

مثال :-

جد ما إذا كان النظام الخطي التالي متسق أم لا .

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \frac{5}{2}R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$0 \neq \frac{5}{2}$$

∴ النظام غير متسق

الشكل المثلثية والمثلثية المصفية

العنصر القائد (Leading entry) : هو العنصر الغير صفري في أقصى

يسار الصف .

المصفوفة تكون في الشكل المثلثي (echelon form) أو الشكل

المثلثي المصفية (row echelon form) إذا كان لها الصفوف التالية .

1. الصفوف الصفيرية تقع أسفل الصفوف غير الصفيرية .

2. العنصر القائد في الصف يقع يمين العنصر القائد في الصف الأعلى منه .

3. كل العناصر تحت العنصر القائد والتي تقع معه في نفس العمود تكون صفيرية .

مرفوعة .

## \* أمثلة :-

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفة في الشكل المتدرج وتحقق الشروط الإضافية التالية :-

فإنها تكون في الشكل المختزل :

1. العنصر القائد في أي صف غير صفري يساوي واحد .

2. أي عنصر قائد (1) هو العنصر الوحيد الغير صفري في العمود .

## \* مثال :-

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(تحقق)

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\* نظرية (وحداية الشكل المتدرج المختزل) :-

\* أي مصفوفة تكون متكافئة صفياً لمصفوفة واحدة فقط في الشكل المتدرج المختزل

\* المواقع الارتكازية :- Pivot positions

هو الموقع في المصفوفة (A) المقابل لموقع العنصر القائد الذي

قيمته (1) في المصفوفة للمصفوفة (A)

\* العمود الارتكازي : Pivot Column

هو العمود في المصفوفة (A) والذي يحوي الموقع الارتكازي



مسألة :-

حدد المواقع والأعضاء المرتكزية للمصفوفة (A) التالية :-

المواقع  
المرتكزية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & +3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \end{bmatrix} \quad A \leftrightarrow R \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

الأعضاء  
المرتكزية

$$R = R + R \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad R = R + R \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -1 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = -\frac{5}{3}R + R \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad R = \frac{3}{4}R + R \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{22}{4}R + R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استخدم العمليات المصفية لتحويل المصفوفة التالية للشكل الممتدج ثم

الشكل الممتدج المختزل .

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = -R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}R_2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{3}R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = -R_2 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

الشكل الممتدج ←