المسورات Quantifiers

المسورات Quantifiers هي طريقة لتوليد قضايا من الإسنادات دون تحديد قيم معينة للمتغيرات. فمثلاً التعبير "$\forall x, P(x)$" و يقرأ "الكل x بحيث $P(x)$" قضية تكون صائبة لجميع قيم x في D (مجال P). أيضاً التعبير "$\exists x, P(x)$" و يقرأ "يوجد x بحيث $P(x)$" قضية تكون صائبة لعنصر ما $x \in D$.

إذاً لدينا نوعان من المسوِّرات:

(1) **مسوِّر العموم Universal quantifier:**

و يرمز له بالرمز $\forall$ و يقرأ "لكل" "for all"، و تكون القضية $\forall x, P(x)$ خاطئة إذا وجد عنصر واحد على الأقل $y \in D$ بحيث $P(y)$ خاطئة، و عندئذٍ يسمى العنصر y **مثالاً معاكساً counter example**.

مثال: بين أن القضية $\forall x, x > \frac{1}{x}$ خاطئة.

الحل: إذا أخذنا $x = \frac{1}{2}$، فإنه من الواضح أن $\frac{1}{x} = 1\frac{1}{2} = 2 < \frac{1}{2} = x$. في هذه الحالة فإن $x = \frac{1}{2}$ تعتبر مثالاً معاكساً.

(2) **مسور الوجود Existence quantifier:**

و يرمز له بالرمز $\exists$ و يقرأ "يوجد" "there exists" و تكون القضية $\exists x, P(x)$ خاطئة إذاكان الإسناد $P(x)$ خاطئاً لجميع $x \in D$.

مثال: إذا كانت $D = \mathbb{R}$ (فئة الأعداد الحقيقية) فإن القضية المسورة $\exists x \in D, x = x + 1$ خاطئة لجميع $x \in D$، و ذلك لأن التعبير $x = x + 1$ خاطئ لكل عدد حقيقي.

المتغيرات الحرة والمقيدة Bounded and Unbounded Variables:

يعتبر المتغير مقيداً إذا كانت له قيمة محددة يأخذها أو كان مرتبطاً بأحد ادوات التسوير، ولا تعتبر الجملة قضية الا إذا كان كل متغير في الجملة مقيداً.

مثال: في الجملة$\exists x\ Q(x, y)$،xيعتبر متغيير مقيد، بينماyمتغير حر.

مدى تأثير المتغير Scope of variable: هو المدى الذى تؤثر فيه علامة التسوير وهو الجزء من الجملة الذى تعمل عليه.

مثال:

$$\underbrace{\exists x\ (P}_{\text{scope of y}}(x) \wedge \underbrace{Q(x))\ \vee\ \forall y\ R}_{\text{scope of x}}(y)$$

ترتيب التقييد: يجب ملاحظة أن الجملة التالية ليست صحيحة:

$$\exists y \forall x\ P(x,y) \equiv \forall x \exists y\ P(x,y)$$

مثال: إذا اعتبرنا $D = \mathbb{Z}$، فإن الجملة $\forall x \exists y$ (x+y=0) $\equiv$ $\exists y \forall x$ (x+y=0)خاطئة لان الطرف الايسر يعنى انه يوجد y بحيث انه لكل قيمة من قيم x نجد إن $x + y = 0$ وهى عبارة خاطئة. اما الطرف الايمن فإنه يعنى لكل قيمة من قيم x يوجد y بحيث أن $x + y = 0$ وهى عبارة صحيحة.

أما القضايا التالية دائما صحيحة:

$$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$$
$$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$$

إذا كانت $D = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ فإن:

(1) $\forall x \in D, P(x)$ تكون مكافئة لـ $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$.

(2) $\exists x \in D, P(x)$ تكون مكافئة لـ $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$.

مثال: برهن أن

$$\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x).$$

البرهان:

إذا كانت $\forall x, (P(x) \wedge Q(x))$ صائبة، عندئذٍ لكل نقطة a في المجال تكون $P(a) \wedge Q(a)$ صائبة، و من ثم $P(a)$صائبة و $Q(a)$ صائبة، و حيث أن كلاً من $P(a)$ و $Q(a)$ صائبتان لجميع عناصر المجال فإن $\forall x, P(x)$ و $\forall x, Q(x)$ صائبتان في المجال مما يقتضي أن $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ صائبة.

من جهة أخرى، إذا كانت $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ صائبة فإن $\forall x, P(x)$ و $\forall x, Q(x)$ صائبتان. إذا كانت فإن $P(a)$صائبة و $Q(a)$ صائبة و من ثم $P(a) \wedge Q(a)$ صائبة لجميع a في المجال.

$$\therefore \forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x).$$

نفي مسور العموم Negation of universal quantifier

ليكن $P(x)$ هو الإسناد "x درس مقرر شبكات الحاسوب" حيث نطاق الحديث هو طلاب السنة الخامسة بكلية العلوم الرياضية. عندئذٍ القضية $\forall x, P(x)$ تقرأ "جميع طلاب السنة الخامسة بكلية العلوم الرياضية درسوا مقرر شبكات الحاسوب"، و نفيها $\sim \forall x, P(x)$ هو "لم يدرس جميع طلاب السنة الخامسة بكلية العلوم الرياضية مقرر شبكات الحاسوب"، و هذا يعني وجود طالب واحد على الأقل بالسنة الخامسة لم يدرس مقرر شبكات الحاسوب، أي $\exists x, \sim P(x)$. و من ثم فإن

$$\sim \forall x, P(x) \equiv \exists x, \sim P(x)$$

نفي مسور الوجود Negation of existential quantifier

إذا كان $P(x)$ هو الإسناد "x تمكن من تسلق جبل كلمنجارو"، فإن القضية $\exists x, P(x)$ تقرأ "يوجد شخص ما x تمكن من تسلق جبل كلمنجارو"، و نفيها $\sim \exists x, P(x)$ هو

"لم يتمكن شخص ما x من تسلق جبل كلمنجارو "، و هذا يعني جميع الناس لم يوجد منهم من تمكن من تسلق جبل كلمنجارو، أي $\forall x, \sim P(x)$. و من ثم فإن

$$\sim\exists x, P(x) \equiv \forall x, \sim P(x)$$

المسورات المتداخلة Nested quantifiers

يقال أن مسورين متداخلين إذاكان أحدهما يقع داخل نطاق عمل الآخر. على سبيل المثال، إذاكان $D = \mathbb{R}$، فإن القضية

$$\forall x \forall y \; x + y = y + x$$

مفادها أن $x + y = y + x$ لجميع الأعداد الحقيقية x, y (قانون الإبدال commutative law). أيضاً القضية $\forall x \exists y \; x + y = 0$ مفادها أن لكل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y بحيث $x + y = 0$ (المعكوس الجمعي additive inverse).

مثال: وضح معنى $\forall x, \forall y, (x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow \mathrm{xy} < 0$، $D = \mathbb{R}$.

الحل: هذه العبارة تعني أنه لكل عدد حقيقي x و عدد حقيقي y، إذاكانت $x > 0$ و $y < 0$ فإن حاصل الضرب xy يكون عدداً حقيقياً سالباً.

مثال: وضح معنى $\forall x \; (x \neq 0), \exists y : \mathrm{xy} = 1$.

الحل: تمرين.

تمرين: ما هو نفى كلا من الاتى:

(1) $\forall x \exists y : \mathrm{xy} = 1$ (2) $\forall x \exists y : P(x, y)$ (3) $\exists x \forall y : P(x, y)$

(6) $\forall x \exists y \exists z, P(x, y, z)$ (4) $\exists y \exists x \forall z, P(x, y, z)$

الحجج ذات المقدمات المسورة Arguments with quantified premises

(1) قانون الـ Universal modus ponens:

$$\begin{array}{c} \forall x \in D \text{ , if } P(x) \text{ then } Q(x) \\ P(a) \text{ for some } a \in D \\ \therefore Q(a) \end{array}$$

(2) قانون الـ Universal modus tollens:

$$\begin{array}{c} \forall x \in D \text{ , if } P(x) \text{ then } Q(x) \\ \sim Q(a) \text{ for some } a \in D \\ \therefore \sim P(a) \end{array}$$