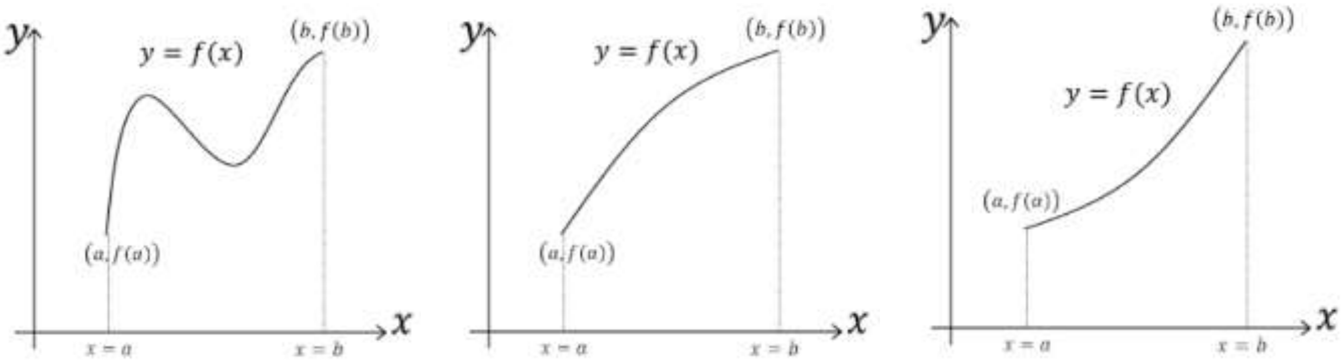
اتصال الدوال Functions Continuity

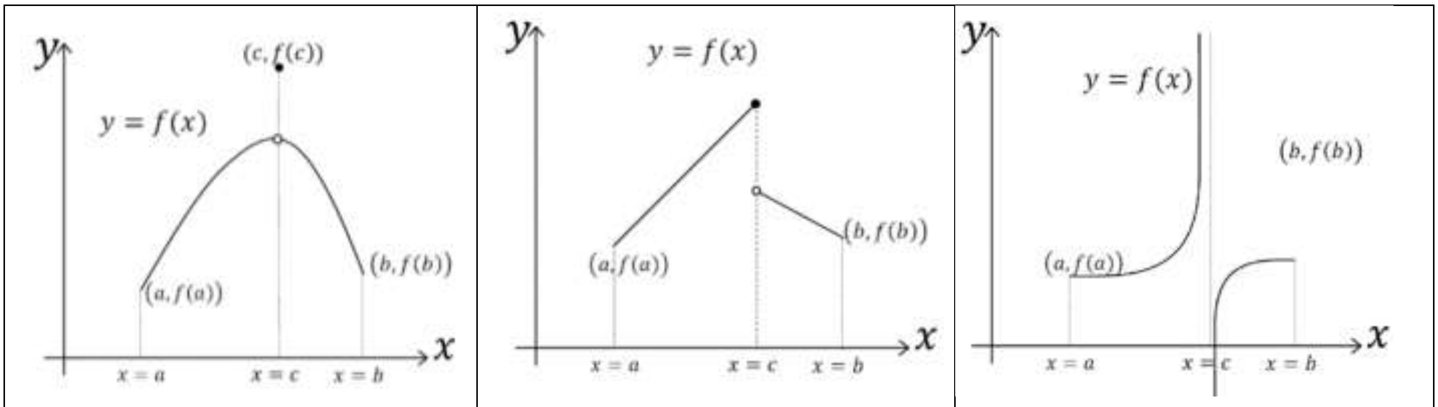
- **مفهوم اتصال الدالة في فترة:-** يُقال أنَّ الدالة $y=f(x)$ متصلة (مستمرة) بين النقطتين $x=a$ و $x=b$ إذا كان منحنى الدالة $y=f(x)$ بين النقطتين $(a,f(a))$ و $(b,\ f(b))$ غير منقطع (متصل).

المنحنيات في المُخططات أدناه جميعها منحنيات لدوال متصلة في الفترة (a,b) بغض النظر عن تزايد أو تناقص أو حتى تذبذب قيم y خلال الفترة $(a,\ b)$.



شكل (1) منحنيات لدوال مستمرة في الفترة $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$

المنحنيات في المُخططات أدناه جميعها منحنيات غير متصلة في الفترة (a,b).



شكل (3-2)　　شكل (2-2)　　شكل (1-2)

شكل (2) منحنيات لدوال غير مستمرة عند النقطة $\boldsymbol{c}$ الو اقعة في الفترة $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$

- **مفهوم اتصال الدالة في نقطة: - المنحنيات** في شكل (2) غير متصلة عند النقطة $x=c$ إما بسب عدم تعريف الدالة عند تلك النقطة كما في شكل(2-1) أو لإختلاف النهاية اليُمنى و اليسرى كما في شكل (2-2) أو لأن قيمة الدالة عند

النقطة $x=c$ تختلف عن نهاية الدالة في جوار النقطة $x=c$ كما في شكل (2-3)، لذا نستنتج أنَّ شروط إتصال الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=x_o$ هي ...

1. تعريف الدالة عند النقطة $x=x_o$ ، أي أنَّ $f(x_o)$ موجودة.
2. وجود النهاية $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ ، أي وجود و تساوي النهايتين اليمنى و اليسرى للدالة $f(x)$ عند $x=x_o$.
3. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

و يُمكن تلخيص الشروط الثلاثة السابقة لاتصال الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=x_o$ بالشرط $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$ ، أو بصورة أُخرى $\lim\limits_{h\to 0} f(x_o\pm h)=f(x_o)$ أو $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_o\pm h)-f(x_o))=0$

- **تعريف اتصال الدالة:** لتكن $f(x)$ دالة مُعرَّفة عند النقطة $x=x_o$، يُقال أنَّ الدالة $f(x)$ مُتصلة عند النقطة $x=x_o$ إذا تحقق الشرط $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_o+h)-f(x_o))=0$. ويُقال أنَّ الدالة متصلة على الفترة المفتوحة $I=(a,\ b)$ إذا كانت $f(x)$ متصلة عند كل نقطة من نقاط تلك الفترة.

1. مثال: لتكن $f(x)=x^2$ ، أثبت أنَّ الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: لإثبات اتصال الدالة على $\mathbb{R}$ نأخذ نقطة إختيارية $x=x_o$ حيث $x_o\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}(f(x_o+h)-f(x_o))=\lim_{h\to 0}((x_o+h)^2-x_o^2)=\lim_{h\to 0}(h(2x_o+h))=0\times(2x_o+0)=0.$$

$\therefore$ الدالة $f(x)=x^2$ متصلة عند x_o وبالتالي متصلة على $\mathbb{R}$.

2. مثال: لتكن $f(x)=\cos(ax)$ ، حيث $a\neq 0$ أثبت أنَّ الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: لإثبات اتصال الدالة على $\mathbb{R}$ نأخذ نقطة إختيارية $x=x_o$ حيث $x_o\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}(f(x_o+h)-f(x_o))=\lim_{h\to 0}(cos(ax+ah)-cos(ax))=$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\left(sin\left(ax_o+\frac{ah}{2}\right)\times sin\left(\frac{ah}{2}\right)\right)=-2(sin(ax_o)\times 0)=0.$$

$\therefore$ الدالة $f(x)=\cos(ax)$ متصلة عند x_o وبالتالي متصلة على $\mathbb{R}$.

3. مثال: لتكن $f(x)=a^x$ ، **حيث** $a>0$ **أثبت أنَّ الدالة متصلة على** $\mathbb{R}$.

الحل: لإثبات اتصال الدالة على $\mathbb{R}$ نأخذ نقطة إختيارية $x=x_o$ حيث $x_o\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_o+h)-f(x_o)\right)=\lim_{h\to 0}\left(a^{x+h}-a^x\right)=\lim_{h\to 0}a^x\left(a^h-1\right)=a^x\times 0=0\,.$$

$\therefore$ الدالة $f(x)=a^x$ متصلة عند x_o وبالتالي متصلة على $\mathbb{R}$.

4. **مثال: لتكن** $f(x)=log_a x$ ، **حيث** $a>0$ **أثبت أنَّ الدالة متصلة على** $\mathbb{R}^+$.

الحل: لإثبات اتصال الدالة على $\mathbb{R}$ نأخذ نقطة إختيارية $x=x_o$ حيث $x_o>0$

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_o+h)-f(x_o)\right)=\lim_{h\to 0}\left(log_a(x+h)-log_a x\right)=\lim_{h\to 0}log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=log_a\,(1)=0$$

.

$\therefore$ الدالة $f(x)=\log_a x$ متصلة عند x_o وبالتالي متصلة على $\mathbb{R}^+$.

5. مثال: لتكن $f(x)=\begin{cases}3x-1\,, & x<1\\ 2x^2 & ,\ x\geqslant 1\end{cases}$ ، أدرس اتصال الدالة عند $x=1$.

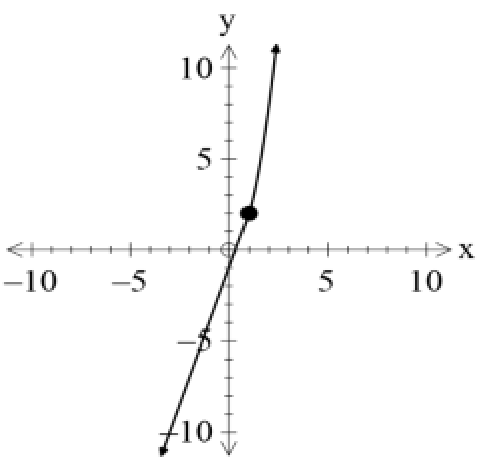
الحل: ندرس الشروط الثلاث لاتصال الدالة عند نقطة

1. $f(1)=2(1)^2=2\,.$
2. $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{h\to 0}f(1-h)=$

$=\lim_{h\to 0}3(1-h)-1=3-1=2\,.$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{h\to 0}f(1+h)=\lim_{h\to 0}2(1-h)^2=$

$=2(1)^2=2\,.\therefore\ \lim_{x\to 1}f(x)=2$



مخطط الدالة

$f(x)=\begin{cases}3x-1\,, & x<1\\ 2x^2 & ,\ x\geqslant 1\end{cases}$

3. $\therefore\ \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\,.$

تحققت الشروط الثلاث مجتمعة، إذن $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=1$.

6. **مثال: لتكن** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{x}, & x<0\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x+1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ ، **أدرس اتصال الدالة عند** $x=0$.

الحل: ندرس الشروط الثلاث لاتصال الدالة عند نقطة

1. $f(1)=\dfrac{\sin(0)}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

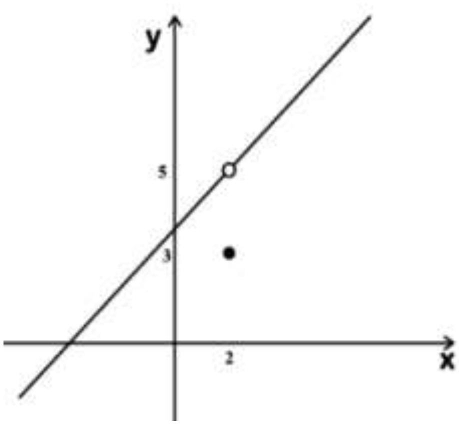
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(0-h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\sin(\pi h)}{-h}=\pi.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\pi h)}{h+1}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\pi h)}{h+1}=\dfrac{\sin(0)}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة، لذا تكون f(x) غير متصلة عند $x=0$.

7. **مثال:** لتكن $f(x)=\begin{cases}3, & x=2\\ x+3, & x\neq 2\end{cases}$ ، أدرس اتصال الدالة عند $x=2$.

الحل: بدراسة الشروط الثلاثة لاتصال الدالة عند نقطة



مخطط الدالة = $f(x)$

$\begin{cases}3 & , x=2\\ x+3 & , x\neq 2\end{cases}$

1. $f(2)=3.$

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(1-h)=$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2-h)+3=5-h=5.$

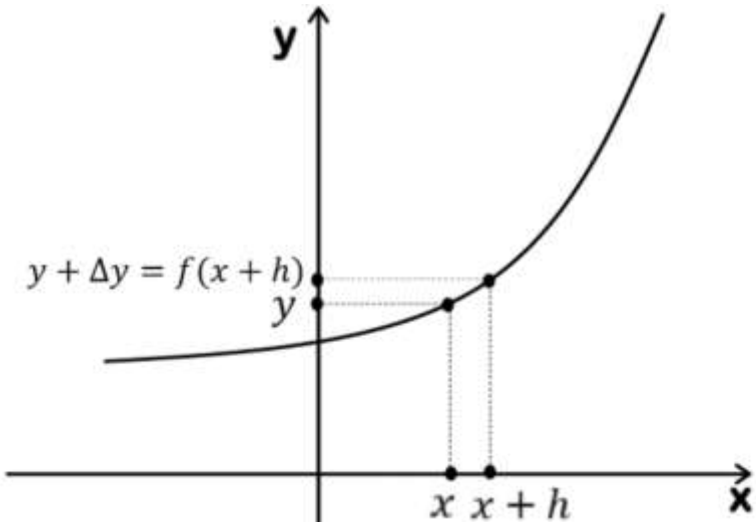
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)=\lim\limits_{h\to 0}(2+h)+3=$

$=5+h=5.\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$

3. $\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2).$

إذن $f(x)$ غير متصلة عند النقطة $x=2$.

التغيّر Change ومعدَّل التغير: **Rate of change**



شكل (3)

لتكن $y=f(x)$ دالة مستمرة على فترة مفتوحة I، و $x\in I$، نرغب في تحديد مقدار التغيّر الناتج في قيمة الدالة عند حدوث تغيّر طفيف (زيادة أو نقصان) في x بمقدار h، حيث $h\to 0$ و $(x+h)\in I$.

لنرمز للتغيَّر في قيمة الدالة بالرمز Δy، عندئذٍ تكون $y+\Delta y = f(x+h)$

$\therefore$ التغيّر في قيمة الدالة يكون $\Delta y = f(x+h)-f(x)$.

النسبة بين التغيّر في y إلى التغيّر في x أي $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\Delta y}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يُسمى متوسط مُعدّل التغيّر.

8. **مثال: لتكن** $y=x^3$ **أوجد متوسط معدّل التغيّر.**

الحل: متوسط معدَّل التغيِّر = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\Delta y}{h}$

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{h((x+h)^2+x(x+h)+x^2)}{h}=$$

$$=(x+h)^2+x(x+h)+x^2=3x^2+3hx+h^2.$$

$$\frac{\Delta y}{h}=3x^2+3hx+h^2$$

- **معدَّل التغيّر Rate of change أو المشتقة Derivative:**

معدَّل التغيّر في y بالنسبة إلى التغيّر في x هو نهاية متوسط معدَّل التغيّر عندما $h \to 0$ ويُسمى بالمشتقة أو المعامل التفاضلي ويُرمز له بأي من الرموز التالية $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, f'(x)$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

يعتمد وجود المشتقة على وجود النهاية.

9. **مثال:** لتكن $y = x^3$ أوجد معدّل التغيّر $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بما أنَّ الدالة كثيرة حدود، إذن هي مستمرة على $\mathbb{R}$، معدَّل التغيِّر هو $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

من المثال السابق نعلم أنَّ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2$

كما أشرنا سابقاً فإن التغيّر في x يمكن أن يكون بالزيادة أي h تكون موجبة وتقترب من الصفر أو يكون التغيّر بالنقصان وبالتالي تكون h سالبة وتقترب من الصفر،

$$L.S.L = \lim_{h \to 0^-} 3x^2 + 3hx + h^2 = \lim_{h \to 0} 3x^2 - 3hx + h^2 = 3x^2.$$

$$R.S.L = \lim_{h \to 0^+} 3x^2 + 3hx + h^2 = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

10. **مثال:** لتكن $y = |x|$ أوجد معدّل التغيّر $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 0$.

الحل: من مثال سابق نعلم أنَّ الدالة متصلة على $\mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

ندرس وجود النهاية بحساب النهايتين اليُمنى واليُسرى

$$L.S.H = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \frac{h}{-h} = -1 \ , \ R.S.H = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة عند $x = 0$، لذا تكون المشتقة غير موجودة و يُقال أنَّ الدالة غير قابلة للإشتقاق عند $x = 0$.

- **قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة:**

مشتقة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=c$ هي النهاية $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ إذا وجِدت هذه النهاية، إن كانت هذه النهاية موجودة يُقال أنَّ الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=c$.

يُمكن تعريف مشتقة الدالة عند النقطة $x=c$ بالنهاية $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

- **مبرهنة:** قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة تقتضي اتصال الدالة عند تلك النقطة.

الإثبات:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(f(x+h)-f(x))}{h}=\left(\lim_{h\to 0} h\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=$$

$$=0\times f'(x)=0$$

وذلك لأن $f(x)$ قابلة للإشتقاق مما يعني أنَّ $f'(x)\in\mathbb{R}$.

- **مشتقات الدوال البسيطة:**

(1) الدالة الثابتة $\boldsymbol{y=c}$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0,\quad \therefore \frac{d}{dx}(c)=0$$

(2) الدوال في الصورة $\boldsymbol{y=x^n}$، حيث $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\times\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}([x+h]^k\times\ x^{n-k-1})\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\sum\limits_{k=0}^{n-1}([x+h]^k\times\ x^{n-k-1})}{h}=\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{h\to 0}([x+h]^k\times\ x^{n-k-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^{n-k-1}\times\lim_{h\to 0}(x+h)^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-k-1}\times\ x^k)=\sum_{k=0}^{n-1}(x^{n-1})=nx^{n-1},\therefore \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

يمكن تعميم النتيجة السابقة لكل قوى $\boldsymbol{x}$ الحقيقية، أي أنَّ

$\frac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) الدالة $sin(x)$

$$\frac{d}{dx}(sin(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right)sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \times \lim_{\left(\frac{h}{2}\right)\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = cos(x)\times 1 = cos(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(sin(x)) = cos(x)$$

(4) الدالة $cos(x)$

$$\frac{d}{dx}(cos(x)) = -sin(x)$$

يترك الاثبات كتمرين للطالب.

(5) الدالة الأسية a^x حيث $a>0$ و $a\neq 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \times \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

بإجراء التعويض $u=\frac{1}{a^h-1}$، تكون $u\to\infty$ عندما $h\to 0$، و $h=\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(ulog_a\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)} = a^x \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{log_a\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)} =$$

$$= a^x \times \frac{1}{log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)} = a^x \times \frac{1}{log_a(e)} = a^x \times ln(a)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times ln(a)\text{, where } a>0,\ a\neq 1.$$

ملاحظة: $ln(x) = log_e(x)$ يُسمى اللوغاريثم الطبيعي للعدد x.

(6) الدالة اللوغاريثمية $log_a(x)$ حيث $a>1$، و $x>0$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

بتعويض $u=\frac{x}{h}$، تكون $u\to\infty$ عندما $h\to 0$، و $h=\frac{x}{u}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u}{x}log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}log_a\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\times log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)=\frac{1}{x}\times log_a\ (e)=\frac{1}{x\ \ ln\,(a)}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(log_a\ (x))=\frac{1}{x\ \ ln\,(a)}$$

ونستنتج أيضاً أنَّ　　$\frac{d}{dx}(ln\ (x))=\frac{1}{x}$

مثال: باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقات الدوال التالية..

1. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{\sqrt{(x+h)^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{(x+h)^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2+1}}\right)+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x+h)^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+h)^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left(\frac{x^2+1-((x+h)^2+1)}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+h)^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x+h)^2+1}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left(\frac{-h(2x+h)}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+h)^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x+h)^2+1}\right)}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\lim_{h\to 0}\left(\frac{-x\ \ (2x+h)}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+h)^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x+h)^2+1}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{-2x^2}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}\left(2\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

2. $y=xe^x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)e^{(x+h)}-xe^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((x+h)e^{(x+h)}-xe^x\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(xe^{x+h}+h\ \ e^{x+h}-xe^x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\ \ e^{(x+h)^2}+xe^{(x+h)^2}-xe^{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(e^{x+h}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{xe^x}{h}\left(e^h-1\right)=e^x+xe^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^h-1\right)=e^x+xe^x.$$

وذلك لأنّ $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^h-1\right)=ln\left(e\right)=1$

- **خصائص المشتقات:**

(1) ليكن c ثابت إختياري عندئذٍ $\frac{d}{dx}\left(c\times f(x)\right)=c\times\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$

(2) لتكن $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ عدد محدود من الدوال القابلة للاشتقاق في فترة مفتوحة I عندئذٍ

$$\frac{d}{dx}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)\right)=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x).$$

الإثبات: نتيجة مباشرة من خصائص نهاية مجموع عدد محدود من الدوال

(3) لتكن $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ دوال قابلة للإشتقاق في فترة I، عندئذٍ

i. $\frac{d}{dx}\left(f(x)\times g(x)\right)=f(x)\times\grave{g}(x)+\grave{f}(x)\times g(x)$

ii. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\grave{f}(x).g(x)-f(x).\grave{g}(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

الاثبات:

i. $$\frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x).g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=$$

$$=\left(\lim_{h\to 0} f(x+h)\right)\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)+\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\times g(x)$$

بما أنَّ $f(x)$ قابلة للإشتقاق إذن $f(x)$ مستمرة و ذلك يقتضي أن $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right)=f(x)\times g'(x)+f'(x)\times g(x)$$

ii. يُترك الإثبات كتمرين للطالب.

(4) لتكن $y=f(u)$ و $u=g(x)$ دوال قابلة للإشتقاق، عندئذٍ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\times\frac{du}{dx}=\grave{f}(u)\times\grave{g}(x)=\grave{f}(g(x))\times\grave{g}(x)$$

الإثبات:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

قابلية اشتقاق الدالة $u=g(x)$ تقتضي اتصالها، لذا $\Delta u\to 0$ عندما $\Delta x\to 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\grave{f}(u)\times\grave{g}(x)\ =f'(g(x))\times g'(x)$$

- **أمثلة:** أوجد مشتقات الدوال التالية ...

1. $y=5x^2+\dfrac{3}{x}+4\sqrt{x^3}-6$.

$$y=5x^2+3x^{-1}+4x^{\frac{3}{2}}-6\ ,\therefore \frac{dy}{dx}=10x-3x^{-2}+4\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=$$

$$=10x-\frac{3}{x^2}+6\sqrt{x}\ .$$

2. $y=2sin(x)-\dfrac{1}{3}cos(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=2cos(x)-\frac{1}{3}(-sin(x))=.2cos(x)+\frac{1}{3}sin(x)$$

3. $y = 2^{-x} + 3^{x+1}$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3\times 3^{x}, \therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3\times 3^{x}\times ln\,(3) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x} ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3^{x+1}\times ln\,(3).$$

4. $y = log_4(x) - 2ln\,(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xln\,(4)} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{ln\,(4)} - 2\right)$$

5. $y = log_4(x) - 2ln\,(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xln\,(4)} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{ln\,(4)} - 2\right)\frac{1}{x}.$$

6. $y = x\ \ sin\,(3x+2)$.

$$\frac{dy}{dx} = x\ \ (cos\,(3x+2)\times 3) + sin\,(3x+2) = \ = 3xcos\,(3x+2) + sin\,(3x+2).$$

7. $y = \dfrac{sin\,(x) + cos\,(x)}{sin\,(x) - cos\,(x)}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(sin\,(x) - cos\,(x))\times(cos\,(x) - sin\,(x)) - (sin\,(x) + cos\,(x))\times(cos\,(x) + sin\,(x))}{(sin\,(x) - cos\,(x))^{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(sin\,(x) - cos\,(x))^{2} + (sin\,(x) + cos\,(x))^{2}}{(sin\,(x) - cos\,(x))^{2}} = -\frac{1 - sin\,(2x) + \ \ 1 + sin\,(2x)}{(sin\,(x) - cos\,(x))^{2}} =$$

$$= \frac{-2}{1 - sin\,(2x)} = \frac{2}{sin\,(2x) - 1}$$

8. $y = log_3\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)ln\,(3)} \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2\ \ x\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)ln\,(3)} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)ln\,(3)} \times \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{ln\,(3)\sqrt{x^2+1}}$$

تمارين (2)

1. لتكن $f(x)=sin(ax)$ ، حيث $a\neq 0$ أثبت أنَّ الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.
2. لتكن $f(x)=x^3-x$ ، أثبت أنَّ الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.
3. أدرس اتصال الدالة $f(x)=ln(x^2+1)$.
4. لتكن $f(x)=\begin{cases} 2^x-1, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ ، أدرس اتصال الدالة عند $x=0$.
5. لتكن $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sin(\pi x)}{1-x}, & x<1 \\ \pi x^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$ ، أدرس اتصال الدالة عند $x=1$.

6. أوجد المشتقة للدوال التالية من التعريف ...

1) $y=x^3$　　2) $y=\dfrac{x}{x^2-5}$　　3) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

4) $y=sin(2x)$　　5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　　6) $y=x\ e^{-x}$

7) $y=ln(2x-1)$　　8) $y=2^{x^2}$

7. باستخدام قواعد الاشتقاق أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية ...

a. $y=sin(x cos(2x))$　　b. $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}$　　c. $y=\sqrt{1+\sqrt{2^x-1}}$

d. $y=sin\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$　　e. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　f. $y=x\ e^{-x^2}$

g. $y=ln(2x-1)$　　h. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$　　i. $y=log_5(2^{x^2}-x)$

j. $y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x+\sqrt{e^x+2}}}$　　k. $y=\left(\dfrac{x}{x^2-5}\right)^3$　　l. $y=x\sqrt{x\ sin(2x)+1}$

m. $y=sin^2\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$　　n. $y=\dfrac{1+tan^2(x)}{1-tan^2(x)}$　　o. $y=ln(sec(x)+tan(x))$