

بسم الله الرحمن الرحيم

المنطق الرياضي Mathematical logic

تعريف: القضية *proposition* هي الجملة الخبرية التي تحتل قيمتي الصواب Truth و الخطأ falsity. فمثلاً العبارات التالية قضايا:

- (a) السكر يسبب تآكل الأسنان.
- (b) الفقراء بؤساء.
- (c) ليس الشديد بالصرعة.
- (d) لم يكن بعانخي هو أعظم ملوك النوبة.

بينما العبارات التالية ليست قضايا:

- (1) قل الحق و لو على نفسك. (الأمر)
- (2) لا تحكم و أنت غضبان. (النهي)
- (3) هل يجدي الندم بعد فوات الأوان؟ (الاستفهام)
- (4) ما أجمل القمر ليلة البدر! (التعجب)

القضايا هي اللبنات الأساسية التي يبنى عليها المنطق الرياضي و يرمز للقضايا بالرموز p, q, r, \dots . إذا كانت القضية صائبة فإن قيمة الصدق Truth value للقضية يرمز لها بـ "T" أو "1"، أما إذا كانت القضية خاطئة فيرمز لقيمة الصدق للقضية بالرمز "F" أو "0".

إذا كانت p قضية، فإن نفي (p negation of) و يرمز له بالرمز $\sim p$ يكون أيضاً قضية. فمثلاً إذا كانت p هي القضية: "السكر يسبب تآكل الأسنان" $p \equiv$

فإن نفي p هو القضية: "السكر لا يسبب تآكل الأسنان" $\sim p \equiv$

و تكون إحدى القضيتين p أو $\sim p$ صائبة True بينما الأخرى خاطئة False. يمكن تمثيل ذلك على جدول الصدق Truth table كما يلي:

p	$\sim p$
T	F
F	T

يسمى $\sim p$ بمكمل p (complement of p).

الروابط المنطقية Logical connectors:

لتكن p و q قضيتان. عندئذٍ:

(a) p و q (p and q) و يرمز لها بالرمز $p \wedge q$ قضية، تكون صائبة عندما تكون كل من p و q

صائبتان، و تكون خاطئة فيما عدا ذلك. القضية $p \wedge q$ لها جدول الصدق التالي:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

القضية $p \wedge q$ تقرأ ضم p و q (q conjunction of p and q). فمثلاً إذا كانت p هي القضية "زهرة البنفسج صفراء" و q هي القضية "مياه النيل عذبة" فإن $p \wedge q$ هي القضية "زهرة البنفسج صفراء و مياه النيل عذبة".

(b) p أو q (p or q) و يرمز لها بالرمز $p \vee q$ قضية، تكون صائبة عندما تكون إحدى p أو q على الأقل صائبة، و تكون خاطئة عندما تكون كلاهما خاطئتان. القضية $p \vee q$ لها جدول الصدق التالي:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

القضية $p \vee q$ تقرأ فصل p و q (q disjunction of p and q). فمثلاً إذا كانت p هي القضية "زهرة البنفسج صفراء" و q هي القضية "مياه النيل عذبة" فإن $p \vee q$ هي القضية "زهرة البنفسج صفراء أو مياه النيل عذبة".

(c) $p \oplus q$ و يرمز لها بالرمز $p \oplus q$ قضية، تكون صائبة عندما تكون إحدى p أو q بالضبط صائبة، و تكون خاطئة عندما تكون كلاهما صائبتان أو خاطئتان. القضية $p \oplus q$ لها جدول الصدق التالي:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الاقتضاء المنطقي Logical implication

لتكن p و q قضيتان. الاقتضاء $p \rightarrow q$ و تقرأ p تقتضي q (p implies q) هي القضية التي تكون خطأ فقط عندما تكون p صائبة بينما q خاطئة، و تكون صائبة فيما عدا ذلك. جدول الصواب للقضية $p \rightarrow q$ يعطى بـ:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

و تسمى القضية p بالفرضية hypothesis أو المقدمة premise بينما تسمى القضية q بالخلاصة conclusion أو النتيجة consequence. تسمى q بالشرط الضروري Necessary condition $p \downarrow q$ و تسمى p بالشرط الكافي sufficient condition $q \downarrow p$.

هنالك تعبيرات أخرى تؤدي المعنى $p \rightarrow q$ ، مثل:

$$q \text{ متى } p \quad (1)$$

$$q \text{ تتبع من } p \quad (2)$$

$$p \text{ فقط إذا } q \quad (3)$$

$$p \text{ إذا كانت } q \quad (4)$$

مثال: - لتكن p هي القضية " n عدد صحيح يقبل القسمة على 4" و q هي القضية " n عدد صحيح يقبل القسمة على 2". عندئذٍ $p \rightarrow q$ هي القضية "إذا كان n عدد صحيح يقبل القسمة على 4 فإن n يقبل القسمة على 2".

و يمكن التعبير عن $p \rightarrow q$ أيضاً بالقضايا التالية:

(1)

n يقبل القسمة على 2 متى n يقبل القسمة على 4.

(2)

n يقبل القسمة على 2 تتبع من كون n يقبل القسمة على 4.

(3) n يقبل القسمة على 2 ضروري ليقبل n القسمة على 4.

(4) n يقبل القسمة على 4 فقط إذا كان n يقبل القسمة على 2.

(5) n يقبل القسمة على 4 يقتضي أن n يقبل القسمة على 2.

(6) n يقبل القسمة على 4 فقط كافي لكي يقبل n القسمة على 2.

الافتضاء المنطقي ثنائي الشرطية **Bi-conditional implication**

لتكن p و q قضيتان. الافتضاء المزدوج الشرطية **bi-conditional implication** لـ p و q و يرمز له بالرمز $p \leftrightarrow q$ هي القضية التي تكون صائبة عندما يكون لـ p و q نفس قيمة الصدق، و تكون خاطئة فيما عدا ذلك. جدول الصدق لـ $p \leftrightarrow q$ يعطى بـ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تسمى p بالشرط الضروري و الكافي $necessary and sufficient$ لـ q ، كما تسمى q بالشرط الضروري و الكافي $necessary and sufficient$ لـ p . تقرأ القضية $p \leftrightarrow q$ " p إذا و فقط إذا كان q ". فمثلاً إذا اعتبرنا القضية:

n^2 عدد فردي إذا و فقط إذا كان n عدداً فردياً

عندئذٍ تكون كل من " n^2 عدد فردي $\equiv p$ " و " n عدد فردي $\equiv q$ " شرطاً ضرورياً و كافياً للآخر. أي أن n^2 عدد فردي شرط ضروري و كافي ليكون n عدداً فردياً، و العكس صحيح.