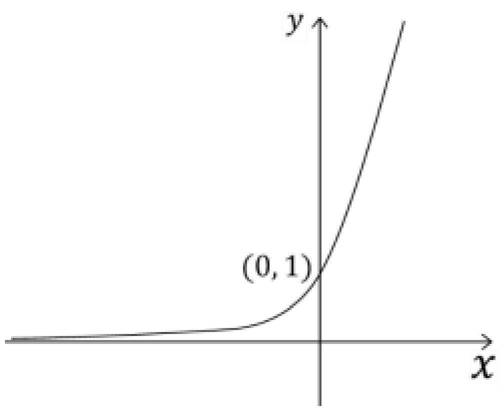
الدوال الأسية Exponential Functions

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$ الدالة الأسية للأساس a هي الدالة $y=a^x$، مجال تعريف الدالة الأسية هو $D=\mathbb{R}$، أما مدى الدالة فهو $R=\mathbb{R}^+=(0,\infty)$.

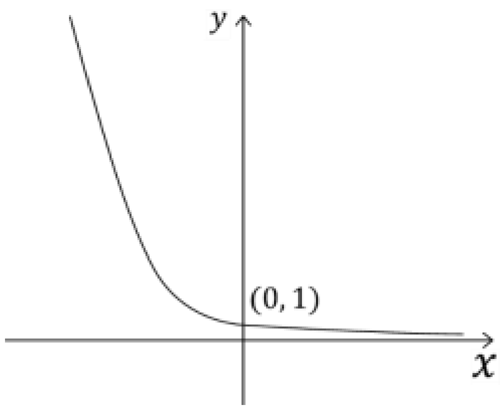
- **بعض الخصائص الهامة للدالة الأسية:**

1. **إذا كانت** $a>1$ فإنَّ ...
   A. $a^x>0,\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
   B. الدالة الأسية $y=a^x$ تكون دالة تزايديه، إي تزداد قيمة الدالة بزيادة قيمة x.
   C. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \longrightarrow 0$
   D. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \to \infty$
   E. $f(0)=a^0=1,\ \forall_{a>1}$، المنحنى يقطع محور y عند $(0,\ 1)$.



منحنى الدالة $y=a^x$ عندما $(a>1)$

2. **إذا كانت** $0<a<1$ فإنَّ ...
   A. $a^x>0,\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
   B. الدالة الأسية $y=a^x$ تكون دالة تناقصية، إي تقل قيمة الدالة بزيادة قيمة x.
   C. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \to \infty$
   D. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \to 0$
   E. $f(0)=a^0=1,\ \forall_{a>1}$، المنحنى يقطع محور y عند $(0,\ 1)$.



منحنى الدالة $y=a^x$ عندما $(a<1)$

- **الدالة** $y=e^x$: تتميز الدالة الأسية للأساس e بأهمية كبيرة جداً، إذ تظهر في مجال عريض من التطبيقات، في مثال سابق أثبتنا أنَّ $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ لكل قيم x غير الصفرية، الآن سنبرهن أنَّ e^x هي عبارة عن مجموع المتسلسلة اللانهائية

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

الإثبات:

$$e^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=1+\binom{n}{1}.\frac{x}{n}+\binom{n}{2}.\frac{x^{2}}{n^{2}}+\binom{n}{3}.\frac{x^{3}}{n^{3}}+\cdots+\binom{n}{k}.\frac{x^{k}}{n^{k}}+\cdots=$$

$$=1+n.\frac{x}{n}+\frac{n.(n-1)}{2!}.\frac{x^{2}}{n^{2}}+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!}.\frac{x^{3}}{n^{3}}+\cdots+\frac{n(n-1)\,(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{x^{k}}{n^{k}}+\cdots=$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^{2}+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)x^{k}+\cdots=$$

$$\therefore\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{k}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=$$

$$\therefore e^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$$

مثال: باستخدام تعريف الدالة e^{x} أحسب قيمة المجاميع التالية

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!}$.

الحل:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!}-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!}-1=e^{2}-1.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}$.

الحل:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}=1-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k}}{k!}=\frac{(-1)^{0}}{0!}+\frac{(-1)^{1}}{1!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}=e^{-1}.$$

3. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2^{2k-1}k!}$

الحل:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2^{2k-1}k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2^{2k}2^{-1}k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(2\times\frac{(-1)^{k}}{4^{k}\times k!}\right)=2\times\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k}}{k!}\right)=$$

$$=2\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k}}{k!}\right)-1+\frac{1}{4}\right)=2\left(e^{-\frac{1}{4}}-\frac{3}{4}\right)=2e^{-\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}=\frac{2}{\sqrt[4]{e}}-\frac{3}{2}$$

مثال: باستخدام تعريف الدالة e^{x} أحسب قيم النهايات التالية

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}+2x}{x^{2}}$

$$e^{2x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^{k}}{k!}=1+2x+\frac{4x^{2}}{2!}+\frac{8x^{3}}{3!}+\cdots=1+2x+2x^{2}+\frac{4}{3}x^{3}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{1-e^{2x}+2x}{x^{2}}=\frac{1+2x-\left(1+2x+2x^{2}+\frac{4}{3}x^{3}+\cdots\right)}{x^{2}}=\frac{-\left(2x^{2}+\frac{4}{3}x^{3}+\cdots\right)}{x^{2}}=-\left(2+\frac{4}{3}x+\ldots\right)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}+2x}{x^{2}}=-2$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin(bx)},\ b\neq 0$

بالتعويض المباشر يكون الناتج $\frac{0}{0}$

$$e^{ax}-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!}-1=\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^3x^3}{3!}+\cdots\right)-1=$$

$$=ax+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a^3}{6}x^3+\cdots$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a^3}{6}x^3+\cdots}{sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{ax+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a^3}{6}x^3+\cdots}{x}\right)}{\left(\frac{sin(bx)}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a+\frac{a^2}{2}x+\frac{a^3}{6}x^2+\cdots}{x}\right)}{\left(\frac{sin(bx)}{x}\right)}=\frac{a}{b}$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x},\ b>0,a>0$$

$$a^x=e^{x\,ln(a)}=\left(1+ln(a)x+\frac{(ln(a))^2x^2}{2!}+\frac{(ln(a))^3x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$a^x-b^x=\left(1+ln(a)x+\frac{(ln(a))^2x^2}{2!}+\cdots\right)-\left(1+ln(b)x+\frac{(ln(b))^2x^2}{2!}+\cdots\right)=$$

$$\frac{a^x-b^x}{x}=(ln(a)-ln(b))+\frac{(ln(a)^2-ln(b)^2)x}{2!}+\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=ln(a)-ln(b)$$

- **تفاضل الدالة الأسية:** - سبق وأن أثبتنا من تعريف التفاضل أنَّه إذا كانت $a>0$ و $a\neq 1$ فإنَّ

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x ln\,(a)$$

وكحالة خاصة $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

- باستخدام تفاضل دالة الدالة، إذا كانت $\boldsymbol{u}$ دالة في $\boldsymbol{x}$ فإنَّ

1. $\frac{d}{dx}\left[a^{u(x)}\right] = a^{u(x)} \times ln\left(a\right) \times \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\left[e^{u(x)}\right] = e^{u(x)} \times \frac{du}{dx}$

الدوال اللوغاريثمية Logarithmic Functions

ليكن $a > 0$ و $a \neq 1$ الدالة اللوغاريثمية للأساس a هي الدالة $y = \log_a x$، وهي الدالة العكسية للدالة الأسية $y = a^x$ مجال تعريف الدالة الأسية هو $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.، أما مدى الدالة فهو $R = \mathbb{R}$.

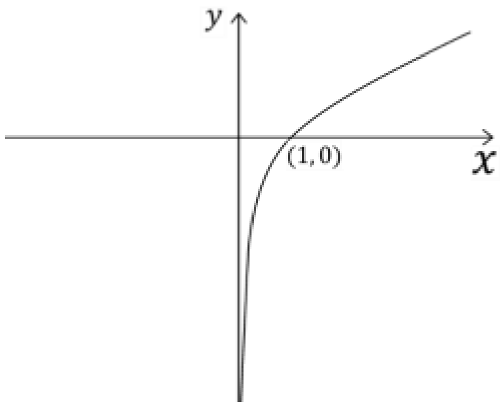
إذا كان الأساس للدالة اللوغاريثمية هو العدد e عندئذٍ تسمى بدالة اللوغاريثم الطبيعي ويرمز لها بالرمز lnx، أي أنَّ $log_e x = lnx$، وتكون lnx، هي الدالة العكسية للدالة e^x.

- **بعض الخصائص الجبرية للدوال اللوغاريثمية:**

(1) $ln\,1 = 0$	(1) $log_a 1 = 0$
(2) $lnx + lny = lnxy$	(2) $log_a x + log_a y = log_a xy$
(3) $lnx^n = nlnx$	(3) $log_a x^n = nlog_a x$
(4) $ln\frac{1}{x} = -lnx$	(4) $log_a \frac{1}{x} = -log_a x$
(5) $lnx - lny = ln\frac{x}{y}$	(5) $log_a x - log_a y = log_a \frac{x}{y}$
(6) $\forall_{c>0} \quad lnb = \frac{log_c b}{log_c e}$	(6) $\forall_{c>0} \quad log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$
(7) $lnb = \frac{1}{log_b e}$	(7) $log_a b = \frac{1}{log_b a}$
(8) $log_{e^n} x = \frac{1}{n} lnx$	(8) $log_{a^n} x = \frac{1}{n} log_a x$
(9) $log_{a^n} x^n = lnx$	(9) $log_{a^n} x^n = log_a x$

- **بعض الخصائص التحليلية للدالة اللوغاريثمية:**

1. **إذا كانت** $a > 1$ **فإنَّ ...**



منحنى الدالة $y = \log_a x$ عندما $(a > 1)$

A. $\log_a x < 0 , \ \forall_{x\in(0,\ 1)}$

B. $\log_a x > 0 , \ \forall_{x\in(1,\infty)}$

C. الدالة اللوغاريثمية $y = log_a x$ تكون دالة تزايديه، إي تزداد قيمة الدالة بزيادة قيمة x.

D. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ log_a x \to \infty$

E. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ log_a x = log_a \infty \to log_a a^{\infty} \to \infty \times 1 \to \infty$

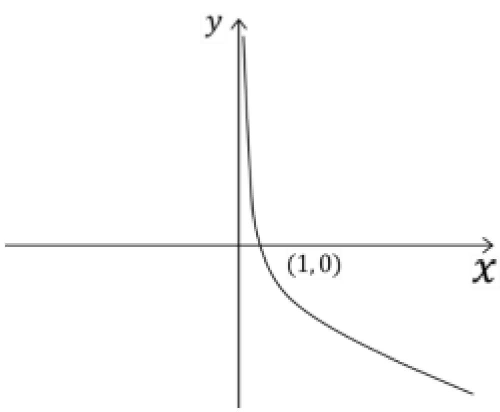
F. $\lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = -\infty$

الإثبات:

$$\lim_{x\to 0^+} log_a x = \lim_{h\to 0} log_a h = -\lim_{h\to 0} log_a \frac{1}{h}$$
$$= -\log_a \infty \to -\infty \times 1 \to -\infty$$

G. $f(1) = 1 , \ \forall_{x\in\mathbb{R}^+}$ ، المنحنى يقطع محور x عند $(1 ,\ 0)$.

2. **إذا كانت** $a < 1$ **فإنَّ ...**



منحنى الدالة $y = \log_a x$ عندما $(a < 1)$

A. $\log_a x > 0 , \ \forall_{x\in(0,1)}$

B. $\log_a x < 0 , \ \forall_{x\in(0,\ \infty)}$

C. الدالة اللوغاريثمية $y = log_a x$ تكون دالة تناقصية، إي تقل قيمة الدالة بزيادة قيمة x.

D. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ log_a x \to -\infty$

E. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ log_a x = log_a \infty \to log_a \left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} \to log_a a^{-\infty} \to -\infty \times 1 \to -\infty$

F. $\lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = +\infty$

الإثبات:

$$\lim_{x\to 0^+} log_a x = \lim_{h\to 0} log_a h = -\lim_{h\to 0} log_a \frac{1}{h} =$$

$$= -(\log_a \infty) \to -(-\infty) \to +\infty$$

.G $\forall_{x \in \mathbb{R}^+}$ ، $f(1) = 1$ ، المنحنى يقطع محور x عند $(1\ ,\ 0)$.

- **تفاضل الدوال اللوغاريثمية** - سبق وأن أثبتنا باستخدام تعريف المشتقة أنَّه إذا كانت $a > 0$ و $a \neq 1$ فإنَّ

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{x\ \ ln\,(a)}$$

وكحالة خاصة $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$.

باستخدام تفاضل دالة الدالة، إذا كانت u دالة في x فإنَّ

1. $\frac{d}{dx}[log_a u(x)] = \frac{1}{u(x)\ \ ln\,(a)} \times \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}[lnu(x)] = \frac{1}{u(x)} \times \frac{du}{dx}$

- **تفاضل الدالة** $f(x)^{g(x)}$:-

لتكن $y = f(x)^{g(x)}$ والمطلوب إيجاد $\frac{d}{dx}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ ، نأخذ لوغاريثم الطرفين للأساس e

$$\therefore lny = g(x)ln\,(f(x))$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر المستقل x نجد

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \left(g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \times ln\,(f(x))\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f(x)^{g(x)}\left(g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \times ln\,(f(x))\right)$$

أمثلة: أوجد تفاضل الدوال التالية ...

1. $y = 2^x + \frac{1}{\sqrt{3^x}}$

$$y=2^x+3^{-\frac{x}{2}}\ ,\ \therefore\ \frac{dy}{dx}=2^x ln2+3^{-\frac{x}{2}}\times ln3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2^x ln2-\frac{1}{2}ln3\times 3^{-\frac{x}{2}}$$

2. $y=\dfrac{4^x-1}{4^x+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4^x+1)\times 4^x ln4-(4^x-1)\times 4^x ln4}{(4^x+1)^2}=\frac{4^x ln4\times(4^x+1-4^x+1)}{(4^x+1)^2}=$$

$$=\frac{4^x ln4\times 2}{(4^x+1)^2}==\frac{2^{(2x+1)}ln4}{(4^x+1)^2}$$

3. $y=x^{sec^{-1}x}$

بأخذ لوغاريثم الطرفين للأساس e

$$lny=sec^{-1}x lnx$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر المستقل x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left(sec^{-1}x\times\frac{1}{x}+lnx\times\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=x^{sec^{-1}x}\left(\frac{sec^{-1}x}{x}+\frac{lnx}{|x|\sqrt{x^2-1}}\right)$$

4. $y=\dfrac{(x+1)^3(x^2+4)^8}{\sqrt[4]{x^2+2}}$

بأخذ لوغاريثم الطرفين للأساس e

$$lny=3ln(x+1)+8ln(x^2+4)-\frac{1}{4}ln(x^2+2)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر المستقل x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x+1}+8\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)^3(x^2+4)^8}{\sqrt[4]{x^2+2}}\left(\frac{3}{x+1}+\frac{16x}{x^2+4}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2}\right)$$

5. $x^{siny}=sin(x+y)^y$

بأخذ لوغاريثم الطرفين للأساس e

$$(\sin y)\ln x = y\ \ln\sin(x+y)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر المستقل x

$$(\sin y)\frac{1}{x} + \ln x(\cos y)\frac{dy}{dx} = y\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}(1+\frac{dy}{dx})$$

$$\therefore (\ln x(\cos y) - y\cot(x+y))\times\frac{dy}{dx} = y\cot(x+y) - (\sin y)\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cot(x+y) - (\sin y)\frac{1}{x}}{(\ln x(\cos y) - y\cot(x+y))}$$

6. $x = 2^{y} - 2^{-y}$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر المستقل x

$$1 = 2^{y}(\ln 2)\frac{dy}{dx} - 2^{-y}(\ln 2)\left(-\frac{dy}{dx}\right)$$

$$1 = \frac{dy}{dx}(\ln 2)(2^{y} + 2^{-y})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2^{y}+2^{-y})\ln 2}$$

تمارين

1. أوجد تفاضل الدوال التالية...

1) $y = 2^x + 3^{-3x}$　　2) $y = \pi^x - x^\pi$　　3) $y = e^{e^x}$

4) $y = e^{\sin(3x)}$　　5) $y = \ln(x^2 - 1)$　　6) $y = \ln\left(\dfrac{2^x - x}{2^x - x}\right)$

7) $y = \log_3\left(\dfrac{x}{2^x - x}\right)$　　8) $y = \tan^{-1}(e^{-x^2})$　　9) $y = \sin\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$

10) $y = x^{x^x}$　　11) $y = \dfrac{\ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}$　　12) $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[3]{x+4}}$

13) $y = \ln\left(\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)$　　14) $y = \dfrac{\sin^4(x)\cos^3(x)}{x^{\frac{2}{7}}}$　　15) $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt{\tan(x)}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

2. أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ الدوال التالية...

1) $xy = 2^{x-y}$　　2) $y + x = y^x$　　3) $y = x^{e^y}$

3. أحسب النهايات التالية...

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$　　2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{x}$　　3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - e^{2x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$　　5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x}$　　6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-ax^2} - 1}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_x(x+1)$　　8) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$