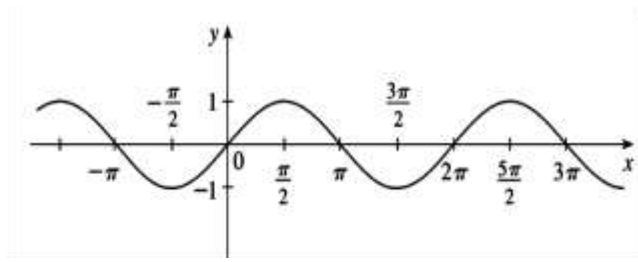
الدوال المثلثية

1. دالة الجيب Sine Function:

معلوم أنَّ دالة الجيب $y = sinx$ يكون مجال تعريفها هو $D = \mathbb{R}$ ومداها الفترة المغلقة $R = [-1,\ 1]$

وهي دالة فردية حيث إنَّ $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $sin\,(-x) = -\,sin\,(x)$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة الجيب:**



منحنى الدالة $y = sin\,x$

(1) $sin\,(-x) = -\,sin\,(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$

(2) $sin\,(x+2\pi) = sin\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

(3) $sin\,(x+2k\pi) = sin\,(x)\ \forall_{k\in\mathbb{I}}$.

(4) $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

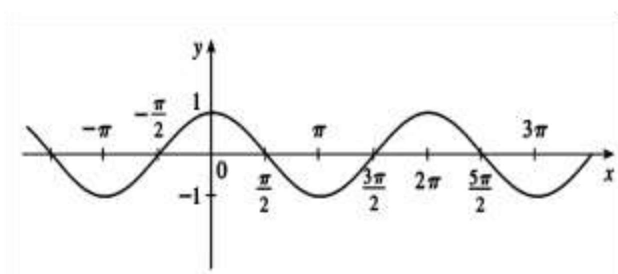
(5) $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

2. دالة جيب التمام Cosine Function:

معلوم أنَّ دالة جيب التمام $cos\,(x)$ يكون مجال تعريفها هو $D = \mathbb{R}$ يكون مداها الفترة المغلقة

$R = [-1,\ 1]$ ، وهي دالة زوجية حيث إنَّ $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $cos\,(-x) = cos\,(x)$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة جيب التمام:**



منحنى الدالة $y = cos\,(x)$

(1) $cos\,(-x) = cos\,(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$

(2) $cos\,(x+2\pi) = cos\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

(3) $cos\,(x+2k\pi) = cos\,(x)\ \forall_{k\in\mathbb{I}}$.

(4) $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

(5) $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\,sin\,(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

3. دالة الظل Tangent Function:

معلوم أنَّ دالة الظل $y = tanx = \dfrac{sinx}{cosx}$ يكون مجال تعريفها هو $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k-1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{I}\right\}$ يكون مداها $R = \mathbb{R}$ ، وهي دالة فردية حيث إنَّ $tan\,(-x) = -\,tan\,(x) \quad \forall_{x \in \mathrm{D}}$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة الظل:**

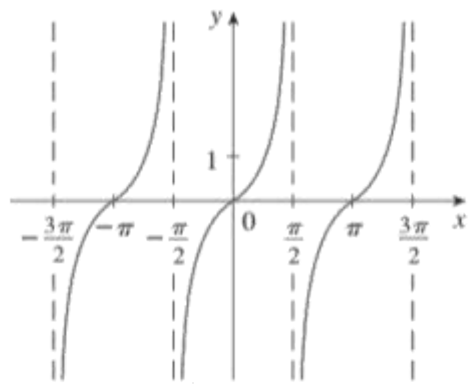
(1) $tan\,(-x) = -\,tan\,(x) \quad \forall_{x \in D}$.

(2) $tan\,(x + 2\pi) = tan\,(x)\ \forall_{x \in D}$.

(3) $tan\,(x + 2k\pi) = tan\,(x)\ \forall_{k \in \mathbb{I}, x \in D}$.

(4) $tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = cot\,(x)\ \ \forall_{x \in D}$.

(5) $tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\,cot\,(x)\,\forall_{x \in D}$.



منحنى الدالة $y = tanx$

دالة قاطع التمام Cosecant Function:

معلوم أنَّ دالة قاطع التمام $y = cosec\,(x) = csc\,(x) = \dfrac{1}{sin\,(x)}$ يكون مجال تعريفها هو $D = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{I}\}$ ومداها الفترة $R = \mathbb{R} - (-1,\ 1)$ ، وهي دالة فردية حيث إنَّ

$csc\,(-x) = -\,csc\,(x) \quad \forall_{x \in \mathrm{D}}$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة قاطع التمام:**

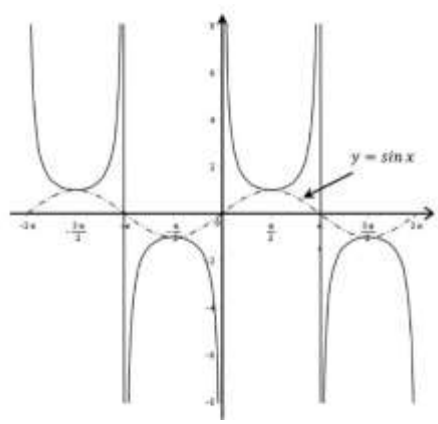
(1) $csc\,(-x) = -\,csc\,(x) \quad \forall_{x \in D}$

(2) $csc\,(x + 2\pi) = csc\,(x)\ \forall_{x \in D}$.

(3) $csc\,(x + 2k\pi) = csc\,(x)\ \forall_{k \in \mathbb{I}, x \in D}$.

(4) $csc\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = sec\,(x)\ \ \forall_{x \in D}$.

(5) $csc\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = sec\,(x)\ \ \forall_{x \in D}$.



منحنى الدالة $y = cscx$

4. دالة القاطع Secant Function:

معلوم أنَّ دالة قاطع التمام $y = sec\,(x) = \dfrac{1}{cos\,(x)}$ يكون مجال تعريفها هو

$D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k-1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{I}\right\}$ ومداها الفترة $R = \mathbb{R} - (-1,\ 1)$، وهي دالة زوجية حيث أنَّ

$$sec\,(-x) = sec\,(x) \quad \forall_{x \in \text{D}}$$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة القاطع:**

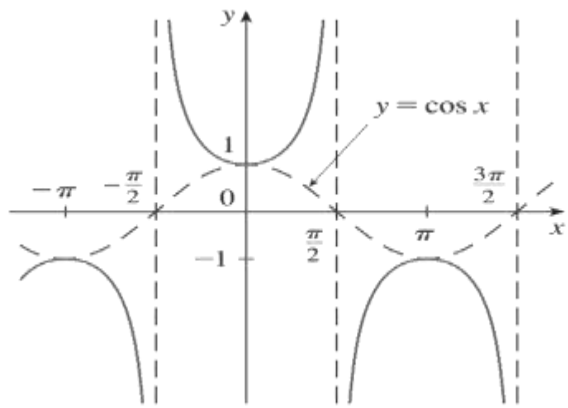
(1) $sec\,(-x) = sec\,(x) \quad \forall_{x \in D}$

(2) $sec\,(x + 2\pi) = sec\,(x)\ \forall_{x \in D}$.

(3) $sec\,(x + 2k\pi) = sec\,(x)\ \forall_{k \in \mathbb{I}, x \in D}$.

(4) $sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = csc\,(x)\,\forall_{x \in D}$.

(5) $sec\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\,csc\,(x)\,\forall_{x \in D}$.



منحنى الدالة $y = secx$

5. دالة ظل التمام Cotangent Function:

معلوم أنَّ دالة الظل $y = cotx = \dfrac{cosx}{sinx}$ يكون مجال تعريفها هو $D = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{I}\}$ يكون مداها الفترة $R = \mathbb{R}$ ، وهي دالة فردية حيث إنَّ $cot\,(-x) = -\,cot\,(x) \quad \forall_{x \in \text{D}}$

- **بعض الخصائص الهامة لدالة ظل التمام:**

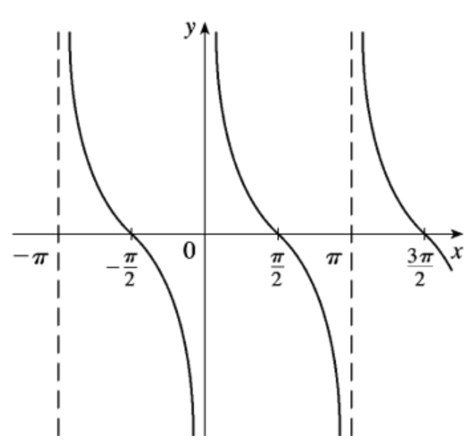
(1) $cot\,(-x) = -\,cot\,(x) \quad \forall_{x \in D}$.

(2) $cot\,(x + 2\pi) = cot\,(x)\ \forall_{x \in D}$.

(3) $cot\,(x + 2k\pi) = cot\,(x)\ \forall_{k \in \mathbb{I}, x \in D}$.

(4) $cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = tan\,(x)\,\forall_{x \in D}$.

(5) $cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\,tan\,(x)\,\forall_{x \in D}$.



منحنى الدالة $y = cotx$

تفاضل الدوال المثلثية

كما أثبتنا من قبل فإنَّ..

1. $\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x).$
2. $\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x).$

يُمكن استخدام تفاضل دالتي الجيب وجيب التمام لإيجاد تفاضل بقية الدوال المثلثية

3. $\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x)$

الإثبات :

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right] = \frac{\cos(x).(\cos(x)) - \sin(x).(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 = \sec^2(x).$$

4. $\frac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$

الإثبات :

$$\frac{d}{dx}[\csc(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin(x)}\right] = \frac{d}{dx}[(\sin(x))^{-1}] =$$

$$= -1 \times (\sin(x))^{-2} \times \cos(x) = -\frac{1}{\sin(x)} \times \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\csc(x)\cot(x).$$

5. $\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$

الإثبات :

$$\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos(x)}\right] = \frac{d}{dx}[(\cos(x))^{-1}] =$$

$$= -1 \times [\cos(x)]^{-2} \times (-\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec(x)\tan(x).$$

6. $\frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x)$

الإثبات :

$$\frac{d}{dx}[cot(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{cos(x)}{sin(x)}\right] = \frac{sin(x).(-sin(x)) - cos(x).(cos)}{sin^2(x)} =$$

$$= -\frac{sin^2(x) + cos^2(x)}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)} = \left(\frac{1}{sin(x)}\right)^2 = csc^2(x).$$

باستخدام تفاضل دالة الدالة، إذا كانت u دالة في x فإنَّ

1. $\frac{d}{dx}[sin(u)] = cos(u) \times \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}[cos(u)] = -sin(u) \times \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}[tan(u)] = sec^2(u) \times \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}[csc(u)] = -csc(u)cot(u) \times \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}[sec(u)] = sec(u)tan(u) \times \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}[cot(u)] = -csc^2(u) \times \frac{du}{dx}$

أمثلة: أوجد تفاضل الدوال التالية ...

1. $y = 4sin(2x) - cos^2(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times cos(2x) \times 2 - 2 \times cos(x) \times (-sin(x)) =$$

$$= 8cos(2x) + 2sin(x)cos(x) = 8cos(2x) + sin(2x).$$

2. $y = 4sec(cos(x^2) + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = 4sec(cos(x^2) + 1) \quad tan(cos(x^2) + 1) \times [-sin(x^2) \times 2x \quad] =$$

$$= -8 \ x \ sin(x^2) sec(cos(x^2) + 1) \quad tan(cos(x^2) + 1).$$

3. $y=\dfrac{sin\,(x)+1}{cos\,(x)+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(cos\,(x)+1)\,cos\,(x)-(sin\,(x)+1)(-sin\,(x))}{(cos\,(x)+1)^2}==$$

$$\frac{cos\,(x)^2+cos\,(x)+sin^2(x)+sin\,(x)}{(cos\,(x)+1)^2}==\frac{1+sin\,(x)+cos\,(x)}{(cos\,(x)+1)^2}.$$

4. $y=\sqrt{tan\,(x\ \ sec\,(x))}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(tan\,(xsec\,(x)))^{-\frac{1}{2}}\times sec^2(xsec\,(x))\times(x\ \ sec\,(x)tan\,(x)+sec\,(x))=$$

$$=\frac{sec^2(xsec\,(x))\times[x\ \ sec\,(x)tan\,(x)+sec\,(x)]}{2\sqrt{tan\,(xsec\,(x))}}$$

5. $y=csc\left(\dfrac{sin\,(x)}{cot\,(x)+tan\,(x)}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=-\ \ csc\left(\frac{sin\,(x)}{cot\,(x)+tan\,(x)}\right)\ \ cot\left(\frac{sin\,(x)}{cot\,(x)+tan\,(x)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{(cot\,(x)+tan\,(x)).cos\,(x)-sin\,(x).(-csc^2\,(x)+sec^2\,(x))}{(cot\,(x)+tan\,(x))^2}\right)$$

لكن $\dfrac{sin\,(x)}{cot\,(x)+tan\,(x)}=\dfrac{sin\,(x)}{\left(\frac{1}{sin\,(x)cos\,(x)}\right)}=sin^2\,(x)cos\,(x)$

و $\dfrac{(cot\,(x)+tan\,(x)).cos\,(x)-sin\,(x).(-csc^2\,(x)+sec^2\,(x))}{(cot\,(x)+tan\,(x))^2}=\dfrac{\frac{1}{sin\,(x)}+\frac{cos^2\,(x)-sin^2(x)}{sin\,(x)cos^2\,(x)}}{\frac{1}{sin^2\,(x)cos^2\,(x)}}=$

$$=2cos^2\,(x)sin\,(x)-sin^3\,(x)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\ \ csc\,(sin^2\,(x)cos\,(x))\times\ \ cot\,(sin^2\,(x)cos\,(x))\times\times(2cos^2\,(x)sin\,(x)-sin^3\,(x))$$

تلميح : يمكن كتابة الدالة بالصورة $y=csc\left(\dfrac{sin\,(x)}{cot\,(x)+tan\,(x)}\right)=\ \ csc\,(sin^2\,(x)cos\,(x))$

ثم إجراء التفاضل.

- **التفاضل الضمني Implicit Differentiation**

الدالة الضمنية هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة $g(x,y)=0$ حيث y دالة في x، أي أنَّ العلاقة بين x و y ليست في الصورة الصريحة $y=f(x)$، العلاقات التالية هي أمثلة لدوال ضمنية ...

1. $x^2+y^2=4$
2. $xy^2=1$
3. $sin(y)+xy=\sqrt{y+1}$

- **تفاضل y^n حيث y دالة في x:** باستخدام دالة الدالة وبفرض $u=u(y)$ حيث $y=y(x)$ تكون

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\times\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}(y^n)\times\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}\times\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y^n)=ny^{n-1}\times\frac{dy}{dx}$$

أمثلة : أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان ...

.1 $x^2+y^2=4$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x،

$$2x+2y\ .\frac{dy}{dx}=0\ ,\ \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

.2 $e^x+e^y=xy$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x،

$$e^x+e^y\times\frac{dy}{dx}=x.\frac{dy}{dx}+y$$

$$\therefore (e^y-x)\frac{dy}{dx}=y-e^x,\quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-e^x}{e^y-x}$$

.3 $sin(x)+sin(y)=cos(x+y)$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x،

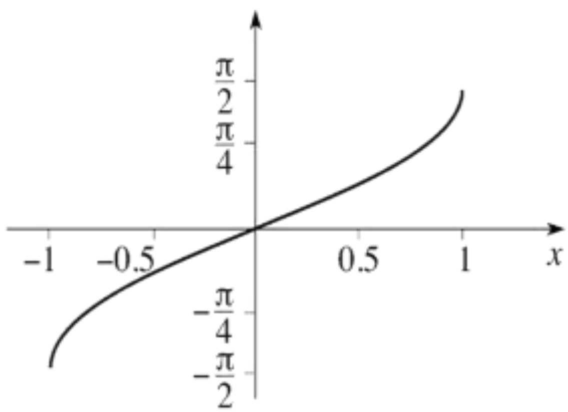
$$cos(x)+cos(y).\frac{dy}{dx}=-sin(x+y)\times\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore (cos(y)+sin(x+y))\frac{dy}{dx}=-(cos(x)+sin(x+y)),\quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{cos(x)+sin(x+y)}{cos(y)+sin(x+y)}$$

- **الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions:**

1. دالة معكوس الجيب The Inverse Sine Function:

إذا كانت $x = sin\,(y)$ فإنَّ $y = arcsin\,(x) = sin^{-1}x$ هي دالة معكوس الجيب، ويكون مجال تعريفها هو الفترة المغلقة $D = [-1\,,1]$ ومداها الفترة المغلقة $R = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



منحنى الدالة $y = sin^{-1}x$

وهي دالة فردية حيث إنَّ

$$sin^{-1}(-x) = -\,sin^{-1}(x) \quad \forall_{x\in D}$$

- **مشتقة دالة معكوس الجيب.**

$$y = sin^{-1}x, \quad \therefore\ siny = x$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$cos\,(y)\ \frac{dy}{dx} = 1, \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy}$$

من المعلوم أنَّ $cosy = \pm\sqrt{1 - sin^2 y}$، وبما أنَّ $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ تكون $\cos y > 0$ لذا تكون

$$cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

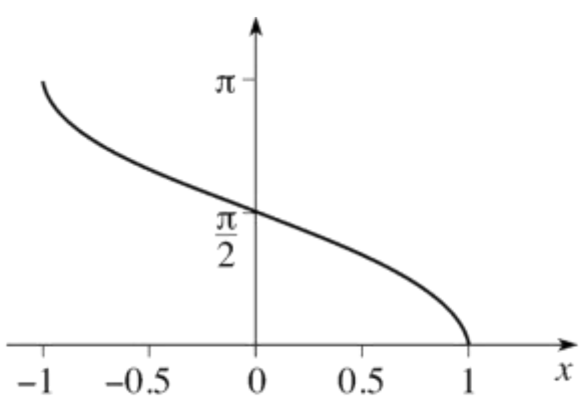
2. دالة معكوس جيب التمام The Inverse Cosine Function:

إذا كانت $x = cos\,(y)$ فإنَّ

$y = arccos\,(x) = cos^{-1}x$ هي دالة معكوس جيب التمام،

ويكون مجال تعريفها هو الفترة المغلقة

$D = [-1\,,1]$ ومداها الفترة المغلقة $R = [0,\pi]$



منحنى الدالة $y = cos^{-1}x$

- **مشتقة دالة معكوس جيب التمام.**

$$y=\cos^{-1}x, \quad \therefore \cos y=x$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$-\sin(y)\frac{dy}{dx}=1, \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin y}$$

من المعلوم أنَّ $\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}$، وبما أنَّ $y\in[0,\pi]$ تكون $\sin y>0$ لذا تكون

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. **دالة معكوس الظل The Inverse Tangent Function:**

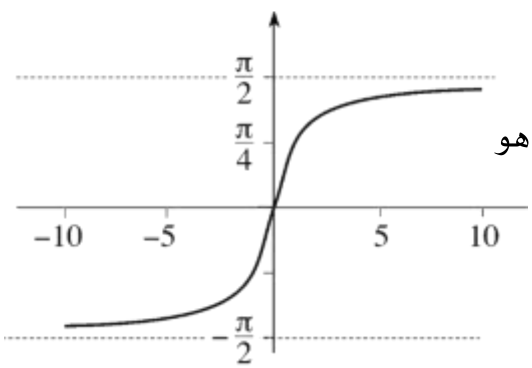
إذا كانت $x=\tan y$ فإنَّ

$y=\arctan x=\tan^{-1}x$ هي دالة معكوس الظل، ويكون مجال تعريفها هو

$D=\mathbb{R}$ ومداها الفترة المفتوحة $R=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

وهي دالة فردية حيث إنَّ

$$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}(x) \quad \forall_{x\in D}$$



منحنى الدالة $y=\tan^{-1}x$

- **مشتقة دالة معكوس الظل.**

$$y=\tan^{-1}x, \quad \therefore \tan y=x$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$\sec^2(y)\frac{dy}{dx}=1, \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2(y)}$$

من المعلوم أنَّ $\sec^2(y)=1+\tan^2(y)=1+x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

4. دالة معكوس قاطع التمام The Inverse Cosecant Function:

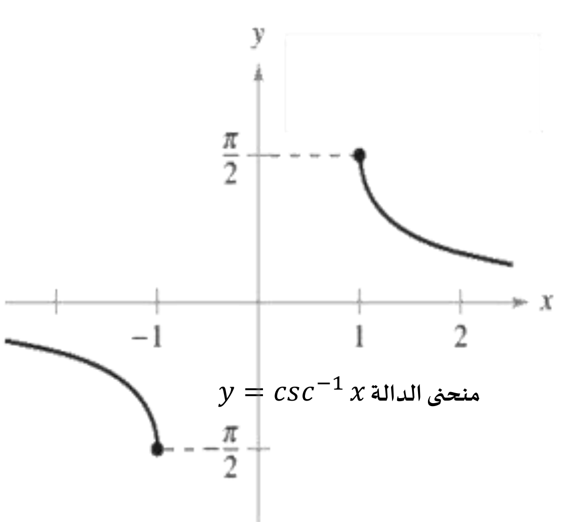
إذا كانت $x = cscy$ فإنَّ $y = arccscx = csc^{-1}x$ هي دالة معكوس **قاطع التمام**، ويكون مجال تعريفها هو

$D = \mathbb{R} - (-1, 1)$ ومداها الفترة

$R = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \ \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

وهي دالة فردية حيث إنَّ

$$csc^{-1}(-x) = -csc^{-1}(x) \quad \forall_{x \in D}$$



منحنى الدالة $y = csc^{-1}x$

- **مشتقة دالة معكوس قاطع التمام**

$$y = csc^{-1}x, \ \ \therefore \csc y = x$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$-csc(y)cot(y)\frac{dy}{dx} = 1, \ \ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csc(y)cot(y)}$$

من المعلوم أنَّ $cot(y) = \pm\sqrt{csc^2(y) - 1}$، وبما أنَّ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

إذا كانت $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ 0\right)$ وتكون $\csc y < 0$ لذا يكون $cot(y) = -\sqrt{csc^2(y) - 1}$ وتكون

$$csc(y)cot(y) = |csc(y)|\sqrt{csc^2(y) - 1} > 0$$

أما إذا كانت $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ وتكون $\csc y > 0$ لذا يكون $cot(y) = \sqrt{csc^2(y) - 1}$ وتكون

$$csc(y)cot(y) = |csc(y)|\sqrt{csc^2(y) - 1} > 0$$

لذا في جميع الأحوال تكون $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{|csc(y)|\sqrt{csc^2(y) - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(csc^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

5. دالة معكوس القاطع The Inverse Secant Function:

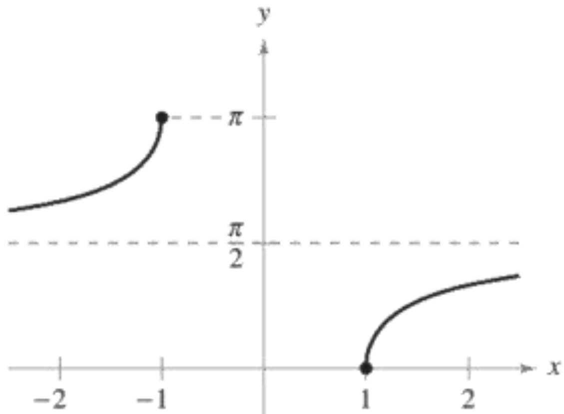
إذا كانت $x = secy$ فإنَّ

$y = arcsecx = cec^{-1}x$ هي دالة معكوس القاطع، ويكون

مجال تعريفها هو

$D = \mathbb{R} - (-1, 1)$ ومداها الفترة

$R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \ \pi\right] = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



منحنى الدالة $y = sec^{-1}x$

- **مشتقة دالة معكوس القاطع**

$$y = sec^{-1}x, \ \ \therefore secy = x$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$sec(y)tan(y)\frac{dy}{dx} = 1, \ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec(y)tan(y)}$$

من المعلوم أنَّ $tan(y) = \pm\sqrt{sec^2(y) - 1}$، وبما أنَّ $y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

إذا كانت $y \in \left[0, \ \frac{\pi}{2}\right)$ تكون $\tan y > 0$ لذا يكون $tan(y) = \sqrt{sec^2(y) - 1}$ وتكون

$$sec(y)tan(y) = |sec(y)|\sqrt{sec^2(y) - 1} > 0$$

أما إذا كانت $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ تكون $\sec y < 0$ و $\tan y < 0$ لذا يكون

$tan(y) = -\sqrt{sec^2(y) - 1}$ وتكون $sec(y)tan(y) = |sec(y)|\sqrt{sec^2(y) - 1} > 0$

لذا في جميع الأحوال تكون $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|sec(y)|\sqrt{sec^2(y) - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

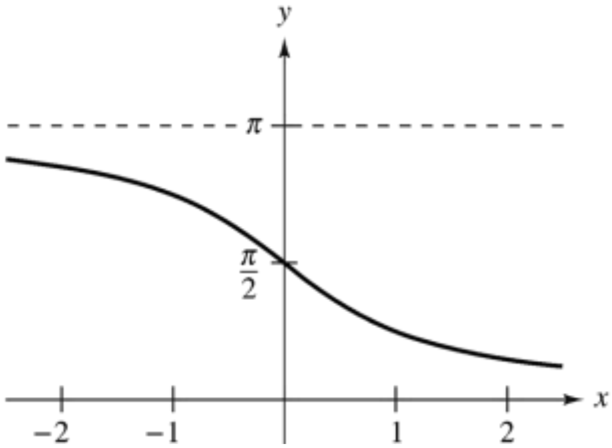
6. دالة معكوس ظل التمام The Inverse Cotangent Function:

إذا كانت $x=\cot y$ فإنَّ

$y=arccotx=cot^{-1}x$ هي دالة معكوس ظل التمام، ويكون

مجال تعريفها هو $D=\mathbb{R}$ ومداها الفترة المفتوحة

$R=(0,\pi)$.



منحنى الدالة $y=cot^{-1}x$

- **مشتقة دالة معكوس ظل التمام.**

$y=cot^{-1}x,\ \ \therefore coty=x$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$-cot\ (y)\frac{dy}{dx}=1,\ \ \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{csc^2\ (y)}$$

من المعلوم أنَّ $csc^2\ (y)=1+cot^2(y)=1+x^2$، و

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2}$$

باستخدام تفاضل دالة الدالة، إذا كانت u دالة في x فإنَّ

1. $\frac{d}{dx}[sin^{-1}(u)]=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\times\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}[cos^{-1}(u)]=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\times\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}[tan^{-1}(u)]=\frac{1}{1+u^2}\times\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}[csc^{-1}(u)]=\frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\times\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}[sec^{-1}(u)]=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\times\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}[cot^{-1}u]=\frac{-1}{1+u^2}\times\frac{du}{dx}$

أمثلة: أوجد تفاضل الدوال التالية ...

(1) $y = x\ sin^{-1}(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \times 2 + sin^{-1}(2x) =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + sin^{-1}(2x).$$

(2) $y = \cos^{-1}(x\ cos(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2cos^2(x)}} \times (cos(x) - x\ sinx) = \frac{xsinx - cos(x)}{\sqrt{1-x^2cos^2(x)}}.$$

(3) $y = \frac{tan^{-1}(x)}{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(x^2+1)\times\frac{1}{x^2+1} - tan^{-1}(x)\times 2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{1-2x\ tan^{-1}(x)}{(x^2+1)^2}.$$

(4) $y = tan^{-1}\left(\frac{tan(x)+1}{tan(x)-1}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \times\left(\frac{1}{\left(\left(\frac{tan(x)+1}{tan(x)-1}\right)^2+1\right)}\right) \times \frac{(tan(x)-1)\times sec^2x - (tan(x)+1)\times sec^2x}{(tan(x)-1)^2} =$$

$$= \left(\frac{(tan(x)-1)^2}{((tan(x)+1)^2 + (tan(x)-1)^2)}\right) \times \frac{sec^2x[tan(x)-1-tan(x)-1]}{(tan(x)-1)^2} =$$

$$= \frac{-2sec^2(x)}{2(tan^2(x)+1)} = \frac{-sec^2(x)}{sec^2(x)} = -1$$

حل آخر: يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لإعادة كتابة الدالة بصورة أخرى كما يلي..

$$y = tan^{-1}\left(\frac{tan(x)+1}{tan(x)-1}\right) = -\ tan^{-1}\left(\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)}\right) =$$

$$= -\ tan^{-1}\left(\frac{tan(x)+tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-tan(x)\times tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) = -\ tan^{-1}\left(tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore y = -x - \frac{\pi}{4}, \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

تمارين

(1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ ...

1. $y = tan^{-1}(x\ tan(x))$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{tan(x) + x\ sec^2(x)}{1 + x^2 \tan^2(x)}$
2. $y = x sin^{-1}(x\ )$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} + sin^{-1}(x\ )$
3. $y = cos(x) sec^{-1}(x\ )$. Ans $\frac{dy}{dx} = sin(x) sec^{-1}(x) + \frac{cos(x)}{x\sqrt{x^2-1}}$
4. $y = e^{sin^{-1}(x\ )}$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{sin^{-1}(x\ )}}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $y = sin^3(x)\ \cos(x) + cos^3(x) sin(x)$. Ans $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$
6. $y = csc\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{cos\left(\frac{x}{x-1}\right) sin^2\left(\frac{x}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$
7. $y = \frac{cot^{-1}(x\ )}{1+x^2}$. Ans $\frac{dy}{dx} = -\ \frac{1 + 2x cot^{-1}(x\ )}{(x^2+1)^2}$
8. $y = ln\left(\frac{1 - csc(x)}{1 + csc(x)}\right)$. Ans $\frac{dy}{dx} = -\ 2\ \sec(x)$
9. $y = cot^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$
10. $y = ln(x - tan(x))$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{tan^2(x)}{tan(x) - x}$
11. $y = ln\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} + tan^{-1}(x)$. Ans $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^4}$
12. $x\ sin(y) + \ (tan^{-1}(y))^2 = x\ cot^{-1}(\mathrm{y})$. *Ans* $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)\,(cot^{-1}(\mathrm{y}) - sin(y))}{x\ y^2\ cos(\mathrm{y}) +\ x\ cos(\mathrm{y}) + x + 2\ tan^{-1}(\mathrm{y})}$

(2) أثبت أنَّ $tan^{-1}(x) + tan^{-1}(y) = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ حيث $xy \neq 1$.

(3) أحسب النهايات التالية...

a. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{sin^{-1}(\alpha x)}$ *where* $\alpha \neq 0$. *Ans* $\frac{1}{\alpha}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{x - sin(\alpha x)}{sin^{-1}(\beta x)}$ *where* $\beta \neq 0$. *Ans* $\frac{1-\alpha}{\beta}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x) + sin(x)}{x + tan^{-1}(x)}$. *Ans:* 1