日期：　　/

1. 设 $g(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2g(x)$，求 $f''(a)$

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$$ → 是否可导？未知！⇒ 用定义做！而不能继续求导！

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)-0}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(2g(x)+(x-a)g'(x))=2g(a)$$

2. 已知 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f'(x)\neq 0$，试用 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 表示 $\varphi''(y)$，$\varphi'''(y)$

$$\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=-\left[\frac{1}{f'(x)}\right]^2\cdot f''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$\varphi'''(y)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-f''(x)\cdot 3[f'(x)]^2\cdot f''(x)}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=\frac{3[f''(x)]^2-f'''(x)\cdot f'(x)}{[f'(x)]^5}$$

高阶导数计算特训：

1. 设 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2008)$，则 $y^{(2009)}=?$

最高次项为 2009

$\therefore y^{(2009)}=2009\times2008\times2007\times\cdots\times2\times1\times x^0=2009!$

日期:　　　/

2. 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$，则 $f^{(n)}(1)=$ ______

$\begin{matrix} 3 & -2x \\ 1 & 3x \end{matrix}$

$f(x)=\ln(3-2x)(1+3x)=\ln(3-2x)+\ln(3x+1)$

$f'(x)=-2(-2x+3)^{-1}+3\cdot(3x+1)^{-1}$

$f''(x)=(-1)\cdot(-2)^2(-2)(-2x+3)^{-2}+(-1)\cdot3^2(3x+1)^{-2}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(-2)^n\cdot[-(n-1)!](-2x+3)^{-n}+(-1)^{n-1}3^n\cdot(n-1)!(3x+1)^{-n}$

$=-2^n\cdot($

3. $y=x^2\cos2x$，则：$y^{(50)}=$ ______

4. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数为 3

$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x>0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x>0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$　　$f_-'(0)=f_+'(0)=0$ ∴ 存在

$f''(x)=\begin{cases}24x, & x>0\\ 12x, & x<0\end{cases}$　　$f_-'(0)=f_+'(0)=0$ ∴ 存在

即 $f_-'''(x)=12$，$f_+'''(x)=24$ ∴ $f_-'''(x)\neq f_+'''(x)$ ∴ 不存在

日期:　　　/

5. 证明: $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ （$x>0$时）（利用导数研究函数的性质）

令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 　　$f(0)=0$

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 　　$f'(0)=0$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+x)-x(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$=\underline{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}>0$

$f''(x)=\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}>0$ 　$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增. $\therefore f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 　$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore\ 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

日期:　　　/