خواص المحددات

* **مبرهنة :-**

إعتبر العمليات التالية على المصفوفات المربعة A :

1. ضرب صف في عدد وإضافته لصف آخر لا يغير من قيمة المحددة
$\det A = \det B$

2. إذا تم إبدال صفين تتغير إشارة المحددة . $\det B = -\det A$

3. إذا ضرب صف في عدد R فإن $\det B = R \det A$

* **مثال :-**

إحسب محددة المصفوفات التالية :-

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -(1)(3)(-5) = \underline{15}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(1)(3)(-6)(1) = \underline{\underline{-36}}$$

* مبرهنة :-

تكون المصفوفة المربعة (A) قابلة للعكس إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$

* مبرهنة :-

إذا كان A و B مصفوفتان $n \times n$ فإن :-

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det AB = (\det A)(\det B)$

* قاعدة كرامر :- Cramer's Rule

* مقدمة :- اعتبر نظام المعادلات $Ax = b$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

* تعرف المصفوفة $A_i b$ بأنها عبارة عن المصفوفة الناتجة من استبدال العمود رقم (i) في (A)، بالمتجه b أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

* قاعدة كرامر :-

لتكن (A) مصفوفة قابلة للعكس $n \times n$ لأجل أي $b \in R^n$، فإن الحل الوحيد $\underline{x}$ للنظام $A\underline{x} = \underline{b}$ يعطى بـ :-

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

* مثال :-

مستخدماً قاعدة كرامر حل النظام التالي :-

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$
$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A_1 b = \frac{\det A_1(b)}{d} \qquad A_1 b = \begin{matrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{matrix} \qquad A_2(b) \begin{matrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{matrix} \qquad \det A = \underline{\underline{2}}$$

$$\therefore x_1 = \frac{\det A_1(b)}{2} \qquad x_2 = \frac{\det A_2 b}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = \underline{\underline{20}} \qquad x_2 = \frac{54}{2} = \underline{\underline{27}}$$

* تعريف :-

لنفرض $C = [C_{ij}]$ ، هي مصفوفة عناصرها المرافقات من المصفوفة A ، فإن المصفوفة المرافقة لـ A ويرمز لها بالرمز (adj A) معطى بـ $adj A = C^T$

* مثال :-

أوجد adj A ، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ $\quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14$ $\quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$ $\quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ $\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$ $\quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad adj A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

* مبرهنة :-

إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ قابلة للعكس فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$

* مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = \underline{\underline{14}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$