تعريف: تعرف القضية $q \to p$ بأنها معكوس converse القضية $p \to q$ ، و تعرف القضية $\sim q \to \sim p$ بأنها الوضع العكسي contra-positive للقضية $p \to q$ و تعرف القضية $\sim p \to \sim q$ بأنها عكس inverse القضية $p \to q$.

يمكن ملاحظة أن جدول الصواب للقضية $\sim q \to \sim p$ يتطابق مع جدول الصواب للقضية $p \to q$.
كما يمكن ملاحظة أنه ليس لأيٍّ من القضيتين $q \to p$ و $\sim p \to \sim q$ نفس جدول صواب القضية $p \to q$ (أثبت ذلك).

Algebra of Propositions جبر القضايا

Tautologies and Contradictions الاسترسال والتناقض

تعريف: يقال لقضية مركبة $P(p,q,r,...)$ أنها استرسال Tautology إذا كانت دائماً صائبة بغض النظر عن القضايا المكونة لها، و يقال أنها تناقض Contradiction إذا كانت دائماً خاطئة بغض النظر عن القضايا المكونة لها.

مثال: القضية $p \vee \sim (p \wedge q)$ استرسال والقضية $p \wedge \sim p$ تناقض (برهن ذلك).

مبرهنة: إذا كانت القضية $P(p,q,r,...)$ استرسالاً فإن القضية $\sim P(p,q,r,...)$ تكون تناقضاً والعكس ايضاً صحيح.

Algebra of Propositions جبر القضايا

تعريف: القضية المركبة(Compound Proposition)

القضية المركبة هي القضية التي يتم إنشاؤها من عدد من القضايا باستخدام بعض أو كلٍّ من مؤثر النفي و روابط الفصل و الضم و الاقتضاء و الاقتضاء المزدوج. و لما بداخل الأقواس أولوية التقييم على ما بخارجها و للنفي أولوية التقييم على مؤثري الفصل و الضم (للفصل و الضم نفس الأولوية) كما أن للفصل و الضم أولوية على الإقتضاء الشرطي و الإقتضاء الشرطي المزدوج.

مثال: أنشئ جدول الصواب للقضية $(p \vee \sim q) \to (p \wedge q)$.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \to (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	**T**
T	F	T	T	F	**F**
F	T	F	F	F	**T**
F	F	T	T	F	**F**

Logical Equivalence التكافؤ المنطقي

يقال لقضيتين $P(p,q,r,...)$ و $Q(p,q,r,...)$ أنهما متكافئتين منطقياً Logically Equivalent ، وتكتب $P(p,q,r,...) \equiv Q(p,q,r,...)$ ، إذا كان لهما نفس جدول الصواب.

أمثلة: اثبت ان:

(1) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (2) $p \to q \equiv \sim p \vee q$ (3) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

البرهان:

(1) ننشئ جدول الصواب للقضيتين $\sim(p\vee q)$ و $\sim p\wedge\sim q$:

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	T	**F**	F	F	**F**
T	F	T	**F**	F	T	**F**
F	T	T	**F**	T	F	**F**
F	F	F	**T**	T	T	**T**

(2) تمرين.

(3) ننشئ جدول الصواب للقضيتين $p\vee(q\wedge r)$ و $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	F	**T**	T	T	**T**
T	F	T	F	**T**	T	T	**T**
T	F	F	F	**T**	T	T	**T**
F	T	T	T	**T**	T	T	**T**
F	T	F	F	**F**	T	F	**F**
F	F	T	F	**F**	F	T	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

في الجدول أدناه، نورد قوانين التكافؤ المنطقية:

قانون التكافؤ	مسمى قانون التكافؤ
$p\vee F\equiv p,\ p\wedge T\equiv p$	قوانين المحايد Identity laws
$p\wedge F\equiv F,\ p\vee T\equiv T$	قوانين الهيمنة Domination laws
$p\wedge p\equiv p,\ p\vee p\equiv p$	قوانين الجمود Idempotent laws
$\sim(\sim p)\equiv p$	قانون النفي المزدوج Double negation
$p\wedge q\equiv q\wedge p,\ p\vee q\equiv q\vee p$	قوانين الإبدال Commutative laws
$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$ $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$	قوانين التجميع Associative laws
$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	قوانين التوزيع Distributive laws

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	
$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$	قوانين دي مورجان De Morgan's laws
$p\vee(p\wedge q)\equiv p,\ p\wedge(p\vee q)\equiv p$	قوانين الامتصاص Absorption laws
$p\vee\sim p\equiv T,\ p\wedge\sim p\equiv F$	قوانين المكمل Complement laws

تمرين: برهن صحة قوانين التكافؤ في الجدول أعلاه.

مثال: بين أن $\sim(p\vee(\sim p\wedge q))\equiv\sim p\wedge\sim q$.

الحل: باستخدام قانون التوزيع $\sim(p\vee(\sim p\wedge q))\equiv\sim((p\vee\sim p)\wedge(p\vee q))$

باستخدام قانون دي مورجان $\equiv\sim(p\vee\sim p)\vee\sim(p\vee q))$

باستخدام قانون النفي $\equiv\sim(T)\vee\sim(p\vee q))$

باستخدام قانون النفي $\equiv F\vee\sim(p\vee q))$

باستخدام قانون المحايد $\equiv\sim(p\vee q))$

باستخدام قانون دي مورجان $\equiv\sim p\wedge\sim q$

مثال: مستخدما قوانين جبر القضايا، بسط القضية التالية: $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$

الحل:

باستخدام قانون دي مورجان $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$

باستخدام قانون التوزيع $\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee q)$

باستخدام قانون المكمل $\equiv\sim p\wedge(T)$

باستخدام قانون المحايد $\equiv\sim p$

<u>تمرين: -</u> برهن أن $p\rightarrow q\equiv\ \sim q\rightarrow\sim p$.

Rules of Inferential Logic قواعد المنطق الاستدلالي

تعريف: الحجة argument هي فئة من قضايا $p_1, p_2, \dots, p_n$ و قضية Q مرتبطة ببعضها البعض، بحيث تستخدم القضايا $p_1, p_2, \dots, p_n$ و تسمى بالمقدمات premises لاستنتاج القضية Q و تسمى بالخلاصة conclusion. يمكن ان تكتب الحجة كالتالى:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \\ \therefore Q \end{array}$$

فمثلاً: القضايا: "برنامج الأطباء التلفزيوني ذو شعبيةٍ واسعة"، "التيار الكهربائي كثير الانقطاع" و "أفضل ماركات الحواسيب هي توشيبا" لا يمكن أن تشكل حجة لعدم ارتباط المقدمات و الخلاصة مع بعضها البعض منطقياً. في حين أن القضايا: "الأطباء خريجون من كليات الطب"، "سلمى طبيبة" و "سلمى خريجة كلية الطب" تشكل حجة لأن القضية الثالثة تم استنتاجها مباشرة من القضيتين الأولى و الثانية.

لنفرض أن جميع المقدمات صائبة. الخلاصة ربما تكون صائبة و ربما تكون خاطئة. عندما تكون الخلاصة صائبة نقول أن الحجة متحققة valid، و نقول أنها باطلة invalid إذا كانت الخلاصة خاطئة.

لمعرفة إذا ما كانت حجة ما متحققة أو باطلة يجب:

(1) تحديد المقدمات و الخلاصة.

(2) إنشاء جدول الصواب متضمناً المقدمات و الخلاصة.

(3) تحديد الصفوف التي تكون عندها جميع المقدمات صائبة.

(4) في كل صف من الخطوة (3)، إذا كانت الخلاصة صائبة تكون الحجة متحققة و فيما عدا ذلك تكون الحجة باطلة.

مثال: لتكن لدينا الحجة التالية: "اذا كانت لديك كلمة مرور، فانه يمكنك الدخول على الشبكة."

" لديك كلمة مرور."

" يمكنك الدخول على الشبكة."

بين ان الحجة اعلاه متحققة.

الحل:

لتكن p هى "لديك كلمة مرور" و q هى "يمكنك الدخول على الشبكة". عندئذ يمكننا كتابة الحجة اعلاه فى الشكل التالي:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

يمكننا تكوين جدول الصواب للحجة اعلاه كالتالي:

p	q	$p \to q$
T	**T**	**T**
T	F	F
F	T	T
F	F	T

بما ان المقدمات $p \to q$ و p صحيحة فى السطر الاول وكذلك الخلاصة q صحيحة فى هذه الحالة، فاالحجة اعلاه متحققة.

مثال: بين أن الحجة التالية باطلة:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to p \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

الحل:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \vee q$
T	T	**T**	**T**	**T**
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	**T**	**T**	**F**

بما ان المقدمات $p \to q$ و $q \to p$ صحيحة فى السطر الاخير ولكن الخلاصة $p \vee q$ خطأ فى هذه الحالة، فاالحجة اعلاه باطلة.

مبرهنة: الحجة

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \\ \therefore Q \end{array}$$

تكون متحققة valid اذا وفقط اذا كانت القضية $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ \dots \ \wedge P_n) \to Q$ استرسالاً tautology.

مثال: المبدأ الاساسي للتعليل المنطقي Fundamental Principle of Logical Reasoning

اذا كانت p تقتضي q و كانت q تقتضي r، فإن p تقتضي r. اى ان الحجة التالية متحققة:

$$\begin{array}{l} p\to q \\ q\to r \\ \therefore p\to r \end{array}$$

البرهان: سنستخدم جدول الصواب لاثبات ان القضية $[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$ استرسالاً.

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$
T	T	T	T	T	T	T	**T**
T	T	F	T	F	F	F	**T**
T	F	T	F	T	T	F	**T**
T	F	F	F	T	F	F	**T**
F	T	T	T	T	T	T	**T**
F	T	F	T	F	T	F	**T**
F	F	T	T	T	T	T	**T**
F	F	F	T	T	T	T	**T**

تمرين: بين أن الحجج التالية متحققة:

(1) $\begin{array}{l} p\to q \\ \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$ (2) $\begin{array}{l} p \\ \therefore p\vee q \end{array}$ (3) $\begin{array}{l} p\wedge q \\ \therefore q \end{array}$

(4) $\begin{array}{l} p\to q \\ q\to r \\ \therefore p\to r \end{array}$ (5) $\begin{array}{l} p\to q \\ p \\ \sim q\vee r \\ \therefore r \end{array}$ (6) $\begin{array}{l} \sim p\to r\wedge\sim s \\ t\to s \\ u\to\sim p \\ \sim w \\ u\vee w \\ \therefore \sim t\vee w \end{array}$