Date :
No. :

(55)

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

* مبرهنة المصفوفة القابلة للعكس :-

لتكن (A) مصفوفة $(n \times n)$ فإن الجمل التالية متكافئة ، إما جميعها صواب أو جميعها خطأ .

1. (A) قابلة للعكس .
2. (A) مكافئة صفياً لمصفوفة الوحدة $(n \times n)$ (I_n) .
3. (A) لها موقع إرتكازي في كل صف .
4. المعادلة $Ax = 0$ لها الحل الصفري فقط .
5. أعمدة (A) تشكل مجموعة مستقلة خطياً .
6. المعادلة $Ax = b$ لها على الأقل حل واحد . لكل $b \in R^n$.
7. أعمدة (A) تولد R^n .
8. توجد مصفوفة $C_{n \times n}$, $CA = I$
9. توجد مصفوفة $D_{n \times n}$, $AD = I$
10. A^T قابل للعكس

(Determinants) المحددات

لتكن
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
فإن محددة (A) يرمز لها بالرمز det(A) أو |A| تعطى بـ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

*** تعريف :-**

المصفوفة A_{ij} هي المصفوفة التي نحصل عليها بشطب الصف i أو العمود j في A.

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

~~$A_{13} =$~~

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

*** تعريف :-**

لتكن (A) مصفوفة مربعة $n \times n$ حيث $n \geq 2$ ، محدد (A) ويرمز لها بالرمز det(A) أو |A| يعطى بـ

$$|A| = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

* مثال :-

أحسب محددة المصفوفة التالية :-

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1(-2) - 5(0) + 0(-4) = \underline{\underline{-2}}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 14 = \underline{\underline{-8}}$$

* تعريف :-

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة ، مرافق العنصر a_{ij} نرمز له بالرمز C_{ij} يعرف بـ $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ عندئذٍ مفكوك المحددة يعطى بـ :

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$

* مبرهنة :-

* مفكوك المحددة يعطى باستخدام الصف رقم i بـ :-

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

* كذلك يمكن حساب محددة المصفوفة باستخدام العمود رقم (j) بـ :-

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

* مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

أحسب محددة (A) باستخدام (1) الصف الثالث (2) العمود الأول

$$(1)\quad 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-2}$$

(2) العمود الأول

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

(2)

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 \cdot 0 + 0 = \underline{-2}$$

* مثال :-

أحسب محددة المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$* \; 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

* مبرهنة :-

إذا كانت (A) مصفوفة مثلثية فإن محددة (A) تكون عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي