

## 理论力学运动学综合问题特训

### 一、点的合成运动回顾

**速度：**  $\vec{v}_{\text{绝对}} = \vec{v}_{\text{相对}} + \vec{v}_{\text{牵连}}$ ，即：  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

**加速度：**

平动参考系中：  $\vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}} + \vec{a}_{\text{牵连}}$ ，即：  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$

转动参考系中：  $\vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}} + \vec{a}_{\text{牵连}} + \vec{a}_{\text{科氏}}$ ，其中  $\vec{a}_{\text{科氏}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{相对}}$

即：  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ ，其中  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

**易错点：**

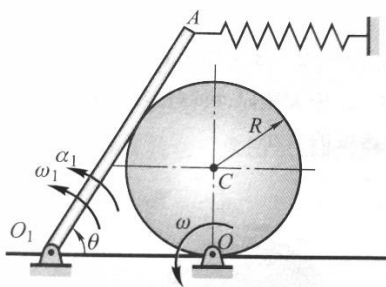
1. 牵连速度的定义：

动系上牵连点的速度（在转动参考系中尤其注意牵连速度  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  的矢径）

2. 动系的选取：

若分不清“固连在某点的参考系”与“取刚体为参考系”二者的区别，则统一采用后者，即：假设动参考系随着刚体一起转动/平动

**【偏心轮模型】** 图示偏心轮摇杆机构中，摇杆  $O_1A$  借助弹簧压在半径为  $R$  的偏心轮  $C$  上。偏心轮  $C$  绕轴  $O$  往复摆动，从而带动摇杆绕轴  $O_1$  摆动。设  $OC \perp OO_1$  时，轮  $C$  的角速度为  $\omega$ ，角加速度为零， $\theta = 60^\circ$ 。求此时摇杆  $O_1A$  的角速度  $\omega_1$  和角加速度  $\alpha_1$ 。



## 二、刚体的平面平行运动回顾

求解方法：

基点法：

$$\text{速度: } \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

$$\text{加速度: } \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}, \text{ 为什么这里不考虑科氏加速度?}$$

因为 AB 同为一个刚体上的两点，相对速度为 0 → 科氏加速度为 0

有时，该方程还可写成： $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n$ ，A 对 B 的加速度分为法向与切向

速度瞬心：

刚体上两点速度方向垂线的交点即可认为是速度瞬心。

注：若两点速度大小相等方向相同且不垂直于两点连线，则认为该刚体做瞬时平移运动，瞬时平移运动（超有用！做题时注意分辨）下有许多独特的特点：

1. 本质：刚体平面平行运动角速度  $\omega = 0$ ，但角加速度  $\alpha \neq 0$ ；

2. 加速度瞬心

作瞬时平移运动的刚体，两点加速度的垂线的交点，即为加速度瞬心

刚体上的任意一点加速度，都垂直于该点与加速度瞬心的连线，大小为

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}$$

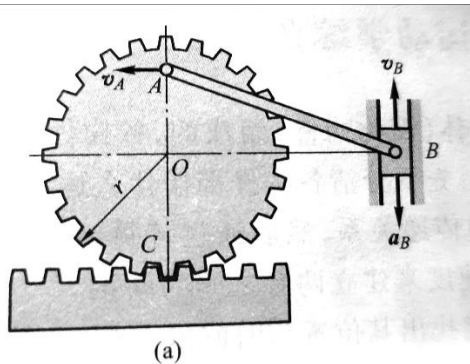
3. 加速度投影定理

沿杆方向加速度投影相等

速度投影定理：

沿杆方向速度投影相等

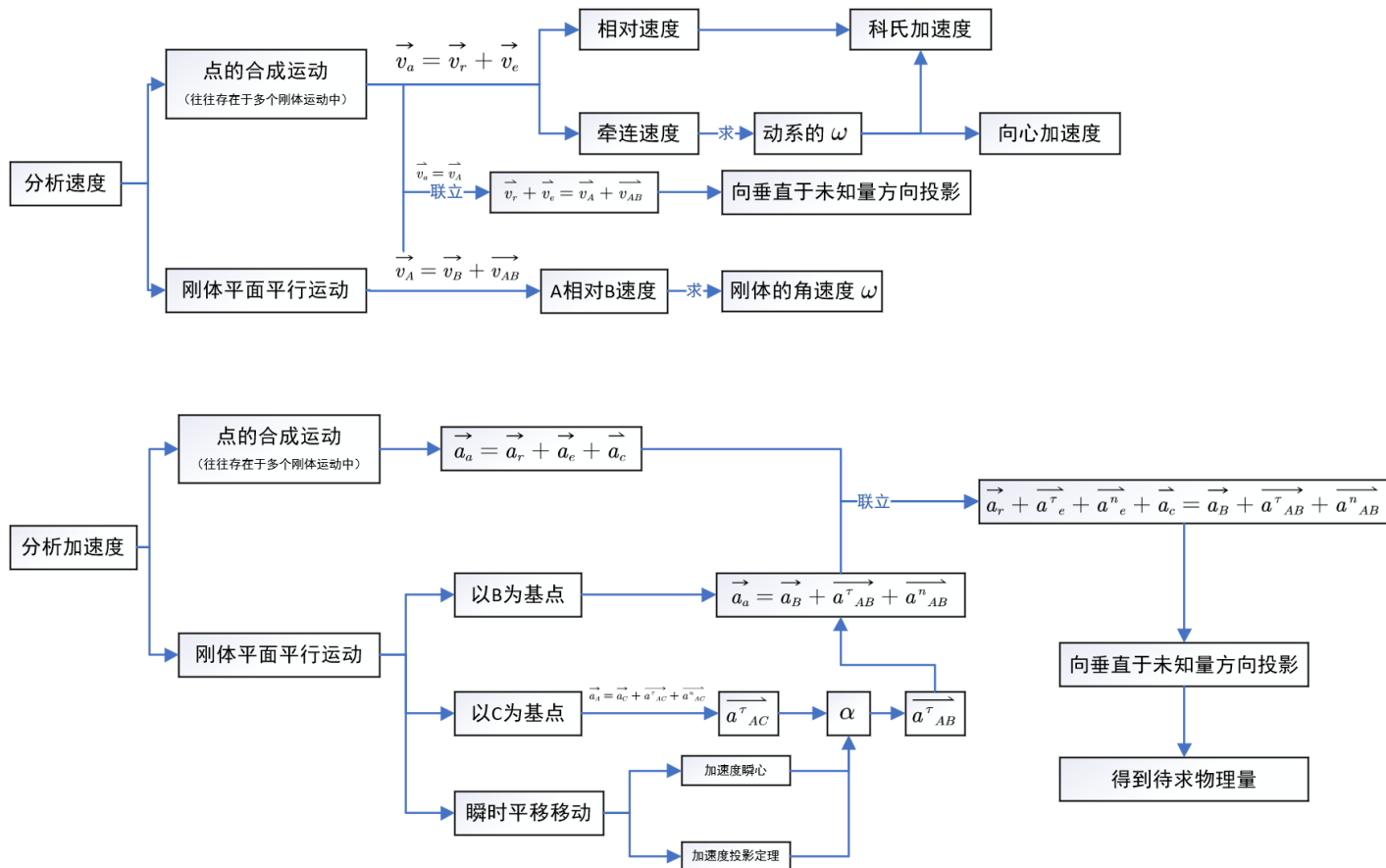
【例】图示机构，滑块B通过连杆AB带动半径为 $r$ 的齿轮O在固定齿条上作纯滚动。已知 $OA = b$ ， $AB = 2b$ ，图示瞬时OB水平，滑块B的速度 $v_B = v_0$ （向上），加速度 $a_B = a_0$ （向下）。求该瞬时齿轮O的角速度和角加速度。



### 三、运动学综合问题

一些琐碎的规律总结：

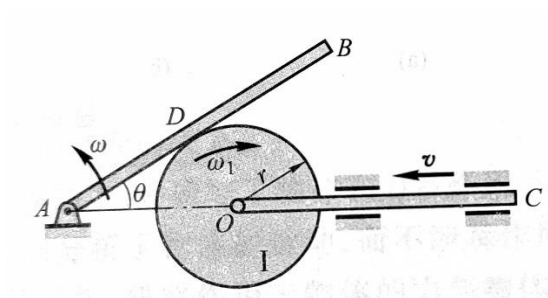
1. 特别额外关注瞬时平移运动，这会给解题带来极大的便捷
2. 绝大多数题基本都能分成两个部分：分析速度，分析加速度  
分析速度与分析加速度均能分成合成运动与刚体平面平行运动两部分



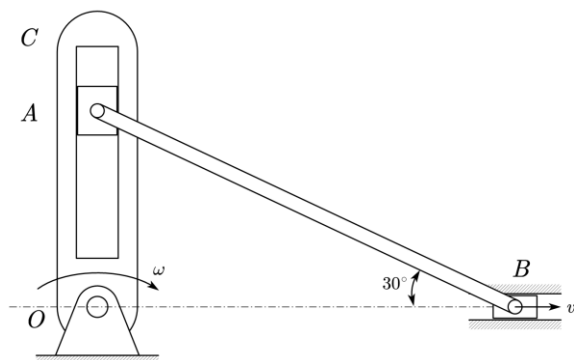
3. 解题步骤：

- (1) 标出已知的速度大小、方向
- (2) 分析速度
- (3) 分析加速度
- (2) (3) 步具体思路见上图

【例】杆 $OC$ 与轮 $I$ 在轮心 $O$ 处铰接并以匀速 $\vec{v}$ 水平向左平移，如图所示。起始时点 $O$ 与点 $A$ 相距 $l$ ，杆 $AB$ 可绕 $A$ 轴定轴转动，与轮 $I$ 在点 $D$ 接触，接触处有足够大的摩擦使之不打滑，轮 $I$ 的半径为 $r$ 。求当 $\theta = 30^\circ$ 时，轮 $I$ 的角速度 $\omega_1$ 和杆 $AB$ 的角速度。



【例】如图所示平面机构， $AB$ 长为 $l$ ，滑块 $A$ 可沿摇杆 $OC$ 的长槽滑动。摇杆 $OC$ 以匀角速度 $\omega$ 绕 $O$ 转动，滑块 $B$ 以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时 $OC$ 铅垂， $AB$ 与水平线 $OB$ 夹角为 $30^\circ$ 。求此瞬时杆 $AB$ 的角速度及角加速度。



【例】曲轴 $OA$ 以角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕 $O$ 轴转动，并带动等边三角形板 $ABC$ 作平面运动。板上点 $B$ 与杆 $O_1B$ 铰接，点 $C$ 与套管铰接，而套管刻在绕轴 $O_2$ 转动的杆 $O_2D$ 上滑动，如图所示。已知 $OA = AB = O_2C = O_1B = 1\text{m}$ ，当 $OA$ 水平、 $AB$ 与 $O_2D$ 铅垂、 $O_1B$ 与 $BC$ 在同一条直线上时，求杆 $O_2D$ 的角速度与角加速度。

