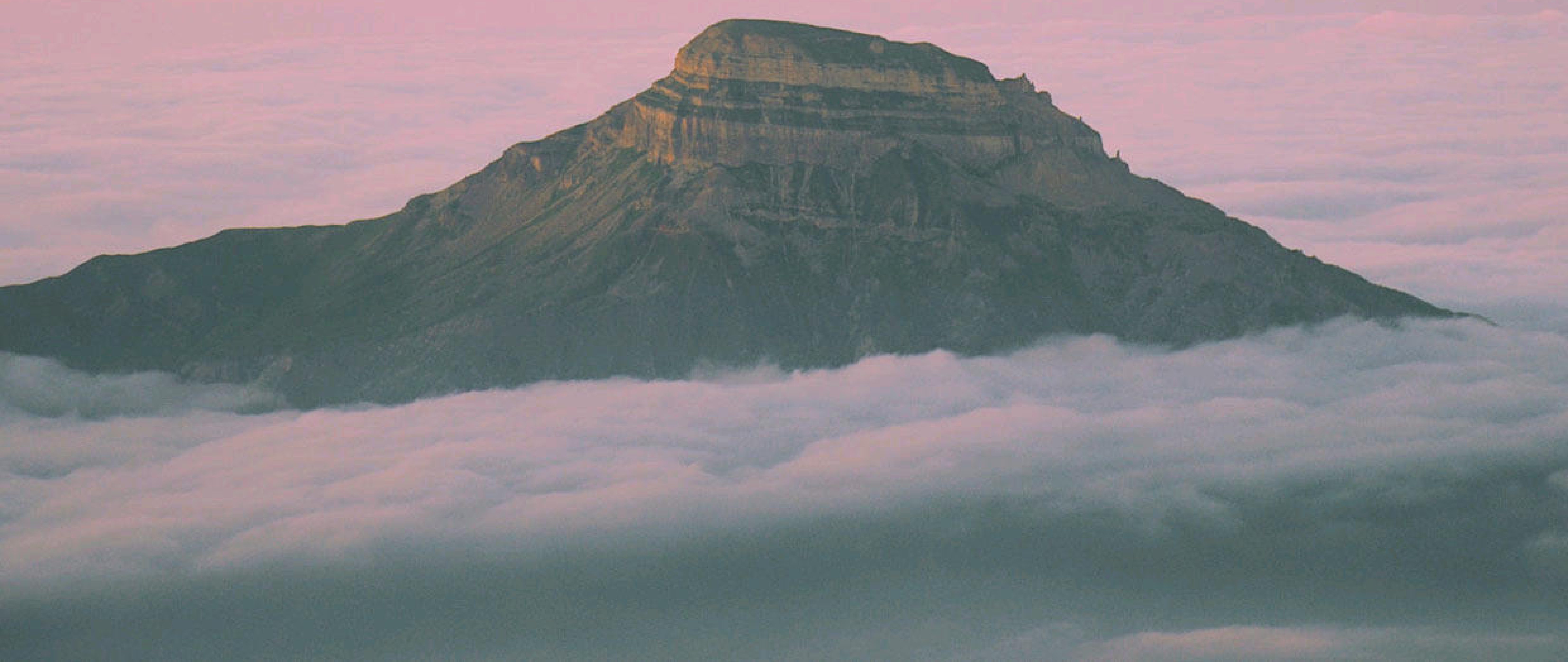
微分中值定理

好题积累



日期:　　/

1. 若$f(x)$在R上满足$f(x)=f'(x)$，且$f(0)=1$，则$f(x)=e^x$ ☆

设$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$F(0)=1$

$F'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$，则$F(x)$为常数函数.

而$F(0)=1$ ∴$F(x)=1$ ∴$f(x)=e^x$

构造辅助函数

2. 证明：$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ $(a>1, n\geq 1)$ ☆

设$f(x)=\frac{a^{\frac{1}{x}}}{\ln a}$，$f'(x)=a^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})$

由于$f(x)$在$[n,n+1]$上连续，在$(n,n+1)$上可导.

则$\exists\xi\in(n,n+1)$，$f'(\xi)=\frac{f(n)-f(n+1)}{-1}=\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{-\ln a}=-\frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2}$

∴ $\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{a^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2}$

∴ $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}$

3. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=?$

∵$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$

∴$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且可导

∴$\exists\xi\in(x,x+a)$，使$f'(\xi)=\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$　∴$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)a$　∵$x\to\infty$，$\xi\in(x,x+a)$

∴$\xi\to\infty$ ∴$\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)a=ak$

日期:　　/

关于根的唯一性的处理方法

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$\forall x\in[0,1]$ 都有 $0<f(x)<1$，且 $f'(x)\neq 1$，证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$。

设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$F(0)=f(0)>0$　　$F(1)=f(1)-1<0$

$\therefore F(0)\cdot F(1)<0$

$\therefore\ \exists x_1\in(0,1)$，使 $F(x_1)=0$ 即：$f(x_1)=x_1$

设 $\exists x_2\in(0,1)$，使 $F(x_2)=0$　假设法

则在 $[x_1,x_2]$ 上，$\exists\xi$，使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即：$f'(\xi)=1$，而 $f'(x)\neq 1$ $\therefore$ 假设错误

$\therefore\ (0,1)$ 上有且仅有一个 x，满足 $F(x)=0$，即 $f(x)=x$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0\le a<b\le\frac{\pi}{2}$，证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得：

$$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}$$　两次柯西!!!

设 $g(x)=\sin x$

$$\frac{f(a)-f(b)}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$$

设 $\varphi(x)=\cos x$

$$\frac{f(a)-f(b)}{+2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\frac{f'(\eta)}{+\sin\eta}$$

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}\cdot\frac{\sin\eta}{f'(\eta)}=\frac{\cancel{f(a)-f(b)}}{\cancel{2}\cos\frac{a+b}{2}\cancel{\sin\frac{a-b}{2}}}\cdot\frac{\cancel{2}\sin\frac{a+b}{2}\cancel{\sin\frac{a-b}{2}}}{\cancel{f(a)-f(b)}}$$

$$\Rightarrow f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}=\tan\frac{a+b}{2}\cdot f'(\eta)$$

日期: 2021 / 12/16 泰勒展开 绝对值函数变换放缩

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 具有三阶连续导数，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'(\frac{1}{2})=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$|f'''(\xi)|\geq 24$

解：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的二阶泰勒展开式为：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)^3 \quad (\xi\in(x,x_0))$$

① 令 $x=0,\ x_0=\frac{1}{2}$ 考虑到区间

$$f(0)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(0-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(0-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)(0-\tfrac{1}{2})^3 \quad \xi_1\in(0,\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow f(0)=f(\tfrac{1}{2})-\frac{1}{2}f'(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{8}f''(\tfrac{1}{2})-\frac{1}{48}f'''(\xi_1),\ \xi_1\in(0,\tfrac{1}{2}) \rightarrow ①$$

② 令 $x=\frac{1}{2}, x_0=1$

$$f(1)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-1)+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)(1-\tfrac{1}{2})^3 \quad \xi_2\in(\tfrac{1}{2},1)$$

$$\Rightarrow f(1)=f(\tfrac{1}{2})-f'(\tfrac{1}{2})\times(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{8}+\frac{1}{48}f'''(\xi_2) \quad \xi_2\in(\tfrac{1}{2},1) \rightarrow ②$$

② − ① $\Rightarrow f(1)-f(0)=\frac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)] \Rightarrow f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$

$\therefore\ 48=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\leq|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|$

而：$|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|\leq 2\max\{|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|\}$ 绝对值函数变换放缩

$\Rightarrow \max\{|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|\}\geq 24$

$\therefore$ 至少存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $|f'''(\xi)|\geq 24$

日期:　　　/

证明: $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ $(a>1, n\geq 1)$

日期:　　　/