T 班概率论辅学——概率大题特训

一、 必备基础知识

1.1 概率公式

前提	公式
事件A,B互斥	$P(A\cup B)=$ 可加性 $P(A)+P(B)$
$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$事件两两互斥 $2\to n$	$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$
$A\subset B$	$P(B-A)=P(B)-P(A)$
无前提，适用于任何情况	$P(B-A)=P(B)-P(AB)$
无前提，适用于任何情况	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

1.2 事件转换公式

前提	公式
无前提，适用于任何情况	$\overline{A}=S-A$
无前提，适用于任何情况	$A(B\cup C)=AB\cup AC$
无前提，适用于任何情况	$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$
无前提，适用于任何情况	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ ，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

1.3 条件概率

前提	公式
无前提，适用于任何情况	条件概率：$P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{N(AB)}{N(B)}$
无前提，适用于任何情况	$P(B\|A)=1-P(\bar{B}\|A)$
$B_1,B_2,B_3,\cdots,B_n$两两互斥	$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\|A)$
无前提，适用于任何情况	$P(B_1\cup B_2\|A)=P(B_1\|A)+P(B_2\|A)-P(B_1B_2\|A)$
$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$两两互斥，且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$	全概率公式：$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)$ $=P(B\|A_1)P(A_1)+P(B\|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B\|A_n)P(A_n)$ 贝叶斯公式：$P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B\|A)\times P(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\|A_i)P(A_i)}$

注：$P(B|A)=1-P\left(B|\overline{A}\right)$成立吗？✗

1.4 一维随机变量的概率分布及其期望、方差

1.4.1 离散型随机变量

$n\to\infty$

分布	符号表示	概率分布函数	期望	方差
二项分布	$X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=1,2,3,\ldots,n)$	np	$np(1-p)$
两点分布	$X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ (k=0,1)$	p	$p(1-p)$
泊松分布	$X\sim\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=1,2,3,\ldots,n)$	λ	λ

1.4.2 连续型随机变量

分布	符号表示	概率密度函数	期望	方差
均匀分布	$X\sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & else\end{cases}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$X\sim e(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
标准正态分布	$X\sim N(0,1)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\phi(x)$ $\quad \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$	0	1

二、 期末真题特训

2.1 抽象事件变换概率计算

(2020-2021 期末真题) A,B 为任意两个随机事件，有：$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有（ C ）

$\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}$

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　B. $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P((S-A)B)}{P(S-A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

(2020-2021 期末真题) 设 A 与 B 互为对立事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列各式中错误的是（ A ）

$\boxed{A \mid B}$

A. $P(\overline{B}|A)=\cancel{0}\ 1$　B. $P(A|B)=0$.　C. $P(AB)=0$　D. $P(A\cup B)=1$

$$\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(A(S-B))}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=1$$

$P(AB)=P(A)P(B)$

(2015-2016 期末真题) 已知随机事件 A,B 相互独立，$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，$P(B-A)=?$ 0.2

$$P(A-B)=P(A)-P(BA)=P(A)-P(B)P(A)=0.3\Rightarrow P(A)=0.6$$

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.6\times0.5=0.2$$

(2015-2016 期末真题) A,B 为任意两个随机事件，则（ C ）

$P(AB)=P(A|B)P(B)\geq P(A)P(B)$ $\leq$?

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　D. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$　$P(B-A)=P(B)-P(AB)$　$P(A\cup B)\geq P(AB)$

$P(AB)\leq\frac{P(A)+P(B)}{2}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB)\geq 2P(AB)$$

(2015-2016 期末真题) 记随机事件 A={甲种产品畅销而乙种产品滞销}，则对立事件 $\overline{A}$ 为 甲滞销或乙畅销

$\overline{甲\cap\bar{乙}}=\bar{甲}\cup\bar{\bar{乙}}=\bar{甲}\cup乙$

2.2 实际问题概率计算

2.2.1 条件概率

击中、击落

（2020-2021 期末真题）甲、乙、丙 3 人同时独立地对飞机射击一次，3 人击中飞机的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7；飞机被一人击中后而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若 3 人都击中，飞机必定被击落。$p=1$

求（1）飞机被击落的概率；

（2）当飞机被击落时，是由几个人击中飞机的可能性最大？ 1,2,3 P 2

一人击中：甲/乙/丙 击落？ $\times 0.2$

二人击中：甲乙/甲丙/乙丙 $\times 0.6$

三人击中：甲乙丙 $\times 1$

(1) $P_1 = 0.4\times0.5\times0.3\times0.2 + 0.6\times0.5\times0.3\times0.2 + 0.6\times0.5\times0.7\times0.2$ $\quad P\{A|B_1\}\cdot P\{B_1\}$

$+ 0.4\times0.5\times0.3\times0.6 + 0.4\times0.5\times0.7\times0.6 + 0.6\times0.5\times0.7\times0.6$ $\quad + P\{A|B_2\}\cdot P\{B_2\}$

$+ 0.4\times0.5\times0.7\times1 = 0.458$ $\quad + P\{A|B_3\}\cdot P\{B_3\}$

(2) 设由 i 个人击中飞机为事件 B_i，$i=1,2,3$

飞机击落为事件 A

$$P\{B_1|A\} = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.2\times(0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7)}{0.458} = \frac{36}{229}$$

$$P\{B_2|A\} = \frac{P\{A|B_2\}P\{B_2\}}{P\{A\}} = \frac{0.6\times(0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7)}{0.458} = \frac{123}{229}$$

$$P\{B_3|A\} = \frac{P\{A|B_3\}P\{B_3\}}{P\{A\}} = \frac{1\times(0.4\times0.5\times0.7)}{0.458} = \frac{70}{229}$$

$P\{B_2|A\} > P\{B_3|A\} > P\{B_1|A\}$

（2015-2016 期末真题）某商场为甲乙丙三个厂家销售同类型号的家用电器，这三个厂家的产品比例是 $\overset{\frac{2}{5}:\frac{2}{5}:\frac{1}{5}}{2:2:1}$，次品率为 0.1, 0.15, 0.35，某顾客从这些产品中任意选购一件：

$$\begin{cases} 甲\to 次 \times 0.1 \\ 乙\to 次 \times 0.15 \\ 丙\to 次 \times 0.35 \end{cases}$$

（1） 求顾客买到次品的概率 p_1；

（2） 若已知顾客买到的$\overset{A}{是正品}$，求它是乙厂生产的概率 p_2；

(1) $p_1=\frac{2}{5}\times 0.1+\frac{2}{5}\times 0.15+\frac{1}{5}\times 0.35=0.17$

(2) 设是乙厂生产为事件B，买到正品为事件A

$$P\{B|A\}=\frac{P\{AB\}}{P\{A\}}=\frac{P\{A|B\}P\{B\}}{P\{A\}}=\frac{0.85\times 0.4}{0.83}=\frac{34}{83}$$

来 → $\boxed{W_1}$ → $\boxed{W_2}$ → 男
$\boxed{W_1} \xrightarrow{男} \boxed{W_2}$

（2014-2015 期末真题）病人到某医院科室就诊，先进入导诊室 W_1，再进入候诊室 W_2 内候诊，现假设导诊室 W_1 内有 2 名男士与 1 名女士，候诊室 W_2 里有 1 名男士与 2 名女士，医生从 W_2 随机叫出一人之前，有一个人从 W_1 进入 W_2 去候诊，已知被医生从 W_2 叫出的人恰好是男士，求从导诊室 W_1 进入候诊室 W_2 的人也是男士的概率。

W_1：2男1女

W_2：1男2女

A

B

$$\begin{cases} W_1\to W_2 为男: & W_2: 2男2女 \\ W_1\to W_2 为女: & W_2: 1男3女 \end{cases}$$

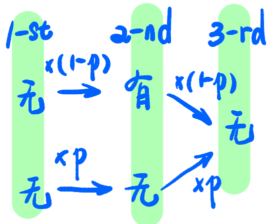
$$P\{B|A\}=\frac{P\{A|B\}P\{B\}}{P\{A\}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

2.2.2 递推公式（差分方程）题型

（2017-2018 期末真题）假设只考虑大气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为 p，变的概率为 1-p。设事件 A_i 为“第 i 天无雨”，记 $p_i = P(A_i), i = 1, 2, \cdots$。设第一天无雨，

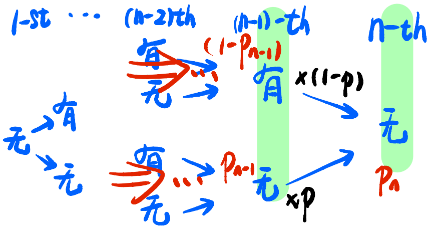
对立

（1） 求第三天无雨的概率 p_3；（2）求第 n 天也无雨的概率 p_n 以及 $\lim_{n\to\infty} p_n$



(1) $p_3 = 1\times(1-p)^2 + p^2 = 2p^2-2p+1$

(2)



$p_n=(1-p)\times(1-p_{n-1})+p\times p_{n-1}$

$=(2p-1)\times p_{n-1}+(1-p)$

$p_n-m=(2p-1)(p_{n-1}-m)$

$p_n=(2p-1)p_{n-1}-(2p-2)m$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$

$p_n-\frac{1}{2}=(2p-1)(p_{n-1}-\frac{1}{2})$

$\frac{p_n-\frac{1}{2}}{p_{n-1}-\frac{1}{2}}=2p-1$

$p_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(2p-1)^{n-1}$

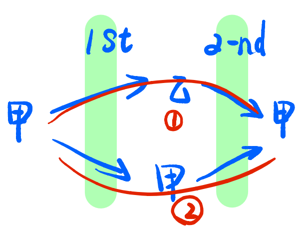
即：$p_n=\frac{1}{2}\times(2p-1)^{n-1}+\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$

（2016-2017 期末真题）甲口袋有 1 个黑球，2 个白球，乙口袋有 3 个白球，每次从两个~~白球~~口袋中各取一球，交换后放入另一口袋，设 A_i：第 i 次交换后黑球在甲口袋中，$p_i = P(A_i), i = 0, 1, 2, \cdots$

（1） 求交换两次后，黑球在甲口袋的概率 p_2；

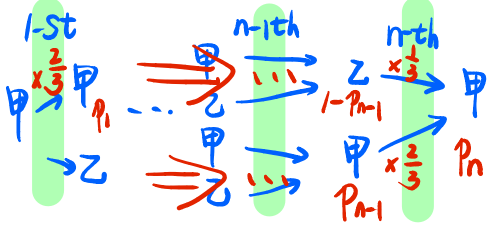
（2） 求交换 n 次后，黑球在甲口袋的概率 p_n，$\lim_{n\to\infty} p_n$。



(1) $p_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$

① ②

(2)



$p_n=\frac{1}{3}\times(1-p_{n-1})+\frac{2}{3}\times p_{n-1}$

$=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}$

$\Rightarrow p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(p_{n-1}-\frac{1}{2})$

$\frac{p_n-\frac{1}{2}}{p_{n-1}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

$p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times(\frac{1}{3})^{n-1}$

$p_n=\frac{1}{6}\times(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$