应力和应变分析
应力状态概述

我们一般通过选取不同的单元体描述该杆件的应力状态，但是随所取方位的不同，单元体各面上的应力也就不同。
围绕A点取出的单元体，一般在三个方向上的尺寸均为无穷小，以致于可以认为它的每一个面上应力都是均匀的；且在单元体内相互平行的截面上，应力都是相同的，同等于通过A点的平行面上的应力

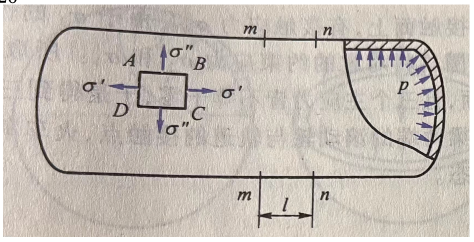
主应力的概念

单元体的三个相互垂直面上都无切应力，这种**切应力为0的平面**称为主平面，**主平面上的正应力**称为主应力

对简单拉伸（或压缩）三个主应力中只有一个不为0，称为单向应力状态
若三个主应力中有两个不为0，称为双向应力状态
当三个主应力皆不等于0时，称为三向应力状态，本章从二向应力状态开始分析

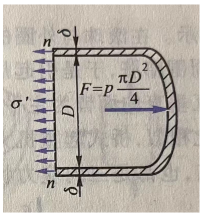
二向应力状态实例
锅炉或其他圆筒形容器的应力状态

当壁厚δ远小于内径D时，即：$\delta < \frac{D}{20}$时，称为薄壁圆筒。



横截面上的应力

假设封闭薄壁圆筒所受内压为p，沿圆筒轴线作用于筒底的总压力为F，如下图所示：



且有：

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

沿圆筒轴线方向上的面积为：

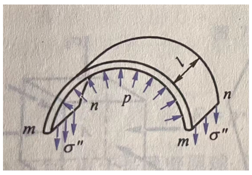
$$A = \pi D \delta$$

所以薄壁圆筒轴向方向横截面上的应力为：

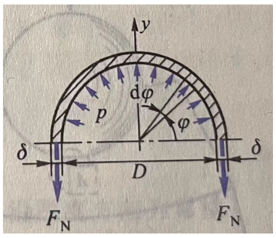
$$\sigma' = \frac{F}{A} = \frac{p \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D \delta} = \frac{\pi D}{4\delta}$$

纵向截面上的应力

对沿圆筒表面切线方向上的应力，如下图所示：



此时需要通过积分计算p对侧面的力



考虑微元$\mathrm{d}\varphi$，$dF = p\cdot\mathrm{d}\varphi\frac{D}{2}l$
其在y方向上的投影之和为：

$$F = \int_0^{\pi} p\frac{D}{2}l\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = plD$$

则两侧截面分担内力：

$$F_N = \frac{F}{2}$$

截面面积：

$$A = \delta l$$

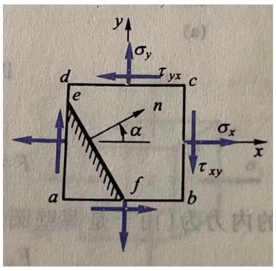
应力：

$$\sigma'' = \frac{F_N}{A} = \frac{plD}{2\delta l} = \frac{pD}{2\delta}$$

可以发现：$2\sigma' = \sigma''$
说明纵向截面上的应力较横截面上的应力更大，且为横截面上应力的2倍

二向应力状态分析——解析法

在下图所示单元体各面上，设应力分量σ_x，σ_y,τ_{xy}，τ_{yx}均为已知，其余各应力分量均为0，这种应力状态被称为平面应力状态。



符号说明：
σ_x：法线与x轴平行的面上的正应力；
τ_{xy}：法线与x轴平行的面上的切应力；

σ_y：法线与y轴平行的面上的正应力；
τ_{yx}：法线与y轴平行的面上的切应力；
切应力的第一个角标：表示切应力作用平面的法线方向；第二个角标：切应力的方向平行于y轴（或x轴）

符号规定：
正应力以拉应力为正，而压应力为负；
切应力对单元体内任意点的矩为顺时针转向时，规定为正，反之为负；

现在考虑任一截面上的正应力与切应力大小，即上图中ef平面上正应力与切应力的大小
通过列写aef面上的平衡方程可以求得：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

可以发现，斜截面上的正应力σ_α与切应力τ_α随着α角的变化而变化，利用以上公式即可确定正应力和切应力的极值，并确定他们所在平面的位置
对α求导数，得：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = -2\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\right]$$

若$\alpha = \alpha_0$时，能使导数为0，则此时：

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

由该公式可以得到两个相差90°的角度，他们确定两个互相垂直的平面，其中一个是最大正应力所在平面，另一个是最小正应力所在平面。且此时刚好能令τ_α为0，也就是说，主应力就是最大或最小的正应力，通过上式能求出主应力的方位
将α_0代入σ_α的表达式，可求出：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

> 主应力方位取法：
> $\sigma_{\max}$发生在切应力指向相对的象限内。

同理：可求出最大切应力与其所在位置：

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

位置：

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

二向应力状态分析——图解法

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

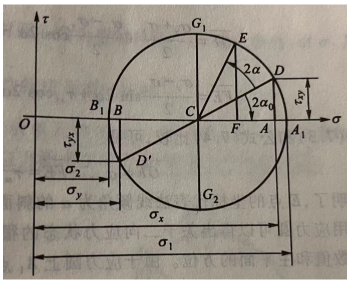
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

以上两式两边同时平方并且两式相加可得：

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

该式是以σ_α与τ_α为变量的圆方程，圆心坐标为$(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0)$，半径为$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$,该圆称作应力圆。

应力圆的做法：



如上图所示：
取横坐标$\bar{OA} = \sigma_x$，纵坐标$\bar{AD} = \tau_{xy}$，确定D点，D点坐标代表以x轴为法线的面上的应力
取横坐标$\bar{OB} = \sigma_y$，纵坐标$\bar{BD'} = \tau_{yx}$，确定D'点，D'点坐标代表以y轴为法线的面上的应力
τ_{yx}为负，故D'纵坐标也为负数
现连接DD'，交横轴于C，C点横坐标为：$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$，故$C$为应力圆圆心
应力圆半径：

$$R = \overline{CD} = \sqrt{\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

与上述推导出的应力圆方程相符，故圆C即为应力圆。
并且可以证明：单元体内任意斜面上的应力都对应着应力圆上的一个点，例如，由x轴到任意斜面法线n的夹角为逆时针的α角。在应力圆上，从D点也按逆时针方向沿圆周转到E点，且使得DE弧所对的圆心角为α的2倍，则E点坐标就代表以n为法线的斜面上的应力。

通过应力圆确定主平面方位与主应力的数值

由于应力圆上A_1点的横坐标大于所有其他点的横坐标，而纵坐标为0，故A_1代表最大的主应力

$$\sigma_1 = \overline{OA_1} = OC + CA_1$$

同理：B_1代表最小主应力

$$\sigma_2 = OB_1 = OC - CB_1$$

故有：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

与前文推导的最大最小正应力一致。
同理，上下两点G_1, G_2反映了最大最小切应力，

$$\left.\begin{matrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

在应力圆上由D点到A_1点所对圆心角为顺时针的$2\alpha_0$，在单元体中，由x轴也按顺时针量取α_0，这就确定了σ_1所在主平面的法线的位置，按照关于α的符号规定，顺时针的α_0是负的，$\tan 2\alpha_0$是负值，由应力圆中可看出：

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

三向应力状态

广义胡克定律

各向同性材料

对于单向拉伸或压缩，沿杆轴线方向上有：

$$\sigma = E\varepsilon$$

同时存在横向形变：

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$$

其中μ为材料泊松比。
对剪切，有：

$$\tau = G\gamma$$

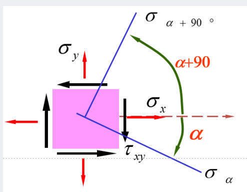
对于各向同性材料，但变形很小且在线弹性范围内时，线应变只与正应力有关，而与切应力无关；切应变只与切应力有关而与正应力无关。所以在分析x方向上的正应变时，可单独考虑三个方向的正应力最后做叠加处理。对于σ_x的单独作用，在x方向上引起的正应变为：$\frac{\sigma_x}{E}$，而σ_y与σ_z单独作用时，在x方向上引起的横向应变则是：$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$与$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$，三个切应力分量与x方向线应变无关，叠加得到：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

同理可得y与z轴方向上的线应变：

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

> 推广：
> 对于二向应力状态下任意方向截面的正应变为
>
> $$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_{\alpha+90^\circ})$$
>
> 
>

而当单元体周围六个面均为主平面时，令：

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3$$

则此时广义胡克定律化为：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

体积弹性模量

变性前六面体体积：

$$V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

变形后体积变为：

$$V_1 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

展开上式并且略去高阶小量，得到：

$$V_1 = (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

单位体积的体积改变：

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

θ被称为体应变。由广义胡克定律得到：

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{3(1-2\mu)}{E}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{\sigma_m}{K}$$

其中：

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

K被称为体积弹性模量，σ_m为三个主应力的平均值，上式被称为体积胡克定律。