الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

(1) دالة الجيب الزائدي العكسية Inverse Hyperbolic Sine Function

دالة الجيب الزائدي العكسية هي الدالة في الصورة $y = sinh^{-1}(x)$ أي أنَّ $x = sinh\,(y) = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$، من الواضح أنَّ مدى الدالة هو $R = \mathbb{R}$، لتحديد مجال تعريف الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^{y}$

$$\therefore x = \frac{u - \frac{1}{u}}{2},\; u > 0\,, u^2 - 2xu - 1 = 0$$

$$\therefore u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

بما أنَّ $\sqrt{x^2+1} > x$ و $u > 0$ نجد أنَّ $u = x + \sqrt{x^2+1}$، إذن تكون $u > 0$ لكل قيم y الحقيقية، لذلك يكون مجال تعريف هو $D = \mathbb{R}$. كما أنَّ $u = x + \sqrt{x^2+1}$

$$\therefore e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \rightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\therefore shin^{-1}(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \forall_{\,x \in \mathbb{R}}$$

- **تفاضل دالة الجيب الزائدي العكسية:**

$y = sinh^{-1}(x)$ ، إذن $x = sinh\,(y)$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x نجد أنَّ

$$cosh\,(y)\,\frac{dy}{dx} = 1\;,\; \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosh\,(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + sinh^2\,(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

يُمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام التعريف الآخر لدالة الجيب الزائدي العكسية

$$y = sinh^{-1}(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \times \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) دالة جيب التمام الزائدي العكسية Inverse Hyperbolic Cosine Function

دالة الجيب الزائدي العكسية هي الدالة في الصورة $y = cosh^{-1}(x)$ أي أنَّ $x = cosh\,(y) = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$، من الواضح أنَّ مدى الدالة هو $R = [0,\;\infty)$، لتحديد مجال تعريف الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^{y}$

$$\therefore x=\frac{u+\frac{1}{u}}{2},\ u>0\,,u^2-2xu+1=0$$

$$\therefore u=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

تكون $u>0$ إذا كانت $x\geq 1$ ، ونأخذ $u=x+\sqrt{x^2-1}$ ، ونرفض $u=x-\sqrt{x^2-1}$ و ذلك لأنَّ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0$ إذن تكون $u>0$ إذا كانت $x\geq 1$ الحقيقية، لذلك يكون مجال تعريف الدالة هو $D=[1,\ \infty)$. كما أنَّ $u=x+\sqrt{x^2-1}$

$$\therefore e^y=x+\sqrt{x^2-1}\rightarrow y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\therefore cosh^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\forall_{\,x\in\mathbb{R}}$$

- **تفاضل دالة جيب التمام الزائدي العكسية:**

$y=cosh^{-1}(x)$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x نجد أنَّ

$$sinh\,(y)\,\frac{dy}{dx}=1\ ,\ \rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{sinh\,(y)}=\frac{1}{\sqrt{cosh^2\,(y)-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

يُمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام التعريف الآخر لدالة الجيب الزائدي العكسية

$$y=cosh^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\times\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

تُترك دراسة بقية الدوال الزائدية كتمارين.

- **مشتقات الدوال الزائدية العكسية**

$\frac{d}{dx}\left(csch^{-1}\,(u)\right)=\frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}}\times\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(sinh^{-1}\,(u)\right)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\times\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(sech^{-1}\,(u)\right)=\frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{1-u^2}}\times\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(cosh^{-1}(u)\right)\ \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\times\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(coth^{-1}\,(u)\right)=\frac{1}{1-u^2}\times\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(tanh^{-1}\,(u)\right)=\frac{1}{1-u^2}\times\frac{du}{dx}$

أمثلة:

1. أوجد مشتقات الدوال التالية ...

a. $y = tanh^{-1}(cos(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-cos^2(x)} \times (-sin(x)) = -\frac{sin(x)}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin(x)} = -csc(x)$$

b. $y = xtanh^{-1}(x) + ln\left(\sqrt{(1-x^2)}\right)$

$$y = xtanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}ln(1-x^2) \quad \frac{dy}{dx} = x \times \left(\frac{1}{1-x^2}\right) + tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x}{1-x^2} + tanh^{-1}(x) - \frac{x}{1-x^2} = tanh^{-1}(x).$$

2. إذا كانت $y = csch^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ أثبت أنَّ $0 \le \frac{dy}{dx} \le 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\left|\frac{1}{1+x}\right|\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + 1}} \times \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\left|\frac{1}{1+x}\right|^2\sqrt{(1+x)^2 + 1}} \times \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + 1}} \times \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2 + 1}}$$

$$(1+x)^2 + 1 \ge 1 \ \ \forall_{x\in\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt{(1+x)^2 + 1} \ge 1 \ \ \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

$$\therefore 0 \le \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2 + 1}} \le 1 \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

$$\therefore 0 \le \frac{dy}{dx} \le 1 \ \ \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

3. أوجد حل المعادلة $sinh(x) = 5$

$$sinh(x) = 5, \ \Rightarrow x = sinh^{-1}(5) = ln\left(5 + \sqrt{25+1}\right) = ln\left(5 + \sqrt{26}\right)$$

- **تفاضل الدوال الوسيطية (البارامترية) Differentiation Parametric Functions**

التمثيل الوسيط للدوال Parametric Function Representation:

لتكن $\begin{cases} y = u(t) \\ x = v(t) \end{cases}$ حيث $t \in [a,\ b]$ وبافتراض أنَّه لكل قيمة للمتغير t توجد قيمة وحيدة للمتغير x و قيمة وحيدة للمتغير y و بالنظر للزوج المرتب $(x,\ y)$ الناتج عند قيمة ما للمتغير t كنقطة على المستوى $\mathbb{R}^2$، فإنَّ مجموعة تلك النقاط المناظرة لجميع قيم t تُكوِّن منحنى. أي أنَّ y هي دالة في x و العلاقة بينهما معطاة بالمعادلات $\begin{cases} y = u(t) \\ x = v(t) \end{cases}$ بدلالة المتغير الوسيط (البارامتر) t و تُسمى تلك المعادلات المعادلات الوسيطية (البارامترية).

إذا افترضنا أنَّ الدالة $x = v(t)$ قابلة للعكس أي لها دالة عكسية، و لتكن $t = w(x)$

عندئذٍ تكون $y = u[w(x)]$ أي أنَّ y هي دالة في المتغير x.

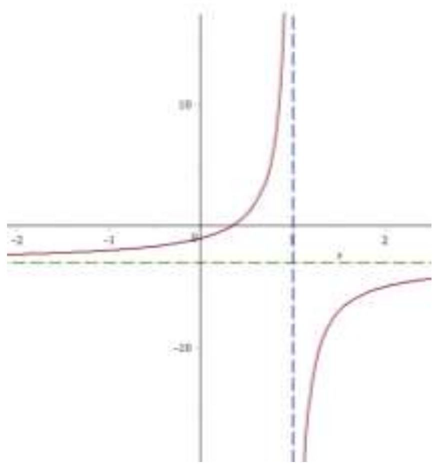
- أمثلة:

(1) إذا كانت $y = 2t - 1$ و $x = \dfrac{t}{t+1}$ أوجد y بدلالة x.

$$x = \frac{t}{t+1},\quad \Rightarrow t = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore y = 2t - 1 = \frac{2x}{1-x} - 1 = \frac{3x-1}{1-x} = -3 \times \frac{\frac{1}{3} - x}{1-x} =$$

$$= -3 \times \frac{1 - x - \frac{2}{3}}{1-x} = -3\left(1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x} - 3$$

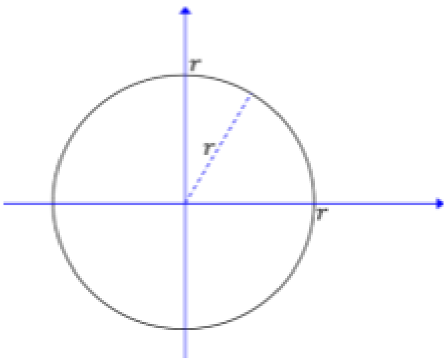


(2) إذا كانت $y = r\ \sin(t)$ و $x = r\ \cos(t)$ و $0 \le t \le 2\pi$ ، أوجد منحنى الدالة.

$$y = r\sin(t), \ \Rightarrow \sin(t) = \frac{y}{r}$$

$$x = r\cos(t), \ \Rightarrow \cos(t) = \frac{x}{r}$$

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \ \Rightarrow \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$



أي $y^2 + x^2 = r^2$ و هي معادلة دائرة مركزها الأصل و نصف قطرها r و

لتحديد ما إن كانت الفترة المعطاة لقيم t ستشمل كل الدائرة أو جزء منها

نلاحظ أنه خلال الفترة $0 \le t \le 2\pi$ تكون

$$-1 \le \sin(t) \le 1, \ \Rightarrow -1 \le \frac{y}{r} \le 1, \ \Rightarrow -r \le y \le r$$

$$-1 \le \cos(t) \le 1, \ \Rightarrow -1 \le \frac{x}{r} \le 1, \ \Rightarrow -r \le x \le r$$

وهذا يُثبت أنَّ الفترة تغطي كامل الدائرة.

مبرهنة: إذا كانت $\begin{cases} y = u(t) \\ x = v(t) \end{cases}$ حيث $u(t)$ و $v(t)$ دوال قابلة للاشتقاق، فإنَّ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

الإثبات: يُترك كتمرين للطالب.

- أمثلة:

1. إذا كانت $y = r\ \sin(t)$ و $x = r\ \cos(t)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $t = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dt} = r\ \cos(t), \ \frac{dx}{dt} = -r\ \sin(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{r\cos(t)}{-r\sin(t)} = -\cot(t).$$

عند $t=\frac{\pi}{3}$ تكون $\frac{dy}{dx}=cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

حل آخر: يُمكن كتابة المعادلات الوسيطية المُعطاة بالصورة الضمنية $x^2+y^2=r^2$

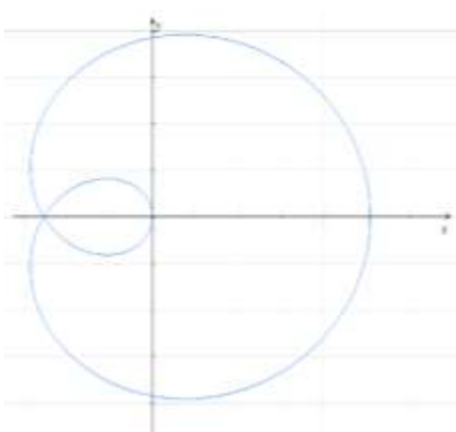
بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

عند $t=\frac{\pi}{3}$ تكون $x=r\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=r\times\frac{1}{2}=\frac{r}{2}$ و $y=r\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\,r}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{r}{2}\div\frac{\sqrt{3}\,r}{2}=-\frac{r}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}\,r}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. إذا كانت $y=a\left(\ sin\,(2t)-sin\,(t)\right)$ و $x=a\ \left(cos\,(2t)-cos\,(t)\right)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.



$$\frac{dy}{dt}=a\left(2cos\,(2t)-cos\,(t)\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=a\left(-2sin\,(2t)+sin\,(t)\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\frac{a\left(2cos\,(2t)-cos\,(t)\right)}{a\left(-2sin\,(2t)+sin\,(t)\right)}=\frac{2cos\,(2t)-cos\,(t)}{-2sin\,(2t)+sin\,(t)}$$

3. المشتقات من رتب مختلفة Derivatives Of Different Orders

لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق في فترةٍ ما $[a,\ b]$، بصورة عامة تكون المشتقة الأولى $f'(x)$ هي أيضاً دالة في x، و بتفاضل المشتقة الأولى بالنسبة للمتغير x نحصل على المشتقة من الرتبة الثانية أو المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ ، و نرمز لها بأي من الرموز y'' ، $f''(x)$ ، $y^{(2)}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ و $\frac{d^2}{dx^2}(y)$.

وبتفاضل المشتقة الثانية نحصل على المشتقة الثالثة. بصورة عامة

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)$$

حيث $y^{(n)}$ هي المشتقة من الرتبة n، n عدد طبيعي.

أمثلة:

1. إذا كانت $y = A\ \sin(\omega x)$ أثبت أنَّ $y'' = -\omega^2 y$.

$$y = A\ \sin(\omega x)$$

$$y' = \omega A \cos(\omega x)$$

$$y'' = -\omega^2 A\ \sin(\omega x) = -\omega^2[A\ \sin(\omega x)] = -\omega^2 y$$

$$\therefore\ \ y'' = -\omega^2\ \ y,\ \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0$$

2. إذا كانت $y^2 + x^2 = r^2$ أوجد $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{y \times 1 - x \times \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y \times 1 - x \times \frac{-x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

$$\therefore\ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -r^2\frac{d}{dx}\left(y^{-3}\right) = -r^2\left(-3y^{-4} \times \frac{dy}{dx}\right) = \frac{3r^2}{y^4} \times -\frac{x}{y}$$

$$\therefore\ \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{3r^2 x}{y^5}$$

4. المشتقات من رتب عليا للدوال في الصورة الوسيطية:

من المعلوم أنَّه إذا كانت $\begin{cases} y = u(t) \\ x = v(t) \end{cases}$ حيث $u(t)$ و $v(t)$ دوال قابلة للإشتقاق، فإنَّ

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ ، نلاحظ أنَّ المشتقة الأولى هي دالة في t أي $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = h(t) \\ x = v(t) \end{cases}$ لذا تكون

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ بصورة عامة $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dy^{(n-1)}}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y^{(n-1)}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$.

مثال: لتكن $y = sin^3(t)$ و $x = cos^3(t)$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2(t)cos(t) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -3cos^2(t)sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3sin^2(t)cos(t)}{-3cos^2(t)sin(t)} = -tan(t), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -sec^2(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-sec^2(t)}{-3cos^2(t)sin(t)} = \frac{1}{3}sec^4(t)csc(t).$$

مثال: لتكن $y = \frac{t}{t+1}$ و $x = \frac{t}{t-1}$ أوجد $\frac{d^3y}{dx^3}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t+1)\times 1 - t\times 1}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2} \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{(t-1)\times 1 - t\times 1}{(t-1)^2} = -\frac{1}{(t-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(t+1)^2} \div -\frac{1}{(t-1)^2} = -\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \div \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\times\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} = -2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\times\frac{2}{(t+1)^2} = -4\frac{(t-1)}{(t+1)^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -4\frac{(t-1)}{(t+1)^3} \div -\frac{1}{(t-1)^2} = 4\frac{(t-1)}{(t+1)^3} \times (t-1)^2 = 4\frac{(t-1)^3}{(t+1)^3} = 4\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) \div \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 12\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2 \times \frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} = 24\frac{(t-1)^2}{(t+1)^4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) \div \frac{dx}{dt} = 24\frac{(t-1)^2}{(t+1)^4} \div -\frac{1}{(t-1)^2} = -24\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^4$$

تمارين

1. أوجد مشتقات الدوال التالية

a. $y = x^2 tanh^{-1}(x)$ b. $y = sinh^{-1}(cosh(x))$ c. $y = \frac{x}{csch^{-1}(x)}$

d. $y = sinh^{-1}\left(\sqrt{x^4-1}\right)$ e. $y = coth^{-1}(e^x)$ f. $y = csch^{-1}(e^{-x})$

2. إذا كانت $xy^2 + x^2y = 4$ أوجد $\frac{d^3y}{dx^3}$.

3. إذا كانت $ye^x + x^2 sin(y) = 1$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. لتكن $y = \frac{1-t}{t+1}$ و $x = \frac{t}{t+1}$ أوجد $\frac{d^3y}{dx^3}$

5. $y = sin(x) - cos(x)$ و $x = sin(x) + cos(x)$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$..

6.