13. Aufgabenblatt vom Freitag, den 31. Januar 2020 zur Vorlesung

ALP I: Funktionale Programmierung

Bearbeiter: A. Rudolph
Tutor: Stephanie Hoffmann
Tutorium 06

Abgabe: bis Montag, den 10. Februar 2020, 10:10 Uhr

1. **Aufgabe** (2 Punkte) f: $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit f(x,y,z) = p(x) * h(z,x,y) + k(z)

   $f(x,y,z) = add(mult(p(\Pi_1^3(x,y,z)),h(\Pi_3^3(x,y,z),\Pi_1^3(x,y,z),\Pi_2^3(x,y,z))),k(\Pi_3^3(x,y,z)))$

   $\Rightarrow$Reduzierbar zu: $add \circ [mult \circ [(p \circ \Pi_1^3), h \circ [\Pi_3^3, \Pi_1^3, \Pi_2^3]], (k \circ \Pi_3^3)](x,y,z)$
   Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen(p,h,k sind laut Aufgabe und add, mult laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

2. **Aufgabe** (4 Punkte)

   a) max: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit max(x,y) = y falls x $\leq$ y und max(x,y) = x, falls nicht.

   $max(x,y) = sub(add(\Pi_1^2(x,y), \Pi_2^2(x,y)), min(\Pi_1^2(x,y),\Pi_2^2(x,y)))$

   $\Rightarrow$Reduzierbar zu: $sub \circ [add \circ [\Pi_1^2,\Pi_2^2], min \circ [\Pi_1^2,\Pi_2^2]](x,y)$
   Somit ist die Funktion max primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen(add, sub, *min*(1) sind laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

   (1) Da min nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:

   $min(x,y) = sub \circ [\Pi_1^2,sub \circ [\Pi_1^2,\Pi_2^2]](x,y)$

   b) fac: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $0! = 1$ und $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

   $fac(0) = C_1^0$
   $fac(S(n)) = mult(S(\Pi_2^2(fac(n),n)),\Pi_1^2(fac(n),n))$

   Somit ist die Funktion fac primitiv rekursiv, da sie sich nach dem Rekursionsschema und mithilfe von primitiv rekursiven Funktionen aufstellen lässt.

3. **Aufgabe** (4 Punkte)

a) and: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

and(x,y) = mult(Π_1^2(x,y),Π_2^2(x,y))

$\Rightarrow$Reduzierbar zu: mult $\circ$ [Π_1^2,Π_2^2] (x,y)
Somit ist die Funktion and primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen aufstellen lässt.

b) equal: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

equal(x,y) = and(isZero(sub(Π_1^2(x,y),Π_2^2(x,y))),isZero(sub(Π_2^2(x,y),Π_1^2(x,y))))

$\Rightarrow$Reduzierbar zu: and $\circ$ [isZero $\circ$ sub $\circ$ [Π_1^2,Π_2^2],isZero $\circ$ sub $\circ$ [Π_2^2,Π_1^2]](x,y)
Somit ist die Funktion equal primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen($isZero^{(2)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

(2) Da isZero nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:

isZero(0) = C_1^0
isZero(S(n)) = C_0^2(isZero n, n)

4. **Aufgabe** (10 Punkte)

a) f: $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y,z) = x + \frac{(x+z)*(z+y+2)}{2}$

f(x,y,z) = add(Π_1^3(x,y,z),half(mult(add(Π_1^3(x,y,z),Π_3^3(x,y,z)),add(add(Π_3^3(x,y,z),Π_2^3(x,y,z)),C_2^3(x,y,z)))))

$\Rightarrow$Reduzierbar zu: add $\circ$ [Π_1^3,half $\circ$ mult $\circ$ [add $\circ$ Π_1^3,Π_3^3],add $\circ$ [add $\circ$ [Π_3^3,Π_2^3],C_2^3]](x,y,z)
Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen($half^{(3)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.

(3) Da half nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition plus die Definiton von ungerade, da diese auch gebraucht wird:

half(0) = C_0^0
half(S(n)) = add(half n, ungerade (n))

ungerade(0) = C_0^0
ungerade(S(n)) = isZero(Π_1^2(ungerade(n),n))

b) p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(n) = 2^n - 1$

p(n) = sub(exp(C_2^1(n),Π_1^1(n)),C_1^1(n))

$\Rightarrow$Reduzierbar zu: sub $\circ$ [exp $\circ$ [C_2^1,Π_1^1],C_1^1](n)
Somit ist die Funktion p primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen ($exp^{(4)}$ ist laut Vorlesung primitiv rekursiv) konstruieren lässt.
$^{(4)}$ Da exp nicht in den Vorlesungsfolien steht, sie aber an der Tafel gemacht wurde, hier nochmal die Definition:
exp(x,y) = exp'(Π_2^2(x,y),Π_1^2(x,y))

exp'(0,m) = C_1^1(m)
exp'(S(n),m) = mult $\circ$ [Π_1^3,Π_3^3](exp'(n,m),n,m)

c) abst: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $abst(n,m) = \begin{cases} (n-m), & \text{wenn } n > m \\ (m-n), & \text{wenn } n \leq m \end{cases}$

abst(n,m) = sub(max(Π_1^2(n,m),Π_2^2(n,m)),min(Π_1^2(n,m),Π_2^2(n,m)))

$\Rightarrow$Reduzierbar zu: sub $\circ$ [max $\circ$ [Π_1^2,Π_2^2],min $\circ$ [Π_1^2,Π_2^2]](n,m)
Somit ist die Funktion abst primitiv rekursiv, da sie sich mit primitiv rekursiven Funktionen konstruieren lässt.

d) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 0 \\ f(n-1) + n, & \text{sonst} \end{cases}$

f(0) = C_1^0
f(S(n)) = add(Π_1^2(f(n),n),Π_2^2(f(n),n))

Somit ist die Funktion f primitiv rekursiv, da sie sich nach dem Rekursionsschema aufstellen lässt.

5. **Aufgabe** (10 Punkte) Ich habe jede Funktion getestet und sie hat mir richtige Ergebnisse ausgegeben. Bei (durchaus angebrachten) Missvertrauen von meiner Richtigkeit, bitte die extra hochgeladene Haskell Datei ansehen.