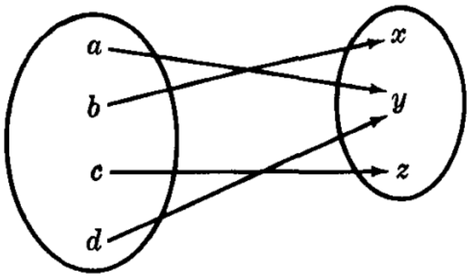
الدوال Functions

تعريف: لتكن A و B فئتين غير خاليتين. تعرف الدالة من A الى B، وتكتب $f : A \to B$، بانها العلاقة التي تسند لكل عنصر $a \in A$ عنصرا وحيدا $b \in B$. نكتب $f(a) = b$.

ملحوظة: تسمى الدالة احيانا بالاسقاط mapping او التحويل transformation.

تعريف: اذا كان f دالة من A الى B، فان A تسمى بمجال الدالة domain f، بينما تسمى B بالمجال المصاحب co-domain للدالة f. اذا كان $f(a) = b$، فان b تسمى صورة العنصر a. فئة كل الصور تسمى بمدى range الدالة f ويرمز له بـ $f[A]$. اى ان $f[A] = \{ f(a) \mid a \in A \}$.

يتم وصف الدوال اما عن طريق تحديد العلاقة (الاسناد) مباشرة كما فى الشكل ادناه، او عن طريق تحديد العلاقة بواسطة صيغة رياضية مثل $f(x) = x + 1$، او بواسطة برمجيات الحاسوب.



ملحوظة: من المعروف لدينا ان العلاقة R من الفئة A الى الفئة B هي فئة جزئية من $A \times B$. اذن، يمكننا تعريف الدالة بانها العلاقة التي تحتوى فقط على زوج مرتب واحد (a,b) لكل $a \in A$.

مثال: اذا اعتبرنا العلاقات التالية على الفئة $A = \{1,2,3\}$:

$$R_1 = \{(1,3),(2,3),(3,1),\}$$
$$R_1 = \{(1,2),(3,1),\}$$
$$R_3 = \{(1,3),(2,1),(1,2),(3,1)\}$$

فان العلاقة R_1 فقط تمثل دالة. وضح.

مثال: لتكن $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ دالة تسند لكل عدد صحيح مربعه. عندئذ، $f(x) = x^2$. مجال هذه الدالة هو $\mathbf{Z}$ و مجالها المصاحب ايضا $\mathbf{Z}$. المدى هو الفئة $f[\mathbf{Z}] = \{0,1,4,9,\ldots\}$.

مثال: لتكن $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دالة تسند لكل عدد قياسى العدد 1 ولكل عدد غير قياسى العدد -1 . عندئذ،

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ if } x \text{ is rational}\\ -1, \text{ if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

نلاحظ ان كلا من المجال والمجال المصاحب يعطى بـ $\mathbf{R}$ ، بينما يعطى المدى بـ $f[\mathbf{R}]=\{1,-1\}$.

مثال: عادة يتم تحديد المجال والمجال المصاحب فى لغات البرمجة المختلفة، ففى لغة باسكال Pascal نكتب العبارة التالية

function *floor*(x: **real**): **integer**

بينما فى لغة جافا نكتب العبارة التالية

int **floor**(float real){. . .}

لتوضيح ان مجال الدالة *floor* هو $\mathbf{R}$ ومجالها المصاحب $\mathbf{Z}$.

يمكن جمع وضرب دالتين حقيقيتين two real-valued functions اذا كان لهما نفس المجال.

تعريف: لتكن f_1 و f_2 دالتين من A الى $\mathbf{R}$. عندئذ f_1+f_2 و f_1f_2 هى ايضا دوال من A الى $\mathbf{R}$ تعرف كالتالى

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x).$$

مثال: لتكن f_1 و f_2 دالتين من $\mathbf{R}$ الى $\mathbf{R}$ بحيث $f_1=x^2$ و $f_2=x-x^2$. اوجد

$(i)\quad f_1+f_2 \qquad\qquad (ii)\quad f_1f_2$

الحل:

$$(i)\quad (f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$=x^2+(x-x^2),$$
$$=x.$$

$$(ii)\quad f_1f_2=f_1(x)f_2(x),$$
$$=x^2(x-x^2),$$
$$=x^3-x^4.$$

الدوال واحد لواحد One-to-One Functions

تعريف: يقال ان الدالة $f:A\to B$ واحد لواحد one-to-one اذا وفقط اذا كان $f(a)=f(b)$ يقتضى ان $a=b$ وذلك لكل a و b فى المجال.

ملحوظة: باستخدام المسورات، يمكننا كتابة ذلك كالتالى:

$$\forall a \forall b (f(a) = f(b) \rightarrow a = b) \text{ او } \forall a \forall b (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$$

مثال: الدالة $f : A \rightarrow B$ حيث $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ المعرفة كالتالى

$f(a) = 4,\ f(b) = 5,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$

هى دالة واحد لواحد.

مثال: الدالة $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ المعرفة بـ $f(x) = x^2$ ليست واحد لواحد لانه يوجد عنصران مختلفان فى المجال (مثلا 1 و -1) بحيث لهما نفس الصورة فى المجال المصاحب. نلاحظ ان: $f(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(-1)$.

تمرين: هل الدالة $f(x) = x + 1$ المعرفة من $\mathbf{R}$ الى $\mathbf{R}$ واحد لواحد ام لا؟

تعريف: نقول ان الدالة $f : A \rightarrow B$ ، حيث $A \subseteq \mathbf{R}$ و $B \subseteq \mathbf{R}$ ، تزايدية increasing اذا كان $f(x) \le f(y)$ وتسمى تزايدية فعليا strictly increasing اذا كان $f(x) < f(y)$ ، وذلك كلما كانت $x < y$ و x و y فى مجال domain الدالة f . بنفس الطريقة، فان الدالة f تناقصية decreasing اذا كان $f(x) \ge f(y)$ وتسمى تناقصية فعليا strictly decreasing اذا كان $f(x) > f(y)$ ، وذلك كلما كانت $x < y$ و x و y فى مجال domain الدالة f .

ملحوظة: بواسطة المسورات، تكون الدالة f تزايدية اذا كان

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \le f(y)),$$

وتكون تزايدية فعليا اذا كان

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y)),$$

وتكون تناقصيا اذا كان

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \ge f(y)),$$

وتكون تناقصية فعليا اذا كان

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) > f(y)) .$$

ملحوظة: اذا كانت الدالة f تزايدية فعليا (تناقصية فعليا) فانها تكون واحد لواحد.

الدوال الفوقية Onto Functions

تعريف: يقال ان الدالة $f : A \rightarrow B$ فوقية onto اذا وفقط اذا كان كل عنصر $b \in B$ هو صورة image لعنصر ما $a \in A$.

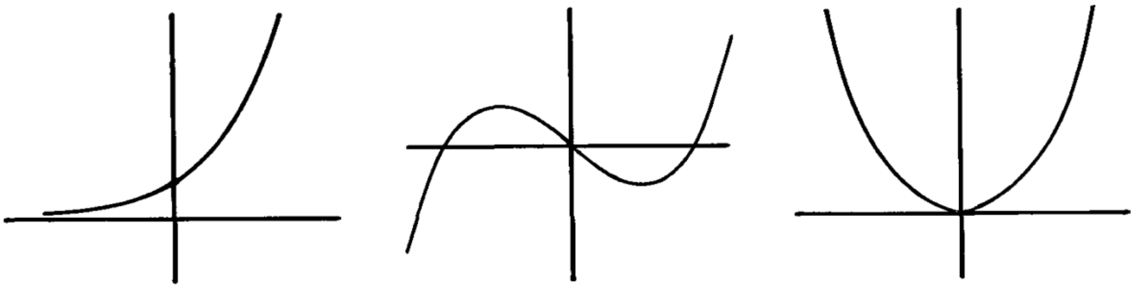
اذن، الدالة $f : A \rightarrow B$ فوقية اذا وفقط اذا كان المدى يساوى المجال المصاحب. اى اذا كان $f[A] = B$.

ملحوظة: باستخدام المسورات، يمكننا كتابة ذلك كالتالي:

$$\forall y \exists x (f(x) = y),$$

حيث x تنتمي للمجال و y تنتمي للمجال المصاحب.

ملحوظة: هندسيا، اذا كانت الدالة f واحد لواحد، فهذا يعني ان اى مستقيم افقى يقطع منحنى الدالة f فى نقطة واحدة على الاكثر. اذا كانت الدالة g فوقية، فهندسيا هذا يعني ان اى مستقيم افقى يقطع منحنى الدالة f فى نقطة واحدة على الاقل. (انظر الشكل ادناه).



$f(x) = 2^x$ $\quad$ $g(x) = x^3 - x$ $\quad$ $h(x) = x^2$

مثال:الدالة $f: A \to B$ حيث $A = \{a,b,c,d\}$ و $B = \{1,2,3\}$ المعرفة كالتالى

$$f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$$

هى دالة فوقية.

مثال: هل الدالة $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ المعرفة بـ $f(x) = x^2$ فوقية؟

الحل: بما ان العنصر -1 (مثلا) ينتمى الى $\mathbf{Z}$ (المجال المصاحب) لا يمكن ان يكون صورة لاى عنصر فى المجال لانه لا يوجد x بحيث $x^2 = -1$، فان هذه الدالة لا يمكن ان تكون فوقية.

مثال: وضح ان الدالة $f(x) = x+1$ المعرفة من $\mathbf{R}$ الى $\mathbf{R}$ هى دالة فوقية.

الحل: نلاحظ ان

$$f(x) = y \Leftrightarrow x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1$$

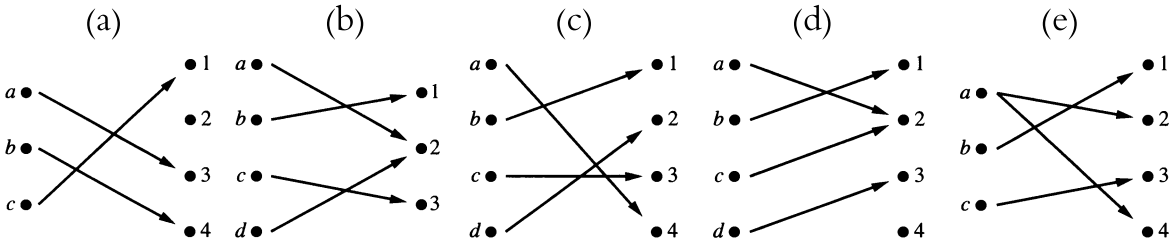
وعليه، فان الدالة اعلاه فوقية.

تعريف: نقول ان الدالة f هى دالة تقابل one-to-one correspondence، اذا كانت f دالة واحد لواحد one-to-one و فوقية onto.

مثال: لتكن A فئة. تعرف دالة المحايد identity function على الفئة A، ويرمز لها بـ ι_A، بانها الدالة $\iota_A : A \to A$ بحيث

$\iota_A(x) = x$ وذلك لكل $x \in A$. بعبارة اخرى، دالة المحايد هى الدالة التى تسند كل عنصر لنفسه. نلاحظ ان هذه الدالة واحد لواحد و فوقية. اذن، دالة المحايد دالة تقابل.

مثال: وضح انواع الدوال فى الشكل ادناه:



الحل:

(a) واحد لواحد، وليست فوقية

(b) فوقية، وليست واحد لواحد

(c) واحد لواحد، وفوقية

(d) ليست واحد لواحد، وليست فوقية

(e) ليست دالة

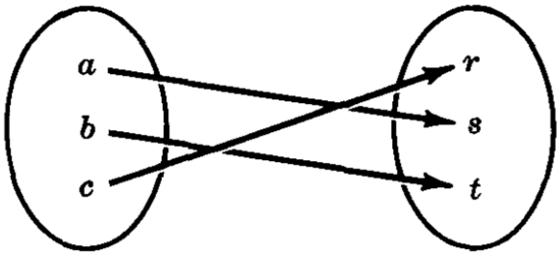
الدوال العكسية Inverse Functions

تعريف: لتكن لدينا الدالة $f : A \to B$ بحيث تكون واحد لواحد وفوقية (اى ان f دالة تقابل). تعرف الدالة العكسية للدالة f ، ويرمز لها ب f^{-1} ، بانها الدالة التى تسند لكل عنصر $b \in B$ عنصرا وحيدا $a \in A$. اذن، $f^{-1}(b) = a$ عندما يكون $f(a) = b$.

ملحوظة: اذا كانت الدالة f دالة تقابل، فانها تسمى قابلة للعكس invertible. اما اذا لم تكن كذلك فانها تسمى ليست قابلة للعكس not invertible.

سؤال: ما هو الفرق بين الدالة f^{-1} و الدالة $\frac{1}{f}$ ؟

مثال: لتكن لدينا الدالة $f : A \to B$ الموضحة فى الشكل ادناه:



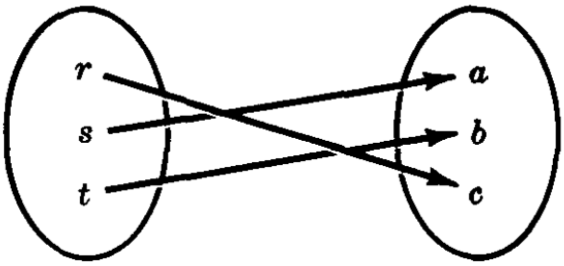
نلاحظ ان f تعطى بالعلاقة التالية:

$$f = \{(a, s), (b, t), (c, r)\}$$

بما ان الدالة واحد لواحد وفوقية (وضح ذلك)، فان الدالة العكسية $f^{-1}: B \to A$ تعطى بالتالى:

$$f^{-1} = \{(s, a), (t, b), (r, c)\}$$

الشكل التالى يوضح ذلك.



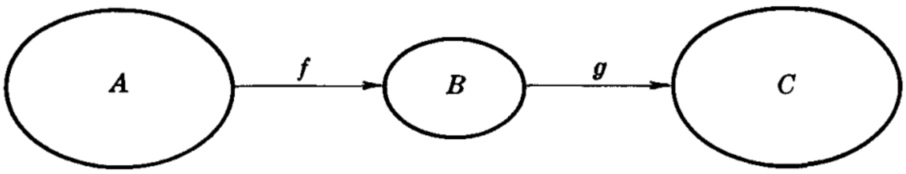
تمرين: وضح ان الدالة $f: A \to B$ ، حيث $f(x) = x^2$ ، وكلا من A و B يمثل فئة الاعداد الحقيقية غير السالبة، هى دالة قابلة للعكس، واوجد معكوسها f^{-1} .

تركيب الدوال Composition of Functions

تعريف: ليكن لدينا $f: A \to B$ و $g: B \to C$. نعرف تركيب الدالتين f و g ، ونرمز له بـ $g \circ f$ ، كالتالى:

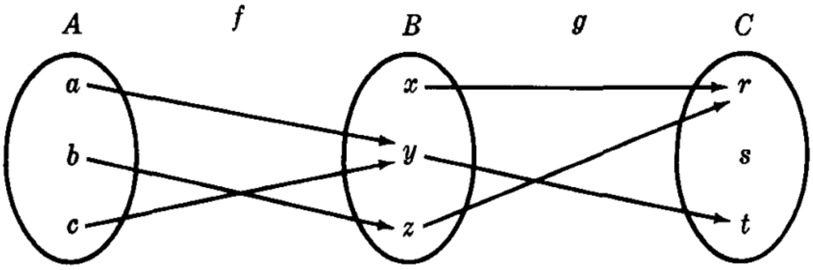
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

الشكل التالى يوضح ذلك.



ملحوظة: نلاحظ ان $g\circ f$ لا يمكن تعريفها الا اذا كان مدى الدالة f يساوى مجال الدالة f .

مثال: لتكن $f:A\to B$ و $g:B\to C$ معرفتان بالشكل التالى:



عندئذ، الدالة $g\circ f:A\to C$ تعطى بالتالى:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a) &= g(f(a)) = g(y) = t\\ (g\circ f)(b) &= g(f(b)) = g(z) = r\\ (g\circ f)(c) &= g(f(c)) = g(y) = t\end{aligned}$$

مثال: لتكن $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ معرفتان بـ $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+3$. اوجد $(g\circ f)(x)$ ، $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(2)$ ، و $(f\circ g)(2)$. ما هى ملاحظتك؟

الحل:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2+6x+9\\ (g\circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2+3\\ (f\circ g)(2) &= f(g(2)) = f(5) = 25\\ (g\circ f)(2) &= g(f(2)) = g(4) = 7\end{aligned}$$

نظرية: لاى دالة $f:A\to B$ ، فان $\iota_B\circ f = f = f\circ\iota_A$.

نظرية: اذا كانت $f:A\to B$ دالة تقابل وكان لها معكوس $f^{-1}:B\to A$ ، فان $f^{-1}\circ f=\iota_A = f\circ f^{-1}=\iota_B$.

عكس هذه النظرية ايضا صحيح.

نظرية: لتكن $f:A\to B$ و $g:B\to A$ بحيث $g\circ f=\iota_A$ و $f\circ g=\iota_B$. عندئذ، الدالة f دالة تقابل، و $g=f^{-1}$.