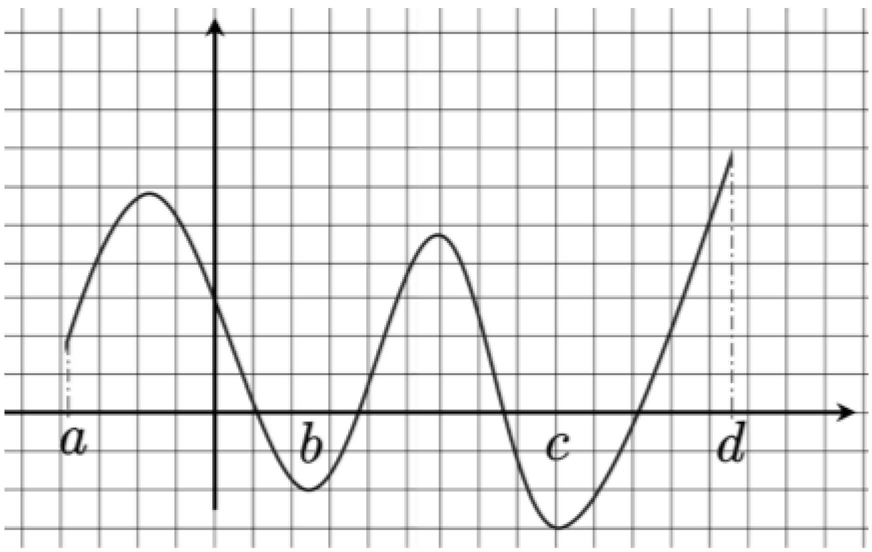
القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة Maxima And Minima Of A Function On A Closed Interval

لتكن $y=f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $I=[a,\ b]$، عندئذٍ تكون للدالة $f(x)$ قيمة عظمى (أكبر قيمة للدالة) على هذه الفترة. بافتراض أنَّ للدالة عدد محدود من النقاط الحرجة تقع داخل الفترة I، أكبر قيمة للدالة يمكن أن تكون في داخل الفترة I أو على أحد طرفي الفترة.



إذا كانت أكبر قيمة للدالة تقع داخل الفترة I وليست على أحد طرفيها فمن الواضح أنها ستكون إحدى القيم العظمى المحلية الواقعة داخل الفترة، وبالتحديد هي أكبر قيمة عظمى محلية من بين القيم العظمى المحلية خلال الفترة.

أو تكون أكبر قيمة للدالة على الفترة تقع عند أحد طرفيها a أو b.

بصورة مشابهة، أقل قيمة للدالة على الفترة I إما أن تقع داخل الفترة، عندئذٍ تكون هي أقل نهاية محلية صغرى تقع داخل الفترة.

أو تكون أقل قيمة للدالة على الفترة تقع عند أحد طرفيها a أو b.

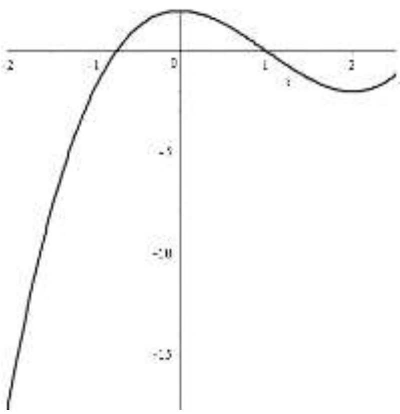
خطوات إيجاد أكبرو أقل قيمة للدالة على الفترة المغلقة $I=[a,\ b]$:

1. إيجاد جميع القيم القصوى المحلية (عظمى كانت أو صغرى) للدالة الواقعة داخل الفترة I.
2. حساب قيمة الدالة عند طرفي الفترة a و b.
3. من بين جميع قيم الدالة المحسوبة في الخطوتين السابقتين تكون ...
   a. أكبر قيمة للدالة على الفترة هي أكبر قيمة من بين جميع القيم المحسوبة.
   b. أصغر قيمة للدالة على هي أقل قيمة من بين جميع القيم المحسوبة.

أمثلة:

1. اوجد أكبر وأقل قيمة للدالة $y = x^3 - 3x^2 + 2$ على الفترة $[-2,\ 2.5]$.

الحل:



نبحث أولاً عن القيم القصوى المحلية الواقعة داخل الفترة

$I = [-2,\ 2.5]$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

عند القيم القصوى المحلية تكون $\frac{dy}{dx} = 0$ أي $3x(x-2) = 0$ إذن

$$x = 0,\ 2$$

نلاحظ أنَّ جميع النقاط الحرجة تقع داخل الفترة

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيم القصوى $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(x-1)$

x	$f(x)$	$f''(x)$	نوع النقطة
-2	-18		الطرف الأيسر للفترة
0	2	$-24 < 0$	عظمى محلية
2	-2	$24 > 0$	صغرى محلية
2.5	18		الطرف الأيمن للفترة

لذلك أقل قيمة للدالة على الفترة تكون -18 وذلك عند النقطة $x = -2$

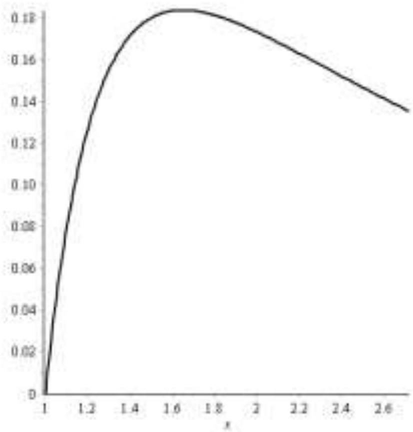
وأكبر قيمة للدالة على الفترة تكون 2 وذلك عند النقطة $x = 0$.

2. اوجد أكبر وأقل قيمة للدالة $y = \frac{ln(x)}{x^2}$ على الفترة $I = [1,\ e]$.

الحل: نبحث أولاً عن القيم القصوى المحلية الواقعة داخل الفترة $I=[1\,,\ e]$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}-\frac{2}{x^{-3}}\ \ ln(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^3}\ \ ln(x)=$$

$$=\frac{1}{x^3}(1-2\ \ ln(x))$$



عند القيم القصوى المحلية تكون $\frac{dy}{dx}=0$ أي

$x(1+2\ \ ln(x))=0$ إذن $x=e^{\frac{1}{2}}$

من الملاحظ أنَّ النقطة الحرجة تقع داخل الفترة

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيم القصوى

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^3}\times\frac{-2}{x}+(1-2\ \ ln(x))\frac{-3}{x^4}=-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x^4}+6\frac{ln(x)}{x^4}=\frac{1}{x^4}(6\ \ ln(x)-5)$$

x	$f(x)$	$\acute{f}(x)$	نوع النقطة
1	0		الطرف الأيسر للفترة
$\sqrt{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{-2}{e^2}<0$	عظمى محلية
e	$\frac{1}{e^2}$		الطرف الأيمن للفترة

لذلك أقل قيمة للدالة على الفترة تكون 0 وذلك عند النقطة $x=1$

لاحظ أنَّ $e>2$ لذا $e^2>2e$ وذلك يقتضي أنَّ $\frac{1}{e^2}<\frac{1}{2e}$

وأكبر قيمة للدالة على الفترة تكون $\frac{1}{2e}$ وذلك عند النقطة $x=\sqrt{e}$.

مسائل تطبيقية على النهايات العظمى والصغرى:

1. اوجد أبعاد المستطيل الذي طول محيطه a وله أكبر مساحة ممكنة.

الحل: نفرض أنَّ طول المستطيل x وعرضه z، إذن $2x+2z=a$ أي $z=\frac{a}{2}-x$

نفرض أنَّ مساحة المستطيل A إذن $A = xz = x \times \left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a}{2}x - x^2$

للبحث عن أكبر مساحة يجب البحث عن القيم القصوى لدالة المساحة

$$\frac{dA}{dx} = \frac{a}{2} - 2x$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

لتحديد نوع النقطة الحرجة نستخدم اختبار المشتقة الثانية $\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$

إذن $x = \frac{a}{4}$ هي نقطة نهاية محلية عظمى، عندئذٍ يكون عرض المستطيل $z = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$

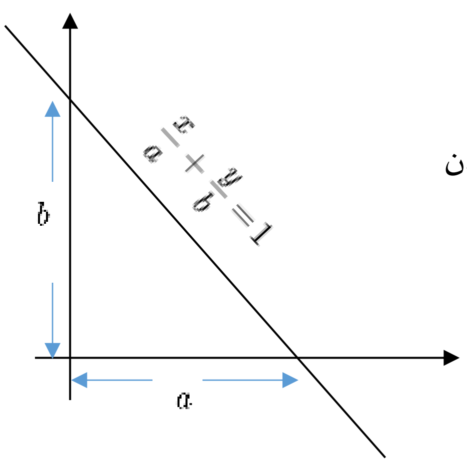
إذن أبعاد المستطيل الذي طول محيطه و له أكبر مساحة ممكنة هي $\frac{a}{4}$ للطول و $\frac{a}{4}$ للعرض أي أنَّ المربع هو المستطيل المعلوم المحيط وله أكبر مساحة ممكنة.

2. اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $P(1,\ 1)$ ويحصر الجزأين الموجبين من المحورين مثلثاً ذا أصغر مساحة ممكنة.

الحل: نفرض أنَّ طولي الجزأين المقطوعين من المحورين هما a و b ($a > 0$ و $b > 0$).

نفرض أنَّ معادلة المستقيم المطلوب هي $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ وأنَّ مساحة المثلث هي A

إذن $A = \frac{1}{2}ab$.



النقطة $P(1,\ 1)$ تحقق معادلة المستقيم أي أنَّ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ إذن

$$b = \frac{a}{a-1}$$

إذن مساحة المثلث هي $A = \frac{1}{2}a \times \frac{a}{a-1} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{a-1}$

للبحث عن القيم القصوى

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{2}\,\frac{(a-1)\times 2a - a^2\times 1}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2a^2 - 2a - a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a\ (a-2)}{(a-1)^2}$$

عند القيم القصوى $\frac{dA}{da}=0$ أي $\frac{a\ (a-2)}{(a-1)^2}=0$ إذن $a=0,\ 2$

$a=0$ غير ممكنة لأن طول ضلع المثلث أكبر من الصفر.

عند $a=2$ نستخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النهاية.

قبل النقطة في الجوار $a<2$ أي أنَّ $a-2<0$ إذن

$$sign\left(\frac{dA}{da}\right)=sign\left(\frac{1}{2}\frac{a\ \ (a-2)}{(a-1)^2}\right)=\frac{(+)\times(-)}{(+)}=(-)$$

بعد النقطة في الجوار $a>2$ أي أنَّ $a-2>0$ إذن

$$sign\left(\frac{dA}{da}\right)=sign\left(\frac{1}{2}\frac{a\ \ (a-2)}{(a-1)^2}\right)=\frac{(+)\times(+)}{(+)}=(+)$$

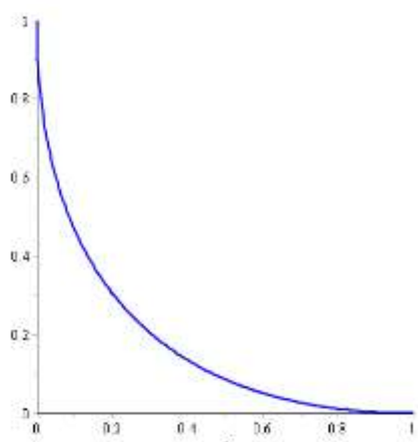
تغيرت إشارة $\frac{dA}{da}$ من $(-)$ إلى $(+)$ إذن توجد نهاية صغرى عند $a=2$ عندئذٍ تكون

$$b=\frac{a}{a-1}=\frac{2}{2-1}=2$$

إذن معادلة المستقيم المار بالنقطة $P(1,\ 1)$ ويحصر مع الجزئين الموجبين من المحورين مثلثاً ذا أصغر مساحة هي

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1.$$

3. من بين جميع نقاط المنحنى $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ اوجد إحداثيات النقطة الأقرب إلى نقطة الأصل.



$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

الحل: نفرض أنَّ النقطة المطلوبة هي $P(x,\ y)$ وهي تحقق معادلة المنحنى إذن $y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$

نفرض أنَّ مربَّع بُعد النقطة P عن الأصل هو

$$w=x^2+y^2=x^2+\left(1-\sqrt{x}\right)^4$$

من الملاحظ أنَّ تحديد النقطة التي يكون بعدها عن الأصل أقل ما يمكن يُكافئ تحديد النقطة التي يكون مربَّع بعدها عن الأصل أقل ما يمكن.

$$\frac{dw}{dx}=2x+4\left(1-\sqrt{x}\right)^{3}\times-\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)^{3}}{\sqrt{x}}=2\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{3}-\left(1-\sqrt{x}\right)^{3}}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dw}{dx}=2\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{3}-\left(1-\sqrt{x}\right)^{3}}{\sqrt{x}}=2\frac{\left(\sqrt{x}-\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\left(x+\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)+\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}\right)}{\sqrt{x}}=$$

$$=2\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-x+\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}\right)}{\sqrt{x}}=2\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}\right)}{\sqrt{x}}$$

عند القيم القصوى $\frac{dw}{dx}=0$ إذن $\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}\right)=0$

إما $2\sqrt{x}-1=0$ إذن $x=\frac{1}{4}$.أو $\left(\sqrt{x}+\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}\right)=0$ وهذا لا يُمكن لأنَّ $x>0$.

نستخدم اختبار المشتقة الأولى عند $x=\frac{1}{4}$

قبلها في الجوار تكون $x<\frac{1}{4}$ أي $2\sqrt{x}<1$ أي $sign\left(\frac{dw}{dx}\right)=\frac{(-)\,(+)}{(+)}=(-)$

قبلها في الجوار تكون $x>\frac{1}{4}$ أي $2\sqrt{x}>1$ أي $sign\left(\frac{dw}{dx}\right)=\frac{(+)(+)}{(+)}=(+)$

توجد نهاية صغرى محلية عند $x=\frac{1}{4}$ و $y=\left(1-\sqrt{x}\right)^{2}=\left(1-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{2}=\frac{1}{4}$ لذا أقرب نقطة من نقاط المنحنى $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ إلى الأصل هي النقطة $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ وتبعد عن الأصل مسافة

$$\sqrt{w}=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

4. تم إجراء عدد n من القياسات لحساب قيمة متغير x فكانت القراءات هي $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ أوجد تقدير لقيمة x من هذه القراءات بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء لهذه القراءات أقل ما يمكن.

الحل: مربع الخطأ في قراءة القيمة x_k يساوي $(x-x_k)^2$، نفرض أنَّ مجموع مربعات الأخطاء هو E

إذن $E=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+\cdots+(x-x_n)^2=\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)^2$

نبحث عن القيم القصوى لمجموع مربعات الأخطاء E

$$\frac{dE}{dx}=\sum_{k=1}^{n}2(x-x_k)=2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=2\left(nx-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$$

عند القيم القصوى $\frac{dE}{dx}=0$ أي $nx-\sum_{k=1}^{n}x_k=0$ إذن $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$

نستخدم طريقة المشتقة الثانية لتحديد نوع النهاية $\frac{d^2E}{dx^2}=2n>0$ إذن توجد نهاية صغرى عند $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$

إذن القيمة المناسبة لتقدير x بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء لهذه القراءات أقل ما يمكن هي $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$

وتسمى هذه القيمة بالوسط الحسابي للقيم $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$.

المشتقة النونية: n-th Derivative

لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق لعدد n من المرات، الرموز $y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ f^{(n)}(x),\ D^n$ ترمز لمشتقة الدالة ذات الترتيب nوتُسمى المشتقة النونية.

في أحيان كثيرة يُمكن استنتاج صيغة للمشتقة بعد إيجاد ثلاث أو أربع مشتقات، إلاَّ أن الصيغة المُستنتجة تحتاج لبرهان ويُمكن تحقيق ذلك باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي أو الاستقراء الرياضي **Mathematical Induction**.

أمثلة:

1. أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y=\alpha\ x^{\beta}$ ومن ثمَّ استنتج صيغة للمشتقة النونية للدالة.

الحل:

$y=ax^{\alpha}$

$$\therefore\ y^{(1)}=\alpha\beta\ x^{\beta-1}$$
$$y^{(2)}=\alpha\beta(\beta-1)\ x^{\beta-2}$$
$$y^{(3)}=\alpha\beta(\beta-1)\,(\beta-2)\ x^{\beta-3}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=\alpha\beta(\beta-1)\,(\beta-2)\cdots(\beta-(n-1))\ x^{\beta-n}$$

هنا يمكن ملاحظة التالي ...

- إذا كانت β عدد طبيعي يُمكن كتابة المشتقة النونية على الصورة

$$y^{(n)}=\alpha\ \frac{\beta!}{(\beta-n)!}\ x^{\beta-n}=\alpha\ n!\ \frac{\beta!}{n!\ \ (\beta-n)!}\ x^{\beta-n}=\alpha\ n!\binom{\beta}{n}x^{\beta-n}=\alpha\ n!\,\overset{\beta}{\underset{n}{C}}\ x^{\beta-n}$$

- إذا كانت β عدد صحيح سالب بحيث $\beta=-m$ يُمكن كتابة المشتقة النونية على الصورة

$$y^{(n)}=\alpha-m(-m-1)\,(-m-2)\cdots(-m-(n-1))\ x^{-m-n}=$$
$$=(-1)^{n}\alpha\ (m+n-1)\,(m+n-2)\,(m+n-3)\cdots(m+1)mx^{-(m+n)}=$$
$$=(-1)^{n}\alpha\ n!\ \ \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}x^{-(m+n)}=(-1)^{n}\alpha\ n!\ \overset{m+n-1}{\underset{n}{C}}\ x^{-(m+n)}$$

2. استنتج صيغة للمشتقة النونية للدالة $y=\dfrac{a}{bx+c}$ ومن ثمَّ أستنتج صيغة للمشتقة النونية للدالة $y=\dfrac{1}{4x^2-1}$.

$$y=\frac{a}{bx+c}=a\ (bx+c)^{-1}$$
$$y^{(1)}=a\times-1\ (bx+c)^{-2}\times b$$
$$y^{(2)}=a\times-1\times-2\ (bx+c)^{-3}\times b^2$$
$$y^{(3)}=a\times-1\times-2\times-3\ (bx+c)^{-4}\times b^3$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=a\times-1\times-2\times-3\times\cdots(-n)\ \ (bx+c)^{-(n+1)}\times b^n=(-1)^{n}a\times\frac{n!\times a^n}{(bx+c)^{(n+1)}}$$

الدالة $y=\dfrac{1}{4x^2-1}$ يُمكن كتابتها على الصورة $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left(D^n\left(\frac{1}{2x-1}\right)-D^n\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right)$$

وباستخدام الصيغة المُستنتجة سابقاً نجد أنَّ

$$D^n\left(\frac{1}{2x-1}\right)=(-1)^n\times\frac{n!\times 2^n}{(2x-1)^{n+1}},\ D^n\left(\frac{1}{2x+1}\right)=(-1)^n\times\frac{n!\times 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$$

$$\therefore y^{(n)}=(-1)^n\times n!\times 2^n\left(\frac{1}{(2x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(2x+1)^{n+1}}\right)$$

3. أوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة $y=sin(x)$ ومن ثمَّ استنتج صيغة للمشتقة النونية للدالة.

الحل:

$$y=sin(x)$$

$$y^{(1)}=cos(x)=sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(2)}=-\ sin(x)=sin(\pi+x)=sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)}=-\ cos(x)=-sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=sin\left(x-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=sin\left(x+3\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)}=sin(x)=sin(x+2\pi)=sin\left(x+4\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=sin\left(x+n\times\frac{\pi}{2}\right)$$

المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين (قاعدة لايبنز) General Leibniz Rule

لتكن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق لعدد n من المرات عندئذ تكون المشتقة النونية لحاصل ضرب الدالتين هي

$$D^n(f\times g)=\sum_{i=0}^{n}\overset{n}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x)=f(x)g^{(n)}(x)+n\ f^{(1)}(x)g^{(n-1)}+\frac{n}{2!}f^{(2)}(x)g^{(n-2)}+$$

$$+\cdots+\sum_{i=0}^{n}\overset{n}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x)+\cdots+f^{(n)}(x)g$$

الاثبات: يتم الاثبات عن طريق الاستنتاج الرياضي

عند $n=1$

$$D^1(f\times g)=\sum_{k=0}^{1}\overset{1}{\underset{k}{C}}\ f^{(k)}(x)g^{(1-k)}(x)=f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)=f\acute{g}+\acute{f}g$$

وهي قاعدة مشتقة ضرب الدالتين المعروفة.

نفرض صحة العلاقة عند $n=k$

$$\therefore\ D^k(fg)=\sum_{i=0}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)}g^{(k-i)}\right)\text{----------------------------}(1)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (1) للحصول على المشتقة من الرتبة $k+1$ للدالة fg

$$\therefore\ D^{k+1}(fg)=\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)}g^{(k-i)}\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{d}{dx}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)}g^{(k-i)}\right)=\sum_{i=0}^{k}\overset{k}{\underset{i}{C}}\left(\frac{d}{dx}\ f^{(i)}g^{(k-i)}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}\left(\ f^{(i)}g^{(k+1-i)}\right)+\left(\ f^{(i+1)}g^{(k-i)}\right)\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}f^{(i)}g^{(k+1-i)}\right)+\sum_{i=0}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}f^{(i+1)}g^{(k-i)}\right)=$$

$$=\left[\overset{k}{\underset{0}{C}}f^{(0)}g^{(k+1)}+\sum_{i=1}^{k}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}f^{(i)}g^{(k+1-i)}\right)\right]+\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\overset{k}{\underset{i}{C}}f^{(i+1)}g^{(k-i)}\right)+\overset{k}{\underset{k}{C}}f^{(k+1)}g^{(0)}\right]=$$

$$=\left[\overset{k+1}{\underset{0}{C}}\ f^{(0)}g^{(k+1)}+\sum_{r=1}^{k}\left(\overset{k}{\underset{r}{C}}f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)\right]+\left[\sum_{r=1}^{k}\left(\overset{k}{\underset{r-1}{C}}\ f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)+\overset{k+1}{\underset{k+1}{C}}\ f^{(k+1)}g^{(0)}\right]=$$

$$=\overset{k+1}{\underset{0}{C}}\ f^{(0)}g^{(k+1)}+\sum_{r=1}^{k}\left(\overset{k}{\underset{r}{C}}f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)+\sum_{r=1}^{k}\left(\overset{k}{\underset{r-1}{C}}\ f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)+\overset{k+1}{\underset{k+1}{C}}\ f^{(k+1)}g^{(0)}=$$

$$=\overset{k+1}{\underset{0}{C}}\ f^{(0)}g^{(k+1)}+\sum_{r=1}^{k}\left(\left(\overset{k}{\underset{r}{C}}+\overset{k}{\underset{r-1}{C}}\right)f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)+\overset{k+1}{\underset{k+1}{C}}\ f^{(k+1)}g^{(0)}=$$

$$=\overset{k+1}{\underset{0}{C}}\ f^{(0)}g^{(k+1)}+\sum_{r=1}^{k}\left(\overset{k+1}{\underset{r}{C}}\ f^{(r)}g^{(k+1-r)}\right)+\overset{k+1}{\underset{k+1}{C}}\ f^{(k+1)}g^{(0)}=\sum_{r=0}^{k+1}\left(\overset{k+1}{\underset{r}{C}}\ f^{(r)}g^{((k+1)-r)}\right).$$

وبذلك يكتمل الاثبات.

أمثلة:

1. باستخدام قاعدة لايبنز أوجد المشتقة النونية للدالة $y = x\ e^{ax}$.

الحل: بأخذ $f(x) = x$ و $g(x) = e^{ax}$، مع ملاحظة أنَّ $f^{(k)} = \begin{cases} 1 & when\ k = 1 \\ 0 & when\ k > 1 \end{cases}$ و $g^{(k)} = a^k\ e^{ax}$

وبالتعويض في قاعدة لايبنز

$$\therefore\ D^n(fg) = \sum_{i=0}^{n} \left(\overset{n}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)} g^{(n-i)} \right) = f \times g^{(n)} + \overset{n}{\underset{1}{C}} f^{(1)} g^{(n-1)} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x \times a^n e^{ax} + n \times 1 \times a^{n-1} e^{ax} = a^{n-1}(ax + n) e^{ax}.$$

2. باستخدام قاعدة لايبنز أوجد المشتقة النونية للدالة $y = x^2 sin(x)$ و من ثمَّ أوجد $y^{(100)}$.

الحل: بأخذ $f(x) = x^2$ و $g(x) = sin(x)$، مع ملاحظة أنَّ $f^{(k)} = \begin{cases} 2x & when\ k = 1 \\ 2 & when\ k = 2 \\ 0 & when\ k > 2 \end{cases}$ و

$$g^{(k)} = sin\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right)$$

وبالتعويض في قاعدة لايبنز

$$\therefore\ D^n(fg) = \sum_{i=0}^{n} \left(\overset{n}{\underset{i}{C}}\ f^{(i)} g^{(n-i)} \right) = f \times g^{(n)} + \overset{n}{\underset{1}{C}} f^{(1)} g^{(n-1)} + \overset{n}{\underset{2}{C}} f^{(2)} g^{(n-2)} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x^2 \times sin\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right) + n \times 2x \times sin\left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times sin\left(x + (n-2) \times \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= x^2 \times sin\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right) + 2nx \times sin\left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right) + n(n-1) \times sin\left(x + (n-2) \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore y^{(100)} = x^2 \times sin(x + 50\pi) + 200x \times sin\left(x + (99) \times \frac{\pi}{2}\right) + 9900 \times sin(x + 49\pi) =$$

$$= x^2 \times sin(x + 50\pi) + 200x \times sin\left(x + 48\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + 9900 \times sin(x + 48\pi + \pi) =$$

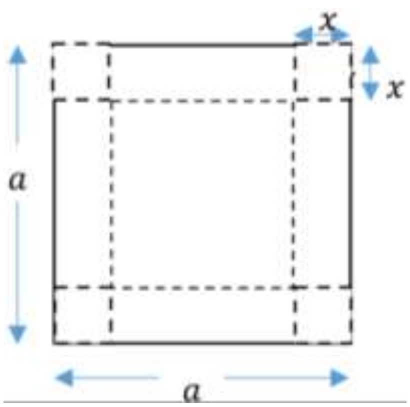
$$= x^2 \times sin(x) + 200x \times sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 9900 \times sin(x+\pi) =$$

$$= x^2 \times sin(x) + 200x \times (-cos(x)) + 9900 \times (-sin(x))$$

$$\therefore y^{(100)} = (x^2 - 9900)\,sin(x) - 200x cos(x)$$

تمارين

1. أوجد أقل وأكبر قيمة للدالة $y = x^2 - x$ على الفترة $[-2,\ 1]$.
2. أوجد أقل وأكبر قيمة للدالة $y = x^3 e^{-6x^2}$ على الفترة $[0,\ 1]$.
3. يتم صناعة صندوق مفتوح من الأعلى من لوح مربع طول ضلعه a وذلك بقص مربعات متساوية من جميع الأركان. اوجد طول ضلع المربع الذي يجب قصه من الأركان ليكون حجم الصندوق الناتج أكبر ما يُمكن.



4. سلك معدني طوله 20 م المطلوب تشكيل مثلث متساوي الأضلاع ودائرة من هذا السلك، اوجد طول ضلع المثلث ونصف قطر الدائرة بحيث يكون مجموع مساحتيهما أكبر ما يمكن.
5. أوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة $y = cosh(x)$ ومن ثمَّ استنتج صيغة للمشتقة النونية للدالة.
6. باستخدام قاعدة لايبنز أوجد المشتقة النونية للدالة $y = \sqrt{x}\, e^{-2x}$.
7. باستخدام قاعدة لايبنز أوجد $y^{(12)}$ النونية للدالة $y = x^2 cos(x)$.