**مثال:** لتكن $m>1$ عددا صحيحا موجبا. وضح ان العلاقة $R=\{(a,b)\,|\,a\equiv b(\text{mod } m)\}$ هى علاقة تكافؤ على $\mathbf{Z}$.

الحل: نلاحظ ان $a\equiv b(\text{mod } m)\Leftrightarrow m \text{ divides } a-b$ وهو ما يسمى بالتطابق بمقياس $m$ (Congruence Modulo m).

الان، بما ان $m$ تقسم 0، اذن $m$ تقسم $a-a$، اذن $a\equiv a(\text{mod } m)$، وعليه فان التطابق بمقياس $m$ علاقة منعكسة.

افرض ان $a\equiv b(\text{mod } m)$. اذن، $m$ تقسم $a-b$، اى ان

$$, a-b=km,\ \text{for some } k\in\mathbf{Z}$$

$$\therefore b-a=(-k)m,$$

ومنها نجد ان $b\equiv a(\text{mod } m)$. اذن التطابق بمقياس $m$ علاقة متماثلة.

افرض ان $a\equiv b(\text{mod } m)$ و $b\equiv c(\text{mod } m)$. اذن، $m$ تقسم $a-b$ و $m$ تقسم $a-b$. اى انه يوجد عددان $k$ و $l$ بحيث $a-b=km,\ \text{for some } k\in\mathbf{Z}$ و $b-c=lm,\ \text{for some } l\in\mathbf{Z}$ وبالجمع نحصل على $a-c=(k+l)m$.

اذن، $a\equiv c(\text{mod } m)$. وعليه، فان التطابق بمقياس $m$ علاقة متعدية. بما ان التطابق بمقياس $m$ علاقة منعكسة، متماثلة، ومتماثلة فانه يمثل علاقة تكافؤ.

**تمرين:** افرض ان $R$ هى العلاقة المعرفة على فئة الجمل النصية المكونة من الحروف الانجليزية بحيث $aRb$ اذا وفقط اذا كان $l(a)=l(b)$، حيث $l(x)$ هو عدد حروف الجملة النصية $x$. هل $R$ علاقة تكافؤ؟

## اصناف التكافؤ Equivalence Classes

**تعريف: صنف التكافؤ Equivalent class**. لتكن $R$ علاقة تكافؤ معرفة على فئة $A$، وليكن $a\in A$. يعرف صنف التكافؤ للعنصر $a$ في $A$ و يرمز له بالرمز $[a]$ بانه الفئة $[a]=\{b\,|\,(a,b)\in R\}$.

**مثال:** ما هى اصناف التطابق بمقياس 4 للاعداد 0 و 1.

لحل: صنف التطابق بمقياس 4 للعدد 0 هو فئة كل الاعداد الصحيحة $a$ بحيث $a\equiv 0(\text{mod } m)$، اى فئة كل الاعداد الصحيحة التى تحقق $4 \text{ divides } a-0$ او $a=4k, k\in\mathbf{Z}$. اذن، $[0]=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$.

كذلك، صنف التطابق بمقياس 4 للعدد 1 هو فئة كل الاعداد الصحيحة $a$ بحيث $a \equiv 1 (\text{mod } m)$ ، اى فئة كل الاعداد الصحيحة التى تحقق $4 \; divides \; a-1$ او $a-1 = 4k, k \in \mathbf{Z}$ اى ان $a = 4k+1, k \in \mathbf{Z}$ . اذن، $[1] = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

**مثال**: اذا كانت $A = Z$ و $R$ هي العلاقة المعرفة على $A$ و $aRb$ اذا كان $(\text{mod} 5)$ $a \equiv b$ فان

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\} = 5n \\
[1] &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\} = 5n+1 \\
[2] &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\} = 5n+2 \\
[3] &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\} = 5n+3 \\
[4] &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} = 5n+4
\end{aligned}$$

يرمز لفئة جميع أصناف التكافؤ لـ $A$ تحت علاقة التكافؤ $R$ بالرمز $A/R$ و يعرف بالتالى $A/R = \{[a] \mid a \in A\}$

ويسمى العنصر $a$ بممثل representative صنف تكافؤ $[a]$.

## اصناف التكافؤ والتجزئات Equivalences Classes and Partitions

**نظرية** : لتكن $A$ فئة $R$ علاقة تكافؤ على $A$ ، وليكن $b, a$ عنصران في $A$. عندئذ، العبارات التالية متكافئة:

(i) $aRb$ (ii) $[a] = [b]$ (iii) $[a] \cap [b] \neq \phi$

**البرهان** : نوضح اولا ان (i) تقتضى (ii). سنثبت ان $[a] \subseteq [b]$ و $[b] \subseteq [a]$.

ليكن $c \in [a]$ . اذن $aRc$ . بما ان $aRb$ و $R$ متماثلة فان $bRa$ ، وبما ان $R$ متعدية، فان $bRc$ . اذن، $c \in [b]$،

ومن ثم فان $[a] \subseteq [b]$ . بطريقة مماثلة يمكننا اثبات ان $[b] \subseteq [a]$، ومن ثم فان $[a] = [b]$.

ثانيا، نوضح ان (ii) تقتضى (iii). افرض ان $[a] = [b]$ . اذن $[a] \cap [b] \neq \phi$، لان $[a] \neq \phi$ ($a \in [a]$ حيث ان $R$ منعكسة).

ثالثا، نوضح ان (iii) تقتضى (i). افرض ان $[a] \cap [b] \neq \phi$ . اذن، يوجد عنصر $c$ بحيث $c \in [a]$ و $c \in [b]$ ، اى ان $cRa$ و $cRb$ . الان، $aRc$ و $cRb$ . اذن، $aRb$ لان $R$ متعدية.

بما اننا قد اثبتنا ان (i) تقتضى (ii) ، (ii) تقتضى (iii) ، و(iii) تقتضى (i)، فان العبارات الثلاث (i)، (ii)، و(iii) متكافئة.

**نتيجة** : اذا كانت $A$ فئة و $R$ علاقة تكافؤ على $A$ فان $A/R$ تشكل تجزئة على $A$ .

**البرهان**: نثبت أن $\bigcup_{a\in A}[a]=A$ .

ليكن $a\in A$ **حيث أن** $R$ منعكسة فان $aRa$ لجميع $a\in A$ و من ثم $a\in[a]$ . اذن، $a\in\bigcup_{a\in A}[a]$ ، وعليه فان

$$A\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]$$

ايضاً من تعريف $[a]$، $[a]\subseteq A$ لجميع $a\in A$ ومن ثم $\bigcup_{a\in A}[a]\subseteq A$ .

من النظرية اعلاه، اذا كان $b\in A$ و ايضاً $a\in A$ فان $[a]\cap[b]=\phi$ اذا كان $[a]\neq[b]$ .

$\therefore$ فئة جميع اصناف التكافو على $A$ تشكل تجزئة على $A$ .

**نظرية**: عكس النظرية السابقة ايضا صحيح. اذا اعطينا التجزئة $\{A_i\,|\,i\in I\}$ على الفئة $A$ ، فانه توجد علاقة تكافؤ $R$ بحيث تكون الفئات $A_i$ ، $i\in I$ ، اصناف التكافؤ لها.

**مثال**: اوجد الازواج المرتبة في علاقة التكافؤ $R$ المولدة باتجزئة $\{A_1,A_2,A_3\}$ حيث $A_1=\{1,2,3\}$ ، $A_2=\{4,5\}$ ، و $A_3=\{6\}$ للفئة $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ .

**الحل**: الفئات الجزئية في التجزئة تمثل اصناف التكافؤ في العلاقة $R$ . نلاحظ ان الزوج المرتب $(a,b)$ ينتمي الى $R$ اذا وفقط اذا كان $a$ و $b$ ينتميان لنفس الفئة الجزئية من التجزئة. بما ان $A_1=\{1,2,3\}$ تمثل صنف تكافؤ، فان الازواج المرتبة التالية تنتمي الى $R$ :

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$$

كذلك، بما ان $A_2=\{4,5\}$ تمثل صنف تكافؤ، فان الازواج المرتبة التالية تنتمي الى $R$ :

$$(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)$$

وبما ان $A_3=\{6\}$ تمثل صنف تكافؤ، فان الزوج المرتب التالي ينتمي الى $R$ : $(6,6)$ . اذن

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$$

## علاقات الترتيب الجزئي Partial Ordering Relations

**تعريف**: لتكن $R$ علاقة معرفة على فئة $A$ . يقال أن $R$ علاقة ترتيب جزئي ذاكانت $R$ :

1. منعكسة (Reflexive)
2. مضاده للتماثل (Anti-symmetric)
3. متعدية (Transitive)

فى هذه الحالة يقال للفئة $A$ بانها فئة ترتيب جزئى partial ordering set ويرمز لها بـ $(A,R)$ .

**مثال**: وضح ان العلاقة $(\geq)$ هى علاقة ترتيب جزئي على فئة الاعداد الصحيحة.

**الحل**: بما ان $a \geq a$ لكل عدد صحيح $a$ ، فان العلاقة $(\geq)$ منعكسة. نلاحظ انه اذا كان $a \geq b$ و $b \geq a$ ، فان $a = b$ . اذن، العلاقة $(\geq)$ مضادة للتماثل. اخيرا، اذا كان $a \geq b$ و $b \geq c$ ، فان $a \geq c$ . اذن، العلاقة $(\geq)$ متعدية. اذن، العلاقة $(\geq)$ تمثل علاقة ترتيب جزئى على فئة الاعداد الصحيحة.

**تمرين**:

1– اثبت ان العلاقة (/) تمثل علاقة ترتيب جزئى على فئة الاعداد الصحيحة.

2– اثبت ان العلاقة $\leq$ تمثل علاقة ترتيب جزئى على فئة الاعداد الصحيحة.

3– اثبت ان العلاقة $\subseteq$ تمثل علاقة ترتيب جزئى على فئة القوة power set للفئة $A$ .

## علاقات الترتيب الكلي Total Ordering Relations

**تعريف**: لتكن $A$ فئة و $R$ علاقة ترتيب جزئي على $A$ يقال ان $R$ علاقة ترتيب كلي total ordering اذا كان لجميع $a,b \in A$ اما $aRb$ او $bRa$ .

**مثال**: العلاقة $R \equiv \leq$ علاقة ترتيب كلي على $\mathbf{Z}$ لانه لجميع $a,b \in \mathbf{R}$ اما $a \leq b$ او $b \leq a$ .

**مثال** : اذا كانت $A = □$ و $R \equiv /$ فان $R$ علاقة ترتيب جزئي على □ و لكنها ليست علاقة ترتيب كلي لانه على سبيل المثال

$2,7 \in \mathbf{Z}$ ولكن 2 لا تقسم 7 وكذلك 7 لا تقسم 2 .

**مثال**: اذا كانت $A = \{5,10,30\}$ و $R$ معرفة على $A$ بـ $aRb$ اذا و فقط اذا كان $a / b$ عندئذ $R$ علاقة ترتيب كلي على $A$ .