 \\ f(n - 1) + n, & \text{sonst} \end{cases}$

$$f(0) = C_1^0$$

$$f(S(n)) = \text{add}(\Pi_1^2(f(n), n), S(\Pi_2^2(f(n), n)))$$

Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich nach dem Rekursionsschema aufstellen lässt.

5. **Aufgabe** (10 Punkte) Ich habe jede Funktion getestet und sie hat mir richtige Ergebnisse ausgegeben. Bei (durchaus angebrachten) Missvertrauen von meiner Richtigkeit, bitte die extra hochgeladene Haskell Datei ansehen.