العلاقات Relation

تعريف: لتكن B, A فئتان. يقال أن R علاقة من A الى B اذا كانت $R \subseteq A \times B$. اذا كان $(a,b) \in R$ نكتب aRb و تقرأ a على علاقة مع b و اذا كانت a ليست على علاقة مع b نكتب $a \not R b$.

يعرف مجال Domain العلاقة R و نرمز له بالرمز Dom (R) بانه:

$$Dom(R) = \{a \in A \mid aRb \ \ for\ some\ b \in B\}$$

كما يعرف مدى Range العلاقة R و يرمز له بالرمز Rang (R) بانه :

$$Rang(R) = \{b \in B \mid aRb \ \ for\ some\ a \in A\}$$

مثال: لتكن R علاقة من الفئة $A = \{1,2,3\}$ الى الفئة $B = \{a, b\}$ معرفة كالتالى

$$R = \{(1,a), (1,b), (3,a)\}$$

عندئذ $1\,R\,a$ ، $2 \not R\, b$ ، $3\,R\,a$ ، و $3 \not R\, b$

تعريف: العلاقة من الفئة A الى الفئة A هى فئة جزئية من $A \times A$.

مثال: لتكن A هى الفئة $\{1,2,...,9\}$ ، وكانت R علاقة من a الى b معرفة بـ aRb اذا و فقط اذا كان a يقسم b.

عندئذ يمكننا تعريف العلاقة التالية:

$$R = \{(2,6),(2,8),(3,6),(3,9),(4,8)\}$$
$$Dom(R) = \{2,3,4\}$$
$$Rang(R) = \{6,8,9\}$$

مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$، و R علاقة من a الى b معرفة بـ aRb اذا و فقط اذا كان $a \le b$ .a اوجد R ، $Dom(R)$ ، و Rang(R).

الحل:

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

$$Dom(R) = A,$$
$$Rang(R) = A.$$

مثال: لتكن A = {2, 3, 4} و B = {3, 4, 5, 6, 7}. عرف R علاقة من a الى b معرفة بـ aRb اذا و فقط اذا كان a يقسم b. اوجد R، $Dom(R)$، و $Rang(R)$.

الحل: R = {(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}

Dom(R) = {2, 3, 4},

Range(R) ={3, 4, 6}

خصائص العلاقات Properties of Relations

1- العلاقة المنعكسة Reflexive Relations

تعريف: لتكن R علاقة معرفة على فئة A. يقال أن R منعكسة Reflexive اذا كان $(a,a)\in R$ لجميع $a\in A$.

فمثلاً $a\le b$ منعكسة على فئة الاعداد الصحيحة لان $a\le a$ لجميع $a\in\Re$

العلاقة $a<b$ ليت منعكسة على $\Re$ لان a ليست اقل من a لكل $a\in\Re$.

مثال: لنعتبر العلاقات ادناه على الفئة $A=\{1,2,3,4\}$.

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\},$$
$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$
$$R_6 = \{(3, 4)\}.$$

اياً منها يشكل علاقة منعكسة؟

الحل: العلاقات R_3 و R_5 هي منعكسة لان كلا منها يحوى الازواج المرتبة (1,1)، (2,2)، (3,3)، و (4,4) بينما العلاقات الاخرى لا تحوى الزوج المرتب (3,3).

2– العلاقة المتماثلة Symmetric Relation:

تعريف: يقال لعلاقة R معرفة على فئة A بانها متماثلة symmetric اذا كان aRb يقتضى bRa لجميع $a,b\in A$. اى ان

$$if \ \forall a \forall b((a,b) \in R \to (b,a) \in R)$$.

فمثلاً اذا كان $A = \{1,2,3,4\}$ فان العلاقة $R = \{(1,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$ هى علاقة متماثلة على الفئة A .

3– العلاقة المضاده للتماثل Antisymmetric Relation

تعريف: يقال لعلاقة R معرفة على فئة A أنها مضاده للتماثل اذا كان لكل $a,b \in A$ بحيث اذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ فان $a = b$. اى ان

$$if \ \forall a \forall b((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \to (a = b))$$.

مثال : **اذا كان** $A = \{(1,2,3,4)$ وكانت R هى العلاقة $\{(1,2),(1,3),(1,4)$ ، فان R مضاده للتماثل .

4– العلاقة المتعدية (الناقلة) Transitive Relation

تعريف: يقال لعلاقة R معرفة على فئة A بانها ناقلة أو متعدية transitive اذا كان aRb ، bRc ، فان aRc لجميع c,b,a فى A . اى ان

$$if \ \forall a \forall b \forall c(((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \to (a,c) \in R)$$.

مثال: العلاقة "يقسم " هى علاقة متعدية على فئة الاعداد الحقيقية $\Re$ ، لانه اذا كان n_1 يقسم n_2 و n_2 يقسم n_3 فالضرورة n_1 يقسم n_3 .

ملحوظة: بما ان العلاقات من الفئة A الى الفئة B هى فئات جزئية من الفئة $A \times B$ ، فان دمج اى علاقتين يتم بنفس الطريقة التى يتم بها دمج فئتين. مثلا اذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ، فان العلاقتين

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \text{ و } R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

يمكن دمجها كالتالى:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\},$$
$$R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\},$$
$$R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

مثال: لتكن R_1 هي العلاقة المعرفة بـ "اقل من" على فئة الاعداد الحقيقة و R_2 هي العلاقة المعرفة بـ "اكبر من" على فئة الاعداد الحقيقة. اى ان

$$R_1 = \{(x, y) \mid x < y\} \text{ و } R_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$$

اوجد:

(i) $R_1 \cup R_2$ (ii) $R_1 \cap R_2$ (iii) $R_1 - R_2$

الحل:

(i) نلاحظ ان $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ اذا وفقط اذا كان $(x, y) \in R_1$ او $(x, y) \in R_2$. اذن $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ اذا وفقط اذا كان $x < y$ او $y < x$. وعليه، فان

$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid x \neq y\}.$$

(ii) نلاحظ ان $(x, y) \in R_1 \cap R_2$ اذا وفقط اذا كان $(x, y) \in R_1$ و $(x, y) \in R_2$، ولكن هذا مستحيل لانه لا يمكن ان يتحقق ان يكون $x < y$ و $y < x$. وعليه، فان $R_1 \cap R_2 = \phi$.

(iii) **تمرين.**

تركيب العلاقات Composition of Relations

تعريف: لتكن R_1 علاقة من الفئة A الى الفئة B و R_2 هى علاقة من الفئة B الى الفئة C. تركيب R_1 و R_2، ويرمز له بـ $R_1 \circ R_2$، هو العلاقة التى تتكون من الازواج المرتبة (a, c) حيث $a \in A$ و $c \in C$ بحيث يوجد عنصر $b \in B$ بحيث $(a, b) \in R_1$ و $(b, c) \in R_2$.

مثال: اوجد تركيب العلاقتين R_1 و R_2 حيث R_1 هى العلاقة من $\{1, 2, 3\}$ الى $\{1, 2, 3, 4\}$ المعرفة بـ

$$R_1 = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$$

و R_2 هى العلاقة من $\{1, 2, 3, 4\}$ الى $\{0, 1, 2\}$ المعرفة بـ

$$R_2 = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}.$$

الحل:

$$R_1 \circ R_2 = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

تعريف: لتكن R علاقة على الفئة A . تعرف قوة العلاقة R ، ويرمز لها بـ R^n حيث $n = 1,2,3,...$ ، بالعلاقة التكرارية recursive relation التالية:

$$R^1 = R \quad \text{and} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

مثلا:

$$R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$$

مثال: اذا كان $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$ ، اوجد R^n حيث $n = 2,3,4$.

الحل: من التعريف نجد ان

$$R^2 = R \circ R,$$

وعليه، فان

$$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$

ايضا

$$R^3 = R^2 \circ R,$$

اذن

$$R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$

نظرية: لتكن R علاقة على الفئة A . نقول ان R علاقة متعدية transitive اذا وفقط اذا كان

$$R^n \subseteq R, \ n = 1,2,3,\ldots.$$

البرهان: تمرين.

علاقة التكافؤ Equivalence Relations

لتكن A فئة ، Rعلاقة معرفة على A يقال أن Rعلاقة تكافؤ اذا كانت R منعكسة reflexive، متماثلة symmetric ، و متعدية transitive.

ملحوظة: اذا كان aRb بحيث كانت R علاقة تكافؤ، فاننا نقول ان a و b متكافئتان equivalent وتكتب $a \sim b$.

مثال : $R \equiv =$ علاقة تكافؤ على $\Re$ و على أي فئة جزئية منها لان

1/= منعكسة ، لان $a = a$

2/ = متماثلة لانه اذا كان $a = b$ فان $b = a$

3/ = متعدية لانه اذا كان $a = b$ و $b = c$ فان $a = c$.

مثال: لتكن R علاقة معرفة على فئة الاعداد الحقيقية بـ aRb اذا وفقط اذا كان $a - b$ هو عدد صحيح. هل R علاقة تكافؤ؟

الحل:

بما ان $a - a = 0$ هو عدد صحيح لكل عدد حقيقي a فان aRa لكل عدد حقيقي a ، وعليه فان R هي علاقة منعكسة reflexive.

افرض ان aRb . اذن، $a - b$ هو عدد صحيح، وبما ان $b - a$ ايضا عدد صحيح، فان bRa . اذن، R هي علاقة متماثلة symmetric.

اذا كان aRb و bRc فان $a - b$ و $b - c$ هي اعداد صحيحة. وعليه، فان $a - c = (a - b) + (b - c)$ هو ايضا عدد صحيح. اذن aRc . اذن، R هي علاقة متعدية transitive. وبالتالى، فان R هي علاقة تكافؤ equivalence relation.