التوافيق الخطية (Linear Conbinations)

لتكن لدينا المتجهات $v_1, v_2, \dots, v_p$ والأعداد القياسية $c_1, c_2, \dots, c_p$ ،
المتجه (y) المعرف بـ $y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$
يسمى بالتوفيقة الخطية لـ $v_1, v_2, \dots, v_p$ مع الأوزان $c_1, c_2, \dots, c_p$

مثال :-

لتكن

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وضح ما إذا كان يمكن كتابة (b) كتوفيقة خطية في v_1, v_2 .

الحل :-

b توفيقة خطية في v_1 و v_2 إذا وجدت x_1 و x_2 حيث أعداد قياسية حيث $b = x_1 v_1 + x_2 v_2$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = 7$$
$$-2x_1 + 5x_2 = 4$$
$$-5x_1 + 6x_2 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1 = 3 \quad , x_2 = 2$

$b = 3v_1 + 2v_2$

وبالتالي يمكننا القول أن معادلة المتجه $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = b$

لها نفس مجموعة حل النظام الخطي الذي مصفوفته الممتدة $[v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n \; b]$ (*)

أي أن المتجه (b) يمكن التعبير عنه كتوفيقة خطية في $v_1, v_2, \dots, v_n$

إذا وفقط إذا كان يوجد حل للنظام الخطي المقابل للمصفوفة (*).

* تعريف :-

إذا كان $v_1, v_2, \dots, v_p$ في $\mathbb{R}^n$ فإن مجموعة كل التوافيق الخطية

لـ $v_1, v_2, \dots, v_p$ يرمز لها بالرمز $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ وتسمى المجموعة

الجزئية من $\mathbb{R}^n$ المولدة بـ $v_1, v_2, \dots, v_p$ أي أن $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ هي

مجموعة كل المتجهات التي يمكن كتابتها في الشكل $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p$ حيث

$c_1, c_2, \dots, c_p$ أعداد قياسية .

* مثال :-

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \& \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{هل} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

هل $b \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ ؟ $b = x_1v_1 + x_2v_2$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 &= -2 \\ -5x_1 + 6x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -5 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1 \;,\; x_2 = 0 \qquad b = 1v_1 + 0v_2 \qquad \therefore b \in \text{span}\{v_1, v_2\}$

$v_1 = 1v_1 + 0v_2$

$Ax=b$:- (The matrix equation) المعادلة المصفوفية *

* تعريف :-

إذا كان (A) مصفوفة $m\times n$ بأعمدة $a_1, a_2, \dots, a_n$ وكانت $x \in \mathbb{R}^n$

إذا حاصل ضرب المصفوفة (A) بالمتجه (x) يرمز لها ب (Ax) هو توفيقة

خطية في أعمدة المصفوفة باستخدام عناصر (x) كأوزان أي :-

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

* مثال :-

لتكن المتجهات $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^m$ أكتب التوفيقة الخطية $3v_1 - 5v_2 + 7v_3$

كحاصل ضرب مصفوفة في متجه (Ax) .

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

* مثال :-

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

* Ex :-

(b) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix}$$

* نظرية :-

إذا كان مصفوفة $m\times n$ بأعمدة $a_1 \dots a_n$ وكانت $b\in\mathbb{R}^m$ فإن المعادلة المصفوفية $Ax=b$ لها نفس مجموعة حل المعادلة المتجهية $x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n=b$ والتي لها نفس مجموعة حل النظام الخطي الذي مصفوفته الممتدة $[a_1 \cdots a_n \; b]$

* وجود الحل :-

المعادلة $(Ax=b)$ لها حل إذا وفقط إذا كانت (b) توفيقة خطية في أعمدة المصفوفة (A).

* مثال :-

لتكن

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ -4 & 2 & -6\\ -3 & -2 & -7\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

هل المعادلة $Ax=b$ متسقة لجميع قيم b_1, b_2, b_3 ؟

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & b_1\\ -4 & 2 & -6 & b_2\\ -3 & -2 & -7 & b_3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & b_1\\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1\\ -3 & -2 & -7 & b_3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & b_1\\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1\\ 0 & 7 & 5 & b_3+3b_1\end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{R_2}{2}+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & b_1\\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1\\ 0 & 0 & 0 & b_1-\frac{1}{2}b_2+b_3\end{bmatrix}$$

∴ المعادلة $Ax=b$ غير متسقة لكل (b) لأنه توجد بعض القيم لـ b_1, b_2, b_3 تجعل $b_1+b_2+b_3$ عدد غير صفري مما يجعل وجود صف في الصورة $[0 \; 0 \; 0 \; b]$ حيث $b\neq 0$ وبالتالي فإن النظام يكون متسق عندما تكون $b_1-\frac{1}{2}b_2+b_3=0$

* مبرهنة :-

لتكن (A) مصفوفة $m \times n$ فإن الجمل الآتية متكافئة منطقياً (أي إمّا كلها صحيحة أو كلها خاطئة).

1. لكل ($b \in \mathbb{R}^m$) المعادلة ($Ax = b$) لها حل.
2. لكل ($b \in \mathbb{R}^m$) توفيقة خطية في أعمدة (A).
3. أعمدة (A) تولد ($\mathbb{R}^m$).
4. يكون لـ (A) موقع إرتكازي في كل عمود.