高数笔记(三)

无穷级数

第一节 常数项级数的概念与性质

一. 常数项级数 $u_1, u_2 \dots u_n \dots$

$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 无穷级数　　u_n：一般项

前n项之和：$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 部分和　　$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, ...

1. 定义：$\lim_{n\to\infty} S_n = S \longrightarrow$ 无穷级数收敛，否则发散 ← 无穷/没有极限

2. 余项：$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

记!

★例1：$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \to$ 等比级数/几何级数 $(a \neq 0)$　q：公比　　收敛：(无穷多项)

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^{i-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} aq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

① $|q|<1$，$q^n \to 0\ (n\to\infty)$ 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

② $|q|>1$，$q^n \to \infty\ (n\to\infty)$ 则 发散

$\boxed{\begin{array}{l} |q|<1，收敛 \\ |q|\geq 1，发散 \end{array}}$

③ $|q|=1$

$$\begin{cases} q=1, & \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} an \text{ 发散} \\ q=-1 & a-a+a-a+\cdots\cdots \begin{cases} \text{奇数项} \to a \\ \text{偶数项} \to 0 \end{cases} \end{cases}$$

∴极限不存在，发散!

例2：$1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 发散

例3：$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$　　$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$　　$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

例4：调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散

日期: /

3.性质: (一般意义)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 ks $(k\neq 0)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 和 σ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛且 $= s \pm \sigma$

两个收敛的级数相加减相减后仍然收敛

不是无穷多项

(3) 去掉、加上、改变级数的有限项，敛散性不变，不是和不变!!!

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，任意加括号后，得到的级数也收敛且和不变 反(加括号后收敛，原级数未必收敛)

加括号以后发散，原级数一定发散 加括号⇒子数列

(5) 收敛必要条件: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 反 ($u_n \to 0$，级数未必收敛)

($u_n = S_n - S_{n-1}$) ($u_n \not\to 0$，级数必发散)

逆否命题: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

日期:　　/

判断任意项级数的流程
- 绝对收敛
- 条件收敛
- 发散

① 绝对收敛：$\sum |u_n|$ 收，$\sum u_n$ 收

正项级数

② 条件收敛：$\sum |u_n|$ 发，$\sum u_n$ 收

多见交错级数　　莱布尼茨定理

收

③ 发散：$\sum u_n$ 发散 $\rightarrow$ $\sum |u_n|$ 发散

通项不 $\rightarrow 0$ / 定义

日期 **总结**

常数项级数通用结论:

① 级数定义: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ 存在,则级数收敛

② 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0 \Rightarrow$ 发散

③ 等比级数 $a_n=aq^n$. $\begin{cases} |q|<1,\ \text{收敛},\ S=\frac{a}{1-q} \\ |q|\geq 1,\ \text{发散} \end{cases}$

④ 调和级数 $a_n=\frac{1}{n}$ 发散

⑤ p-级数 $a_n=\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} |p|\leq 1 & \text{发散} \\ |p|>1 & \text{收敛} \end{cases}$

正项级数审敛法:

和谁比?等比,调和,p

① 比较审敛法: $u_n\leq v_n$ $\begin{cases} u_n\text{发散}\Rightarrow v_n\text{发散} \\ v_n\text{收敛}\Rightarrow u_n\text{收敛} \end{cases}$

u_n收敛 $\Rightarrow$ v_n无法判断

v_n发散 $\Rightarrow$ u_n无法判断

② 比较审敛法的极限形式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$.

① $0<l<+\infty$ 二者具有相同的敛散性

② $l=0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

③ $l=+\infty$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

③ 比值审敛法: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ $\begin{cases} \rho<1, & \text{收敛} \\ \rho>1, & \text{发散} \\ \rho=1\ \text{或不存在} & \Rightarrow\text{无法判断} \end{cases}$

④ 根式审敛法: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ $\begin{cases} \rho<1, & \text{收敛} \\ \rho>1, & \text{发散} \\ \rho=1\ \text{或不存在} & \Rightarrow\text{无法判断} \end{cases}$

日期: /

交错级数审敛法: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

莱布尼茨定理:

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}u_n=0\\ u_n\geq u_{n+1}\ (\text{单减})\end{cases}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\text{收敛}$$

单增?

任意项级数审敛法:

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛

如何判断?正项级数审敛法!

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散?

只有用比值审敛法或根式审敛法推出的"$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散"才能推出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

若用比较审敛法推出发散?无法判断u_n敛散性

将$\frac{1}{x^2}$展成有关$x+1$的幂函数

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{[1-(x+1)]^2}\overset{x+1=t}{=\!=\!=}\frac{1}{(1-t)^2}=\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\ (-1<t<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\ (-2<x<0)$$

日期：考虑到时间关系，下册书不做笔记，只记录题型，以及偏冷门知识

第八章 向量

1. 向量的模，又称范数
   - 高数表示：$|\vec{a}|$
   - 线代表示：$\|\vec{a}\|$

2. 混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

如何理解？$\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}$构成平行六面体，如何选取底面积和高是无法改变其体积的，也就意味着混合积相等

3. 例 3　求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

由于平面通过x轴，$\therefore \vec{n}\perp$ x轴

设 $\vec{n}=(0,B,C)$

设平面方程为 $By+Cz=0$ // D??? 原点也在x轴上，也在平面上！

由于 $(4,-3,-1)$ 在平面上 $\therefore -3B-C=0$ 即：$C=-3B$

$\therefore$ 平面方程为：$By-3Bz=0 \Rightarrow y-3z=0$

消B！

4. 例 1　用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$$

1° 取点：设直线上一点 $A(x_0,y_0,z_0)$

则：不妨取 $x_0=1$，则：$\begin{cases} y+z+1=0 \\ 6-y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{4} \\ z=-\frac{7}{4} \end{cases}$

$\therefore A(1,\frac{2}{4},-\frac{7}{4})$ 在直线上！

2° 取方向向量！

由平面方程得 两平面法向量分别为 $\vec{n_1}=(1,1,1)$　$\vec{n_2}=(2,-1,3)$

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})-(-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

$\therefore$ 由对称式：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-\frac{2}{4}}{-1}=\dfrac{z+\frac{7}{4}}{-3}$　$\therefore$ 参数方程：$\begin{cases} x=4t+1 \\ y=-t+\frac{2}{4} \\ z=-3t-\frac{7}{4} \end{cases}$

日期: /

☆ 多元函数极限求法 — 夹逼定理:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|+|y|}{2|x|\cdot|y|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=0$

∴ 原式 $=0$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{2}\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}=0$$

∴ 原式 $=0$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

☆ 多元函数极限求法 — 0×有界=0

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} x\cdot \sin\dfrac{1}{x+y} = 0$

$0 \times$ 有界 $=0$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} x\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2} = 0$

$0 \times$ 有界: $0 \le \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$

$=0$

日期:　　/

好题积累:

例1　$\vec{a},\vec{b}$ 非0. $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{4}$

求: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+\vec{b}x|-|\vec{a}|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(|\vec{a}+\vec{b}x|-|\vec{a}|)(|\vec{a}+\vec{b}x|+|\vec{a}|)}{x(|\vec{a}+\vec{b}x|+|\vec{a}|)}$

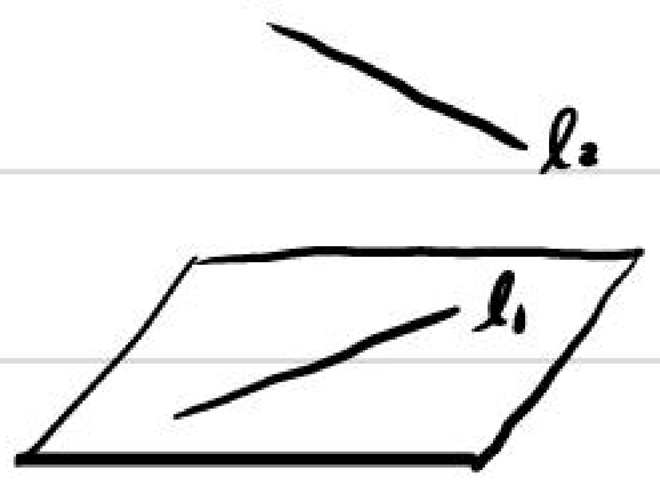
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}x+\vec{b}\cdot\vec{b}x^2-\vec{a}\cdot\vec{a}}{x(|\vec{a}+\vec{b}x|+|\vec{a}|)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}x}{|\vec{a}+\vec{b}x|+|\vec{a}|}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 求两异面直线间距离: 答案: $d=\frac{8}{\sqrt{26}}$　4种方法　等体积 投影 垂足 ①常规.

$$\begin{cases} L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2} & \vec{s_1} \\ L_2: \frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3} & \vec{s_2}\end{cases}$$ 之间距离 d.

① 过 l_1 做平面 π, 使得 $\pi \parallel l_2$



$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,2,2\}\times\{0,1,3\}$

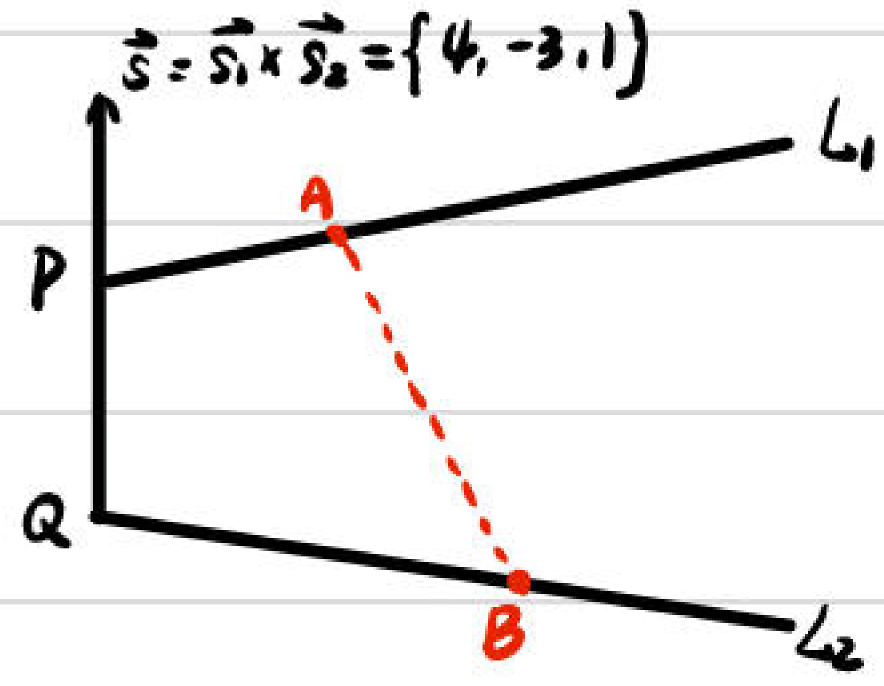
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\vec{i}+\vec{k}-2\vec{i}-3\vec{j}=4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

而: $A(1,0,-1)$ 在 l_1 上, $B(-1,1,2)$ 在 l_2 上

∴ 平面方程为: $4(x-1)-3(y)+(z+1)=0 \Rightarrow 4x-3y+z-3=0$

∴ B到平面距离即为异面直线间距离: $d=\frac{|-4-3+2-3|}{\sqrt{26}}=\frac{8}{\sqrt{26}}$

②

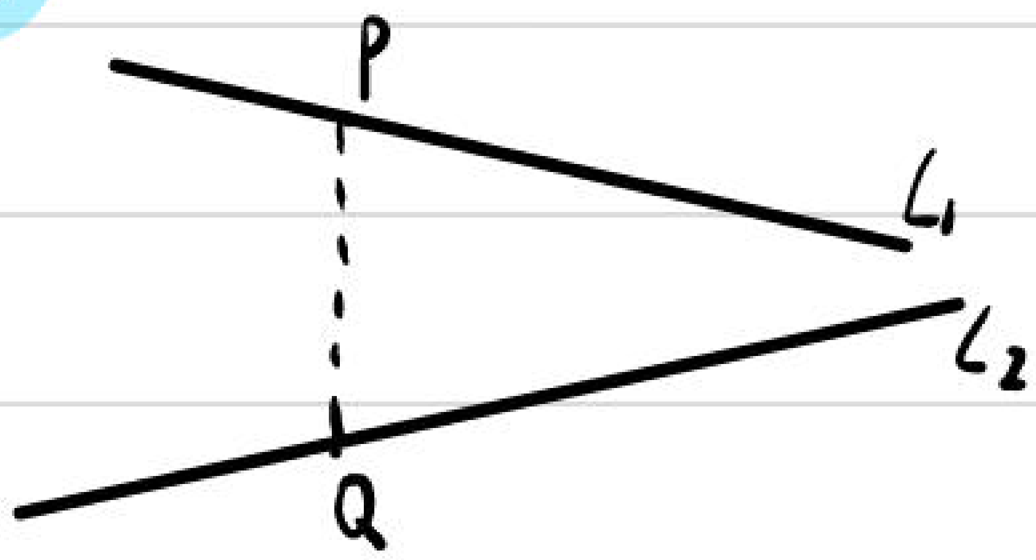


取 $A(1,0,-1)$ $B(-1,1,2)$, $\vec{AB}=(-2,1,3)$

$d=Prj_{\vec{s}}\vec{AB}$

$$=|\vec{AB}|\cdot\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{s}})=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{|-8-3+3|}{\sqrt{26}}=\frac{8}{\sqrt{26}}$$

③



$L_1: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = 2t-1 \end{cases}$　　$L_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda+1 \\ z = 3\lambda+2 \end{cases}$

∴ 取 $P(t+1, 2t, 2t-1)$　$Q(-1, \lambda+1, 3\lambda+2)$

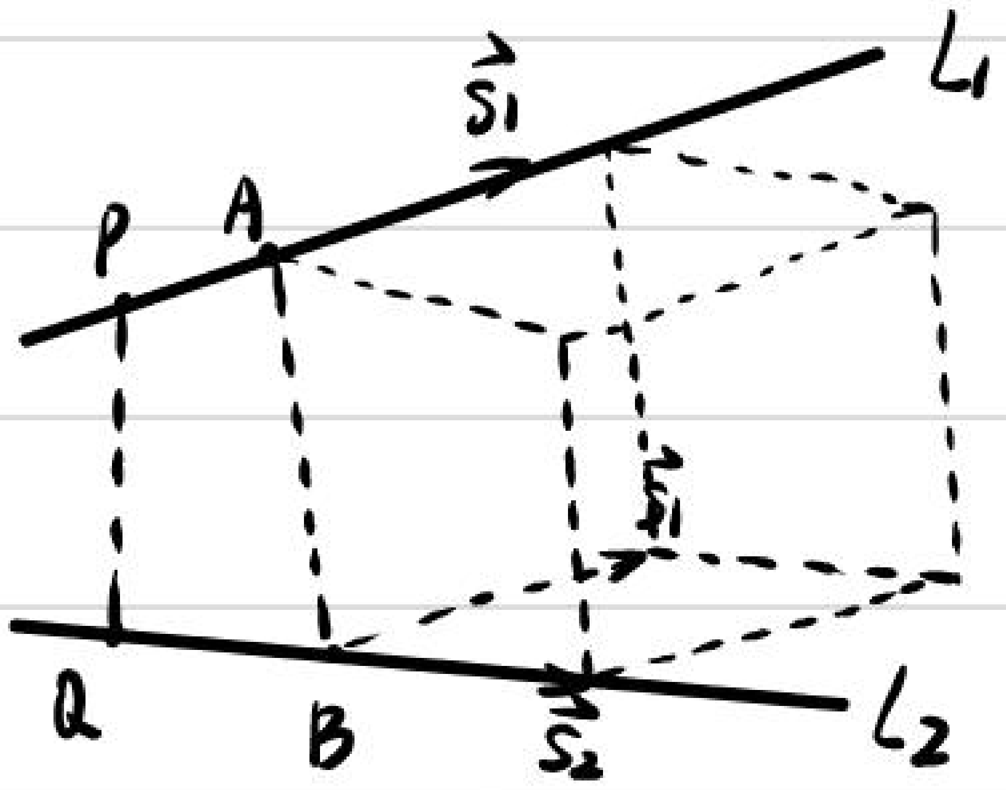
而: $\vec{PQ} \parallel \vec{s_1} \times \vec{s_2}$

$\vec{PQ} = (-2-t, \lambda-2t+1, 3\lambda-2t+3)$

$\vec{s} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

∴ $\frac{-2-t}{4} = \frac{\lambda-2t+1}{-3} = \frac{3\lambda-2t+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = ? \\ t = ? \end{cases}$ $P? Q? \Rightarrow |\vec{PQ}|$ ✓

④



$V = |(\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \vec{AB}| = |\vec{s_1} \times \vec{s_2}|\, d$ ↳所求

例3: 求过 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1: \begin{cases} y = 2x \\ z = x-1 \end{cases}$，$L_2: \begin{cases} y = 3x-4 \\ z = 2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L

取 $A(0,0,-1) \in L_1$，$B(0,-4,-1) \in L_2$

设 L 方向向量为 $\vec{s} = (m,n,p)$，$\vec{s_1} = (1,2,1)$　$\vec{s_2} = (1,3,2)$

$\vec{AM_0} = (1,1,2)$　$\vec{BM_0} = (1,5,2)$

依题意 (相交)　混合积

$\begin{cases} L与L_1相交 & \begin{array}{c} \vec{s} \\ \vec{s_1} \\ \vec{AM_0} \end{array} \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ L与L_2相交 & \begin{array}{c} \vec{s} \\ \vec{s_2} \\ \vec{BM_0} \end{array} \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = ?p \\ n = ?p \end{cases} \Rightarrow \vec{s} = (?p, ?p, ?p) \Rightarrow \vec{s}$ ✓ $+ M_0 \Rightarrow$ 方程 ✓

日期:　　　/

日期:　　　/

日期:　　　/