أساسيات البرهان الرياضي Fundamentals of mathematical proof

يتألف النظام الرياضي من **مسلمات** axioms، **تعاريف** definitions و **اصطلاحات غير معرفة** undefined terms.

المسلمة axiom هي قضية تم افتراض أنها صائبة.

التعريف definition يستخدم لإنشاء مفاهيم جديدة بدلالة مفاهيم موجودة أصلاً.

النظرية theorem هي القضية التي يمكن إثبات أنها صائبة. احيانا تسمى النظريات بالحقائق facts او بالنتائج results.

التلميح lemma هي نظرية ليست مهمة في حد ذاتها، و لكنها تستخدم لإثبات نظرية أخرى.

النتيجة corollary هي نظرية تتبع سريعاً من نظرية أخرى.

مثال: في النظام الإقليدي:

(1) النقطة و الخط المستقيم أمثلة لاصطلاحات غير معرفة.

(2) مثال لتعريف: يقال لزاويتين أنهما متكاملتين supplementary إذا كان مجموعهما 180 درجة.

(3) مثال لمسلمة axiom معطى نقطتان منفصلتان A و B، هنالك خط مستقيم وحيد يصل بينهما.

(4) مثال لنظرية: – إذا كان هنالك مثلث متساوي الساقين، فإن الزاويتين المقابلتين للضلعين تكونان متساويتين.

(5) مثال لنتيجة: إذا كان هنالك مثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه تكون متساوية.

الحجة التي يتم عن طريقها إثبات صحة النظرية تسمى **ببرهان النظرية proof of theorem**، و المنطق هو الوسيلة التي يتم عن طريقها تحليل البرهان. فيما يلي، نورد طرق مختلفة لبراهين النظريات.

طرق براهين النظريات Methods of proving theorems

اولا: النظريات على الصيغة $\forall x \in D, if\ P(x)\ then\ Q(x)$:

(ا) البرهان المباشر Direct method of proof:

يقصد بالبرهان المباشر الطريقة المتبعة لإثبات القضية $P \to Q$ ، اى أنه إذا كانت $P(x)$ صائبة لعنصر ما $x \in D$ فإن $Q(x)$ تكون أيضاً صائبة. فى هذه الطريقة نبدأ بإفتراض ان P صائبة، ثم فى الخطوات التالية نوضح ان Q لا بد و ان

تكون صائبة. اى ان:

(we begin with the premises, continue with a sequence of deductions, and end with the conclusion)

مثال: لكل $n,m \in Z$ إذا كان n و m زوجيان، فإن $n+m$ يكون عدداً زوجياً.

البرهان: لنفرض أن n و m زوجيان، عندئذٍ يوجد عددان زوجيان k_1 و k_2 بحيث $n=2k_1$ و $m=2k_2$. الآن

$$n+m=2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)=2k$$

حيث $k=k_1+k_2 \in Z$ عدد صحيح، و من ثم فإن $n+m$ عدد زوجي.

مثال: أثبت النظرية التالية:

نظرية: كل عدد صحيح عدد قياسي.

البرهان: ليكن n أي عدد صحيح، عندئذٍ $n=\frac{n}{1}$. من تعريف العدد القياسي، n عدد قياسي.

تمرين: أثبت ما يلي:

1. **نظرية:** ليكن a و b عددان قياسيان. عندئذٍ $a+b$ عدد قياسي.
2. **نتيجة:** مضاعف أي عدد قياسي عدد قياسي.

(ب) طرق البرهان غير المباشر Indirect methods of proof:

في طريقة البرهان المباشر لـ $P \to Q$، يتم افتراض أن المقدمة صحيحة، و استناداً إلى ذلك يتم برهان أن الخلاصة تكون صحيحة. أي طريقة أخرى لإثبات $P \to Q$ غير طريقة البرهان المباشر، تكون طريقة برهان غير مباشر، و هي أي طريقة لا تبدأ بالمقدمات و تنتهي بالخلاصة.

هنالك طريقتان من طرق البرهان الغير مباشر:

(1) **البرهان عن طريق التناقض Proof by contradiction**: في هذه الطريقة يتم افتراض أن الخلاصة Q غير صائبة، ثم يتم إيجاد التناقض الناتج من الفرضية مع المقدمة P.

مثال:

نظرية: برهن أنه إذا كان n^2 عدد زوجي، فإن n يكون عدد زوجي.

البرهان: لنفرض أن n عدد فردي، عندئذٍ يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$. الآن

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$$

حيث $m = 2k^2 + 2k$ مما يقود إلى التناقض مع كون n^2 زوجياً. وعليه، فإن n عدد زوجي.

(2) **البرهان بطريقة الوضع العكسي Proof by contraposition**: نعلم أن $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$. في طريقة الوضع العكسي، بدلاً عن إثبات أن $p \to q$ نثبت أن $\sim q \to \sim p$.

مثال: برهن أنه إذا كان n عدد صحيح و كان $3n + 2$ فردى، فإن n يكون عدد فردى.

الحل: لنحاول اولا طريقة البرهان المباشر. لنفرض ان $3n + 2$ هو عدد فردي. هذا يعني ان $3n + 2 = 2k + 1$ لعدد ما صحيح k وعليه فإن $3n + 1 = 2k$. من الواضح انه لا توجد طريقة مباشرة لاستنتاج ان n عدد فردي.

الان سنحاول طريقة البرهان غير المباشر: البرهان بطريقة الوضع العكسي:

لاحظ ان المثال يمكن ان يكتب كالتالي $P \to Q$ حيث P هي القضية " $3n + 2$ فردى" و Q هي القضية " n عدد فردى". نبدأ بإفتراض ان الخلاصة في العبارة السابقة خطأ. اي افرض ان n عدد زوجي. وعليه فإن $n = 2k$ لعدد ما صحيح k. إذن:

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$$

مما يعني ان $3n + 2$ هو عدد زوجي، وهذا هو نفي الفرض من النظرية، اي ان $\sim q \to \sim p$ وعليه فإن $p \to q$

مثال: برهن أنه إذا كان n^2 عدد زوجي، فإن n يكون عدد زوجي.

البرهان: لنفرض أن n غير زوجي، عندئذٍ يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k+1$. الآن، $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$، و هو عدد فردي.

$\therefore n$ عدد زوجي.