تطبيقات المشتقات Applications of Derivatives

1. المعدَّلات الزمنية المرتبطة Related Rates

لتكن $g(x,y)=0$ علاقة تربط بين متغيرين x و y ، وكل من هذين المتغيرين دالة على الزمن t.عندئذٍ بتفاضل معادلة العلاقة بين المتغيّرين بالنسبة للمتغيَّر المستقل t، يمكن الحصول على علاقة تربط بين المتغيرين x و y ومعدَّل تغيّر كل منهما مع الزمن.

أمثلة:

1. يتمدد قرص معدني دائري محافظاً على شكله بحيث يكون معدَّل الزيادة في نصف القطر يساوي $0.1\ cm/sec$ أوجد معدَّل التغيّر في مساحة القرص عندما يكون طول نصف القطر $2\ cm$.

الحل:

لتكن A هي مساحة القرص و r نصف القطر، العلاقة بين المساحة ونصف القطر هي $A=\pi r^2$

بتفاضل طرفي العلاقة بالنسبة للزمن t، نحصل على

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\ \frac{dr}{dt}$$

$$r=2\ cm\ ,\ \frac{dr}{dt}=0.1\ cm/sec$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi\times 2\times 0.1=0.4\pi\simeq 0.4\times 3.14\simeq 1.256\ cm^2/sec$$

أي أنَّ معدَّل التغيّر في مساحة القرص عندما يكون طول نصف القطر $2\ cm$ $\simeq 1.256\ cm^2/s$

2. إذا كان صافي الربح الاسبوعي لشركة من بيع x وحدة في الأسبوع يعطى بالدالة $p(x)=700\ x-0.2\ x^2\ \$$ ، ما معدَّل زيادة الأرباح الأسبوعية عندما تبيع الشركة 450 وحدة في الأسبوع إذا كان معدلّ زيادة المبيعات هو 16 وحدة في الأسبوع.

الحل:

$$\frac{dp}{dt}=700\times\frac{dx}{dt}-0.4x\times\frac{dx}{dt}$$

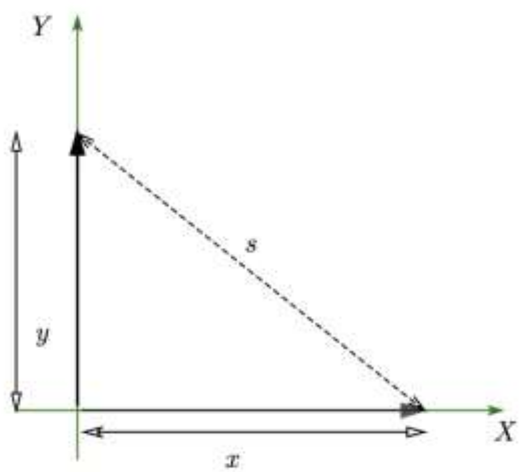
$$\frac{dx}{dt}=16\ uints/week,\ x=450\ units$$

$$\frac{dp}{dt}=700\times 16-0.4\times 450\times 16=8320\ \$/week$$

أي أنَّ معدَّل زيادة الأرباح الأسبوعية $= 8320\ \$/week$

3. تحرك جسمان من نقطة الأصل بحيث كان الجسم الأول يتحرّك على طول محور x في الاتجاه الموجب والآخر يتحرك على طول محور y في الاتجاه الموجب أيضاً. أوجد معدَّل التغيّر في المسافة بينهما عندما يكون الجسم الأوَّل على بعد $40\ m$ من نقطة الأصل وسرعته $3\ m/sec$ والجسم الثَاني على بعد $30\ m$ من نقطة الأصل وسرعته $2\ m/sec$.

الحل:



لتكن x هي بعد الجسم الأوَّل عن نقطة الأصل و y هي بعد الجسم الثَاني عن نقطة الأصل و s هي المسافة بين الجسمين و t هي الزمن بالثواني

$$\therefore x^2+y^2=s^2$$

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t

$$2x\ \frac{dx}{dt}+2y\,\frac{dy}{dt}=2s\,\frac{ds}{dt}\Longrightarrow x\ \frac{dx}{dt}+y\,\frac{dy}{dt}=s\,\frac{ds}{dt}$$

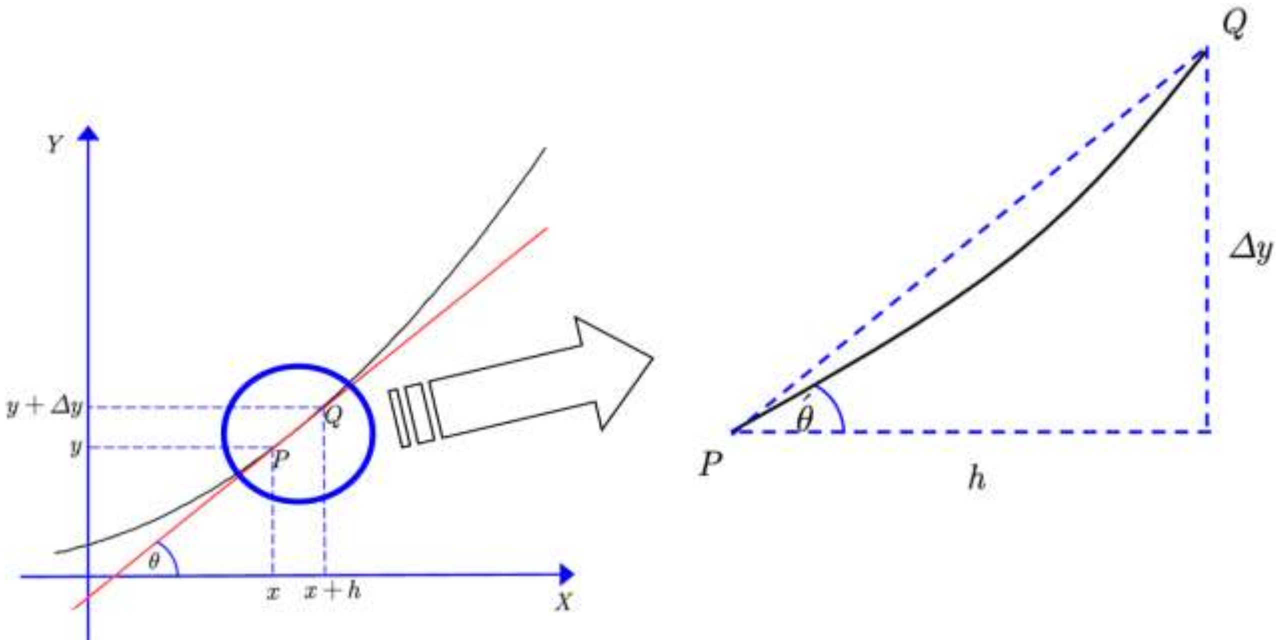
$$x=40\ m,\ \frac{dx}{dt}=3\ m/\ sec,\ y=30\ m,\ \frac{dy}{dt}=2\ m/\ sec$$

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(40)^2+(30)^2}=50\ m$$

$$\therefore\ 40\times 3+30\times 2=50\times\frac{ds}{dt}\Rightarrow\frac{ds}{dt}=\frac{180}{50}=3.6\ m/\ sec$$

$\therefore$ معدَّل التغيّر في المسافة بين الجسمين عند اللحظة المحددة $= 3.6\ m/\ sec$

2. التفسير الهندسي للمشتقة Geometric Meaning of The Derivative



لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق في جوار النقطة $P(x,y)$ التي تقع على منحنى الدالة $y=f(x)$، عند حدوث تغير في قيمة x بمقدار ضئيل h تكون النقطة $Q(x+h,\ f(x+h))$ واقعة على منحنى الدالة. الآن القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ هي وتر لمنحنى الدالة ولتكن الزاوية θ هي الزاوية التي يصنعها امتداد القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور X. من الشكل أعلاه تكون $tan\,(\theta)=\dfrac{\Delta y}{h}$ هي ميل **Slope** الوتر $\overline{PQ}$. عندما $h\to 0$ يصبح الوتر $\overline{PQ}$ مماساً **tangent** لمنحنى الدالة عند النقطة $P(x,y)$ ويكون ميله هو

$$m=\lim_{h\to 0} tan\,(\theta)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\frac{dy}{dx}$$

لذا نستخلص مما سبق أنَّ ميل المماس لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند النقطة $P(x_0,y_0)$ الواقعة على منحنى الدالة هو $m=\dfrac{dy}{dx}=f'(x_0)$.

وتكون معادلة المستقيم المماس عند النقطة $P(x_0,y_0)$ هي

$$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0)$$

ومعادلة المستقيم العمودي على المماس عند نفس النقطة هي

$$\begin{cases} y - y_0 = \dfrac{-1}{\acute{f}\ (x_0)} \quad (x - x_0) & if\ \acute{f}(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & if\ \acute{f}(x_0) = 0 \end{cases}$$

أمثلة:

1. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة $y = (2x+3)e^{x^2}$ عند النقطة $P(0,3)$.

الحل:

نوجد أولاً ميل المماس $m = \acute{f}(0)$ للدالة.

$$\frac{dy}{dx} = \acute{f}(x) = 2x(2x+3)e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

عند $x = 0$ تكون $m = \acute{f}(0) = 2$

لذا تكون معادلة المماس هي $y - 3 = 2(x - 0)$ أو $y = 2x + 3$

ميل العمودي على المماس عند P يساوي $-\dfrac{1}{2}$ (من شرط تعامد مستقيمين)

معادلة العمودي هي $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 0)$ أو $2y = 6 - x$.

2. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة $y = x^2e^x + 2$ عند النقطة $P(0,2)$.

الحل: نوجد أولاً ميل المماس $m = f'(0)$ للدالة.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = x(x+2)e^x$$

عند $x = 0$ تكون $m = f'(0) = 0$

لذا تكون معادلة المماس هي $y - 2 = 0(x - 0)$ أو $y = 2$

ميل العمودي على المماس عند P يساوي $-\dfrac{1}{0} = \infty$ (من شرط تعامد مستقيمين) لذا يكون المستقيم رأسياً

$\therefore$ معادلة العمودي هي $x = 0$.

3. أثبت أنَّ معادلة المماس للمنحنى $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة $P(x_0,\ y_0)$ الواقعة على المنحنى هي $\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{x_0 x}{a^2}=1$.

الحل: نوجد أولاً ميل المماس $m=\acute{f}(x_0)$ للدالة.

بتفاضل طرفي المعادلة الضمنية للمنحنى $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$ تكون $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$

عند النقطة $P(x_0,\ y_0)$ تكون $m=\acute{y}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

$\therefore$ معادلة المماس عند P تكون $y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$

$a^2y_0y-a^2y_0^2=-b^2x_0x+b^2x_0^2$ أو $a^2y_0y+b^2x_0x=a^2y_0^2+b^2x_0^2$

بالقسمة على a^2b^2 تصبح المعادلة $\frac{y_0y}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}$

وبما أنَّ النقطة $P(x_0,\ y_0)$ تقع على المنحنى إذن هي تحقق معادلة المنحنى، أي $\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}=1$

وعليه تصبح معادلة المماس هي $\frac{y_0y}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}=1$.

4. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى النجيمي $\begin{cases} x=a\ \ cos^3(t) \\ y=a\ \ sin^3(t) \end{cases}$ عند النقطة $t=\frac{\pi}{3}$.

الحل:

أولاً نحسب ميل المماس عند النقطة التي تكون عندها $t=\frac{\pi}{3}$ بحساب $\frac{dy}{dx}$ عند $t=\frac{\pi}{3}$.

معادلة المنحنى في الصورة الوسيطية لذا $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt}=3asin^2(t)cos(t)$$

$$\frac{dx}{dt}=-3acos^2(t)sin(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3asin^2(t)cos(t)}{-3acos^2(t)sin(t)}=-tan(t)$$

عند $t=\dfrac{\pi}{3}$ تكون $m=\dfrac{dy}{dx}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

ثانياً نحدد إحداثيات النقطة على المنحنى التي تقابل قيمة $t=\dfrac{\pi}{3}$

عند $t=\dfrac{\pi}{3}$ تكون $x=a\ \ cos^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{a}{8}$ وتكون $y=a\ \ sin^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}\,a}{8}$

إذن النقطة المطلوب إيجاد معادلة المماس والعمودي عليه عندها هي النقطة $P\left(\dfrac{a}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}\,a}{8}\right)$.

لذا تكون معادلة المماس هي $y-\dfrac{3\sqrt{3}\,a}{8}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{a}{8}\right)$ أو $y+\sqrt{3}\,x=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

ومعادلة العمودي هي $y-\dfrac{3\sqrt{3}\,a}{8}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{a}{8}\right)$ أو $\sqrt{3}\,y-x=\dfrac{a}{4}$.

3. التفاضليات والتقريب الخطي Differentials and Linear approximation

لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق في جوار $x=a$، عندئذ $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ أو $dy=f'(x)\times dx$

حيث $dy=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$ ويسمى هذا المقدار بتفاضلية y.

$$dy\simeq f'(a)\times \Delta x$$

يمكن استخدام هذه العلاقة لتقريب قيمة التغيّر في الدالة عنما يكون التغيّر في x صغير بدرجة كافية.

لكن بملاحظة أن $\Delta y=f(x)-f(a)$، تكون

$$f(x)-f(a)\simeq f'(a)\times\Delta x\Rightarrow f(x)\simeq f(a)+f'(a)\times\Delta x$$

أي أنَّ

$$f(x)\simeq f(a)+f'(a)\times(x-a)$$

وهذه علاقة خطية تقريبية في x لتقريب الدالة $f(x)$

أمثلة:

1. لتكن $f(x)=x^3+x$ إذا تغيرت x من 1 إلى 1.01 أحسب التغيّر في قيمة الدالة وكذلك تقريب مقدار التغيّر في قيمة الدالة باستخدام التفاضلية.

الحل:

التغيّر في قيمة الدالة هو

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = ((1.01)^3 + 1.01) - 2 = 2.0403 - 2 = 0.040301$$

تقريب مقدار التغيّر في قيمة الدالة باستخدام التفاضلية هو

$$\Delta y \simeq \acute{f}(x) \times \Delta x,\ \ \Delta x = 0.01$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow \acute{f}(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$$

$$\Delta y \simeq 4 \times 0.01 = 0.04.$$

أي أنَّ الخطأ في التقريب $0.04301 - 0.04 = 0.00301$

2. باستخدام التفاضلية أوجد تقريب لقيمة $\sqrt{63}$.

الحل:

$$f(x) \simeq f(a) + \acute{f}(a) \times \Delta x$$

لنعتبر الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ بأخذ $a=64,\ \Delta x = -1$

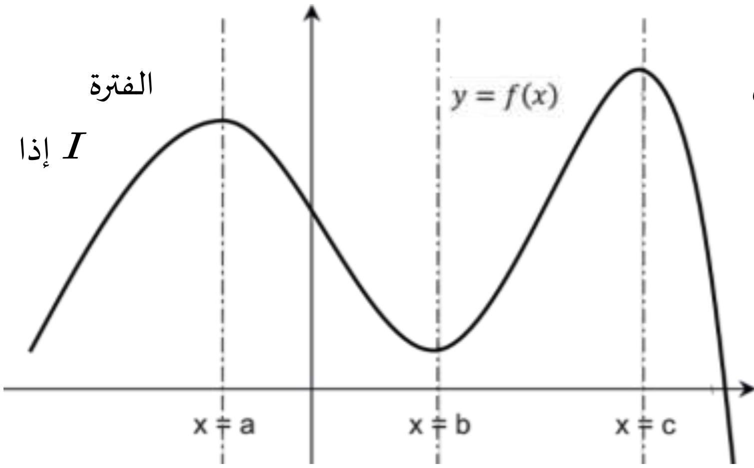
$$\therefore\ \sqrt{63} \simeq f(64) + \acute{f}(64) \times -1 = \sqrt{64} + \left(\frac{1}{2\sqrt{64}} \times -1\right) =$$

$$= 8 - \frac{1}{16} = 8 - 0.0625 = 7.9375$$

قيمة $\sqrt{63}$ مُقرَبة حتى خمس خانات عشرية هي $\sqrt{63} = 7.93725$.

أي أنَّ الخطأ في التقريب $0.00025 -$.

4. **تزايد وتناقص الدوال functions Increasing And Decreasing**



تعريف (تزايد الدالة): لتكن $y=f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة I ، يقال أنَّ الدالة $f(x)$ تزايديه على الفترة I إذا كانت $f(b)>f(a)$ لكل $a,\ b\in I$ و $b>a$.

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة I عندئذٍ تكون $f'(x)>0$ لكل $x\in I$ وذلك لأن

$\acute{f}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ وكل من $f(x+h)-f(x)$, h مقادير موجبة.

لذلك إن كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة I فإنَّ الشرط اللازم والكافي لتزايد الدالة هو $\acute{f}(x)>0$ لكل $x\in I$.

تعريف (تناقص الدالة): لتكن $y=f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة I ، يقال أنَّ الدالة $f(x)$ تناقصيه على الفترة I إذا كانت $f(b)<f(a)$ لكل $a,\ b\in I$ و $b>a$.

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة I عندئذٍ تكون $f'(x)<0$ لكل $x\in I$ وذلك لأن

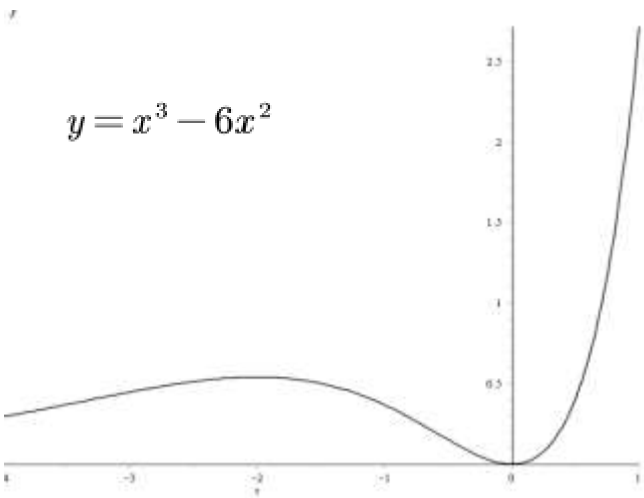
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ وذلك لأن $f(x+h)-f(x)<0$ و $h>0$.

لذلك إن كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة I فإنَّ الشرط اللازم والكافي لتناقص الدالة هو $f'(x)<0$ لكل $x\in I$.

في الشكل أعلاه تكون فترات التزايد والتناقص للدالة هي

فترات التزايد	فترات التناقص
$(-\infty,\ a)$	$(a,\ b)$
$(b,\ c)$	$(c,\ \infty)$

أمثلة:



1. أوجد فترات تزايد وتناقص الدالة $y=x^3-6x^2$.

الحل: نوجد أولاً مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-12x=3x(x-4)$$

عند فترات التزايد تكون $\frac{dy}{dx}>0$ أي $3x(x-4)>0$

وذلك يكون عندما

$x<0 \;\; and \;\; x-4<0$ أي $x<0 \;\&\; x<4$ أي

$x<0$ وهي الفترة $(-\infty,\ 0)$

أو $x>0 \;\; and \;\; x-4>0$ أي $x>0 \;\&\; x>4$ أي $x>4$ وهي الفترة $(4,\ \infty)$

عند فترات التناقص تكون $\frac{dy}{dx}<0$ أي $3x(x-4)<0$ وذلك يكون عندما

$x>0 \;\; and \;\; x-4<0$ أي $x>0 \;\&\; x<4$ أي $x<0$ وهي الفترة $(0,\ 4)$

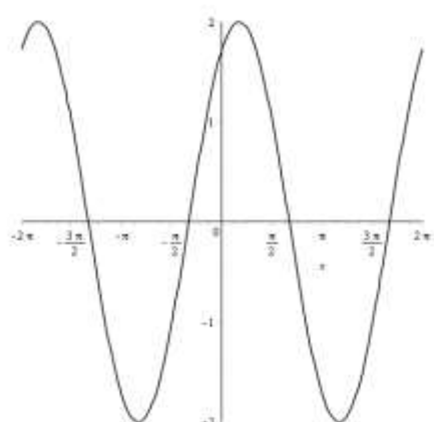
أو $x<0 \;\; and \;\; x-4>0$ وذلك غير ممكن.

إذن فترات التزايد هي $(-\infty,\ 0)$ و $(4,\ \infty)$ أما فترة التناقص فهي $(0,\ 4)$.

2. أثبت أنَّ الدالة $y=ln\,(x)$ تتزايد على مجال تعريفها.

الحل: فترة تعريف الدالة هي $(0,\ \infty)$. مشتقة الدالة هي $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ مجال التعريف هو $x>0$ أي $\frac{1}{x}>0$

إذن $\frac{dy}{dx}>0$ لجميع قيم x في مجال التعريف، وهذا يثبت المطلوب.



3. أوجد فترات تزايد الدالة $y=sin\,(x)+\sqrt{3}\ \ cos\,(x)$.

الحل: يُمكن كتابة الدالة على الصورة $y=A\ \ sin\,(x+\theta)$

$$y=sin\,(x)+\sqrt{3}\,cos\,(x)=2\left(\frac{1}{2}sin\,(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,(x)\right)=$$

$$=2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\,(x)+sin\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\,(x)\right)=2sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

تكون المشتقة موجبة إذا كانت $x + \frac{\pi}{3}$ تقع في الربعين الأول والرابع، أي $2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < 2\pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{I}$ أي

$2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي أنَّ فترات التزايد هي $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

5. **القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة Absolute Extreme Values of A Function**

تعريف (القيمة العظمى المطلقة Absolute Maximum Value) لتكن $y = f(x)$ دالة مُعرَّفة على مجال D، يُقال أنَّ للدالة قيمة عظمى مُطلقة عند النقطة $x = a$ إذا كانت $f(a) \geq f(x)$ لكل $x \in D$، وتُسمى القيمة $f(a)$ بالقيمة العظمى للدالة على المجال D.

تعريف (القيمة الصغرى المطلقة Absolute Minimum Value) لتكن $y = f(x)$ دالة مُعرَّفة على مجال D، يُقال أنَّ للدالة قيمة صغرى مُطلقة عند النقطة $x = a$ إذا كانت $f(a) \leq f(x)$ لكل $x \in D$، وتُسمى القيمة $f(a)$ بالقيمة الصغرى للدالة على المجال D.

تُسمى القيم العظمى والصغرى بالقيم القصوى المطلقة للدالة **Local Extreme Values**.

أمثلة:

1. أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة إن وجدَت للدالة $y = 1 + x^2$.

الحل:

$$f(x) = 1 + x^2 \geq 1 + (0)^2 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

لذلك أقل قيمة للدالة تكون عند النقطة $x = 0$ والقيمة الصغرى المطلقة للدالة هي $y_{min} = 1$.

2. أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة إن وجدَت للدالة $y = 1 + 2x - x^2$.

الحل:

$$f(x) = 1 - (x^2 - 2x) = 1 - (x^2 - 2x + 1 - 1) = 1 - ((x-1)^2 - 1) = 2 - (x-1)^2$$

$f(x) \leq 2-(0)^2 \Rightarrow f(1) \geq f(x)\ \forall_{x \in \mathbb{R}}$

لذلك أكبر قيمة للدالة تكون عند النقطة $x=1$ والقيمة العظمى المطلقة للدالة هي $y_{max}=2$.

3. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $y=3\ sin(x)$.

الحل:

من المعلوم أنَّ $-1 \leq sin(x) \leq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore -3 \leq 3sin(x) \leq 3, \ \Rightarrow\ -3 \leq f(x) \leq 3\ \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

لذلك تكون القيمة الصغرى المطلقة هي $y_{min}=-3$ وذلك عند $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{I}$

والقيمة العظمى المطلقة $y_{max}=3$ وذلك عند $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{I}$.

4. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $y=\frac{1}{x^2+3}$.

الحل:

$x^2+3 \geq 3$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3},\ \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

لذلك تكون القيمة الصغرى المطلقة هي $y_{min}=\frac{1}{3}$ وذلك عند $x=0$.

5. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $y=cosh(x)$.

الحل:

من المعلوم أنَّ $cosh(x) \geq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

لذلك تكون القيمة الصغرى المطلقة هي $y_{min}=1$ وذلك عند $x=0$

6. **القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة Local Extreme Values of A Function**

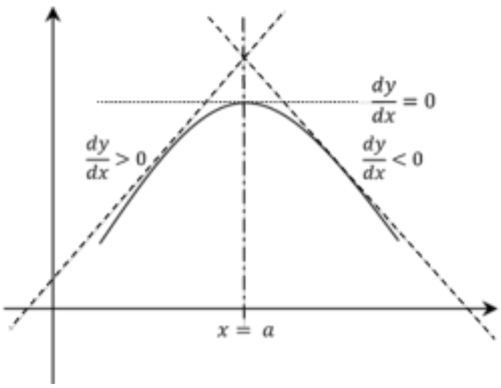
تعريف (القيمة العظمى المحلية Local Maximum Value) لتكن $y = f(x)$ دالة مُعرَّفة على مجال D، يُقال أنَّ للدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة $x = a$ إذا وجد جوار N_a للنقطة $x = a$ بحيث $f(a) > f(x)$ لكل $x \in N_a - \{a\}$، وتُسمى القيمة $f(a)$ بالقيمة العظمى المحلية للدالة عند النقطة $x = a$.

تعريف (القيمة الصغرى المحلية Local Minimum Value) لتكن $y = f(x)$ دالة مُعرَّفة على مجال D، يُقال أنَّ للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة $x = a$ إذا وجد جوار N_a للنقطة $x = a$ بحيث $f(a) < f(x)$ لكل $x \in N_a - \{a\}$، وتُسمى القيمة $f(a)$ بالقيمة الصغرى المحلية للدالة عند النقطة $x = a$.

تُسمى القيم العظمى والصغرى المحلية بالقيم القصوى المحلية للدالة **Local Extreme Values**.

شروط وجود نقاط النهايات القصوى المحلية للدالة (اختبار المشتقة الأولى):

A. شروط وجود نقطة النهاية العظمى المحلية:



شروط وجود نقطة نهاية عظمى محلية عند النقطة $x = a$

(1) تكون الدالة تزايديه قبل النقطة $x = a$ في الجوار، أي

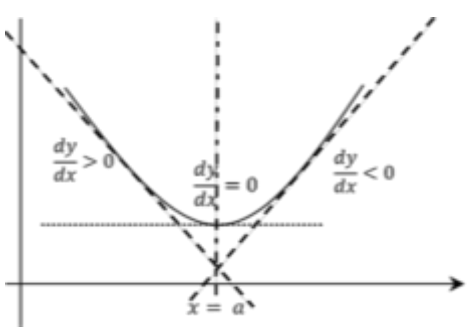
$$\frac{dy}{dx} > 0$$

(2) يكون المماس موازياً لمحور x عند النقطة $x = a$، أي

$$\frac{dy}{dx} = 0$$ عند النقطة $x = a$.

(3) تكون الدالة تناقصية بعد النقطة $x = a$ في الجوار، أي $\frac{dy}{dx} < 0$.

B. شروط وجود نقطة النهاية العظمى المحلية:



شروط وجود نقطة نهاية عظمى محلية عند النقطة $x = a$

(1) تكون الدالة تناقصية قبل النقطة $x = a$ في الجوار، أي $\frac{dy}{dx} < 0$.

(2) يكون المماس موازياً لمحور x عند النقطة $x = a$، أي $\frac{dy}{dx} = 0$ عند النقطة $x = a$.

(3) تكون الدالة تزايديه بعد النقطة $x=a$ في الجوار، أي $\frac{dy}{dx}>0$.

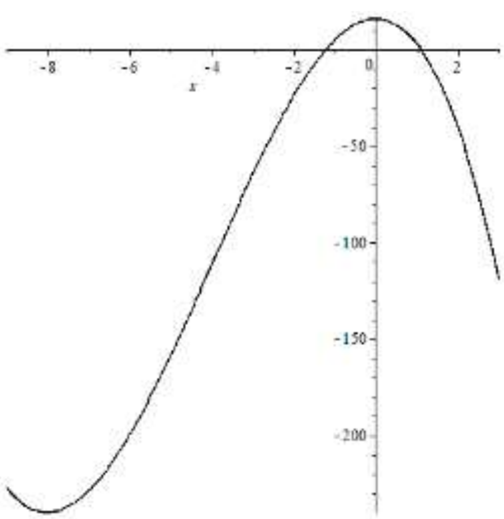
- **خطوات إيجاد النقاط القصوى المحلية للدالة $\boldsymbol{y=f(x)}$.**

1. إيجاد $\frac{dy}{dx}=0$ ثم حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=0$.
2. عند كل نقطة $x=a$ من نقاط حل المعادلة السابقة نحدد إشارة $\frac{dy}{dx}$ قبل وبعد النقطة في جوار النقطة.
3. إذا تغيرت إشارة $\frac{dy}{dx}$ من موجبة إلى سالبة تكون النقطة $x=a$ نقطة نهاية محلية عظمى، أما إذا تغيرت إشارة $\frac{dy}{dx}$ من سالبة إلى موجبة تكون النقطة $x=a$ نقطة نهاية محلية صغرى.

أمثلة:

1. أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدَت للدالة $y=16-x^3-12x^2$.

الحل:



$$\frac{dy}{dx}=-3x^2-24x=-3x(x+8)$$

$$\frac{dy}{dx}=0,\ \Rightarrow\ -3x(x+8)=0,\ \Rightarrow x=\{-8,0\}$$

بالنسبة للنقطة $x=-8$: نبحث عن إشارة $\frac{dy}{dx}$ قبل النقطة أي $x<-8$ أي $x+8<0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right)=-3x(x+8)=(-)\,(-)\,(-)=(-)$$

نبحث عن إشارة $\frac{dy}{dx}$ بعد النقطة أي $x>-8$ أي $x+8>0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right)=-3x(x+8)=(-)\,(-)\,(+)=(+)$$

تغيرت إشارة $\frac{dy}{dx}$ من سالبة إلى موجبة، إذن توجد نهاية صغرى محلية عند النقطة $x=-8$ وقيمتها هي

$$f(-8)=16-512-768=-1264$$

بالنسبة للنقطة $x=0$: نبحث عن إشارة $\frac{dy}{dx}$ قبل النقطة أي $x<0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -3x(x+8) = (-)\,(-)\,(+) = (+)$$

نبحث عن إشارة $\frac{dy}{dx}$ بعد النقطة أي $x < -8$ أي $x + 8 < 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -3x(x+8) = (-)\,(-)\,(-) = (-)$$

تغيرت إشارة $\frac{dy}{dx}$ من موجبة إلى سالبة، إذن توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة $x = 0$ وقيمتها هي

$$f(0) = 16$$

إذن للدالة $y = 16 - x^3 - 12x^2$ نقطة نهاية صغرى هي $(-8,\ 1264)$ ونقطة نهاية عظمى هي $(0,\ 16)$.

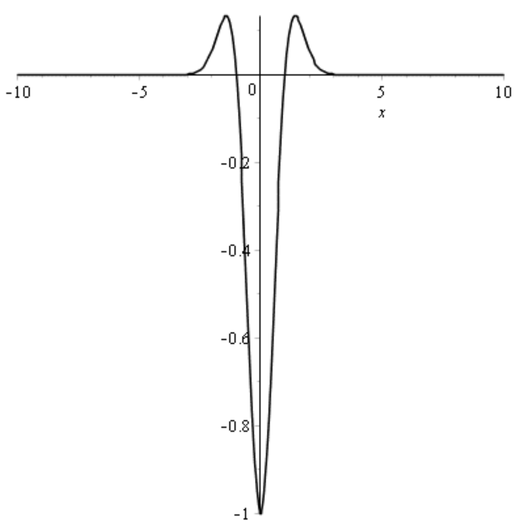
2. **أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدَت للدالة** $y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = [-2x(x^2-1) + 2x]\,e^{-x^2} = -2x\,(x^2-2)\,e^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0, \ \Rightarrow\ -2x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\therefore x = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$



$y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$

بالنسبة للنقطة $x = -\sqrt{2}$: قبلها في الجوار

$$x < -\sqrt{2}, \rightarrow x + \sqrt{2} < 0$$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = sign\left(-2x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)e^{-x^2}\right) =$$

$$= (-)\,(-)\,(-)\,(-)\,(+) = (+)$$

بعدها في الجوار $x > -\sqrt{2}, \rightarrow x + \sqrt{2} > 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)e^{-x^2} = (-)\,(-)\,(+)\,(-)\,(+) = (-)$$

تغيرت الإشارة من موجبة إلى سالبة، لذلك النقطة $x = -\sqrt{2}$ هي نقطة عظمى محلية قيمتها $f\left(-\sqrt{2}\right) = e^{-2}$

بالنسبة للنقطة $x = 0$: قبلها في الجوار $x < 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)e^{-x^2} = (-)\,(-)\,(+)\,(-)\,(+) = (-)$$

بعدها في الجوار $x > 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})\,e^{-x^2}e^{-x^2} = (-)\,(+)\,(+)\,(-)\,(+) = (+)$$

تغيرت الإشارة من سالبة إلى موجبة، لذلك النقطة $x=0$ هي نقطة صغرى محلية قيمتها $f(0) = -1$

بالنسبة للنقطة $\boldsymbol{x} = \sqrt{2}$: قبلها في الجوار $x < \sqrt{2},\ \rightarrow x - \sqrt{2} < 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})\,e^{-x^2} = (-)\,(+)\,(+)\,(-)\,(+) = (+)$$

بعدها في الجوار $x > 2,\ \rightarrow x - 2 > 0$

$$sign\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})\,e^{-x^2} = (-)\,(+)\,(+)\,(+)\,(+) = (-)$$

تغيرت الإشارة من موجبة إلى سالبة، لذلك النقطة $x=2$ هي نقطة عظمى محلية قيمتها $f(2) = e^{-2}$

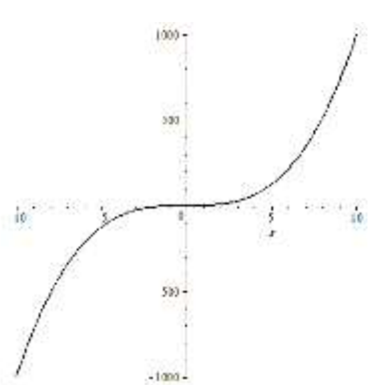
إذن بالنسبة للدالة $y = (x^2-1)e^{-x^2}$ توجد نقطة محلية صغرى عند $(0,\ -1)$ ونقطتي نهاية عظمى محلية عند $(-\sqrt{2}, e^{-2})$ و $(\sqrt{2}, e^{-2})$.

نقاط الانقلاب Inflection Points:

نقطة الانقلاب هي النقطة التي يتغير عندها اتجاه تقعُّر الدالة خلال فترة تزايد أو تناقص الدالة و يكون ميل المماس عندها أفقيا لذا فهي تحقق الشرط $\frac{dy}{dx} = 0$ إلاّ أنها ليست نقطة نهاية عظمى أو صغرى فإشارة الدالة في جوار نقطة الانقلاب لا تتغير.

النقاط الحرجة Critical Points:

النقاط الحرجة للدالة $y = f(x)$ هي مجموعة النقاط القصوى المحلية ونقاط الانقلاب بالإضافة للنقاط التي تكون عندها المشتقة غير موجودة.



مثال: أدرس النقاط الحرجة للدالة $y = x^3$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2,\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0,\ \Rightarrow 3x^2 = 0,\ \therefore x = 0$$

نلاحظ أنَّ إشارة $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبل وبعد النقطة $x=0$ في الجوار لذا تكون النقطة $x=0$ نقطة انقلاب.

اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيم القصوى المحلية:

مبرهنة: لتكن $y=f(x)$ دالة مشتقتها الثانية موجودة ومستمرة في جوار للنقطة $x=a$ ولتكن $f'(a)=0$، عندئذٍ تكون للدالة $y=f(x)$ نهاية عظمى محلية عند النقطة $x=a$ إذا كانت $f''(a)<0$ ونهاية صغرى محلية عند النقطة $x=a$ إذا كانت $f''(a)>0$.

البرهان: نثبت الجزء الأول من المبرهنة المتعلق بالنهاية العظمى المحلية، من استمرارية المشتقة الثانية في جوار للنقطة $x=a$ وبما أنَّ $f''(a)<0$ إذن يوجد جوار للنقطة $x=a$ بحيث تكون $f''(x)<0$ عند نقاط ذلك الجوار.

وبما أنَّ $f''(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $f'(x)$ فإنَّ ذلك يقتضي أن $f'(x)$ تناقصية في جوار النقطة $x=a$، لكن $f'(a)=0$ إذن $f'(x)>0$ قبل النقطة $x=a$ وتكون $f'(x)<0$ بعد النقطة $x=a$ في جوار النقطة $x=a$ وذلك يقضي بأنَّ النقطة $x=a$ هي نقطة نهاية عظمى محلية.

إثبات الجزء الثاني المتعلق بالنهاية الصغرى المحلية يُترك كتدريب.

- **خطوات إيجاد النقاط القصوى المحلية للدالة $y=f(x)$ باستخدام اختبار المشتقة الثانية:**
  1. إيجاد $\frac{dy}{dx}=0$ ثم حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=0$.
  2. عند كل نقطة $x=a$ من نقاط حل المعادلة السابقة نحدد إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$.
  3. إذا كانت إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة تكون النقطة $x=a$ نقطة نهاية محلية عظمى، أما إذا كانت إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة تكون النقطة $x=a$ نقطة نهاية محلية صغرى.
  4. إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية ويُستخدم اختبار المشتقة الأولى.

أمثلة:

1. **باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة** $y=16-x^3-12x^2$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 24x = -3x(x+8), \quad \frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow -3x(x+8) = 0, \Rightarrow x = \{-8, 0\}$$

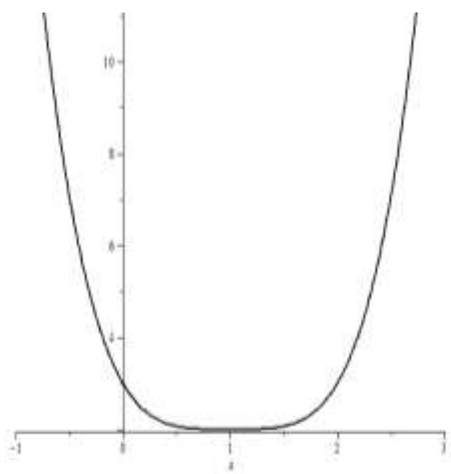
نجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x - 24 = -6(x+4)$

عند النقطة $x = -8$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \times -4 = 24 > 0$ إذن توجد نهاية محلية صغرى عند $x = -8$ وقيمتها $f(-8) = -1264$

عند النقطة $x = 0$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \times 4 = -24 < 0$ إذن توجد نهاية محلية عظمى عند $x = 0$ وقيمتها $f(0) = 16$.

2. **أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة** $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3$.

الحل:



$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$
$$= 4(x-1)^3$$
$$\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow 4(x-1)^3 = 0, \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(x-1)^2$$

عند $x = 1$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ لذا يفشل اختبار المشتقة الثانية.

باستخدام اختبار المشتقة الأولى

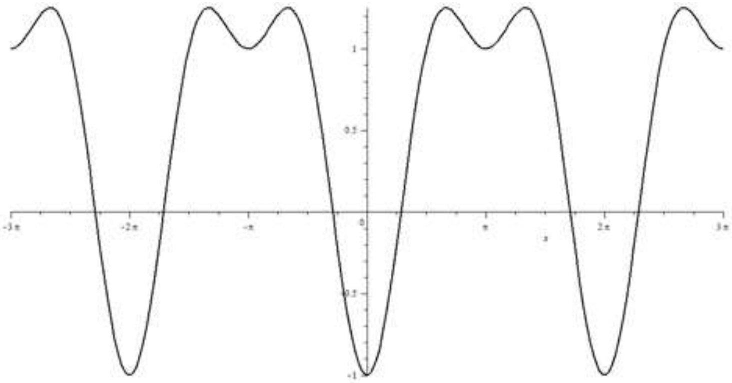
قبل النقطة $x = 1$ في الجوار تكون $x < 1$ أي $x - 1 < 0$ لذلك تكون $\frac{dy}{dx} = 4(x-1)^3 < 0$

بعد النقطة $x = 1$ في الجوار تكون $x > 1$ أي $x - 1 > 0$ لذلك تكون $\frac{dy}{dx} = 4(x-1)^3 > 0$

تغيرت إشارة $\frac{dy}{dx}$ من سالبة إلى موجبة، إذن توجد نقطة نهاية صغرى عند $x = 1$ وقيمتها $f(1) = 2$.

3. **أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة** $y = sin^2(x) - cos(x)$.

الحل:



$$\frac{dy}{dx} = (2sin(x)cos(x)) + sin(x) =$$
$$= sin(x)\,(2cos(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow sin(x)\,(2cos(x)+1) = 0, \Rightarrow sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{I}$$

أو $(2cos(x)+1) = 0$ إذن $cos(x) = -\frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ \ k \in \mathbb{I}$

نجد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2cos^2(x) - 2\ sin^2(x) + cos(x) = 4cos^2(x) + cos(x) - 2$$

- عند $x = k\pi$ تكون

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4cos^2(k\pi) + cos(k\pi) - 2 = 4 + (-1)^k - 2 > 0$$ نهاية صغرى محلية وقيمتها

$$f(k\pi) = sin^2(k\pi) - cos(k\pi) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1 & if\ k\ is\ odd \\ -1 & if\ k\ is\ even \end{cases}$$

- عند $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ تكون

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) - 2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

نهايات عظمى محلية وقيمتها

$$f\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) - cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

- عند $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ تكون

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4cos^2\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)+cos\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)-2=1-\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}<0$$

نهايات عظمى محلية وقيمتها

$$f\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)=sin^2\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)-cos\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

تمارين

1. سلم طوله 25 قدم تستند حافته العلوية على حائط رأسي وحافته السفلى تستند على أرضية أفقية، إذا كانت الحافة العلوية للسلم تنزلق إلى الأسفل بسرعة $0.6\ feet/sec$ عندما كانت الحافة السفلى على بعد 4 أقدام عن الحائط، أحسب سرعة انزلاق الحافة السفلى. الإجابة: $0.45\ feet/sec$ بعيداً عن الحائط
2. مقاومتان كهربيتان موصلتان على التوازي، الأولى مقدارها $20\ \Omega$ والثانية مقدارها $10\ \Omega$ عندما بدأت المقاومة الأولى تتزايد بمعدّل $0.7\ \Omega/\ sec$ ظلت المقاومة الكلية المكافئة أوجد معدّل التغير في المقاومة الثانية.
3. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $y=e^{2\sin^2(x)}$ عند النقطة $P\left(\frac{3\pi}{2},\ e^{-2}\right)$.
4. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $y=xln\left(x+1\right)$ عند النقطة $x=e-1$.
5. أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $\begin{cases} x=ln\left(\dfrac{t}{t-1}\right) \\ y=ln\left(\dfrac{t^2}{t-1}\right)\end{cases}$ عند النقطة $t=e$.
6. أوجد الزاوية الحادة بين مماسي المنحنيين $y=x^4-12$ و $y=x^2$ عند نقاط تقاطع المنحنيين.
7. باستخدام التفاضلية أوجد تقريب لقيمة $\sqrt[3]{126}$.
8. باستخدام التفاضلية أوجد تقريب لقيمة $sin\left(91^\circ\right)$.
9. أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $y=x^3-6\pi\ x+e$.
10. أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $y=ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

11. أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة إن وجدَت للدالة $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

القيمة العظمى المطلقة للدالة هي $y_{max} = \dfrac{1}{3}$ عند $x = 2$

12. أدرس النقاط الحرجة للدالة $y = x^3 e^{-6\,x^2}$.

صغرى محلية $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{8}e^{-\frac{3}{2}}\right)$　　نقطة انقلاب $(0,\ 0)$　　عظمى محلية $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

13. أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $y = tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

صغرى محلية $\left(-1,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$ وعظمى محلية عند $\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

14. أدرس النقاط الحرجة للدالة $y = ln\left(x^4 - 4x^3 + 28\right)$.

نقطة انقلاب $(0,\ ln(28))$　　صغرى محلية $(3,\ 0)$

15. أدرس النقاط الحرجة للدالة $y = ln\left(\dfrac{x^4 + x^3 + 27}{x^4 - x^3 + 27}\right)$.

عظمى محلية $\left(-3,\ ln\left(\dfrac{5}{3}\right)\right)$　　نقطة انقلاب $(0,\ 0)$　　صغرى محلية $\left(3,\ -\ ln\left(\dfrac{5}{3}\right)\right)$

16. أدرس النقاط الحرجة للدالة $y = e^{2\sin^2(x)}$.

صغرى محلية $(k\pi, 1)\quad k \in \mathbb{I}$　　عظمى محلية $\left(\dfrac{2k-1}{2}\pi, e^2\right)\quad k \in \mathbb{I}$