بعض القوانين على الفئات (متطابقات الفئات) **Set Identities**:

$A\cup\phi=A$ $A\cap U=A$	Identity laws
$A\cup U=U$ $A\cap\phi=\phi$	Domination laws
$A\cup A=A$ $A\cap A=A$	Idempotent laws
$(A^c)^c=A$	Complementation laws
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	Commutative laws
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	Associative laws
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	Distributive laws
$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$	De Morgan’s laws
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	Absorption laws
$A\cup A^c=U$ $A\cap A^c=\phi$	Complement laws

مثال: لتكن A,B فئتان اختياريتان عندئذ $(A-B)\bigcap B=\phi$

البرهان :

لنفرض أن $(A-B)\bigcap B\neq\phi$ عندئذ يوجد $x\in(A-B)\bigcap B$ أي $x\in A-B$ و $x\in B$.

لتكن $x\in A-B$ يقتضي أن $x\in A$ و $x\notin B$. تناقض. اذن،

$$(A-B)\bigcap B=\phi$$

مثال: لتكن A، B و C. وضح ان:

$$(A\cup(B\cap C))^c=(C^c\cup B^c)\cap A^c$$

الحل:

من قانون دى مورجان الاول	$(A\cup(B\cap C))^c=A^c\cap(B\cap C)^c$
من قانون دى مورجان الثانى	$=A^c\cap(B^c\cup C^c)$
من قانون الابدال للتقاطع	$=(B^c\cup C^c)\cap A^c$
من قانون الابدال للاتحاد	$=(C^c\cup B^c)\cap A^c$

فئة القوة Power Set

تعريف: لتكن A أي فئة. تعرف فئة القوة power set لـ A بانها فئة جميع الفئات الجزيئة من A و يرمز لها بالرمز $p(A)$.

مثال: اذا كان $A=\{1,2,3\}$ فان

$$\Rightarrow p(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,2,3\}\}$$

مثال: ما هى فئة القوة للفئة الخالية؟

الحل: $p(\phi)=\{\phi\}$

مثال: ما هى فئة القوة للفئة $\{\phi\}$ ؟

الحل: $p(\{\phi\})=\{\phi,\{\phi\}\}$

نظرية : اذا كان $A\subseteq B$ فان $p(A)\subseteq p(B)$

البرهان : لتكن $x\subseteq p(A)$ عندئذ $x\subseteq A$ ولكن $A\subseteq B$ وعليه فان $x\in B$ ومن ثم $p(B)$.

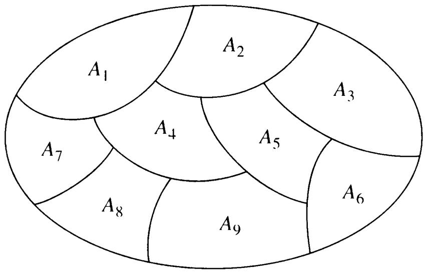
تجزئة الفئة Partition of a Set

تعريف: لتكن A فئة غير خالية $A_n,\cdots A_2,A_1$ فئات جزئية من A يقال ان $\{A_2,A_1\cdots A_n\}$ تشكل تجزئة partition لـ A اذا و فقط كان :

(1) $$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A$$

(2) $$A_j \cap A_k = \phi, \quad \forall j \neq k$$

الشكل التالى يوضح ذلك:



مثلاً : اذا كان :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A_1 = \{1, 2\} \qquad A_2 = \{3, 4\}$$

$A_3 = \{3, 6\}$ فإن

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \phi$$

وعليه، فان $\{A_1, A_2, A_3\}$ تشكل تجزئة على A .

أيضاً $\{Z^-, \{0\}, Z^+\}$ تشكل تجزئة على Z حيث Z^- هي فئة الاعداد الصحيحة السالبة ، Z^+ هي فئة الاعداد الصحيحة الموجبة ، Z هى فئة جميع الاعداد الصحيحة .

الاعداد الكاردينالية Cardinal numbers

تعريف: لتكن A أي فئة. تعرف كاردينالية الفئة A أو العدد الكاردينالي للفئة A بانها عدد عناصر A و يرمز لها بالرمز $|A|$.

ملحوظة: اذا كان كاردينالية A منتهية فيقال A منتهية و الا فهى غير منتهية .

فمثلاً $|\phi| = 0$ ، $|\{\phi\}| = 1$ ، $|Z| = \infty$

مثال: اذا كان A هى مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة اقل من 10 فان $|A|=5$

Some Properties of Cardinal Numbers بعض خصائص الاعداد الكاردينالية

(a) اذا كانت $A\subseteq B$ فان $|A|\le|B|$

(b) لاي فئتين A,B يكون $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

(c) $|A\cup B|\le|A|+|B|$ (باستخدام /b).

ويكون $|A\cup B|=|A|+|B|$ اذا كانت B,A متفصلتان أي $A\cap B=\phi$

(d) اذا كانت $|A|=n$ فان $|p(A)|=2^n$.

Cartesian Product الضرب الكارتيزى

النونية المرتبة Ordered n-tuple:

تعرف النونية المرتبة، ويرمز لها بـ $(a_1,a_2,\dots,a_n)$، بانها تجميع للعناصر المرتبة بحيث يكون a_1 هو العنصر الاول، a_2 هو العنصر الثانى،...، و a_n هو العنصر النونى.

ملحوظة: نقول ان $(a_1,a_2,\dots,a_n)=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ اذا وفقط اذا كان $a_i=b_i$ ، $i=1,2,\dots,n$. على وجه الخصوص اذا كان $n=2$ فان النونية المرتبة تسمى فى هذه الحالة بالزوج المرتب ordered pair وتكتب كالتالى (a_1,a_2).

تعريف: لتكن A و B فئتين. حاصل الضرب الكارتيزى لـ A و B، يرمز له بـ $A\times B$، هو مجموعة كل الازواج المرتبة (a,b) بحيث $a\in A$ و $b\in B$. اذن،

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\}$$

مثال: اوجد $A\times B$ اذا كان $A=\{1,2\}$ و $B=\{a,b,c\}$.

الحل:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

تمرين: مستخدما المثال السابق، وضح ان $A\times B \neq B\times A$.

تعريف: حاصل الضرب الكارتيزى للفئات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، ويكتب $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ، هو عبارة عن فئة الازواج المرتبة $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ حيث $a_i \in A_i$ ، $i=1,2,\ldots,n$. اذن،

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n\}$$