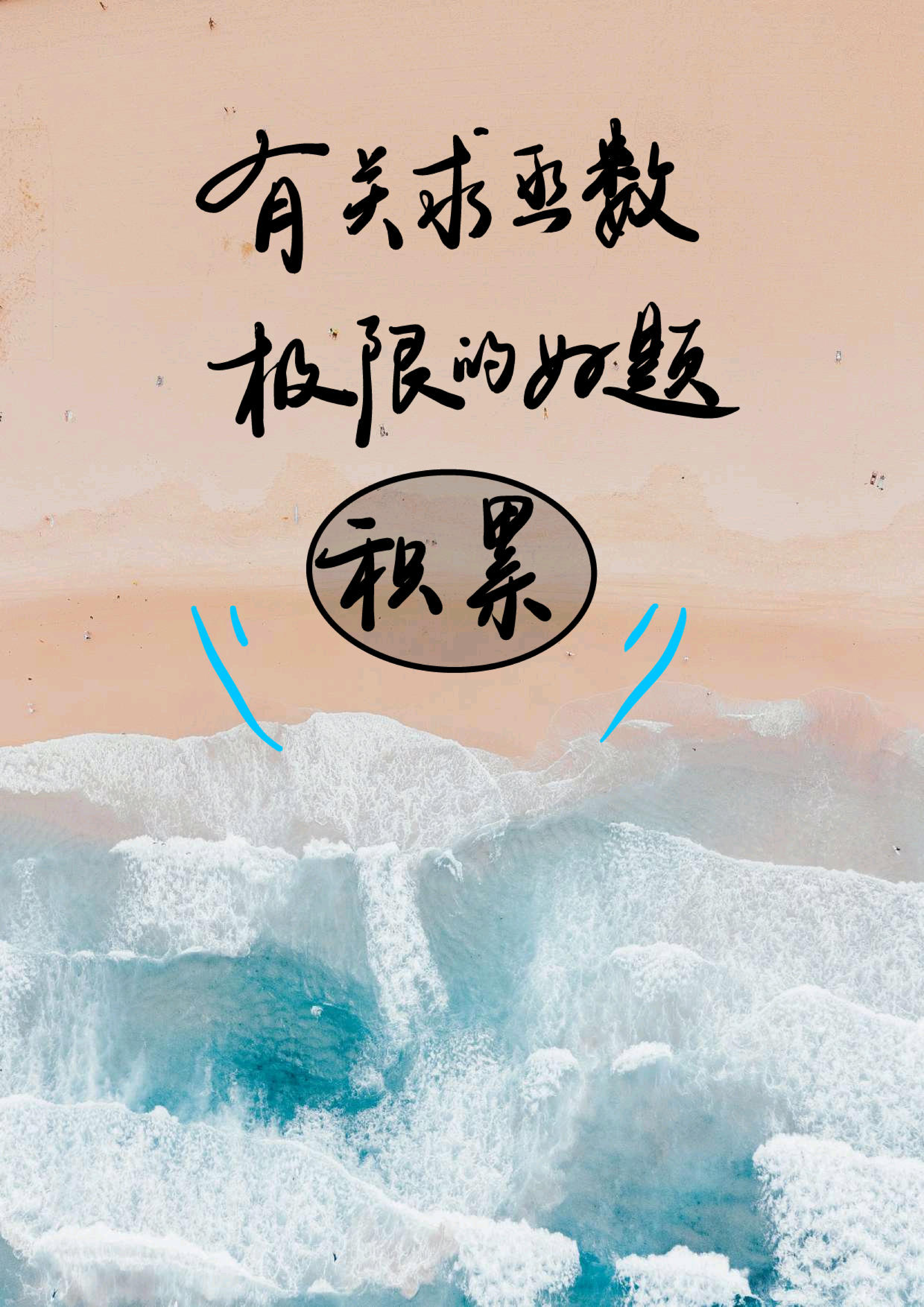
有关求函数极限的好题

积累



日期:　　/

一、对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 的新理解:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b}=e$ （其中 $a,b\in R$） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+b}\right)^n=e$

③ $\lim\limits_{\blacksquare\to\infty}\left(1+\frac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare}=e$ 整体换元思想

二、题

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=?$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$ 等价无穷小替换!

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}\cdot\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=1$

三题: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+a}\cdot(x+a+b)^{x+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x+a+b}\right)^{x+a}\cdot\left(1-\frac{a}{x+a+b}\right)^{x+b}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x+a+b}{b}}\right)^{-\frac{x+a+b}{b}}\right]^{-b}}{\left(1-\frac{b}{x+a+b}\right)^{b}}\cdot\dfrac{\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x+a+b}{a}}\right)^{-\frac{x+a+b}{a}}\right]^{-a}}{\left(1-\frac{a}{x+a+b}\right)^{a}}=e^{-a}\cdot e^{-b}=\frac{1}{e^{a+b}}$

四题: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$

$=1-\frac{1}{3^2}$

原式 $=\dfrac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)}{1-\frac{1}{3}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{1}{3^{2^n}}\right)^2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

日期:　　　/

五题: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=?$ $(a>0,b>0,c>0)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right)$$

洛必达法则

对于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)=\ln(abc)$

$\therefore 原式=e^{\frac{\ln abc}{3}}=(abc)^{\frac{1}{3}}$

六题: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=?$

分母有理化

$$原式=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{3}{2}$$

七. 题: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=?$

分子有理化

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

同时除以x的最高次幂

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=0}}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}_{=0}}+1}=\frac{1}{2}$$

八、题：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}=?$

原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^m-1)-(x^n-1)}{(x^m+1)+(x^n+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\big(\underbrace{x^m+x^{m-1}+\cdots+1}_{=m}-\underbrace{x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-1}_{=n}\big)}{\cancel{(x-1)}\big(\underbrace{x^m+x^{m-1}+\cdots+1}_{=m}+\underbrace{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}_{=n}\big)}$

$=\dfrac{m-n}{m+n}$

技巧：对 $\frac{0}{0}$ 型极限，分子分母一定有公因式，且这个公因式为 $(x-?)$

而我们要做的，就是找到公因式并约去

对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限：上下同除最高次数的那一项

九、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=?$

原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[1+\dfrac{1}{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\cdot\tan x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}}$

$1=\sin\frac{\pi}{2}$ 和差化积

而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\cos x}\sin x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\sin x$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cancel{2}\cancel{\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\cancel{2}\cancel{\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\sin x=0$

$\therefore$ 原式 $=e^0=1$

日期: /

7. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}=?$ 注意谁是变量! $\alpha\to\beta$ ∴ α为变量

原式 $=\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^{\beta}(e^{\overset{\to 0}{\alpha-\beta}}-1)}{\alpha-\beta}=\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^{\beta}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=e^{\beta}$

日 期:　　　/

日期: /