Principles of Set Theory مبادئ نظرية الفئة

تعريف: الفئة A هي مجموعة من الكائنات objects المعرفة جيداً، بحيث أن كل كائن ما x

a) إما ينتمي إلى الفئة A و يرمز لذلك بـ $x \in A$

b) أو لا ينتمي للفئة A و يرمز لذلك بالرمز $x \notin A$.

يرمز للفئات بالأحرف الكبيرة capital letters $A, B, C, \ldots$، بينما يرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة lowercase letters $a, b, c, \ldots$.

هنالك نوعان من الفئات:

a) **الفئات المنتهية** finite sets، و هي الفئات التي تحتوي على عدد منتهٍ من العناصر.

b) **الفئات غير المنتهية** infinite sets، و هي الفئات التي تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر.

هنالك نوعان من الطرق لتمثيل فئة ما:

a) **طريقة رصد العناصر** : رصد عناصر تلك الفئة بدون تكرار. مثلا مجموعة الاعداد الفردية اصغر من العدد 10 يمكن ان تكتب كالتالى:

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

b) **طريقة الصفة المميزة Set builder form** : ذكر صفة ما تميز عناصر تلك الفئة. مثلا مجموعة الاعداد الفردية اصغر من العدد 10 يمكن ان تكتب كالتالى:

$$A = \{x \mid x \text{ is an odd positive integer less than } 10\}$$

$$A = \{x \in Z^{+} \mid x \text{ is odd and } x < 10\}$$

أمثلة على فئات:

a) فئات الأعداد:

i. فئة الأعداد الطبيعية natural numbers: $N = \{0,1,2,\ldots\}$.

ii. فئة الأعداد الصحيحة Integer numbers: $Z = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

iii. فئة الأعداد النسبية rational numbers: $Q = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in Z, b \neq 0\right\}$

iv. فئة الأعداد غير النسبية irrational Q^* و هي التي لا يمكن كتابتها على الصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a,b عددان صحيحان و $b \neq 0$. مثل العدد الغير منتهي $\pi = 3.1415926..$ و العدد غير المنتهي $e = 2.7182818284..$.

v. فئة الأعداد الحقيقية real numbers: و تحوي فئة جميع الأعداد النسبية Q و غير النسبية Q^*، و يرمز لها بالرمز R. أي $R = \{x : x \in Q \text{ or } x \in Q^*\}$.

vi. فئة الأعداد المركبة complex numbers $C = \{a+ib : a,b \in R, i = \sqrt{-1}\}$.

b) فئة الدليل index set و يرمز لها بالرمز I_n و تعرف بأنها $I_n = \{1,2\ldots,n\}$

c) الفئة الخالية empty set هي الفئة التي لا تحتوي على أي عنصر و يرمز لها بالرمز ϕ.

d) فئة العناصر التي تقع في دائرة الوحدة هي الفئة S و تعرف بأنها $S = \{x \in R : x^2 = 1\}$

الفئات الجزئية Subsets:

لتكن A و B فئتان. نقول أن الفئة A فئة جزئية من الفئة B و نرمز لذلك بالرمز $A \subseteq B$ إذا كان لكل $x \in A$ فإن $x \in B$. إذا وجد عنصر $x \in A$ بحيث x ليس عنصراً من عناصر الفئة B، عندئذٍ نكتب $A \not\subset B$.

مثال : إذا كانت $A = \{2,4,6\}$ ، $B = \{2,6\}$ و $C = \{4,6\}$ ، عندئذٍ $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$.

الفئات المتساوية Equal sets

يقال لفئتين A و B أنهما متساويتين equal و يرمز لذلك بـ $A = B$ إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. إذا كانت A و B فئتان غير متساويتين نكتب $A \neq B$.

أمثلة:

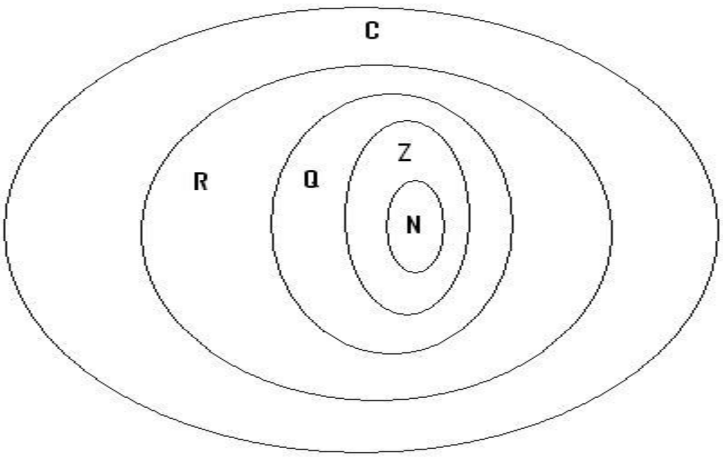
1. الفئتان $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{5,3,1\}$ متساويتان لأن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

2. الفئتان $C = \{\{1\}\}$ و $D = \{1, \{1\}\}$ ليستا متساويتين، لأن $1 \notin \{\{1\}\}$.

الفئات الجزئية الفعلية Proper subsets

إذا كانت A و B فئتان، فيقال أن A فئة جزئية فعلية proper subset من الفئة B و يرمز لذلك بالرمز $A \subset B$ إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$. من ثم إذا كانت A فئة جزئية فعلياً من B، فإن كل عنصر في A يكون محتوى في الفئة B، و هنالك عنصر واحد على الأقل من عناصرالفئة B ليس من ضمن عناصر الفئة A.

مثال: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



الفئة الشاملة Universal Set

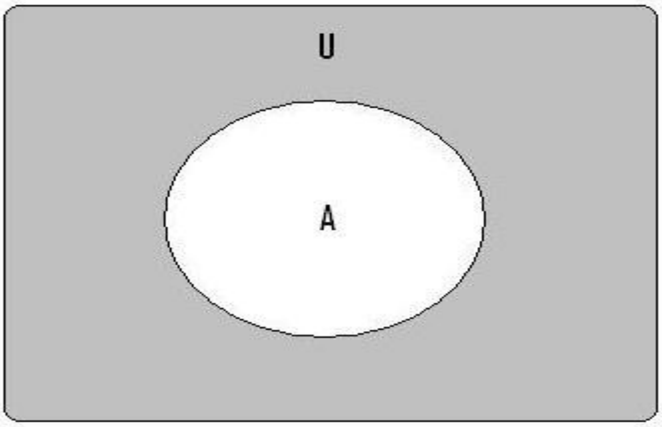
إذا كانت U فئة تحوي جميع الفئات المعتبرة، عندئذ تسمى U بالفئة الشاملة Universal Set.

المتممة المطلقة Absolute complement

إذا كانت U فئة شاملة، و A و B فئات جزئية من U، عندئذٍ المتممة المطلقة absolute complement لـ A هي الفئة

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

و توضح من خلال الشكل التالي:

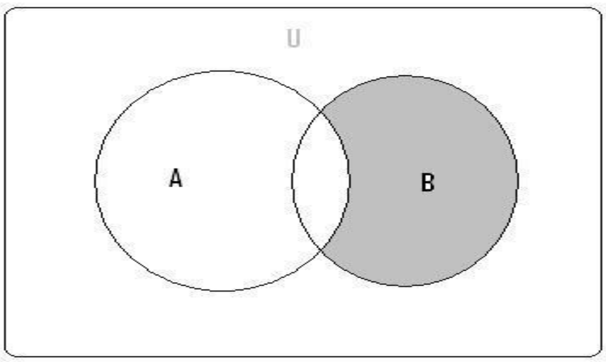


المتممة النسبية Relative complement

المتممة النسبية relative complement لـ A بالنسبة لـ B فهي الفئة

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}$$

و توضح من خلال الشكل التالي



مثال: لتكن $U=R$. اعتبر الفئات $A=\{x\in R: x<-1\ or\ x>1\}$ و $B=\{x\in R: x\le 0\}$، عندئذٍ

1. $A^c=[-1,1]$
2. $B-A=[-1,0]$

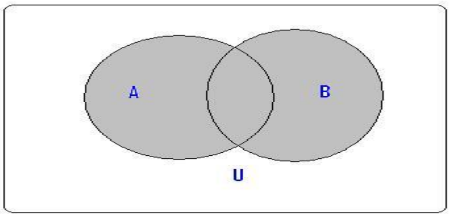
العمليات على المجموعات Set operations

(i)إتحاد المجموعات Union of sets:

لتكن A و B فئتان. إتحاد union الفئتين A و B و يرمز له بالرمز $A\cup B$ يعرف بأنه الفئة

$$A\cup B=\{x: x\in A\ or\ x\in B\}$$

إتحاد الفئتين A و B نوضحه من خلال شكل فن التالي:



و إذا كانت $A_1, A_2,\cdots$ فئات، عندئذٍ إتحاد الفئات $A_1, A_2,\cdots$ و يرمز له بالرمز $\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$ يعرف بأنه

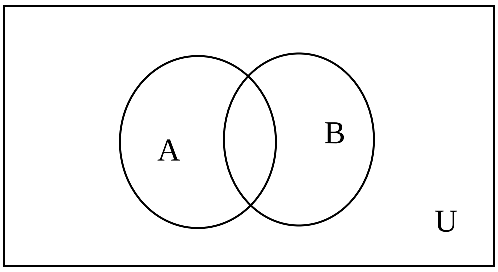
$$\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j=\{x: x\in A_j\ \ for\ some\ j\}$$

(ii) تقاطع المجموعات Intersection of sets:

لتكن A و B فئتان. تقاطع intersection الفئتين A و B و يرمز له بالرمز $A\cap B$ يعرف بأنه الفئة

$$A\cap B=\{x: x\in A\ and\ x\in B\}$$

تقاطع الفئتين A و B نوضحه من خلال شكل فن التالي:



و إذا كانت $A_1, A_2, \cdots$ فئات، عندئذٍ تقاطع الفئات $A_1, A_2, \cdots$ و يرمز له بالرمز $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ يعرف بأنه

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : x \in A_j \;\; for\ all\ j\}$$

قوانين دي مورجان :

لتكن A, B فئات جزئية من الفئة الشاملة $\cup$ ، عندئذ :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (1)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (2)$$

البرهان:

(1) ليكن $x \in (A \cup B)^c$ ، عندئذ $x \notin (A \cup B)$ ، أي أن $x \in \cup$ و $(x \notin B, \;\; x \notin A)$ ومن ثم :

$(x \notin B, x \in U)$ و $(x \notin A, x \in U)$

$x \in (A \cup B)^c$

$(x \notin B, \;\; x \notin \cup)$ و $(x \notin A, \;\; x \notin \cup)$

$x \in A^C$ و $x \in B^C$

$\Leftarrow \quad x \in A^C \cap B^C$

$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$

ايضاً ليكن $y \in A^c \cup B^c$ أي $(y \in B^c)$ و $(y \in A^c)$

$\Leftarrow \quad (y \in \cup, y \notin B)$ و $(y \in \cup, y \notin A)$

$\Leftarrow \quad (y \notin A \cup B \;\;)$ و $(y \in \cup)$

$\Leftarrow \quad y \in (A \cup B)^c$

$\therefore \quad (A \cup B)^c \subseteq A^C \cap B^C$

$\therefore \quad (A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

(2) **تمرين.**