جبر المصفوفات

* معكوس المصفوفة (The inverse of a Matrix) :-

يقال أنّ المصفوفة المربعة A $(n \times n)$ قابلة للعكس إذا وجدت مصفوفة C $(n \times n)$ بحيث $CA = AC = I_n$ ، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة $(n \times n)$ ونسمى (C) بمعكوس (A) .

* معكوس المصفوفة (A) وحيد

* الإثبات :-

ليكن B معكوس آخر لـ A فإن :-

$$AB = BA = I \qquad AC = CA = I$$

$$\therefore B = C \qquad B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

* يرمز لمعكوس المصفوفة (A) بالرمز (A^{-1}) أي $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

* نسمى المصفوفة الغير قابلة للعكس بالمصفوفة الشاذة (Singular Matrix)

أما القابلة للعكس فهي مصفوفة غير شاذة (Nonsingular Matrix)

*مثال :-

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد AC & CA

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* مبرهنة :-

لتكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ إذا كان $ad - bc \neq 0$ فإن (A) قابلة للعكس

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

أما إذا كان $ad-bc=0$

فإن (A) مصفوفة شاذة.

* المقدار $ad-bc$ يسمى محدد المصفوفة (A) ونرمز له بـ $\det(A)$

$$\det(A) = ad - bc$$

* مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة.

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

(1) $\det(A) = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 18 - 20 = \underline{-2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(2) $\det(A) = 2 \cdot -7 - 3 \cdot -5 = -14 + 15 = 1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

* مبرهنة :-

إذا كان A مصفوفة $(n \times n)$ قابلة للعكس فإن لكل $b \in R^n$ المعادلة $Ax = b$ لها حل وحيد وهو $x = A^{-1}b$.

* البرهان :-

مع $b \in R^n$ ، إذاً فإن الحل $A^{-1}b$ له وجود وذلك لأنه إذا عوضنا

x بـ $A^{-1}b$ نجد $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$

* لإثبات الوحدانية لفرض يالتناقض وجود حل آخر u أي أن $Au = b$

* بضرب الطرفين في A^{-1} $A^{-1}(Au) = A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)u = A^{-1}b \Rightarrow Iu = A^{-1}b$

$\therefore u = A^{-1}b$ (وحيد)

* مثال :-

استخدم معكوس المصفوفة لإيجاد حل النظام :-

$3x_1 + 4x_2 = 3$

$5x_1 + 6x_2 = 7$

* الحل

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad x = A^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1 = 5$

$x_2 = -3$

* مبرهنة :-

أ. إذا كانت A قابلة للعكس فإن A^{-1} أيضاً قابلة للعكس و $(A^{-1})^{-1} = A$

ب. إذا كانت A و B مصفوفتان $n \times n$ قابلتان للعكس فإن حاصل الضرب (AB) أيضاً قابل للعكس و $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

ج. إذا كانت A قابلة للعكس فإن A^T أيضاً قابلة للعكس و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

* البرهان (EX) :-

* مبرهنة :-

المصفوفة (A) تكون قابلة للعكس إذا وفقط إذا كانت (A) متكافئة صفياً لـ I_n في هذه الحالة فإن أي سلسلة من العمليات الصفية الأولية تختزل A إلى I_n وأيضاً تحول I_n إلى A مكافئة صفياً لـ I فإن [A I] تكون متكافئة صفياً لـ $[I \; A^{-1}]$ وإلا فإن A ليس لها معكوس.

* مثال :-

أوجد معكوس (A) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$[A \quad I]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$[I \qquad A^{-1}]$

Date :

No. :

(55)

$$\therefore A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$