الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

(1) دالة الجيب الزائدي Hyperbolic Sine Function

تُعرَّف دالة الجيب الزائدي بالصورة $y = sinh\,(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ ، من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D = \mathbb{R}$ ، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^{x}$

$$\therefore y = \frac{u - \frac{1}{u}}{2},\ u > 0,\ u^{2} - 2y\,u - 1 = 0$$

$$\therefore u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^{2} + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^{2} + 1}$$

بما أنَّ $\sqrt{y^{2}+1} > y$ و $u > 0$ نجد أنَّ $u = y + \sqrt{y^{2}+1}$ ، إذن تكون $u > 0$ لكل قيم y الحقيقية، لذلك يكون مدى الدالة هو $D = \mathbb{R}$.

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة الجيب الزائدي:**

(1) دالة الجيب الزائدي هي دالة فردية، وذلك لأنَّ

$$sinh\,(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = -\,sinh\,(x)$$

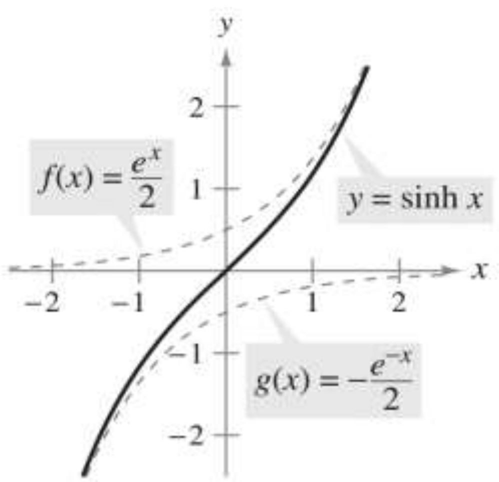
(2) $sinh\,(0) = \dfrac{e^{0} - e^{0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} sinh\,(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \to \dfrac{0 - \infty}{2} \to -\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} sinh\,(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \to \dfrac{\infty - 0}{2} \to \infty$

(5) إذا كانت x كبيرة فإنَّ $e^{-x} \to 0$ لذا تكون $sinh\,(x) \to \dfrac{e^{x}}{2}$.

(6) إذا كانت x صغيرة فإنَّ $e^{x} \to 0$ لذا تكون $sinh\,(x) \to -\dfrac{e^{-x}}{2}$.



مُخطط الدالة $y = sinh\,(x)$

(2) دالة جيب التمام الزائدي Hyperbolic Cosine Function

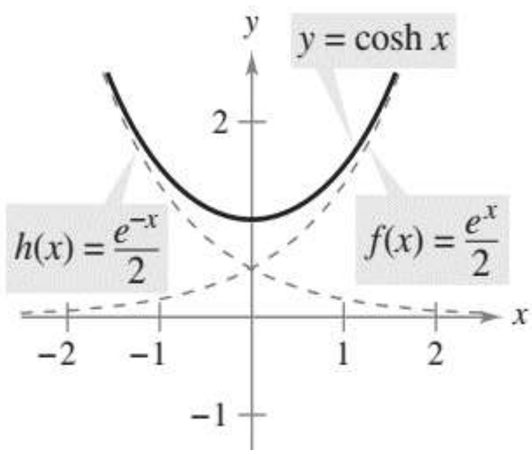
تُعرَّف دالة جيب التمام الزائدي بالصورة $y = cosh\,(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$، من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D = \mathbb{R}$، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^x$

$$\therefore y = \frac{u + \frac{1}{u}}{2},\;\; u > 0,\, u^2 - 2yu + 1 = 0$$

$$\therefore u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

تكون $u > 0$ ، إذا كانت $y > 0$ و $|y| \geq 1$ لذلك يكون مدى الدالة هو $D = [1,\, \infty)$.

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة جيب التمام الزائدي:**



مُخطط الدالة $y = cosh\,(x)$

(1) دالة جيب التمام الزائدي هي دالة زوجية، وذلك لأنَّ

$$cosh\,(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\,(x)$$

(2) $cosh\,(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} cosh\,(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \to \dfrac{0 + \infty}{2} \to \infty$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} cosh\,(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \to \dfrac{\infty + 0}{2} \to \infty$

(5) إذا كانت x كبيرة فإنَّ $e^{-x} \to 0$ لذا تكون $cosh\,(x) \to \dfrac{e^x}{2}$.

(6) إذا كانت x صغيرة فإنَّ $e^x \to 0$ لذا تكون $cosh\,(x) \to \dfrac{e^{-x}}{2}$.

(3) دالة الظل الزائدي Hyperbolic Tangent Function

تُعرَّف دالة الظل الزائدي بالصورة $tanh\,(x) = \dfrac{sinh\,(x)}{cosh\,(x)}$،

$$tanh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

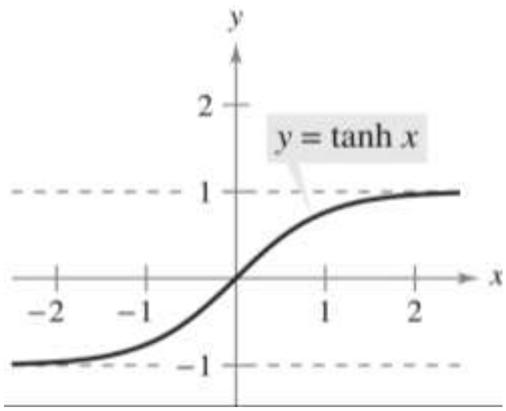
من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D = \mathbb{R}$، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^x$

$$\therefore y=\frac{u^2-1}{u^2+1},\ u>0\,,u^2=\frac{y+1}{1-y},\quad \therefore u=\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

تكون $u>0$ إذا كان $y+1>0$ و $1-y>0$ أي أنَّ $y>-1$ و $y<1$ أذن $-1<y<1$

أو $y+1<0$ و $1-y<0$ أي أنَّ $y<-1$ و $y>1$ وهذا غير ممكن.

إذن $-1<y<1$ ، لذلك يكون مدى الدالة هو $D=(-1,\ 1)$.



مُخطط الدالة $y=tanh\,(x)$

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة الظل الزائدي:**

(1) دالة الظل الزائدي هي دالة فردية، وذلك لأنَّ

$$tanh\,(-x)=\frac{-sinh\,(x)}{cosh\,(x)}=-\ tanh\,(x)$$

(2) $$tanh\,(0)=\frac{sinh\,(0)}{cosh\,(0)}=\frac{0}{1}=0$$

(3) $$\lim_{x\to-\infty} tanh\,(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\to\frac{0-1}{0+1}\to-1$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty} tanh\,(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\to\frac{1-0}{1+0}\to1$$

(5) إذا كانت x كبيرة فإنَّ $tanh\,(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\to\frac{e^x-0}{e^x+0}\to\frac{e^x}{e^x}\to1$.

(6) إذا كانت x صغيرة فإنَّ $tanh\,(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\to\frac{0-e^{-x}}{0+0}\to\frac{-e^{-x}}{e^{-x}}\to-1$.

(4) دالة قاطع التمام الزائدي Hyperbolic Cosecant Function

تُعرَّف دالة قاطع التمام الزائدي بالصورة

$$y=csch\,(x)=\frac{1}{sinh\,(x)}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u=e^x$

$$\therefore y=\frac{2}{u-\frac{1}{u}}=\frac{2u}{u^2-1},\ u>0$$

$$yu^2 - 2u - y = 0$$

وذلك يقتضي أنَّ $y \neq 0$، عندئذٍ تكون

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{y^2+1}}{y}$$

بما أنَّ $u > 0$:

(1) إما أن تكون $y > 0$ و $1 \pm \sqrt{y^2+1} > 0$

a) إذن تكون $y > 0$ و $1 + \sqrt{y^2+1} > 0$ وهذا يقتضي أنَّ $y \in \mathbb{R}^+$

b) أو $y > 0$ و $1 - \sqrt{y^2+1} > 0$ وهذا غير ممكن، إذن $y \in \mathbb{R}^+$

(2) أو $y < 0$ و $1 \pm \sqrt{y^2+1} < 0$

a) إذن تكون $y < 0$ و $1 + \sqrt{y^2+1} < 0$ وهذا غير ممكن.

b) أو $y < 0$ و $1 - \sqrt{y^2+1} < 0$ وذلك يقتضي أنَّ $y \in \mathbb{R}^-$

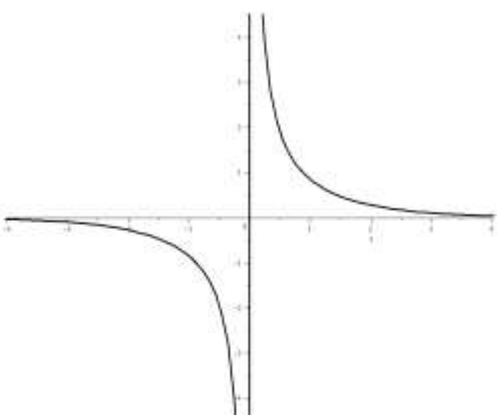
إذن $y \in \mathbb{R}^-$

لذا يكون مدى الدالة هو $R = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} - \{0\}$.

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة قاطع التمام الزائدي:**

(1) دالة قاطع التمام الزائدي هي دالة فردية، وذلك لأنَّ

$$csch(-x) = \frac{1}{sinh(-x)} = \frac{1}{-\ sinh(x)} = -\ csch(x)$$



مُخطط الدالة $y = csch(x)$

$$\lim_{x \to -0} csch(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{sinh(-h)} = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{sinh(h)} \to -\frac{1}{0} \to -\infty$$

(2) $$\lim_{x \to +0} csch(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{sinh(h)} \to \frac{1}{0} \to +\infty$$

(3) $$\lim_{x \to -\infty} csch(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} \to \frac{2}{0-\infty} \to -0$$

(4) $$\lim_{x \to \infty} csch(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} \to \frac{2}{\infty - 0} \to +0$$

(5) دالة القاطع الزائدي Hyperbolic Secant Function

تُعرَّف دالة القاطع الزائدي بالصورة $y = sech\,(x) = \dfrac{1}{cosh\,(x)} = \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$، من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D=\mathbb{R}$، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u=e^{x}$

$$\therefore y = \frac{2}{u+\frac{1}{u}} = \frac{2u}{u^2+1},\ u>0\,,\, yu^2-2u+y=0$$

وذلك يقتضي أنَّ $y\neq 0$، عندئذٍ تكون

$$u=\frac{2\pm\sqrt{4-4y^2}}{2y}=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$$

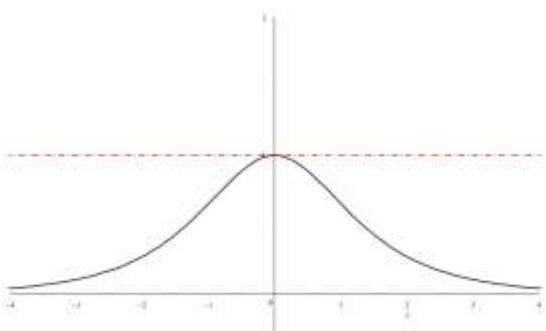
بما أنَّ $u>0$:

(1) إما أن تكون $y>0$ و $1\pm\sqrt{1-y^2}>0$

أي أنَّ $y>0$ و $y^2\leq 1$ أي $y>0$ و $-1\leqslant y\leqslant 1 \Leftarrow y\in(0,1]$.

(2) أو $y<0$ و $1\pm\sqrt{1-y^2}<0$ وذلك غير ممكن

لذا يكون مدى الدالة هو $R=(0,\ 1]$.



مُخطط الدالة $y = sech\,(x)$

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة القاطع الزائدي:**

(1) دالة قاطع التمام الزائدي هي دالة زوجية، وذلك لأنَّ

$$sech\,(-x)=\frac{1}{cosh\,(-x)}=\frac{1}{cosh\,(x)}= sech\,(x)$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} csch\,(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{cosh\,(x)}=\dfrac{1}{1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty} sech\,(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{cosh\,(x)}\to\dfrac{2}{\infty}\to +0$

(4) $\lim\limits_{x\to \infty} sech\,(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{cosh\,(x)}\to\dfrac{2}{\infty}\to +0$

(6) دالة ظل التمام الزائدي Hyperbolic Cotangent Function

تُعرَّف دالة ظل التمام الزائدي بالصورة $y = coth(x) = \dfrac{cosh(x)}{sinh(x)}$

$$coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

من الواضح أنَّ مجال تعريف الدالة هو $D = \mathbb{R} - \{0\}$، لتحديد مدى الدالة نقوم بإجراء التعويض $u = e^{x}$

$$\therefore y = \frac{(e^{x})^{2} + 1}{(e^{x})^{2} - 1} = \frac{u^{2} + 1}{u^{2} - 1},\ u > 0,\ u^{2} = \frac{y + 1}{y - 1},\quad \therefore u = \sqrt{\frac{y + 1}{y - 1}}$$

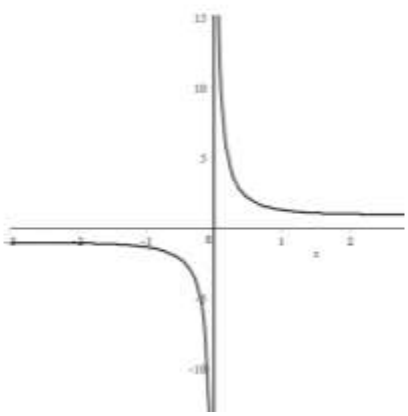
$u > 0$ تقتضي أنَّ

(1) $y + 1 > 0$ و $y - 1 > 0$ أي $y > -1$ و $y > 1$ لذا $y > 1 \Leftarrow y \in (1, \infty)$

(2) أو $y + 1 < 0$ و $y - 1 < 0$ أي $y < -1$ و $y < 1$ أذن $y < -1 \Leftarrow y \in (-\infty, -1)$

لذلك يكون مدى الدالة هو $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- **بعض الخصائص التحليلية لدالة ظل التمام الزائدي:**



مُخطط الدالة $y = coth(x)$

(1) دالة ظل التمام الزائدي هي دالة فردية، وذلك لأنَّ

$$coth(-x) = \frac{cosh(-x)}{sinh(-x)} = \frac{cosh(x)}{-\ sinh(x)} = -\ coth(x)$$

(2) $\lim\limits_{x \to -0} coth(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{tanh(-h)} \to -\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{tanh(h)} \to -\dfrac{1}{0} \to -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +0} coth(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{tanh(h)} \to \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{tanh(h)} \to \dfrac{1}{0} \to \infty$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} coth(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \to \dfrac{0 + 1}{0 - 1} \to -1$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} coth(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \to \dfrac{1 + 0}{1 - 0} \to 1$

- **متطابقات الدوال الزائدية:**

(1) لأي عدد حقيقي x تكون $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$.

الإثبات:

$$\text{R.H.S} = cosh^2(x) - sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \text{L.H.S}$$

المتطابقات من (2) إلى (4) هي نتيجة مباشرة من المتطابقة (1).

(2) لأي عدد حقيقي x تكون $cosh^2(x) = 1 + sinh^2(x)$، $sinh^2(x) = cosh^2(x) - 1$

(3) لأي عدد حقيقي x تكون $1 - tanh^2(x) = sech^2(x)$.

(4) لأي عدد حقيقي $x \neq 0$ تكون $coth^2(x) - 1 = csch^2(x)$

(5) لأي عدد حقيقي x تكون $cosh(x) + sinh(x) = e^x$

الإثبات:

$$cosh(x) + sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

(6) لأي عدد حقيقي x تكون $cosh(x) - sinh(x) = e^{-x}$

- **متطابقات الدوال الزائدية لمجموع أو فرق عددين:**

لأي عددين حقيقيين a و b يكون ...

(1) $sinh(a+b) = sinh(a)cosh(b) + cosh(a)sinh(b)$.

الإثبات:

$$sinh(a+b) = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2} = \frac{e^a e^b + e^a e^{-b} - e^a e^{-b} - e^{-a} e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^a(e^b + e^{-b}) - e^{-b}(e^a + e^{-a})}{2} = e^a cosh(b) - e^{-b} cosh(a) =$$

$$=(\cosh(a)+\sinh(a))\times\cosh(b)-(\cosh(b)-\sinh(b))\times\cosh(a)=$$

$$=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(b)\cosh(a)=$$

$$=\sinh(a)\cosh(b)+\sinh(b)\cosh(a).$$

(2) $\sinh(a-b)=\sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\sinh(b)$

الإثبات:

$$\sinh(a-b)=\sinh(a+(-b))=\sinh(a)\cosh(-b)+\cosh(a)\sinh(-b)=$$

$$=\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)(-\sinh(b))=\sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\sinh(b)$$

(3) $\cosh(a\pm b)=\cosh(a)\cosh(b)\pm\sinh(a)\sinh(b)$

(4) $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh(x)\pm\tanh(y)}{1\mp\tanh(x)\tanh(y)}$

- **متطابقات الدوال الزائدية لضعف العدد:**

لأي عدد حقيقي x ...

(1) $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$

(2) $\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\cosh^2(x)-1=2\sinh^2(x)+1$

(3) $\tanh(2x)=\dfrac{2\tanh(x)}{1-\tanh^2(x)}$

- **اشتقاق الدوال الزائدية:**

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sinh(x))=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(e^x-e^{-x})=\dfrac{1}{2}(e^x-(-e^{-x}))=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\cosh(x))=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(e^x+e^{-x})=\dfrac{1}{2}(e^x+(-e^{-x}))=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x).$

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)=\frac{\cosh(x)\times\cosh(x)-\sinh(x)\times\sinh(x)}{\cosh^2(x)}=$$

(3) $$=\frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}=\frac{1}{\cosh^2(x)}=\operatorname{sech}^2(x).$$

(4) $\frac{d}{dx}(csch(x)) = \frac{d}{dx}((sinh(x))^{-1}) = -sinh(x)^{-2} \times cosh(x) =$

$= -csch(x)coth(x)$

(5) $\frac{d}{dx}(sech(x)) = \frac{d}{dx}((cosh(x))^{-1}) = -cosh(x)^{-2} \times sinh(x) =$

$= -sech(x)tanh(x)$

(6) $\frac{d}{dx}(coth(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{cosh(x)}{sinh(x)}\right) = \frac{sinh(x) \times sinh(x) - cosh(x) \times cosh(x)}{sinh^2(x)} =$

$$= \frac{sinh^2(x) - cosh^2(x)}{sinh^2(x)} = \frac{-1}{sinh^2(x)} = -csch^2(x)$$

إذا كانت $u(x)$ دالة في x، باستخدام تفاضل دالة الدالة نحصل على ...

(1) $\frac{d}{dx}(sinh(u)) = cosh(u) \times \frac{du}{dx}$

(2) $\frac{d}{dx}(cosh(u)) = sinh(u) \times \frac{du}{dx}$.

(3) $\frac{d}{dx}(tanh(u)) = sech^2(u) \times \frac{du}{dx}$.

(4) $\frac{d}{dx}(csch(u)) = -csch(u)coth(u) \times \frac{du}{dx}$.

(5) $\frac{d}{dx}(sech(u)) = -sech(u)tanh(u) \times \frac{du}{dx}$.

(6) $\frac{d}{dx}(coth(u)) = -csch^2(u) \times \frac{du}{dx}$.

أمثلة:

(1) أوجد حلول المعادلة $sinh(x) + 2cosh(x) = 6$

$$sinh(x) + 2cosh(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + e^x + e^{-x} = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}=6\ \Rightarrow 3(e^{x})^{2}-12\ (e^{x})+1=0$$

$$\therefore\ \ e^{x}=\frac{12\pm\sqrt{144-12}}{6}=\frac{12\pm\sqrt{132}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}>0\Rightarrow x=ln\left(\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}\right)$$

(2) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية ...

I. $y=cosh\,(2x)\,sinh\,(x)$

$$\frac{dy}{dx}=cosh\,(2x)\,cosh\,(x)+2sinh\,(x)\,sinh\,(2x)$$

II. $y=tanh\left(\frac{2x}{1-x^{2}}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=sech^{2}\left(\frac{2x}{1-x^{2}}\right)\times\frac{(1-x^{2})\,(2)-2x\,(-2x)}{(1-x^{2})^{2}}=\frac{2\,(1+x^{2})\,sech^{2}\left(\frac{2x}{1-x^{2}}\right)}{(1-x^{2})^{2}}=$$

$$=\frac{2\,(1+x^{2})}{(1-x^{2})^{2}\ \ cosh^{2}\left(\frac{2x}{1-x^{2}}\right)}$$

III. $y=sech\,(csch\,(x))$

$$\frac{dy}{dx}=-sech\,(csch\,(x))\,tanh\,(csch\,(x))\times-csch\,(x)\,coth\,(x)=$$

$$=\frac{cosh\,(x)\,sinh\,(csch\,(x))}{sinh^{2}\,(x)\,cosh^{2}\,(csch\,(x))}$$

(3) إذا كانت $y=ln\left(\sqrt{\frac{1+tanh\,(x)}{1-tanh\,(x)}}\right)$ أثبت أنَّ $\frac{dy}{dx}=1$

$$y=ln\left(\sqrt{1+tanh\,(x)}\right)-ln\left(\sqrt{1-tanh\,(x)}\right)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}\left(ln\,(1+tanh\,(x))-ln\,(1-tanh\,(x))\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{sech^{2}x}{1+tanh\,(x)}+\frac{sech^{2}x}{1-tanh\,(x)}\right)=\frac{sech^{2}x}{2}\left(\frac{2}{1-tanh^{2}\,(x)}\right)=\frac{sech^{2}x}{sech^{2}x}=1$$

- **الدوال الزائدية كمتسلسلات لانهائية:**

نعلم مسبقاً أنَّ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + e^x = 1 + x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

بالمثل لكل $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

الآن نستطيع أن نكتب

$$cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots\right] - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^k}{k!} + \cdots\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \cdots + \frac{2x^{2k}}{2k!} + \cdots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots$$

$$\therefore cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k!}$$

بطريقة مشابهة نحصل على النتيجة التالية ...

$$sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

- **أمثلة:**

(1) أحسب النهايات التالية ...

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinh(\alpha x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinh(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\alpha x + \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^5\, x^5}{5!} + \cdots\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x\left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{5!} + \cdots\right)}{x} =$$

$$= \alpha\,\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{5!} + \cdots\right) = \alpha\,.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh(\alpha x)-1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(\alpha x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1+\dfrac{\alpha^2x^2}{2!}+\dfrac{\alpha^4x^4}{4!}+\cdots\right)-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\left(\dfrac{\alpha^2}{2!}+\dfrac{\alpha^4x^2}{4!}+\cdots\right)}{x^2}\right)=$$

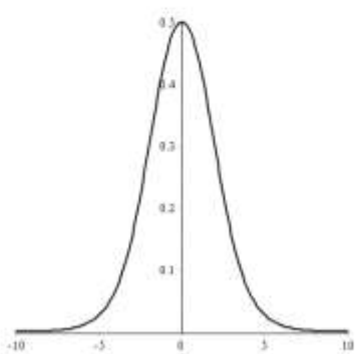
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4x^2}{4!}+\cdots\right)=\frac{\alpha^2}{2!}=\frac{\alpha^2}{2}$$

(iii) $\dfrac{\cosh(\alpha x)-\cosh(\beta x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(\alpha x)-\cosh(\beta x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\alpha^2x^2}{2!}+\dfrac{\alpha^4x^4}{4!}+\cdots\right)-\left(1+\dfrac{\beta^2x^2}{2!}+\dfrac{\beta^4x^4}{4!}+\cdots\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left((\alpha-\beta)+\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)x^2}{4!}+\dfrac{(\alpha^3-\beta^3)x^4}{6!}+\cdots\right)}{x^2}=(\alpha-\beta)$$

(2) أوجد مجال تعريف ومدى الدالة $y=\dfrac{2}{3+\cosh(x)}$



الحل: $3+\cosh(x)\neq 0$ لجميع قيم x الحقيقية، لذا تكون الدالة معرَّفة لجميع قيم x الحقيقية. $\therefore$ مجال التعريف $=\mathbb{R}$

$$\because \cosh(x)\geqslant 1,\quad \therefore 3+\cosh(x)\geqslant 4$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3+\cosh(x)}\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2}{3+\cosh(x)}\leqslant\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{2}{3+\cosh(x)}=\frac{(+)}{(+)}>0\ \therefore\ y>0\ and\ y\leqslant\frac{1}{2}$$

$\therefore$ **مدى الدالة هو** $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

تمارين:

1. عبِّر عن الدوال التالية في صورة دوال زائدية

a. $y = e^{x} + 3e^{-x}$　　b. $y = e^{3x} + e^{-2x}$　　c. $y = e^{x} - 3e^{-x}$

2. أوجد حل المعادلات التالية ...

a. $\cosh(x) + \sinh(x) = 3$　　b. $\cosh(x) - 2\sinh(x) = 5$　　c. $\tanh(2x) = \frac{1}{2}$

3. أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية ...

a. $y = \sinh\left(\sqrt{x}\right)$　　b. $y = x\cosh(\operatorname{sech}(x))$　　c. $y = \tanh(\sin(x))$

d. $y = \frac{x + \sin(x)}{x + \sinh(x)}$　　e. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)}\right)$　　f. $\operatorname{csch}(xy) = e^{x+y}$

g. $y = \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\cosh^{2}\left(\frac{1}{x}\right) - 1}\right)$　　h. $y = \sinh(x)^{\tanh(x)}$

4. أوجد متسلسلات الدوال التالية ...

(i) $y = \sinh\left(\sqrt{x}\right)$　　(ii) $y = x\cosh(2x)$　　(iii) $y = e^{-x^{2}}\cosh(x)$

(iv) $y = \frac{1}{\cosh(x)}$　　(v) $y = \tanh(x)$　　(vi) $y = \sinh(x)\cosh(x)$

(vii) $y=\sin(x)-\cosh(x)$　(viii) $y=\sinh(2x)-\cosh(x)$　(ix) $y=x\sinh(x)-\cosh(x)$

5. أحسب النهايات التالية ...

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sinh(\alpha x)}{x}$　(ii) $y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sinh(2x)}{x(1-\cos(3x))}$　(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{\sinh(\beta x)}$　(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh(x)}{x}$　(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\tanh(2x)}{x^3}$

$Ans:\ \dfrac{3}{8}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh(2x^2)}{1-\cosh(3x)}$

$Ans:\ -\dfrac{4}{9}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\times\sinh(3x)}{\cos(\pi x)-1}$

$Ans:\ -\dfrac{6}{\pi^2}$

(ix) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-2x}-1}{\sinh(5x)}$

$Ans:\ -\dfrac{2}{5}$