

(47)

Linear Independence الخطي الخطية

= حمل خطياً إذا وفقط إذا $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ في \mathbb{R}^n يقال أن المجموعة

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0 \quad \text{إذا كان المتجهات}$$

نها الحل المعملي فقط . ويقال أنها متمدة خطياً إذا !

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0$ ليس جميعها صفراء بحيث $c_i \neq 0$ وجنت أوزان

وفي هذه الأحوال نسمي هذه المعادلة بعلاقة ارتباط الخطى بين المتجهات

v_1, v_2, \dots, v_p

- مثال *

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) عدد ما إذا كانت المتجهات v_1, v_2, v_3 متمدة خطياً

(2) إما أهلن أو وحد صحة ارتباط خطى بين v_1, v_2, v_3

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

بما أن x_3 متغير حر \Leftrightarrow يوجد حل بين الحل المعملي .

ـ v_3 متمدة خطياً .

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$
 $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$

x_3 free

$$\frac{x_1}{3} = 5 \Rightarrow x_1 = 10$$

$$10v_1 + 5v_2 + 5v_3 = 0$$

* المجموعات التي تحتوي متتجه أو متتجهين :-

* المجموعة التي تحتوي متتجه واحد فقط $\{v_1\}$ تكون مستقلة خللياً
إذا وفقاً إذا كان $v_1 \neq 0$ ، حيث أن المجموعة التي تحتوي المتتجه
الصوري فقط تكون دارثماً معدولة خللياً .

* أذا الصيغة الملونة من متتجهين $\{v_1, v_2\}$ تكون مرتبطة خللياً إذا
كانت أحد المتتجهات متقاعدة للآخر و تكون مستقلة خللياً إذا وفقاً إذا
لم يوجد متتجه متقاعدة للآخر .

* مثال :-

فان :-

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

* المجموعات التي تحتوي أكثر من متتجهين :-

* مثال :-

المجموعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون مترتبة خللياً إذا وفقاً إذا كان على الأقل أحد المتتجهات في S له توافقه
خللية في المتتجهات الأخرى يمكّن كتابتها في شكل توافقه خطية
فإنه توجد بعض λ_i حيث $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ يمثل كتابتها في شكل توافقه خطية
في المتتجهات السابقة له

* تتميم :-

هذا يعني أن جميع المتتجهات يجب أن تحتسب في شكل توافقه خطية
في البداية .

Date : _____

No. : _____

(49)

* مبرهنة :-

ليكن A مatic $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ في R^n فإذا كان عدد المستدعيات

$p > n$ فإن المجموعة تكون معتمدة
وكذلك من عدد العناصر في المتجه (A) $p > n$.

* البرهان :-

فإن $Ax = 0$ وبالتالي فإن $A = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ هي مجموعه من n عد المستدعيات

أكبر من عدد المعادلات وهذا يقتضي وجود متغيرات حرة وبالتالي حل غير معملي يجعل $Ax = 0$ معتمدة خاليا.

* مثال :-

$$v_1 = v_2 + v_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

المستدعيات

معتمدة خاليا لأن $p > n$ ($p > n$)

* مبرهنة :-

إذا مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ في R^n تحتوي المتجه المعملي s في

مرتبة خاليا لأن المتجه المعملي يمكن كتابته في شكل ترافقية خطية
في بقية المستدعيات.

* مثال :-

حدد فيما إذا كانت المجموعة التالية معتمدة أم مستقلة خاليا.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{معتمدة خاليا}$$

$$4 > 3 \Leftarrow p > n$$

Date : _____

No. : _____

(50)

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

مسقطة خطياً =

تحوي المتجه العiciel

(c)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

مسقطة خطياً =

لهم وجدت متجهين متساوين

(d)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{3}{2} V_1$$

متجه

(e)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (V \neq 0) \text{ متساوية}$$

(107 - 115) * المرجع العيكلان