الثوابت، المُتغيّرات والدوال

- **المُتغيّرات Variables**: المُتغيّر هو أي مقدار تتغير قيمته، ويُقال أنَّ المُتغيّر مستمر Continues إذا كانت مجموعة القيم التي يُمكن أن يأخذها المُتغيّر عبارة عن فترة مستمرة مفتوحة كانت أم مغلقة. ويقال أنَّ المُتغيّر غير مستمر Discontinues إذا كانت مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المُتغيّر تشكّل مجموعة نقاط منفصلة على الخط الحقيقي.
- **الثوابت Constants**: الثابت هو أي مقدار قيمته ثابته لا تتغير، و يُقال أنَّ الثابت هو ثابت مُطلق Absolute إذا كانت قيمة الثابت هي نفسها عند كل دراسة مثال للثابت المُطلق العدد π، و يُقال أنَّ الثابت إختياري arbitrary إذا كانت قيمة الثابت قد تختلف في دراسات أخرى مثال لذلك ثابت كولوم هو ثابت اختياري إذ تظل قيمته ثابتة عند دراسة قوة التنافر أو التجاذب في وسطٍ ما كالهواء، و تختلف قيمة ثابت كولوم عند إجراء دراسة في وسط آخر.

  مثال: معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها r هي $x^2+y^2=r^2$، كل من x و y متغير مستمر و مجال تغيره الفترة $[-r,\ r]$.

  أما r فتُمثِّل نصف قطر الدائرة، لذا فهو ثابت إختياري إذ تختلف قيمته من دائرة إلى أخرى.
- **الدوال Functions**: عندما تعتمد قيمة متغير y على قيمة متغير آخر x بحيث تُقابل كل قيمة للمٌتغيّر x قيمة وحيدة للمتغيّر y عندئذٍ يُدعى المُتغيّر x متغير مُستقل Independent أما المُتغيّر y فيسمى مُتغيّر مٌعتمِد أو غير مُستقل dependent أو ببساطة يُقال أنَّ المُتغيّر y دالة Function في المُتغيّر x ويُرمز لذلك بالرمز $f(x)$ أو $y=f(x)$.
  - **مثال**: إذا كان x هو طول ضلع مُربَّع فإن مساحة هذا المُربَّع هي دالة في x ويُكتب $f(x)=x^2$ ، التعبير $f(3)=9$ يعني قيمة الدالة (و هي المساحة هنا) تساوي 9 عندما $x=3$، أي عندما طول ضلع المُربّع يساوي 3.
  - **مثال**: لتكن $y=f(x)=2^x$، أوجد ما يلي...

    a) $f(5)$.

    b) $f(-x)$.

    c) $f(x+h)-f(x)$.

    الحل:

    a) $f(5)=2^5=32$.

    b) $f(-x)=2^{-x}$.

    c) $f(x+h)-f(x)=2^{x+h}-2^x=2^x(2^h-1)$.

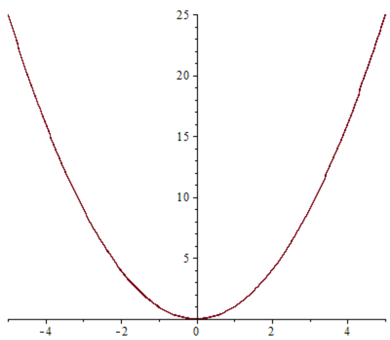
- **مجال الدالة Domain ومدى الدالة Range:**

لتكن $y = f(x)$ تُسمى مجموعة القيم التي يُمكن أن يأخذها المُتغيّر المُستقل x بشرط أن تكون هنالك قيمة مقابلة للمُتغيّر y **بمجال** تعريف الدالة أو **نطاق** الدالة.

أما مجموعة كل القيم التي يأخذها المُتغيّر y **بمدى** الدالة.

نرمز لمجال تعريف الدالة بالحرف D و مدى الدالة بالرمز R.

- **مثال:** أوجد المجال و المدى للدالة $y = x^2$.



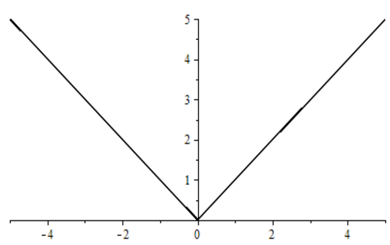
مُخطط الدالة $y = x^2$

الحل:

لكل قيمة من مجموعة الأعداد الحقيقية يأخذها x نجد أنَّ y تكون لها قيمة غير سالبة، لذا يكون مجال تعريف الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أما مدى الدالة فهو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة أي الفترة نصف المغلقة $[0, \infty)$.

$$\therefore D = \mathbb{R}, \; and \;\; R = [0, \infty)$$

- **مثال:** أوجد المجال و المدى للدالة $y = |x|$.



مُخطط الدالة $y = |x|$

الحل:

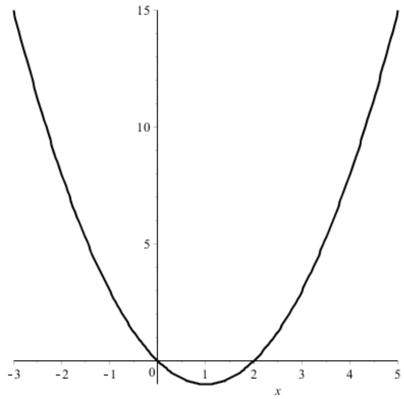
لكل قيمة من مجموعة الأعداد الحقيقية يأخذها x نجد أنَّ y تكون لها قيمة حقيقية غير سالبة، لذا يكون مجال تعريف الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

و يكون مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة أي الفترة نصف المغلقة $[0, \infty)$.

$$\therefore D = \mathbb{R}, \; and \;\; R = [0, \infty)$$

- **مثال:** أوجد المجال و المدى للدالة $y=x^2-2x$.

الحل:



مُخطط الدالة $y=x^2-5x$

لكل قيمة من مجموعة الأعداد الحقيقية يأخذها x نجد أنَّ y تكون لها قيمة حقيقية، لذا يكون مجال تعريف الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

بالنسبة لقيم y نكتب الدالة في الصورة

$y=x^2-2x+1-+1=(x-1)^2-1$ أقل قيمة للمتغير y تكون -1 و ذلك عندما يأخذ المقدار $(x-1)^2$ أقل قيمة له و هي الصفر

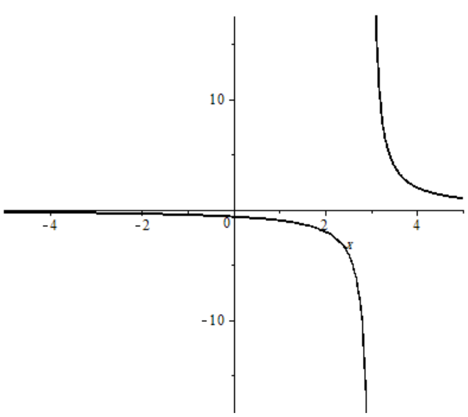
$$\therefore y \geq -1$$

وتتزايد قيمة y بلا حدود عندما تزيد القيمة المطلقة للمتغير x بلا حدود، لذا يكون مدى الدالة هو الفترة نصف المغلقة $[-1,\infty)$.

$$\therefore D=\mathbb{R},\ and\ \ R=[-1,\infty)$$

مثال: أوجد المجال والمدى للدالة $y=\dfrac{2}{x-3}$.

الحل:



مُخطط الدالة $y=\frac{2}{x-3}$

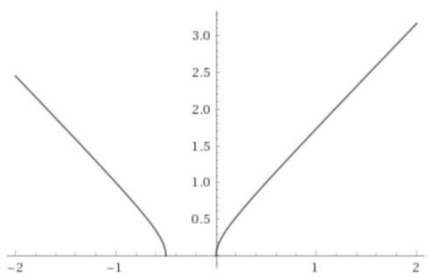
لكل قيمة من مجموعة الأعداد الحقيقية يأخذها x نجد أنَّ y تكون لها قيمة حقيقية ما عدا عند $x=3$، لذا يكون مجال تعريف الدالة هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية عدا القيمة 3 أي $\mathbb{R}-\{3\}$.

إذا جعلنا y موضوع الدالة نحصل على $x=\dfrac{2}{y}+3$ أي أنَّ y يُمكن أن تأخذ أي قيمة حقيقية عدا الصفر، إذن $y\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$\therefore D=\mathbb{R}-\{3\},\ and\ \ R=\mathbb{R}-\{0\}$$

- **مثال:** أوجد المجال و المدى للدالة $y = \sqrt{x(2x+1)}$.

الحل:



لكي تكون للمُتغيّر y قيمة حقيقية يجب أن يكون المقدار تحت علامة الجذر التربيعي أكبر من أو يساوي الصفر، لذا $x(2x+1) \geq 0$

و ذلك يتحقق بطريقتين، إما أن تكون $x \geq 0$ و $(2x+1) \geq 0$

أو $x \leq 0$ و $(2x+1) \leq 0$.

في الحالة الأولى تكون $x \geq 0$ و $x \geq -\dfrac{1}{2}$ وذلك يقتضي أنَّ

$x \geq 0$ أي $x \in [0, \infty)$

و في الحالة الثانية تكون $x \leq 0$ و $x \leq -\dfrac{1}{2}$ و ذلك يقتضي أنَّ $x \leq -\dfrac{1}{2}$ أي $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$

و الخلاصة هي $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [0, \infty)$

إذن $D = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [0, \infty) = \mathbb{R} - (-\dfrac{1}{2}, 0)$

أما بالنسبة لقيم y هي الصفر عندما $x = -\dfrac{1}{2}$ أو عندما $x = 0$، وكلما زادت القيمة المطلقة للعدد x بلا حدود زادت قيمة y بلا حدود، أي أنَّ $y \in [0, \infty)$.

$$\therefore R = [0, \infty)$$

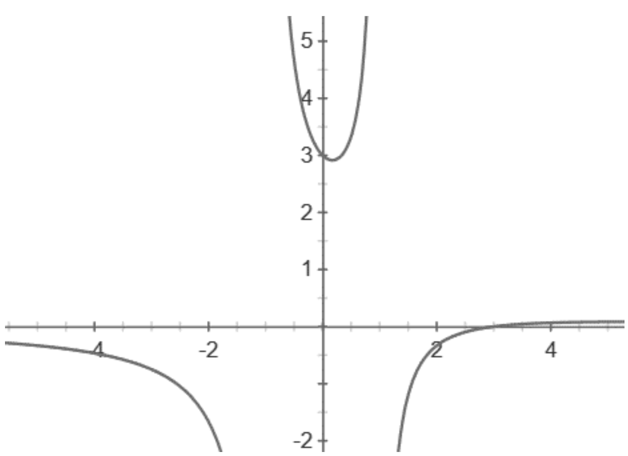
مثال: أوجد المجال والمدى للدالة $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$.

الحل:

لكي تكون للمُتغيّر y قيمة حقيقية يجب أن يكون المقام لا يساوي الصفر، أي $x \neq \pm 1$،

إذن $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

أما بالنسبة لقيم y نكتب الدالة في الصورة y



مُخطط الدالة $y = \frac{x-3}{x^2-1}$

$x^2 - x + (3-y) = 0$ y و هي معادلة من الدرجة الثانية في المُتغيّر x و تكون قيم x حقيقية إذا كان المميز للمعادلة أكبر من أو يساوي الصفر، $1-4y(3-y)\geq 0$، أي أنَّ $4y^2-12y+1\geq 0$

$$\therefore 4(y^2-3y)+1 = 4\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)-8 = 4\left(\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-2\right) = 4\left(y-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right)\left(y-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right.\right.$$

$$\therefore y \leq \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) \ \ or \ \ y \geq \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$\therefore R = \left(-\infty,\ \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2},\ \infty\right]$$

- **تحديد مجال ومدى الدالة من موقع http://www.wolframalpha.com/**

نهايات الدوال Function Limits

لتكن $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ ، من الواضح أنَّ الدالة غير مُعرّفة عند $x=1$ و نود معرفة ما هي قيمة الدالة عندما تكون x قريبة بدرجة كبيرة من الواحد.

الجدول التالي يعطي قيمة الدالة عند بعض قيم x القريبة جداً من الواحد.

في الجدول (1) تقترب x من 1 من اليمين أي قيم x أكبر من 1 و تتناقص لتقترب من 1 و نلاحظ أنَّ قيمة الدالة تقترب من 3.

في الجدول (2) تقترب x من 1 من اليسار أي قيم x أقل من 1 و تتزايد لتقترب من 1 و نلاحظ أنَّ قيمة الدالة تقترب من أيضاً.

نلاحظ أنَّه كلما اقتربت x من الواحد تقترب قيمة الدالة من العدد 3، لذا نقول أن نهاية الدالة $f(x)$ هي 3 عندما تؤول x إلى 1.

x	f(x)
1.0500000000	3.1525000000
1.0450000000	3.1370250000
1.0400000000	3.1216000000
1.0350000000	3.1062250000
1.0125000000	3.0376562500
1.0004005000	3.0012016604
1.0003105000	3.0009315964
1.0002205000	3.0006615486
1.0001305000	3.0003915170
1.0000100530	3.0000301591
1.0000000540	3.0000001604

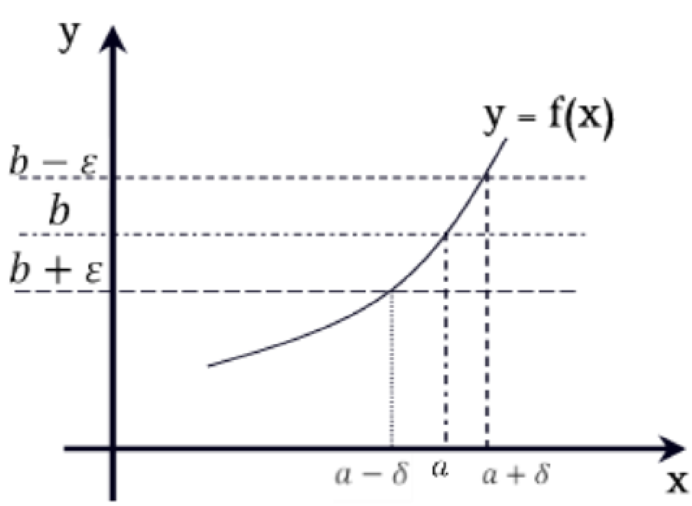
جدول (1) الإقتراب من اليمين

x	f(x)
0.9999000	2.9997000
0.9999500	2.9998500
0.9999930	2.9999790
0.9999931	2.9999793
0.9999932	2.9999796
0.9999933	2.9999799
0.9999934	2.9999802
0.9999935	2.9999805
0.9999936	2.9999808
0.9999937	2.9999811
0.9999938	2.9999814

جدول (2) الإقتراب من اليسار

- الجوار و الجوار المثقوب
- **تعريف نهاية الدالة:**

لتكن $f(x)$ دالة مُعرَّفة في جوار للنقطة $x=a$ أو في بعض نقاط ذلك الجوار (ليس بالضرورة أن تكون $f(x)$ مُعرَّفة عند $x=a$)، يُقال أنَّ الدالة $f(x)$ تقترب من النهاية b، عندما تقترب x من a إذا كان لكل عدد موجب ε متناهي الصغر يوجد عدد موجب δ بحيث لكل x يحقق المتباينة $|x-a|<\delta$ تكون $|f(x)-b|<\epsilon$ ، و نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.



مثال: أثبت أنَّ $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$

الحل: لتكن $\epsilon>0$، إذا كانت $|(2x+1)-3|<\epsilon$ ، أي أنَّ $|2x-2|<\epsilon$

و هذا يعني أنَّ $|x-1|<\dfrac{\epsilon}{2}$ و بأخذ $\delta=\dfrac{\epsilon}{2}$ يكتمل الإثبات.

مثال: أثبت أنَّ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

الحل: من الواضح أنَّ الدالة غير مُعرَّفة عند النقطة $x=3$

لتكن $\epsilon>0$، إذا كانت $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\epsilon$ ، أي أنَّ $|x+3-6|<\epsilon$

وهذا يعني أنَّ $|x-3|<\epsilon$ و بأخذ $\delta=\epsilon$ يكتمل الإثبات.

- **حساب نهاية الدالة بالطرق التحليلية:**

يتم حساب نهايات الدوال بصورة تحليلية بإجراء التعويض المباشر لقيمة x في الدالة إن كانت الدالة مُعرَّفة عند $x=a$ أو بإجراء عمليات رياضية على الدالة لإزالة سبب عدم تعريف الدالة عند $x=a$.

بعض خصائص النهايات:

لتكن b و c أعداد حقيقية، و n عدد حقيقي موجب، f و g دوال لها النهايات التالية $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to c}g(x)=K$، عندئذٍ..

1. $\lim\limits_{x\to c}[bf(x)]=bL$.
2. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\pm g(x)]=L\pm K$.
3. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\times g(x)]=L\times K$.
4. $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{K},\quad K\neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n=L^n$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0,\qquad if\ \ \alpha>0$.

أمثلة: أحسب النهايات التالية..

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$

بالتعويض المباشر نجد أنَّ الدالة غير مُعرَّفة عند $x=1$، بضرب البسط و المقام في مرافق المقام

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} -(\sqrt{x+3}+2) = -4$$

.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

بالتعويض المباشر نجد أنَّ الدالة غير مُعرَّفة عند $x=2$، بتجميع الكسرين

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{4}$$

.

- **نهاية الدالة عندما تقترب x من $\pm\infty$:**

لحساب نهاية الدالة عندما تقترب x من ∞ نكتب الدالة $f(x)$ في الصورة $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$، ثم نستخدم القاعدة رقم 6.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{4x^2-2x}\right)^{\frac{1}{2}}$

ناتج التعويض المباشر هو $\dfrac{\infty}{\infty}$ و هي قيمة غير معينة، بقسمة البسط و المقام داخل الجذر التربيعي على x^2

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x^2}}{4-\frac{2}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+0}{4+0}\right)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$

ناتج التعويض المباشر هو $(\infty - \infty)$ و هي قيمة غير معينة، بضرب البسط و المقام في مرافق البسط

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}=\frac{3}{2}.$$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\sqrt{\infty}+\infty=\infty$

أي أنَّ النهاية غير موجودة.

- **نهاية الدالة من طرف واحد One side Limit:**
  - **النهاية اليسرى** Left hand side limit.

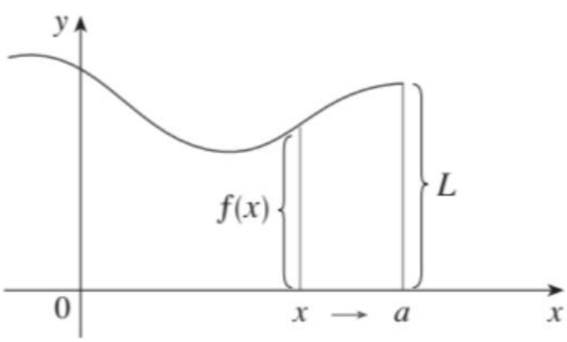
النهاية اليسرى للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a، هي نهاية الدالة عندما تتزايد x نحو a و لكن $x\neq a$.

أي تكون x أقل من a و تتزايد نحوها دون أن تصل إليها.

نرمز للنهاية اليسرى للدالة بالرمز $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

و لحساب النهاية اليسرى بتعويض $x=a-h$ في الدالة $f(x)$ ثم نأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر و $h>0$، أي أنَّ

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a-h).$$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ النهاية اليسرى

- **النهاية اليمنى** Right hand side limit.

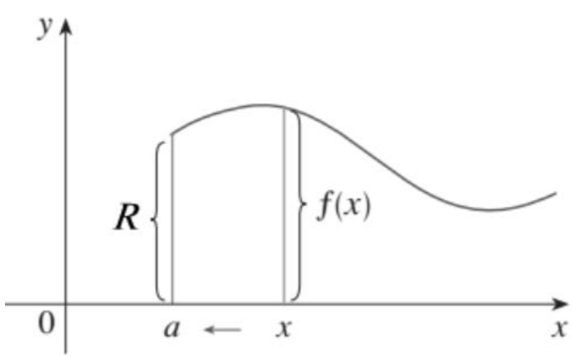
النهاية اليُمنى للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a، هي نهاية الدالة عندما تتناقص x نحو a و لكن $x\neq a$.

أي تكون x أكبر من a و تتناقص نحوها دون أن تصل إليها.

نرمز للنهاية اليسرى للدالة بالرمز $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

و لحساب النهاية اليسرى بتعويض $x=a+h$ في الدالة $f(x)$ ثم نأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر و $h>0$، أي أنَّ

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h).$$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=R$ النهاية اليمنى

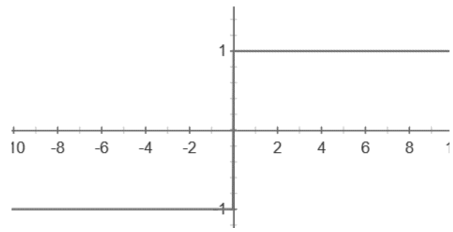
تكون $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

أمثلة: أحسب النهاية أو أثبت عدم وجودها بحساب النهاية اليسرى واليُمنى..

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

$$L.S.L = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = \lim_{h \to 0} -1 = -1.$$

$$R.S.L = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h|}{0+h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$



النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى، إذن النهاية غير موجودة.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

$$L.S.L = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2h+h^2-h-1}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-3)}{-h} = \lim_{h \to 0}(3-h) = 3.$$

$$R.S.L = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2+h-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+3)}{h} = \lim_{h \to 0}(h+3) = 3.$$

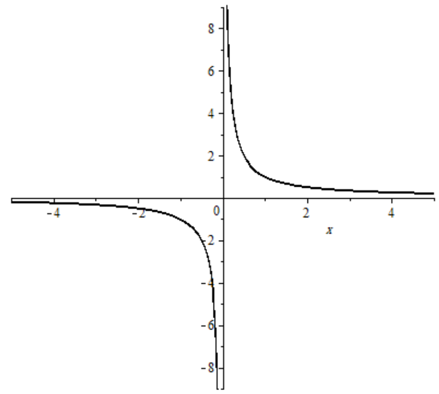
النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى، إذن النهاية موجودة و $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$$L.S.L = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{0-h} = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = -\infty.$$

من هنا نستطيع الجزم بأنَّ النهاية غير موجودة، ولكن سوف نحسب النهاية اليُمنى

$$R.S.L = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{0+h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty.$$



مُخطط الدالة $y = \frac{1}{x}$

- **مبرهنة الشطيرة** Sandwich Theorem or Squeeze Theorem:

لتكن $f(x) \le g(x) \le h(x)$ في جوار النقطة $x = a$ و ليس بالضرورة عند النقطة $x = a$، و كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$، عندئذٍ تكون $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

مثال: أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

لا يمكن حساب النهاية بالتعويض و ذلك لأنّ $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة عند الصفر

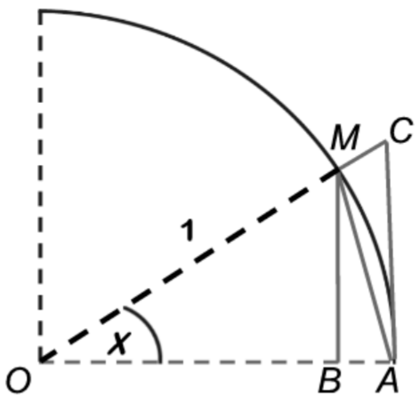
$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Longrightarrow -x \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x$$

باستخدام مبرهنة الشطيرة نلاحظ أنَّ كل من الدوال $-x$ و x معرّفة عند الصفر و $\lim\limits_{x \to 0} -x = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

لذا تكون $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

- بعض النهايات الهامة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad (1)$$



البرهان: الشكل إلى اليسار هو ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها واحد، و

$x=\measuredangle MOB$ لذا $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$Area\ \triangle MOA=\frac{1}{2}.\overline{OA}.\overline{MB}=\frac{1}{2}.\ 1.\sin(x)=\frac{1}{2}\sin(x).$$

$$Area\ \ of\ \ sector\ \ MOA=\frac{1}{2}.x=\frac{1}{2}x.$$

Area of $\triangle AOC=\frac{1}{2}.\overline{OA}.\overline{AC}=\frac{1}{2}.1.tan(x)=\frac{1}{2}.tan(x).$

$$\therefore 0<\frac{1}{2}sin(x)<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tan(x)$$

$$\therefore cot(x)<\frac{1}{x}<csc(x),\ \ \frac{cos(x)}{sin(x)}<\frac{1}{x}<\frac{1}{sin(x)},\ \ cos(x)<\frac{sin(x)}{x}<1$$

من مبرهنة الشطيرة $\lim_{x\to 0} cos(x)<\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}<\lim_{x\to 0}1$، $1<\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}<1$، إذن $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$.

(2) **العدد e**: يُعرَّف العدد e بالنهاية $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=1+\binom{x}{1}.\frac{1}{x}+\binom{x}{2}.\frac{1}{x^2}+\binom{x}{3}.\frac{1}{x^3}+\cdots+\binom{x}{n}.\frac{1}{x^n}+\cdots=$$

$$\therefore\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\sum_{n=0}^{x}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{x}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\sum_{n=0}^{x}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)...\left(1-\frac{n-1}{x}\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\therefore e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

مبرهنة: العدد e يحقق المتباينة $2<e<3$.

البرهان:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots<2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$\therefore e<2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\Longrightarrow e<3$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots\right)\Longrightarrow e>2$$

$$\therefore 2<e<3.$$

في الواقع العدد e هو عدد غير نسبي $e\cong 2.7182818284591$.

أمثلة: أحسب النهايات التالية...

$$1)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

بتعويض $u=\dfrac{1}{x}$ تكون $u\to\infty$ عندما $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x},\ \alpha\neq 0$

أولاً: إذا كانت $\alpha>0$ بتعويض $x=\alpha u$ ، $\left(\lim\limits_{u\to\infty}\left(\dfrac{u}{u-1}\right)^{u}\right)^{\alpha}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha u}\right)^{\alpha u}=\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\alpha}=e^{\alpha}.$$

ثانياً: إذا كانت $\alpha<0$ بتعويض $x=-\alpha u$ ، تكون $u\to\infty$ عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha u}\right)^{-\alpha u}=\left(\lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u}\right)^{\alpha}=$$

$$=\left(\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u}{u-1}\right)^{u}\right)^{\alpha}=\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u}\right)^{\alpha}$$

بتعويض $y=u-1$، تكون $y\to\infty$ عندما $u\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u}\right)^{\alpha}=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\right)^{\alpha}=$$

$$=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\times\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)^{\alpha}=(e\times 1)^{\alpha}=e^{\alpha}.$$

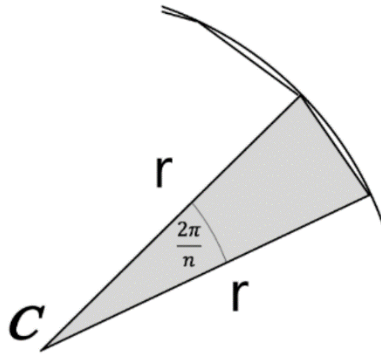
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$

بتعويض $u=x-2$، تكون $u\to\infty$ عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u+2+3}{u}\right)^{u+2}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{5}{u}\right)^{u+2}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{5}{u}\right)^{u}\times\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{5}{u}\right)^{2}=$$

.

4) أوجد مساحة المضلع المنتظم النوني (له n ضلع) الذي تقع رؤوسه على محيط دائرة نصف قطرها r، و من ثمَّ أثبت أنَّ مساحة الدائرة التي نصف قطرها r تساوي πr^2.

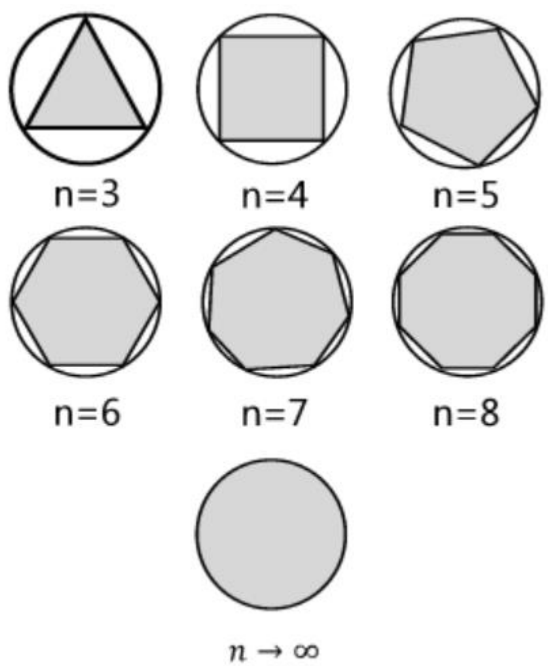


نفرض أنَّ مساحة المضلع النوني المنتظم $= A_n$

مساحة المضلع النوني المنتظم $= n \times$ مساحة المثلث في الشكل إلى اليسار.

$$A_n = n \times \left(\frac{1}{2} \times r \times r\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{r^2}{2}.n.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

يمكن اعتبار الدائرة هي نهاية المضلَّع النوني عندما تقترب n من ∞ (أنظر للشكل أدناه).



إذن مساحة الدائرة $= A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2} \; n.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \pi r^2 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\pi}.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) =$$

بتعويض $x = \frac{2\pi}{n}$ تكون $x \to 0$ عندما $n \to \infty$

$$= \pi r^2 \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right) = \pi r^2 \times 1 = \pi r^2.$$

تمارين (1)

1. إذا كانت $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ و $g(x) = 3^x - 3^{-x}$
   a. أثبت أنَّ $f(-x) = f(x)$.
   b. أثبت أنَّ $g(-x) = -g(x)$.
   c. أثبت أنَّ $g(2x) = f(x)g(x)$.

d. أثبت أنَّ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

e. أثبت أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

2. إذا كانت $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)$ أثبت أنَّ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

3. إذا كانت $f(x) = x^3 - x^2$

a. أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

b. أحسب $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

c. أحسب $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

4. إذا كانت $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$، أثبت أنَّ $f(-x) = f(x)$.

5. أوجد مجال التعريف ومدى الدوال التالية..

a. $y = 1 - x^3$
$D = \mathbb{R}, R = \mathbb{R}$

b. $y = \frac{x}{x^2-5}$
$D = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\},\ R = \mathbb{R}$

c. $y = \frac{x}{|x-1|}$
$D = \mathbb{R} - \{1\},\ R = (-1,\ \infty)$

d. $y = x^2 - x + 3$
$D = \mathbb{R}, R = \left[\frac{11}{4},\ \infty\right)$

e. $y = \frac{1}{1-x}$

f. $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}}$
$D = \mathbb{R} - [-1,\ 0],\ R = (-\infty,\ 1)$

g. $y = \frac{x}{x^2+1}$

h. $y = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$
$D = \mathbb{R}, R = [0,\ 1)$

i. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

j. $y = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$
$D = [0,\ \infty),\ R = (0,\ 1]$

k. $y = \sqrt{3+\sqrt{1-\sqrt{x}}}$
$D = [0,\ 1],\ R = \left(\sqrt{3},\ 2\right]$

l. $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

6. باستخدام تعريف النهاية أثبت أنَّ..

a. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$

b. $\lim\limits_{x\to 0}(4x+1) = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

7. أحسب النهايات التالية ...

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-3x^3+2}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+8}-2}$ c. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5-x^3+2x}{(x-1)\,(3x^2+9)^2}$

d. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^5-x^3+2x}{(x-1)\,(3x^2+9)^2}$ e. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{(x-1)}-x\right)$ f. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{|x+2|}$ h. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{1+\cos(x)}\right)$ i. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x-\sin(3x)}{\sin(2x)-\sin(5x)}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\ sin\,(x))^{csc(x)}$ k. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ l. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{\alpha x}\right)^x,\ \alpha\neq 0$

m. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec(x))^{2\tan^2(x)}$ n. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{1+x}{x+3}\right)^x$ o. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$

8. أحسب النهايات اليمنى واليسرى ...

a. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

9. باستخدام مبرهنة الشطيرة أحسب النهايات التالية ...

a. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+4}$

10. أحسب المجاميع التالية بدلالة العدد e ...

a. $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ b. $\sum_{k=5}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{k!}$ d. $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \dfrac{k-1}{k!}$

11. أوجد محيط المضلع النوني المنتظم (له n ضلع) الذي تقع رؤوسه على محيط دائرة نصف قطرها r، ومن ثمَّ أثبت أنَّ محيط الدائرة التي نصف قطرها r تساوي $2\pi r$.