* مبرهنة :-

لتكن (A) مصفوفة $m \times n$ فإن الجمل الآتية متكافئة منطقياً (أي إما كلها صحيحة أو كلها خاطئة).

1. لكل $(b \in \mathbb{R}^m)$ المعادلة $(Ax = b)$ لها حل.
2. كل $(b \in \mathbb{R}^m)$ توفيقة خطية في أعمدة (A).
3. أعمدة (A) تولد $(\mathbb{R}^m)$.
4. يكون لـ (A) موقع ارتكازي في كل عمود.

الأنظمة الخطية المتجانسة (Homogenous linear system)

يقال أن النظام الخطي متجانس إذا كان يمكن كتابته في الصورة

$A\underline{x} = \underline{0}$

* النظام $Ax = 0$ دائماً لديه على الأقل حل واحد وهو الحل الصفري والذي يسمى بالحل البديهي.

* المعادلة $A\underline{x} = \underline{0}$ لها حل غير الحل الصفري إذا وفقط إذا كان لها على الأقل متغير حر واحد.

* مثال :-

أوجد حل النظام المتجانس الآتي :-

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - \frac{4}{3}x_3 = 0$ $\quad x_1 = +\frac{4}{3}x_3$

$x_2 = 0$ $\quad x_2 = 0$

x_3 free $\quad x_3$ free

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

$\bar{x} = x_3 \underline{v} = t\underline{v}$, $t \in \mathbb{R}$

*مثال :-

أوصف مجموعة حل النظام المتجانس $\quad 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 = 0$

$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$

x_2, x_3 free

$$\vec{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}}$$

$x = t\underline{u} + s\underline{v}$, $s,t \in \mathbb{R}$

وبالتالي يمكننا القول أنّ الحل هو $\text{span}\{u, v\}$

* صيغة المتجه الوسيطية (Parametric vector form)

نقول أن الحل في صيغة المتجه الوسيطية إذا كتب في الصورة

$\underline{x} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$

ففي المثال الأول كانت في الصورة $x = t\underline{v}$ وفي المثال الثاني كانت

$x = t\underline{u} + s\underline{v}$ حيث $t, s \in \mathbb{R}$

* حلول الأنظمة الخطية غير المتجانسة $(Ax = b)$:-

* Solution of non-homogenous system $(Ax = b)$:~

* مثال :-

أوجد الحل العام للنظام $Ax = b$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - \frac{4}{3}x_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 + \frac{4}{3}x_3$

$x_2 = 2 \qquad\qquad x_2 = 2$

x_3 free $\qquad\qquad x_3$ free

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{p} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{p} + t\underline{v} \quad , t \in \mathbb{R}$$

* مبرهنة :-

لتكن لدينا المعادلة $Ax=b$ متسقة للمتجه b ، ولتكن p أحد الحلول،
فإن مجموعة حل النظام $Ax=b$ هي مجموعة كل المتجهات في الشكل
$\underline{v} = p + \check{h}$ حيث $\check{h}$ هو أي حل للمعادلة المتجانسة $A\underline{x}=0$

* تطبيقات على النظم الخطية :- (Applications of linear systems)

* مثال :-

أوزن المعادلة التالية :-

$$(x_1)\, C_3H_8 + (x_2)\, O_2 \longrightarrow (x_3)\, CO_2 + (x_4)\, H_2O$$

$$C_3H_8 + 5O_2 \longrightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

$$\begin{bmatrix} C \\ H \\ O \end{bmatrix} \quad C_3H_8 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad CO_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad H_2O \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Ax=0$$

Date :
(46)
No. :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = \frac{1}{4} x_4$

$x_2 = \frac{5}{4} x_4$ $\quad$ x_4 free

$x_3 = \frac{3}{4} x_4$

let $x_4 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$