(ج) البرهان بالاستنفاد Exhaustive proof:

لنعتبر قضية على الصيغة $\forall x \in D, P(x)$ و التي يمكن كتابتها على الصيغة $\forall x, if\ x \in D\ then\ P(x)$. إذا كان D فئة منتهية finite set، عندئذٍ يمكن اختبار صحة $P(x)$ لكل عنصر $x \in D$. و تسمى هذه الطريقة **بطريقة الاستنفاد** **method of exhaustion**.

مثال: برهن على أنه لكل عدد صحيح $1 \le n \le 10$ يكون $n^2 - n + 11$ عدد أولي.

الحل: يمكن كتابة القضية المعطاة على الصيغة:

$\forall n \in N, \quad if \quad 1 \le n \le 10, \quad then \quad n^2 - n + 11$ يكون عدد أولي.

ليكن $P(n)$ هو الإسناد " $P(n)$ عدد أولي". باستخدام طريقة الاستنفاد:

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 13, \quad P(3) = 17, \quad P(4) = 23, \quad P(5) = 31,$$
$$P(6) = 41, \quad P(7) = 53, P(8) = 67, P(9) = 83, \quad P(10) = 101$$

(د) البرهان باستخدام الحالات Proof by cases:

و هو طريقة برهان مباشرة لإثبات الإقتضاء $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \to q$

عن طريق استخدام الاسترسال:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$

يتألف البرهان من إثبات أن $p_1 \to q$ ، $p_2 \to q$ ، ... ، $p_n \to q$.

مثال: بين أنه إذا كان n أي عدد صحيح، فإن $n^3 + n$ يكون عدد زوجي.

البرهان: هنالك حالتان:

(i) n زوجي، و عندئذٍ يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$ و من ثم فإن $n^3 = 8k^3$. الآن $n^3 + n = 8k^3 + 2k = 2(4k^3 + k)$ عدد زوجي.

(ii) n فردي، و عندئذٍ يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$ و من ثم فإن $n^3 = 8k^3 + 4k^2 + 2k + 1$.

الآن
$$\begin{aligned} n^3 + n &= (8k^3 + 4k^2 + 2k + 1) + 2k + 1 = 8k^3 + 4k^2 + 4k + 2 \\ &= 2(4k^3 + 2k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$
عدد زوجي.

(هـ) البرهان الأجوف Vacuous proof:

يمكننا برهان ان الاقتضاء الشرطي $p \to q$ صائبا اذا برهنا أن p خاطئة.

مثال: برهن ان $P(0)$ صائبة اذا كان $P(n)$ هي القضية "اذا كان $n>1$ فإن $n^2>n$"، n عدد صحيح.

الحل: نلاحظ ان $P(0)$ هي القضية "اذا كان $0>1$ فإن $0^2>0$"، ولكن الفرضية $0>1$ خاطئة، وعليه فإن $P(0)$ صائبة تلقائيا.

(و) البرهان التافه Trivial proof:

هو برهان الإقتضاء $p\to q$ الذي يتم فيه إثبات صحة q دون الرجوع إلى p.

مثال: برهن أنه إذا كان n عدد زوجي فإن n يقبل القسمة على 1.

البرهان: حيث أن n يقبل القسمة على 1 متحققة دائماً لأي عدد صحيح فإن البرهان تافه.

ثانيا: النظريات على الصيغة $p\leftrightarrow q$

لبرهان النظريات على صيغة الاقتضاء ثنائي الشرطية biconditional statement، اى النظريات في الصيغة $p\leftrightarrow q$ ، فإنه يجب برهان ان كلا من القضيين $p\to q$ و $q\to p$ صائبة. اى يجب برهان ان القضية التالية تمثل استرسالا:

$$p\leftrightarrow q\leftrightarrow[(p\to q)\wedge(q\to p)]$$

مثال: برهن انه اذا كان n عدد صحيح موجب، فإن n عدد فردى اذا وفقط اذا كان n^2 عدد فردى.

البرهان: من الملاحظ ان هذه القضية يمكن كتابتها على الصورة $p\leftrightarrow q$ حيث p هى القضية "n عدد فردى" و q هى القضية "n^2 عدد فردى". لنبدأ بـ $p\to q$: نفرض ان n عدد فردي. اذن، يوجد عدد صحيح ما k بحيث ان $n=2k+1$ وعليه

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k_1+1$$

حيث $k_1=2k^2+2k$ هو عدد صحيح. اذن n^2 هو عدد فردى.

من ناحية اخرى، لاثبات ان $q\to p$، نفرض ان n عدد زوجي، اى انه يوجد عدد صحيح ما l بحيث $n=2l$، وعليه

$$n^2=(2l)^2=4l^2=2(2l^2)=2l_1$$

حيث $l_1=2l^2$ هو عدد صحيح. اذن n^2 هو عددزوجى، وهذا يناقض الفرضية كون n^2 عدد فردى. وعليه، فإن n عدد فردى. بما اننا اثبتنا صحة كلا من القضيين $p\to q$ و $q\to p$، فإن $p\leftrightarrow q$.

ثالثا: براهين الوجود (Existence proofs): النظريات على الصيغة $\exists x,P(x)$

النظرية "يوجد x بحيث $P(x)$" تضمن وجود عنصر واحد على الأقل يحقق الإسناد x. هنالك نوعان من البراهين لمثل هذه النظرية:

(I) برهان الوجود الإنشائي Constructive existence proof:

و فيه إما أن يتم إيجاد x يحقق $P(x)$ أو وصف خوارزمية لإيجاد x.

مثال: بين أنه يوجد عدد صحيح موجب z بحيث يمكن كتابة z كحاصل جمع مربعي عددين صحيحين.

الحل: $z = 25 = 3^2 + 4^2$.

مثال: إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، بين أنه يوجد x بحيث $n = x^2$.

الحل: باستخدام خوارزمية نيوتن–رافسون، ضع

$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m^2 - n}{2x_m}$$

حيث $x_0 = 1$.

مثلاً، إذا كان $n = 2$ فإن الثلاث تكرارات الأولى للعلاقة التكرارية:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m^2 - 2}{2x_m}$$

تنتج المتتابعة $x_0 = 1,\ x_1 = 1.416667,\ x_2 = 1.414216$

(ملحوظة: القيمة المحسوبة بالتقريب هى 1.414214)

(II) برهان الوجود غير الإنشائي Non-constructive existence proof:

ويتم عن طريق إثبات وجود x إما باستخدام نظرية مثبتة أو من وجود فرضية تدل على أنه لا يوجد x يقود إلى التناقض.

مثال: بين أنه يوجد عددان غير قياسيين irrational x و y بحيث x^y هو عدد قياسى rational.

الحل: من المعلوم ان $\sqrt{2}$ هو عدد غير قياسى. لنعتبر العدد $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$. لو كان هذا العدد هو عدد قياسى، فإنه يكون لدينا عددين غير قياسيين x و y بحيث x^y هو عدد قياسى، بالتحديد $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2}$. من جهة اخري، اذا كان $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ عدد غير قياسى، فإنه يمكننا جعل $x = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ و $y = \sqrt{2}$ لنجد ان $x^y = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$