$R_1 = -2R_3 + R_2$
$R_2 = -R_3 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_1 = 3R_2 + R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل الأنظمة الخطية

من المصفوفة التالية والتي في الشكل المختزل :-
فإن :-

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \quad -5x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

المتغيرات x_2 & x_2 والتي تقابل الأعمدة المرتكازية في المصفوفة تسمى متغيرات أساسية (basic variables) أما المتغير x_3 فيسمى بالمتغير الحر free variable ونلاحظ أنه يمكننا وضع المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات الحرة.

$$x_1 = 1 + 5x_3$$
$$x_2 = 4 - x_3$$
$$x_3 \text{ free}$$

وهذا ما يسمى بالحل العام للنظام الخطي General Solution .

إذا فرضنا $x_3=0$ فإن $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$ وبالتالي لدينا الحل $(1,4,0)$

إذا وضعنا $x_3 = 1$ فإن الحل يكون $(6,3,1)$ وهكذا

* مثال :-

أوجد الحل العام للنظام الخطي الذي تم إختزال مصفوفته الممتدة مبيناً المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \qquad x_1 = -6x_2 - 3x_4 \qquad x_2$ free

$x_3 - 4x_4 = 5 \qquad x_3 = 5 + 4x_4 \qquad x_4$ free

$x_5 = 7 \qquad x_5 = 7$

* نظرية (الوجود والوحدانية) :-

يكون النظام متسق إذا وفقط إذا كان الشكل المدرج للمصفوفة الممتدة ليس به صف في الشكل $[0 \; 0 \; \cdots \; 0 \; b]$ حيث $b \neq 0$ ، إذا كان النظام الخطي متسق عندئذ فإن مجموعة الحل تحتوي على :-

1. حل وحيد عندما لا يوجد متغيرات حرة .
2. عدد لا نهائي من الحلول عندما يوجد على الأقل متغير حر واحد .

* المعادلات المتجهية (vector equation) :-

المصفوفة التي لها عمود واحد تسمى متجه عمود (Column vector) ، أو إختصاراً بالمتجه .

* مثال :-

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

حيث u_1 و u_2 أعداد حقيقية ، ومجموعة كل المتجهات التي تحوي عنصرين نشير لها بالرمز $\mathbb{R}^2$ وبالتالي فإن $\mathbb{R}^n$ عبارة عن عدد مجموعة كل المتجهات التي تحوي n عدد حقيقي .

يقال أن المتجهين متساويين إذا تساوت فيهما العناصر المتناظرة ، أي :-

فإن $u = v$ إذا وفقط إذا كان : $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$u_1 = v_1$ and $u_2 = v_2$

* جمع متجهين $u = v$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

* الضرب القياسي للمتجه بعدد $c \in \mathbb{R}$

$$cu = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$$

* مثال :-

إذا كان $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ & $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ فأوجد :-

$4u - 3v$ $\qquad 4u - 3v = 4u + (-3v)$

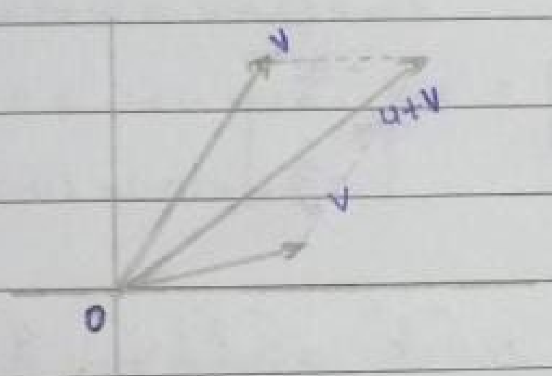
$$4u = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad -3v = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 4u + (-3v) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

قاعدة متوازي الأضلاع للجمع :-

إذا كان u و v في $\mathbb{R}^2$ ممثلين كنقاط في المستوى ، فإن $u + v$ تمثل النقطة الرأس الرابعة لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه الأخرى هي

$u, 0, v$



مثال :-

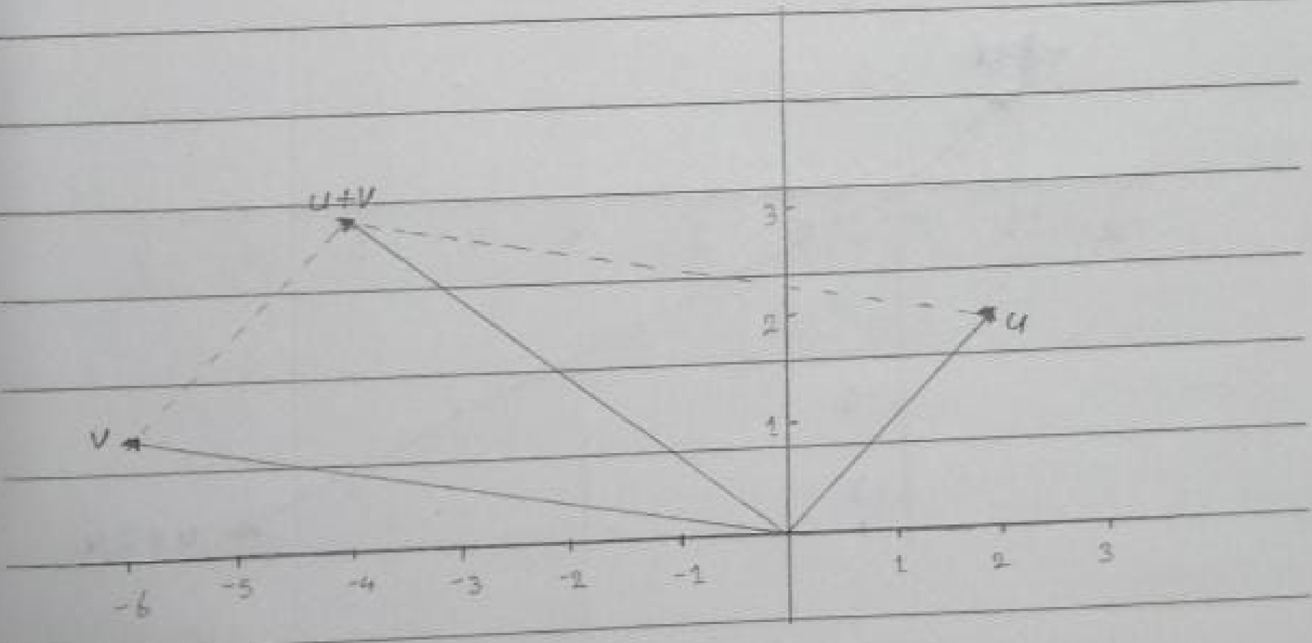
إذا كان $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ فأوجد $u+v$

ومثلهم هندسياً :-

$$u + v = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(2,2)$ $(-6,1)$

$(-4,3)$



* تمرين :-

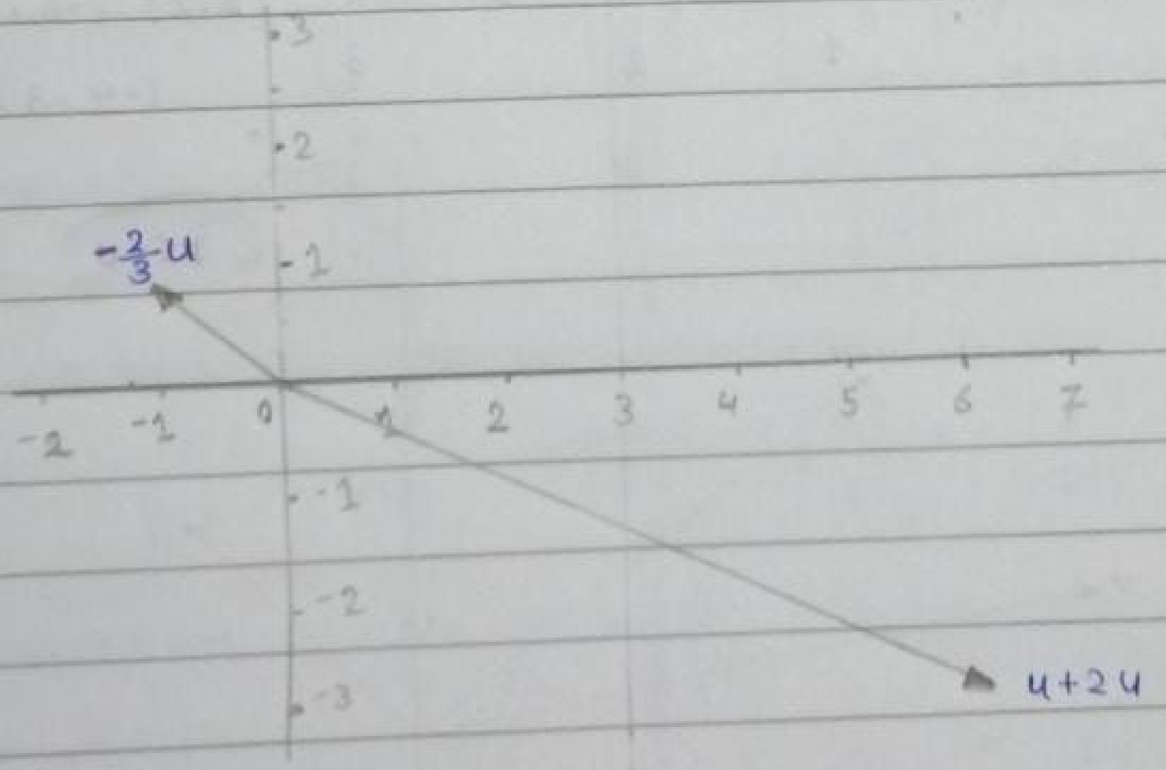
إذا كان $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ مثل المتجهات التالية هندسياً

$u + 2u \quad , \quad -\frac{2}{3}u$

$$-\frac{2}{3}u = \frac{-2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$u + 2u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \qquad (6, -3)$



الخواص الجبرية لـ $\mathbb{R}^n$:-

ليكن u و v و w هي متجهات في $\mathbb{R}^n$ و c ، d أعداد قياسية

فإن :-

1. $u + v = v + u$

2. $(u+v) + w = u + (v + w)$

3. $u + 0 = 0 + u = u$

4. $u + (-u) = (-u) + u = 0$

حيث (u-) تشير إلى $(-1)u$

5. $c(u+v) = cu + cv$

6. $(c+d)u = cu + du$

7. $c(du) = (cd)(u)$

8. $1 \cdot u = u$

Put (1)