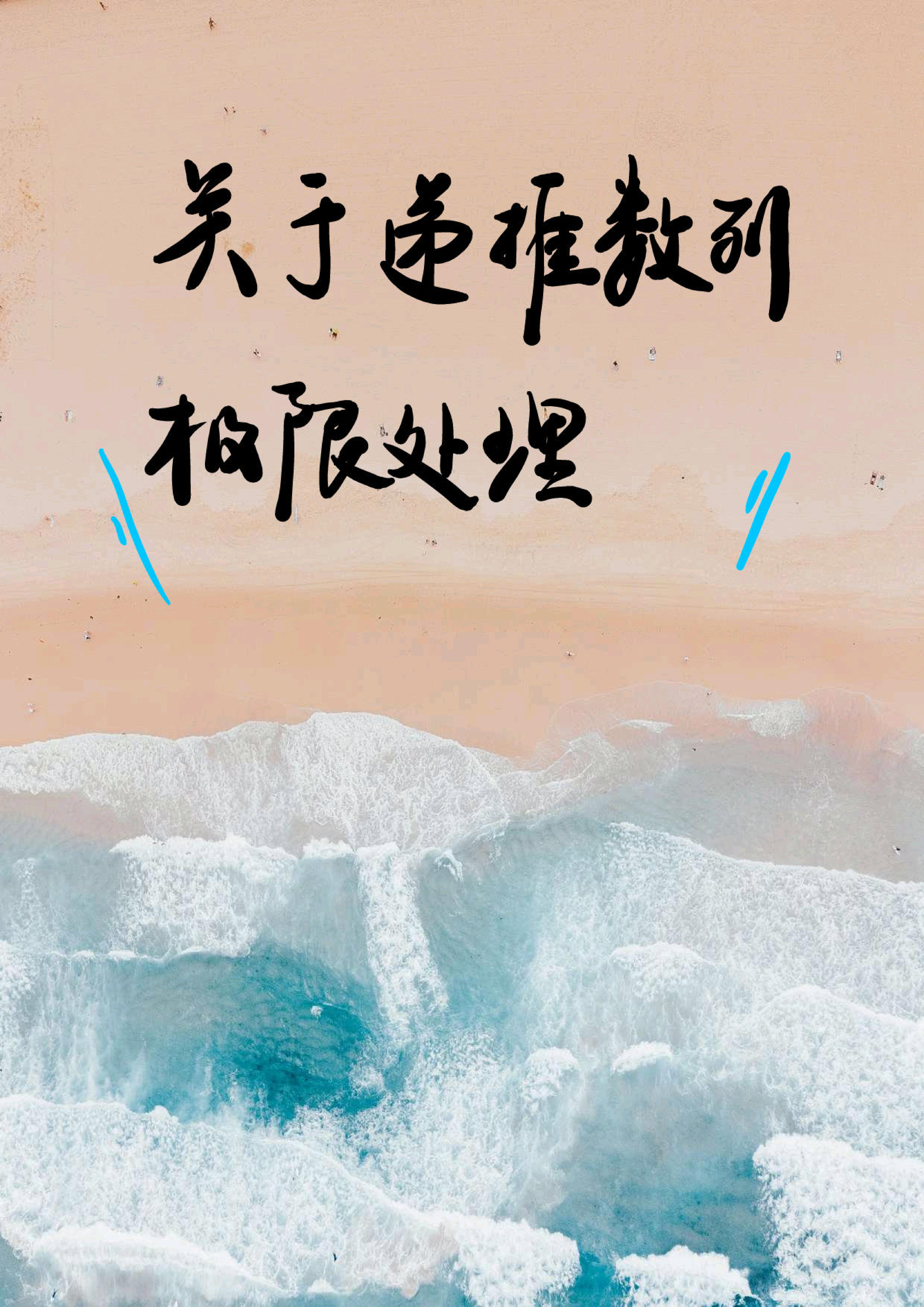
关于递推数列极限处理



递推式⇒单调有界准则!

日期: /

(2020上海交大期中试卷)

（本题是否有界較难看出）

4.设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足: $a_1>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n^2}, b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}, n\in Z^+$，则 D

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$均存在;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$存在, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$存在;

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n^2}>0$

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n^2}=\frac{a_n}{2}+\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

单调有界准则

⇒单调 | 极限??

⇒有界(下界)

不清楚!

$b_n=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_i^2}=\sum_{i=1}^{N}(a_{i+1}-a_i)=a_{i+1}-a_1$

累加法! → 最基本的内容别忘了!

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{i+1}-a_1)$ $\because a_{n+1}$极限不存在 $\therefore b_n$极限不存在!

"极限是否存在"一致!

$\{a_n\}$极限判断: 方法积累!

假设$\{a_n\}$极限存在且为A, 即: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ $\therefore$ 对于"$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n^2}$" ⇒ $A=A+\frac{1}{A^2}$ 无解! $\therefore a_n$极限不存在!

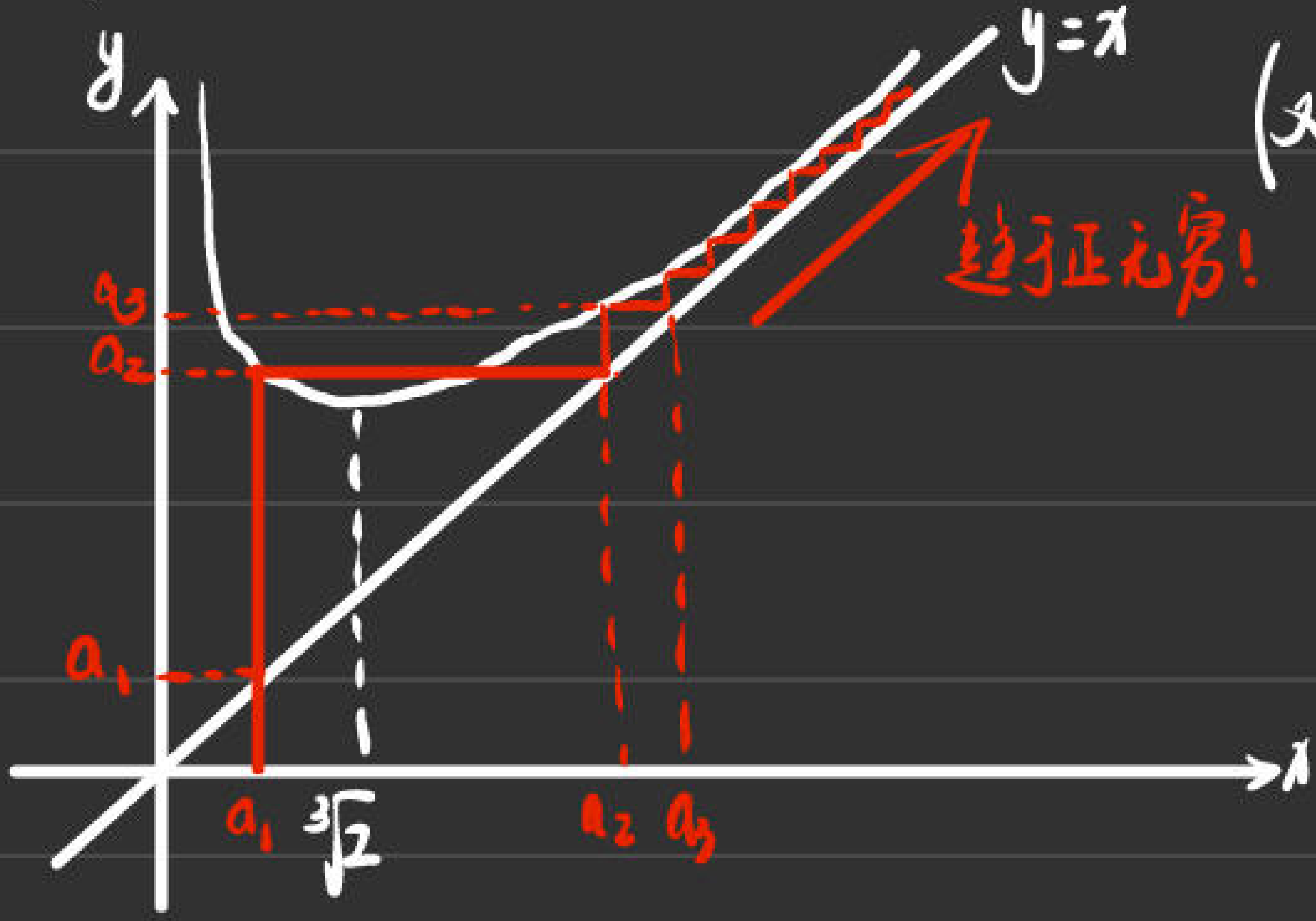
→ 数列极限的特性

极限判断法二: 蛛网图!

$f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

即: $a_{n+1}=f(a_n)$ → 对于这类数列的极限问题都可用这两种方法判断极限是否存在?

$f'(x)=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}\ (x>0)$ 在$(\sqrt[3]{2},+\infty)\uparrow$, 在$(0,\sqrt[3]{2})\downarrow$



（又: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $\therefore y=x$恰是$f(x)$渐近线）

日期:　　/

2\. 若 $x_1=a>0, y_1=b>0, a<b, x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，试证数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

由于 $x+y \geq 2\sqrt{xy}\ (x>0, y>0)$

$\therefore y_{n+1} \geq x_{n+1}$

$\therefore x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2}=x_n,\quad y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2} \leq y_n$

数列独特的单调性比较方法

$\Rightarrow$单调 } 有极限！ 单调有界准则
$\Rightarrow$有界 }

$\therefore a=x_1<x_{n+1} \leq y_{n+1}<y_1=b$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$

数列极限特性

而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n y_n}=\sqrt{\alpha\beta}$

$\Rightarrow \alpha=\beta$

题：设对于每一个整数 $m\geq 0$，由条件 $a_m(0)=\dfrac{d}{2^m}$（d为非零常数）和 $a_m(j+1)=a_m^2(j)+2a_m(j)$，$j\geq 0$，定义数列 $\{a_m(j)\}$ $j=0,1,2,\cdots$ 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(n)=?$

解：由于 $a_m(j+1)=a_m^2(j)+2a_m(j)$　　凑！积累！

$\Rightarrow a_m(j+1)+1=a_m^2(j)+2a_m(j)+1=(a_m(j)+1)^2$

$\Rightarrow a_m(j)+1=[a_m(j-1)+1]^2=[a_m(j-2)+1]^{2^2}=[a_m(j-3)+1]^{2^3}=\cdots=[a_m(0)+1]^{2^j}$

$\Rightarrow a_n(n)+1=[a_n(0)+1]^{2^n}$

$\Rightarrow a_n(n)=\left(\dfrac{d}{2^n}+1\right)^{2^n}-1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{d}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{d}\cdot d}-1=e^d-1$

日期:　　　/

日期:　　　/