المتتابعات والمتسلسلات اللانهائية Infinite Sequences and Series

المتتابعة أو المتتالية Sequence:

المتتابعة هي مجموعة غير منتهية من الأعداد مُرتَّبة في الصورة $a_1, a_2, \ a_3, \cdots, \ a_n, \cdots$، يُسمى a_1 بالحد الأول للمتابعة، a_2 بالحد الثاني، بصورة عامة يكون a_n هو الحد ذو الترتيب n ويُسمى بالحد النوني.

يُمكن تعريف المتتابعة كدالة متقطعة **Discrete Function** بالصورة $a_n = f(n)$ يكون مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الطبيعية.

ترميز Notation: يُرمز للمتتابعة بالرموز $\{a_1, \ a_2, \ a_3, \cdots\}$، $\{a_n\}$ و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

أمثلة:

1. $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{10}, \cdots, \dfrac{n}{n^2+1}, \ \cdots\right\}$

2. $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}\right\} = \left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{7}, \cdots, (-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1} \ , \ \cdots\right\}$

3. $\left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\} = \left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{3}{5}, \cdots, \dfrac{2n}{3n+1}, \ \cdots\right\}$

4. $\{2^{n-1}\} = \{2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2 \ , 4 \ , \cdots, 2^{n-1} \ , \ \cdots\}$

5. $\{\sqrt{n+1}\} = \{\sqrt{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \cdots, \sqrt{n+1}, \ \cdots\}$

6. $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+2}\right\} = \left\{(-1)^{n}\dfrac{n}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{11}, \cdots, (-1)^{n}\dfrac{n}{n^2+2} \ , \ \cdots\right\}$

7. $\{cos\,(n\pi)\} = \{cos\,(n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, \ 1, \ -1, \cdots, (-1)^n, \ \cdots\}$

8. $\left\{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\} = \left\{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \ 0, \ -1, \ 0, \cdots, \dfrac{1-(-1)^n}{2}, \ \cdots\right\}$

نهاية المتتابعة Sequence Limit:

يُقال أنَّ المتتابعة $\{a_n\}$ لها نهاية b وتُكتب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ إذا كانت حدود المتتابعة تقترب من القيمة b عندما تتزايد n بلا حدود.

أمثلة: أوجد نهايات المتتابعات في المثال السابق إن كانت موجودة.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ تساوي الصفر، لذا تكون النهاية موجودة.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}\right)$ غير موجودة لأن القيمة المطلقة للحد النوني تقترب من $\dfrac{1}{2}$ عندما $n\to\infty$ ولكن الإشارة مترددة.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+1}$ تساوي $\dfrac{2}{3}$ لذا تكون النهاية موجودة.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{n-1}\right)$ تؤول إلى ∞ لذا تكون النهاية غير موجودة.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}\right)$ تؤول إلى ∞ لذا تكون النهاية غير موجودة.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^{n}\dfrac{n}{n^2+2}\right)$ تساوي الصفر لأن نهاية القيمة المطلقة للحد النوني تساوي الصفر، لذا تكون النهاية موجودة.
7. المتتابعات في 7 و8 تكون غير موجودة لأن حدودها متناوبة.

تقارب وتباعد المتتابعات Convergence and Divergence of Sequences

تعريف: يُقال أنَّ المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة **Convergent** إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجودة، و يُقال أنها **متباعدة Divergent** إذا كانت غير متقاربة.

في الأمثلة السابقة تكون المتتابعات رقم 1، 3 و6 هي متتابعات متقاربة، أما بقية المتتابعات فهي متباعدة.

قوانين نهاية المتتابعات المتقاربة:

إذا كانت المتتابعتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقاربتين، و c ثابت فإنَّ

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n)$.
2. $\lim_{n\to\infty}(c\ a_n) = c \lim_{n\to\infty}(a_n)$.
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \times \lim_{n\to\infty}(b_n)$.
4. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$ $\textit{if} \lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$.
5. $\lim_{n\to\infty}((a_n)^m) = \left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)^m$ $\textit{if}\ m > 0\ \textit{and}\ a_n > 0$.
6. $\textit{if}\ \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0,\ \textit{then}\ \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$
7. $\textit{if}\ a_n \le c_n \le b_n\ \forall n > n_0,\ \textit{and}\ \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = d$

   $\textit{then}\ \lim_{n\to\infty}(a_n) = d$

المتسلسلات *Series*:

المجموع اللانهائي لحدود المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$،يُسمى بالمتسلسلة أو بالمتسلسلة اللانهائية **Infinite Series** ويُكتب على الصورة $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$.

ترميز: يُرمز للمتسلسلة $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ بالرموز $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ أو Σa_k.

أمثلة لمتسلسلات:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{k}{k+1} + \cdots$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-2)^{k-1}=1-2+4+\cdots+(-2)^{k-1}+\cdots$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-5)=-3-2-1+0+1+2+\cdots+(2k-5)+\cdots$

المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة ومجموع المتسلسلة:

لتكن $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ متسلسلة، يُسمى مجموع الحدود من أول حد حتى الحد ذو الترتيب n بالمجموع الجزئي النوني ويُرمز له بالرمز S_n.

أمثلة: أوجد المجموع الجزئي النوني للمتسلسلات التالية...

1. $\sum_{k=1}^{\infty}k=1+2+3+\cdots+k+\cdots$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-1}+\cdots$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\cdots$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}k^2=1+4+9+\cdots+k^2+\cdots$

الحل:

1. $S_n=1+2+3+\cdots+n$

$$2S_n=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\cdots+(n+1)$$

$$\therefore 2S_n = (1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n) = n\times(n+1)$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}\times(n+1)$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} + \cdots$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\therefore S_n - r\times S_n = a - ar^n \Rightarrow S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

باستخدام الكسور الجزئية $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+ \\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \Rightarrow 3k^2 = (k+1)^3 - k^3 - 3k - 1$$

$$3S_n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3 - 3k - 1] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\times\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\times\frac{n(n+1)}{2} - n$$

لكن $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{p=2}^{n+1} p^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 =$

$$= \left(\sum_{k=2}^{n} k^3 + (n+1)^3\right) - \left(1 + \sum_{k=2}^{n} k^3\right) = (n+1)^3 - 1$$

$$3S_n = (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n$$

$$= (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تقارب المتسلسلة ومجموعها Series convergence and Sum:

لتكن $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة مجموع النوني S_n إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تقاربية وكانت $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ حيث $S \in \mathbb{R}$ ، عندئذٍ يُقال أنَّ المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ تقاربية ويكون مجموعها هو S. إذا لم تتقارب المتسلسلة فهي متباعدة.

مثال: أدرس تقارب المتسلسلات في المثال السابق:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + \cdots$

$$S_n = \frac{n}{2} \times (n+1), \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \times (n+1) = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} + \cdots$ المتسلسلة الهندسية

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} (1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & if \ \ |r| < 1 \\ Not \ \ Exist & if \ \ |r| \geq 1 \end{cases}$$

$\therefore$ المتسلسلة تكون تقاربية إذا كانت $|r| < 1$ وتباعديه فيما عدا ذلك.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},\ S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

$\therefore$ المتسلسلة تكون تقاربية.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + k^2 + \cdots$

$$S_n = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6},\ S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة تكون تباعدية.

الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة Necessary Condition for Convergence of Series:

لتكن $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة، فإنَّ الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة هو $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

البرهان: إذا كانت المتسلسلة تقاربية يكون عندئذٍ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = S$ حيث $S \in \mathbb{R}$ هو مجموع المتسلسلة

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} (S_n) - \lim_{n \to \infty} (S_{n-1}) = S - S = 0\,.$$

لازمة corollary: لتكن $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة تحقق الشرط $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ فإنَّ المتسلسلة تباعديه.

أمثلة: أدرس تقارب المتسلسلات التالية...

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (المتسلسلة التوافقية Harmonic Series)

الحل:

1. $a_n=\frac{n}{n+1}, \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة.

2. $a_n=\frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

المتسلسلة تحقق الشرط اللازم للتقارب ولكن ذلك لا يثبت تقاربها أو تباعدها

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\therefore S_{2n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}, \ \Rightarrow S_{2n}>1+\frac{n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}>1+\frac{\infty}{2}, \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n}\to\infty$$

$\therefore$ المتسلسلة التوافقية تتباعد على الرغم من أنها تحقق الشرط اللازم للتقارب.

التقارب المطلق Absolute Convergence:

تعريف التقارب المطلق: يُقال أنَّ المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ مطلقة التقارب إذا كانت متسلسلة القيم لحدودها متقاربة. أي إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ متقاربة.

نظرية: كل متسلسلة مطلقة التقارب هي متسلسلة متقاربة.

التقارب الشرطي Conditional Convergence:

تعريف التقارب الشرطي: يُقال أنَّ المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ تتقارب شرطياً إذا كانت متقاربة و متسلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة.

اختبارات التقارب للمتسلسلات:

1. **اختبار النسبة Ratio Test**: لتكن $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة

بحيث $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$

إذا كانت $k < 1$ تكون المتسلسلة تكون مطلقة التقارب وبالتالي فهي متقاربة.

أما إذا كانت $k > 1$ تكون المتسلسلة تباعديه

أما إذا كانت $k = 1$ فإنَّ الاختبار يفشل في تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.

2. **اختبار الجذر النوني Ratio Test**: لتكن $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة بحيث

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$$

إذا كانت $k < 1$ تكون المتسلسلة تكون مطلقة التقارب وبالتالي فهي متقاربة.

أما إذا كانت $k > 1$ تكون المتسلسلة تباعديه

أما إذا كانت $k = 1$ فإنَّ الاختبار يفشل في تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.

3. **اختبار التكامل Integral Test**: لتكن $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ متسلسلة بحيث $a_n = f(n)$ ، إذا كانت الدالة $f(n)$ موجبة، مستمرة وتناقصية على الفترة $[1 , \infty)$ عندئذٍ تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان التكامل $\lim_{r \to \infty} \int_1^r f(x)dx$ محدود القيمة وتكون المتسلسلة متباعدة إذا كانت التكامل غير محدود القيمة.

إذا كانت $k < 1$ تكون المتسلسلة تكون مطلقة التقارب وبالتالي فهي متقاربة.

أما إذا كانت $k > 1$ تكون المتسلسلة تباعديه

أما إذا كانت $k=1$ فإنَّ الاختبار يفشل في تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.

4. **اختبار لايبنز للمتسلسلات المتناوبة الإشارة Leibniz Test:** لتكن

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$ متسلسلة متناوبة الإشارة. إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ موجبة وتناقصية و $\lim_{n\to\infty} a_n$ فإنَّ المتسلسلة تتقارب.

أمثلة: أدرس تقارب المتسلسلات التالية ...

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^3+1}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^k}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

الحل:

1. باستخدام اختبار النسبة $a_n = \frac{1}{n^p}$، $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^p \to 1$$

إذن يفشل اختبار النسبة في تحديد التقارب أو عدمه.

باستخدام اختبار التكامل $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ، نتحقق من الشروط الثلاثة للدالة $f(x)$

إذا كانت $p>0$ و $p\neq 1$ تكون الدالة موجبة، مستمرة وتناقصية على الفترة $[1,\infty)$

$$\lim_{r\to\infty}\int_1^r f(x)\,dx=\lim_{r\to\infty}\int_1^r\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{r\to\infty}\int_1^r x^{-p}\,dx=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right)_{x=1}^{x=r}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{r^{p-1}}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & if\ \ p>1\\ \infty & if\ \ 0<p<1\end{cases}$$

لذا تكون المتسلسلة متقاربة إذا كانت $p>1$ ، ومتباعدة إذا كانت $0<p<1$

أما إذا كانت $p=1$ فإنَّ المتسلسلة تكون هي المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة.

وفي حالة $p\leq 0$ تكون المتسلسلة متباعدة لعدم تحقيقها للشرط اللازم للتقارب إذ أنَّ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\infty & if\ \ p<0\\ 1 & if\ \ p=1\end{cases}$

الخلاصة هي أنَّ المتسلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ تكون متقاربة إذا كانت $p>1$ ومتباعدة عدا ذلك.

2. المتسلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ تكون متقاربة وهذه نتيجة مباشرة من السؤال السابق.

3. المتسلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^3+1}$ ، $a_n=\frac{2^n}{n^3+1}$ إذن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3+1}\times\frac{n^3+1}{2^n}=2\times\frac{1+\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}$$

باستخدام اختبار النسبة $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\times\frac{1+\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}=2>1$

لذا تكون المتسلسلة متباعدة.

4. المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ، $a_n=\frac{1}{n!}$ إذن $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{n!}{n+1!}=\frac{1}{n+1}$

باستخدام اختبار النسبة $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$

لذا تكون المتسلسلة متقاربة.

5. المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^k}$ ، $a_n=\frac{2^n}{n^n}$ إذن $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}=\frac{2}{n}$

باستخدام اختبار الجذر النوني $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1$

لذا تكون المتسلسلة متقاربة.

6. المتسلسلة متناوبة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$ المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

موجبة وحدودها متناقصة و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

إذن تحقق شروط اختبار لايبنز للمتسلسلات المتناوبة، لذا تكون المتسلسلة متقاربة.

أمثلة: أدرس التقارب الشرطي والمطلق والتباعد للمتسلسلات التالية ...

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}$

الحل:

1. المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ متقاربة كما ورد بالمثال السابق، أما متسلسلة القيم المطلقة لحدودها فهي المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة، لذا تكون المتسلسلة شرطية التقارب.
2. المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}$ باستخدام اختبار النسبة $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}<1$ ، إذن المتسلسلة مطلقة التقارب.

متسلسلات القوى Power Series: متسلسلة القوى حول النقطة $x=a$ هي المتسلسلة على الصورة

$f(x)=c_0+c_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots+C_n(x-a)^n+\cdots$ حيث x متغيّر حقيقي

متسلسلة القوى تتقارب تقارباً مطلقاً في فترة مركزها النقطة $x=a$ ونصف قطرها R حيث $R\geq 0$ ، أي فترة على الصورة $|x-a|<R$ أي $a-R<x<a+R$ ويُسمى العدد R بنصف قطر التقارب للمتسلسلة.

يتم تحديد قيمة نصف قطر التقارب باستخدام اختبارات التقارب المطلق.

أمثلة: أوجد فترة تقارب المتسلسلات التالية ...

1. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{2^k}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\;x^k$

الحل:

1. باستخدام اختبار النسبة $a_n=\frac{(x-1)^n}{2^n}$ إذن $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x-1|}{2}$ ، تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ أي أنَّ $\frac{|x-1|}{2}<1$ أو $|x-1|<2$

يكون نصف قطر التقارب هو $R=2$ وفترة التقارب هي $|x-1|<2$ أي $-2<x-1<2$

أو $-1<x<3$.

2. باستخدام اختيار النسبة $a_n = \frac{x^n}{n!}$ إذن $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$ ، تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$ أي أنَّ المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x الحقيقية، ويكون نصف قطر التقارب هو $R = \infty$

.

3. باستخدام اختيار النسبة $a_n = (-1)^n x^n$ إذن $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$ ، تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ أي $|x| < 1$ ، أي أنَّ نصف قطر التقارب $R = 1$ وفترة التقارب هي $(-1,\ 1)$.

مفكوك تايلور Taylor Expansion:

لتكن $y = f(x)$ دالة لها مشتقات من الرتبة الأولى وحتى الرتبة $n+1$ حيث $n \in \mathbb{N}$ في فترة تحوي النقطة $x = a$.

المطلوب إيجاد كثيرة حدود $y = P_n(x)$ من درجة لا تزيد عن n بحيث تتشارك الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود $P_n(x)$ في القيمة وكذلك في قيم المشتقات من الرتبة الأولى حتى الرتبة n عند النقطة $x = a$. أي أنَّ

(1) $f(a) = P_n(a)$

(2) $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a) \quad k = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n$

نفرض أنَّ كثيرة الحدود $P_n(x)$ على الصورة

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n$$

يكفي الحصول على قيم المعاملات $C_k \ ,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n$ لإيجاد كثيرة الحدود $P_n(x)$

من المعادلة (1) نجد أنَّ $f(a) = P_n(a) = C_0$ إذن $C_0 = f(a)$

من المعادلة (2) يتم إيجاد قيمة المعامل C_k حيث $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, n$

$$f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$$

$$P_n^{(k)}(x) = k!\ C_k + \sum_{r=k+1}^{n} r.(r-1).(r-2)\cdots(r-k+1)C_r(x-a)^{r-k}$$

$$\therefore P_n^{(k)}(a) = k!\ C_k + \sum_{r=k+1}^{n} r.(r-1).(r-2)\cdots(r-k+1)C_r(a-a)^{r-k} = k!\ C_k$$

$$\therefore f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a) = k!\ C_k$$

إذن $C_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ حيث $k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots, n$

وبذلك يكتمل الحصول على كثيرة الحدود $P_n(x)$ و تكون

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{r=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

$$\therefore P_n(x) = f(a) + f^{(1)}(a)\,(x-a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n$$

بفرض أنَّ الدالة $R_n(x)$ هي الفرق بين $f(x)$ و $P_n(x)$ أي أنَّ $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ عندئذٍ

أو $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)\,(x-a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots + + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + R_n(x)$$

تُسمى الدالة $R_n(x)$ بالباقي Remainder عند قيم x التي يكون عندها الباقي $R_n(x)$ مقدار صغير جداً تكون كثيرة الحدود $P_n(x)$ تمثيل تقريبي للدالة $f(x)$.

صيغة لاجرانج للباقي Lagrange Form of the remainder

صيغة لاجرانج للباقي هي $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$ حيث $0 < \theta < 1$

تُسمى الصيغة

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)\,(x-a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

بصيغة مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = a$.

الحالة الخاصة من صيغة تايلور للدالة $f(x)$ عندما $a = 0$ تُسمى يصيغه ماكلورين Maclaurin. أي أنَّ صيغة ماكلورين هي مفكوك تايلور حول النقطة $x = 0$ وهي

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

1) مفكوك ماكلورين للدالة $sin\,(x)$:

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

$f(x)=sin\,(x)$	$f(0)=sin\,(0)=0$
$f^{(1)}(x)=cos\,(x)=sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(1)}(0)=cos\,(0)=1$
$f^{(2)}(x)=-\ sin\,(x)=sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(2)}(0)=-\,sin\,(0)=0$
$f^{(3)}(x)=-\,cos\,(x)=sin\left(x+3\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(3)}(0)=-\,cos\,(0)=-1$
$f^{(4)}(x)=sin\,(x)=sin\left(x+4\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(4)}(0)=sin\,(0)=0$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(k)}(x)=sin\left(x+k\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(k)}(0)=sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 \quad if\ \ k\ \ is\ \ an\ \ Even\\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \quad if\ \ k\ \ is\ \ an\ \ Odd\end{cases}$
$f^{(n+1)}(x)=sin\left(x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(\theta x)=sin\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$

بالتعويض في مفكوك ماكلورين نجد

$$sin(x)=0+(1)x+0+\frac{1}{3!}(-1)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(sin\left(\frac{n\ \pi}{2}\right)\right)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$\therefore sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(sin\left(\frac{n\ \pi}{2}\right)\right)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}sin\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

من الملاحظ أنَّه إذا كانت $n\to\infty$ فإنَّ

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\left|sin\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1}\right|\left|\frac{x}{2}\right|\left|\frac{x}{3}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$$

$$\therefore sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

وهي متسلسلة ماكلورين اللانهائية للدالة $sin(x)$.

2) مفكوك ماكلورين للدالة $cos(x)$:

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

$f(x)=cos(x)$	$f(0)=cos(0)=1$
$f^{(1)}(x)=-sin(x)=cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(1)}(0)=-\ sin(0)=0$
$f^{(2)}(x)=-\ cos(x)=cos\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(2)}(0)=-cos(0)=-1$
$f^{(3)}(x)=sin(x)=cos\left(x+3\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(3)}(0)=sin(0)=0$
$f^{(4)}(x)=cos(x)=cos\left(x+4\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(4)}(0)=cos(0)=1$
. .	. .

.	.
$f^{(k)}(x)=cos\left(x+k\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(k)}(0)=cos\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}} & if\ k\ is\ an\ Even\\ 0 & if\ k\ is\ an\ Odd\end{cases}$
$f^{(n+1)}(x)=cos\left(x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(\theta x)=cos\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$

بالتعويض في مفكوك ماكلورين نجد

$$\cos(x)=1+(0)x+\frac{1}{2!}(-1)x^2+\frac{1}{3!}(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\cos\left(\frac{n\ \pi}{2}\right)\right)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$\therefore cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\cos\left(\frac{n\ \pi}{2}\right)\right)x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

من الملاحظ أنَّه إذا كانت $n\to\infty$ فإنَّ

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\left|cos\left(\theta x+(n+1)\times\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1}\right|\left|\frac{x}{2}\right|\left|\frac{x}{3}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$$

$$\therefore cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

وهي متسلسلة ماكلورين اللانهائية للدالة $cos(x)$.

3) مفكوك ماكلورين لبعض الدوال الهامة: -

سبق وأن تم إثبات النتائج من (1 إلى 6) دون استخدام صيغة ماكلورين (مطلوب إثبات هذه الصيغ باستخدام مفكوك ماكلورين) ...

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
2. $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$

3. $sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1!}$

4. $cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$

5. $if\ \ |x| < 1,\ then\ \ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

6. $if\ \ |x| < 1,\ then\ \ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$

7. $if|x| < 1 < 1,\ then\ \ ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

أمثلة: -

1. أوجد مفكوك تايلور اللانهائي للدالة e^x حول النقطة $x = 2$.

الحل: $f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)\,(x-a) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)\,(x-a)^3 + \cdots + + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\,(x-a)^k + \cdots$

$f(x) = \ \ e^x$	$f(2) = e^2$
$f^{(1)}(x) = e^x$	$f^{(1)}(2) = e^2$
$f^{(2)}(x) = e^x$	$f^{(2)}(2) = e^2$
$f^{(3)}(x) = e^x$	$f^{(3)}(2) = e^2$
$f^{(4)}(x) = e^x$	$f^{(4)}(2) = e^2$
. . .	. . .
$f^{(k)}(x) = e^x$	$f^{(k)}(2) = e^2$

بالتعويض في متسلسلة تايلور ينتج

$$e^{x}=f(2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(2)\,(x-2)^{k}=e^{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2}}{k!}(x-2)^{k}$$

حل آخر: باستخدام مفكوك ماكلورين للدالة e^{x}.

نعلم أنَّ
$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{k}}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

$$\therefore e^{x}=e^{2}e^{x-2}=e^{2}\left(1+(x-2)+\frac{(x-2)^{2}}{2!}+\frac{(x-2)^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x(x-2)^{k}}{k!}+\cdots\right)=$$

$$=e^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2}}{k!}(x-2)^{k}$$

2. أوجد مفكوك تايلور للدالة $\frac{1}{1-x}$ حول النقطة $x=-1$ حيث $-3<x<1$.

الحل:

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)\,(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)\,(x-a)^{2}+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)\,(x-a)^{3}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\,(x-a)^{k}+\cdots$$

$f(x)=\frac{1}{1-x}$	$f(-1)=\frac{1}{2}$
$f^{(1)}(x)=(1-x)^{-2}$	$f^{(1)}(-1)=(1!)(2^{-2})$
$f^{(2)}(x)=2(1-x)^{-3}$	$f^{(2)}(-1)=(2!)\times(2^{-3})$
$f^{(3)}(x)=2\times 3\ \ (1-x)^{-4}$	$f^{(3)}(-1)=(3!)\times(2^{-4})$
$f^{(4)}(x)=2\times 3\times 4\ \ (1-x)^{-5}$	$f^{(4)}(-1)=(4!)\times(2^{-5})$
. . .	. . .
$f^{(k)}(x)=2\times 3\times 4\times\cdots\times k\ \ (1-x)^{-(k+1)}$	$f^{(k)}(-1)=(k!)\times(2^{-(k+1)})$

بالتعويض في متسلسلة تايلور ينتج

$$\frac{1}{1-x}=f(-1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(k!)\times(2^{-(k+1)})(x+1)^{k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(k+1)}}(x-2)^{k}$$

حل آخر: باستخدام مفكوك ماكلورين للدالة $\frac{1}{1-x}$ حيث $|x|<1$

نعلم أنَّ $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$\therefore \frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-x-1}=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$$

$$\therefore |x|<1 \implies -1<x<1 \implies 0<x+1<2 \implies \frac{x+1}{2}<1$$

إذا كانت $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$ تكون $$\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{2^k}$$

$$\therefore \frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{2^{k+1}}\ \ if\ \left|\frac{x+1}{2}\right|<1.$$

مفكوك الدوال الزوجية والفردية

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة زوجية فإنَّ كل معاملات الحدود ذات القوى الفردية في مفكوك ماكلورين تكون صفرية لذا يكون مفكوك الدالة الزوجية على الصورة $f(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$

أما الدالة الفردية فتكون جميع حدودها بقوى فردية في x لأنَّ كل معاملات الحدود ذات القوى الزوجية في مفكوك ماكلورين تكون صفرية لذا يكون مفكوك الدالة الفردية على الصورة

$$f(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

أمثلة:

1. أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=x^3 sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}$$

$$\therefore f(x)=x^{3}sin\left(\frac{x}{2}\right)=x^{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+4}}{2^{2k+1}(2k+1)!}$$

2. أوجد الأربعة حدود الأولى غير الصفرية من مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=(x+1)\ e^{-x^{2}}$.

$$e^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!},\ \ \therefore e^{-x^{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^{2})^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{k!}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{k!}=(x+1)\times\left(1-x^{2}+\frac{x^{4}}{2}+\cdots\right)=1+x-x^{2}-x^{3}+\cdots$$

3. أوجد الخمس حدود الأولى غير الصفرية من مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=\dfrac{\cosh(x)}{1-x}$ في الفترة $(-1,\ 1)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}, cosh(x)=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{2k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k!}$$

$$\forall x\in(-1,\ 1),\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}$$

$$\therefore\ \forall x\in(-1,\ 1),\ f(x)=\frac{cosh(x)}{1-x}=cosh(x)\times\frac{1}{1-x}=$$

$$=\left(1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{2k!}+\cdots\right)(1+x+x^{2}+\cdots+x^{k}+\cdots)=$$

$$=1+x+\left(\frac{1}{2!}+1\right)x^{2}+\left(1+\frac{1}{2!}\right)x^{3}+\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)x^{4}+\cdots=$$

$$=1+x+\frac{3}{2}x^{2}+\frac{3}{2}x^{3}+\frac{37}{24}x^{4}+\cdots.$$

4. أوجد الثلاثة حدود الأولى غير الصفرية من مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=tan\ (x)$.

الحل: من الصعوبة بمكان إيجاد المفكوك بواسطة صيغة ماكلورين، لذا يُمكن اتباع الطريقة التالية..

بما أنَّ الدالة $f(x)=tan(x)$ دالة فردية إذن يكون المفكوك على الصورة

$$tan(x)=ax+bx^3+cx^5+\cdots$$

$$\therefore sin(x)=(a+bx^3+cx^5+\cdots)\times cos(x)$$

$$\therefore x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=(ax+bx^3+cx^5+\cdots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)=$$

$$=ax+\left(b-\frac{a}{2!}\right)x^3+\left(\frac{a}{4!}-\frac{b}{2!}+c\right)x^5+\cdots$$

وبمقارنة المعاملات للحدود الثلاثة الأولى تنتج المعادلات الخطية التالية

$$a=1$$

$$b-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{6},\ \Rightarrow b=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{24}-\frac{b}{2}+c=\frac{1}{120},\Rightarrow c=\frac{1}{120}-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$$

$$\therefore tan(x)=x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{15}x^3+\cdots$$

5. أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=tan^{-1}(x)$ ، ومن ثمَّ أوجد فترة تقارب المفكوك.

$$f(x)=tan^{-1}(x)=\int_0^x \frac{d}{du}(tan^{-1}(u))du=\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$$

في الفترة $u^2<1$ أي $|u|<1$ تكون $\frac{1}{1+u^2}=1-u^2+u^4+\cdots+(-1)^k u^{2k}+\cdots$

$$\therefore f(x)=tan^{-1}(x)=\int_0^x (1-u^2+u^4+\cdots+(-1)^k u^{2k}+\cdots)\ du=$$

$$=\left(\left(u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^k u^{2k+1}}{2k+1}+\cdots\right)\right)_{u=0}^{x}=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots\right)$$

من الواضح أنَّ فترة التقارب هي $|x|<1$ وذلك لأنَّ $|u|<1$ ولكن يُمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام اختبار النسبة.

$$a_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x^2|\times\left|\frac{2n+1}{2n+3}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x^2|\times\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}\right|=|x^2|$$

لذا يكون المفكوك متقارب إذا كانت $|x^2|<1$ أي $|x|<1$.

تمارين

1. أدرس تقارب المتتابعات التالية

a. $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$　b. $\{3n-7\}$　c. $\left\{\frac{1}{5^n}\right\}$

d. $\left\{\frac{n+1}{3^n}\right\}$　e. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$　f. $\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}$

g. $\left\{\frac{\sin(n)}{2n+1}\right\}$　h. $\left\{\frac{1}{e^n+1}\right\}$

2. أحسب المجموع الجزئي النوني للمتسلسلات التالية.ومن ثمَّ أوجد مجموعها إن وجِد ...

a. $\sum_{k=1}^{\infty}(3k-1)$　b. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$　c. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{k-3}}{k!}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty}k\times 2^{-k}$　e. $\sum_{k=1}^{\infty}(k+2^{-(k+1)})$　f. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

g. $\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)^2$　h. $\sum_{k=1}^{\infty}k^3$　i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

3. أدرس تقارب المتسلسلات التالية ...

a. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k+3}$　　b. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{k}}{(2k-1)!}$　　c. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\pi)^{k}}{(2k)!}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty}k\times 2^{-k}$　　e. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3k}}$　　f. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}+k+1}$

g. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{ln(k)}$　　h. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$　　i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^{2}-1}$

4. أوجد مفكوك ماكلورين للدوال التالية مع تحديد فترة التقارب...

a. $sin(3x)$　　b. $(x+1)e^{x}$　　c. $\pi^{x}e^{2x-3}$

d. $cosh^{2}(x)$　　e. $sin(x)+sinh(x)$　　f. $\frac{1}{x+3}$

3. أوجد مفكوك تايلور اللانهائي للدالة $\frac{e^{-x}}{x-1}$ حول النقطة $x=1$ ثمَّ أوجد فترة تقاربه.

4. أوجد مفكوك تايلور اللانهائي للدالة $e^{x^{2}-6x+1}$ حول النقطة $x=3$، ثمَّ أوجد فترة تقاربه.

5. أوجد مفكوك تايلور اللانهائي للدالة $\frac{1}{2-x^{2}-2x}$ حول النقطة $x=-1$، ثمَّ أوجد فترة تقاربه.