用定义证明数列极限方法

积累

日期: /

一、(常规)倒推法

1° $\forall \varepsilon>0$

由不等式反解出 n　　　适当放大! + 技巧

2° 要使 $|x_n-a|<\varepsilon$, 只需要 $n>\underline{?}$

3° 故取 $N=[?]$, 则 $n>N$ 时, $|x_n-a|<\varepsilon$

例: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0\ (|q|<1)$

额外记一个取对数的方法!

$\forall \varepsilon>0$, 要使 $|q^n|<\varepsilon$, 只需: $n\ln q<\ln\varepsilon$, $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}$

故取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, $|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon$

二、分子有理化

原理: $1=(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+1}-n)$

例: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$

有理化　　　适当放大

$\forall \varepsilon>0$, 要使 $|\sqrt{n^2+1}-n|<\varepsilon$, 只需 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\varepsilon$, 即: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon$, $n>\frac{1}{2\varepsilon}$

$\therefore$ 取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, $|\sqrt{n^2+1}-n|<\varepsilon$

例: 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$

$\forall \varepsilon>0$, 要使 $|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}|<\varepsilon$, 只需 $\frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}=\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}$

有理化

$=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}-\frac{1}{2}<\varepsilon$, 得: $n>\frac{(2\varepsilon+1)^2}{8\varepsilon}$

$\therefore$ 取 $N=\left[\frac{(2\varepsilon+1)^2}{8\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, $|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}|<\varepsilon$

日期:　　/

三.牛顿二项式定理

原理: $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$

例: 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\forall\varepsilon>0$,

凑!

$\because \boxed{n=\left[1+(\sqrt[n]{n}-1)\right]^n=1+n(\sqrt[n]{n}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{n}-1)^n}$ ☆

$\therefore n>\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \Rightarrow \sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$\therefore$ 要使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 只需 $|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$, 得 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$

$\therefore$ 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$, 使 $n>N$ 时, $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

该方法在"无穷小章节"中的应用:

例: 证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+\frac{1}{n}x}=1$

法一:

凑!

$\because \boxed{\cancel{1}+x=\left[1+(\sqrt[n]{1+x}-1)\right]^n=\cancel{1}+n\cdot(\sqrt[n]{1+x}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{1+x}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{1+x}-1)^n}$

$\Rightarrow x=n\cdot(\sqrt[n]{1+x}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{1+x}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{1+x}-1)^n$

$\Rightarrow \frac{1}{n}x=(\sqrt[n]{1+x}-1)+\frac{n-1}{2}(\sqrt[n]{1+x}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{1+x}-1)^n$

$\therefore$ 要证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+\frac{1}{n}x}=1$,

只需证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{(\sqrt[n]{1+x}-1)+\frac{n-1}{2}(\sqrt[n]{1+x}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{1+x}-1)^n}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{n-1}{2}(\sqrt[n]{1+\underset{0}{x}}-1)+\cdots+(\sqrt[n]{1+x}-1)^{n-1}}_{0}}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+\frac{1}{n}x}=1 \Rightarrow \sqrt[n]{1+x}\sim1+\frac{1}{n}x$

日期:　　/

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}}{1+\frac{1}{n}x}=1$ 只需证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

法二: 原理: $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$

(令 $a=\sqrt[n]{1+x}$) 则: $1+x-1=(\sqrt[n]{1+x}-1)\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1+x}-1=\frac{x}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}}{\frac{1}{n}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\underbrace{\underbrace{(1+x)}_{=1}^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}_{n\text{项}=n}}=1 \quad \text{证毕}$$

四.记录一道极难的极限证明

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

1° 先用数归证明 $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$ 对于 $n!$ 的放缩!

$n=1$ 时,显然成立　假设对于 n 成立:

对于 $n+1$ 有: $(n+1)!=(n+1)\cdot n!>(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

由重要极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e<3$

$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ $\therefore (n+1)!>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$ $\therefore$ 不等式成立

2° $\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}}=\frac{3}{n}<\varepsilon$$

只需 $n>\frac{3}{\varepsilon}$ $\therefore$ 取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$

当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\varepsilon$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

日期:　　　/

日期:　　　/