التعبير دون مساس بالعمومية Without loss of generality:

لنعتبر المسألة: برهن أن $|xy| = |x| \cdot |y|$ حيث $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

عند استخدام طريقة البرهان بالحالات لبرهان النظرية أعلاه، سنعتبر الحالات:

(1) $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

(2) $x \geq 0$ و $y < 0$

(3) $x < 0$ و $y \geq 0$

(4) $x < 0$ و $y < 0$

و نلاحظ هنا تشابه الحالتين (2) و (3)، حيث في (2) نأخذ $|x| = x$ و $|y| = -y$ بينما في (3) نأخذ $|x| = -x$ و $|y| = y$. عندئذ التعبير "نعتبر دون مساس بالعمومية أن $x \geq 0$ و $y < 0$" يعني أن الحالة "$x < 0$ و $y \geq 0$" يمكن معالجتها بنفس الطريقة التي تسري على الحالة الراهنة ($x \geq 0$ و $y < 0$)، و من ثم يمكن القفز من الحالة (2) إلى الحالة (4) دون المرور بالحالة (3).

بعض الأخطاء في براهين النظريات:

(1) **الاحتجاج باستخدام الأمثلة**: صحة القضية العامة لا يمكن إثباتها باستخدام الأمثلة الخاصة.

مثال: نظرية: ليكن n عدداً فردياً، عندئذٍ n^2 عدد فردي.

البرهان: نفرض أن $n = 3$، عندئذٍ $n^2 = 9$ عدد فردي. $\therefore$ مربع العدد الفردي يكون فردياً.

البرهان أعلاه خاطئ.

(2) **استخدام نفس الرمز لكائنين مختلفين**: فمثلاً إذا افترضنا أن m و n عددان صحيحان زوجيان، فإن كتابة $m = 2k$ و $n = 2k$ يقود إلى أن $m = n$، مما يناقض كون m و n إختياريين.

(3) **القفز إلى الخلاصة**: لنفرض أننا نريد أن نبرهن على أنه إذا كان مجموع أي عددين عدد زوجي، فكذلك يكون الفرق بينهما.

نعتبر البرهان التالي: لنفرض أن $m+n=2k$ ، عندئذٍ $m=2k-n$ ، و من ثم $m-n$ عدد زوجي.

المشكلة في هذا البرهان أن الخطوة $m-n=2k-2n=2(k-n)$ تم حذفها، و هي الخطوة الأهم في البرهان بأجمعه.

براهين الوحدانية: Uniqueness Proofs

يتطلب برهان بعض النظريات اثبات انه **يوجد** عنصر **وحيد** يحقق النظرية. ينقسم برهان الوحدانية الى جزئين:

أ- **الوجود: Existence**

نوضح فى هذا الجزء من البرهان ان العنصر x الذى يحقق النظرية موجود.

ب- **الوحدانية: Uniqueness**

نوضح فى هذا الجزء من البرهان انه اذا كان $y \neq x$ ، فإن y لا تحقق النظرية.

ما تم ذكره اعلاه يكافئ اثبات انه اذا كان كل من x و y يحقق النظرية فإن $x=y$.

ملحوظة: إثبات انه يوجد عنصر وحيد x يحقق $P(x)$ يكافئ العبارة

$$\exists x,(P(x)\wedge \forall y\,(y\neq x \rightarrow \sim P(y)))$$

سنوضح خطوات برهان الوحدانية بالمثال التالى.

مثال:

اثبت انه اذا كان a و b عددين حقيقيين، $a\neq 0$ ، فإنه يوجد يوجد عدد حقيقى وحيد r بحيث $ar+b=0$.

الاثبات: اولا، نلاحظ ان العدد الحقيقى $r=\dfrac{-b}{a}$ هو حل للمعادلة $ar+b=0$ لأن

$$ar+b=a\left(\frac{-b}{a}\right)+b=-b+b=0$$

وعليه، يوجد r بحيث $ar+b=0$ (اثبات الوجود).

ثانيا: افرض ان s عدد حقيقي بحيث $as+b=0$. اذن $ar+b=as+b$ حيث $r=\frac{-b}{a}$. اذن $ar=as$، ومنها نجد ان $r=s$ (اثبات الوحدانية).

البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي Proof by mathematical induction

طريقة الاستقراء الرياضي طريقة ذات استخدامات واسعة النطاق لبرهان النظريات $\forall n\in D, P(n)$ التي يكون فيها مجال التعريف D فئة جزئية من فئة الأعداد الطبيعية N. المجال D إما يكون منتهياً حيث

$$D=\{n_0, n_0+1,\ldots,N\}$$

أو يكون غير منتهي، بحيث

$$D=\{n_0, n_0+1, n_0+2,\ldots\}$$

أمثلة:

a) بين أن $\sum_{k=1}^{N} k=\frac{N(N+1)}{2}$.

b) بين أن $\sum_{k=1}^{n} ar^k=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$، لكل $n>0$، $r\neq 1$.

c) بين أنه لكل $n\geq 1$، يكون $2^{2n}-1$ قابلاً للقسمة على 3.

يتألف البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي من ثلاث خطوات:

i. **الخطوة الأساس Base Step**: و هو برهان صحة النظرية لـ: n_0 ($P(n_0)$ صحيحة).

ii. **الفرضية Hypothesis**: و هو افتراض صحة النظرية لـ $n=k$: ($P(k)$ صحيحة).

iii. **خطوة الاستنتاج Induction step**: و فيها يتم استخدام فرضية صحة النظرية لـ $n=k$، لإثبات صحة النظرية لـ $n=k+1$ (استخدام فرضية أن $P(k)$ صحيحة لإثبات أن $P(k+1)$ صحيحة).

مثال: برهن أن $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي:

a) **الخطوة الأساس**: نثبت صحة النظرية لـ $n=1$:

الطرف الأيسر = 1.

الطرف الأيمن: $\frac{1(1+1)}{2}=1$

$\therefore$ النظرية صحيحة عندما $n=1$.

b) **الفرضية**: لنفرض صحة النظرية عندما $n=k$، أي

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

c) **الاستنتاج**: نثبت صحة النظرية عندما $n=k+1$:

الطرف الأيسر:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

الطرف الأيمن: $\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

$\therefore$ النظرية صحيحة لجميع n.

مثال: برهن أن $2^{2n}-1$ يقبل القسمة على 3، لجميع $n\in N$.

البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي:

a) **الخطوة الأساس**: نثبت صحة النظرية لـ $n=1$:

الطرف الأيسر = $2^{2(1)}-1=3$، يقبل القسمة على 3.

$\therefore$ النظرية صحيحة عندما $n=1$.

b) **الفرضية**: لنفرض صحة النظرية عندما $n=k$، أي $2^{2k}-1$ يقبل القسمة على 3.

c) **الاستنتاج**: نثبت صحة النظرية عندما $n=k+1$:

الطرف الأيسر:

$$2^{2(k+1)}-1=2^{2k}\cdot 2^2-1=2^{2k}\cdot 4-1=2^{2k}\cdot(3+1)-1=3\cdot 2^{2k}+(2^{2k}-1)$$

من الفرضية $2^{2k}-1$ يقبل القسمة على 3، و من ثم $3\cdot 2^{2k}+(2^{2k}-1)$.

$\therefore$ النظرية صحيحة لجميع $n\geq 1$.

تمرين: مستخدماً الاستقراء الرياضي بين أن:

i. $\sum_{k=1}^{n} a+(k-1)r=\frac{n}{2}(2a+(n-1)r)$ لكل $n\geq 1$.

ii. $n<2^n$ لجميع $n\geq 0$، حيث n عدد صحيح.

iii. $2^n\leq n!$ لجميع $n\geq 4$.

iv. إذا كان $h>-1$ فإن $(1+nh)\leq(1+h)^n$ لجميع $n\geq 0$ (متباينة برنولي).

v. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

vi. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ لجميع $n\geq 1$.