5 - 1 زوايا المضلع

Angles of Polygon

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

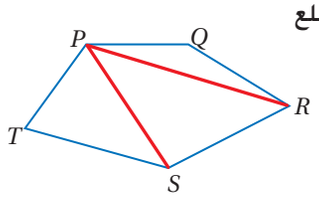
المفردات:

القطر
diagonal

لماذا؟

تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكِّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكِّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع:

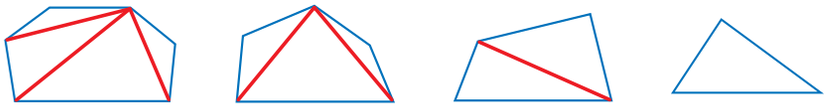


قطر المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه. رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P: هما: R, S:

لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P: هما: $\overline{PR}, \overline{PS}$.

لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



مثلث — رباعي — خماسي — سداسي

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

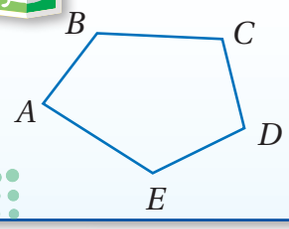
المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ\ (1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ\ (2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ\ (3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ\ (4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n - 2$	$180^\circ\ (n - 2)$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية:

نظرية 5.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.



مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5 - 2) \cdot 180^\circ$$
$$= 540^\circ$$

ستبرهن نظرية 5.1 في السؤال 38

مراجعة المفردات

المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه.

مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

يمكنك استعمال النظرية 5.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

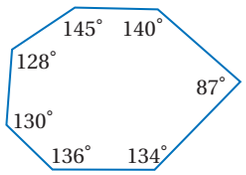
a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ$ $\qquad n=7$

$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ$ بالتبسيط

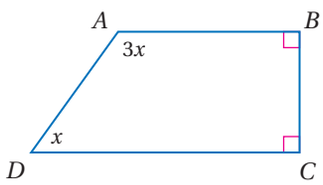
إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.



ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

$128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ$ ✓

b) **جبر:** أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.



الخطوة 1: أوجد قيمة (x).

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$.

$360^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة

$360^\circ = 3x + 90^\circ + 90^\circ + x$ بالتعويض

$360^\circ = 4x + 180^\circ$ بتجميع الحدود المتشابهة

$180^\circ = 4x$ بطرح 180° من كلا الطرفين

$45^\circ = x$ بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle A = 3x$
$= 3(45^\circ)$
$= 135^\circ$

$m\angle B = 90^\circ$
$m\angle C = 90^\circ$

$m\angle D = x$
$= 45^\circ$

اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

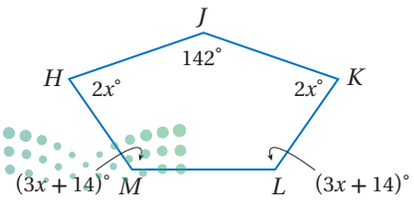
$90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ✓

تحقق من فهمك

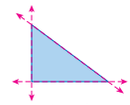
1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

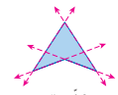
1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من 180°، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.


مضلع محدّب


مضلع مقعر

إرشادات للدراسة

المضلع: عند ذكر كلمة مضلع في هذا الفصل فإننا نعني المضلع المحدّب.

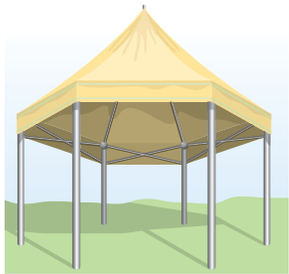
وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

تذكّر أن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد قياس الزاوية الداخلية لأي مضلع منتظم.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

مثال 2 من واقع الحياة قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

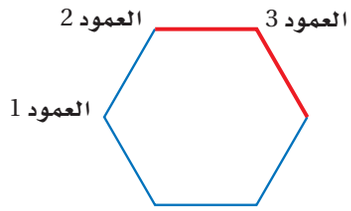


مظلة: في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم: **المعطيات:** منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

ارسم شكلًا يمثِّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $n = 6$

$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ بالتبسيط

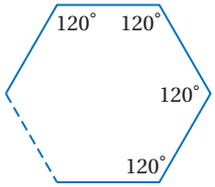
ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\frac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \frac{720^\circ}{6}$ بالتعويض

$= 120^\circ$ بالقسمة

إذن قياس الزاوية المتكوِّنة عند كل ركن يساوي 120°.

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة 120°.
سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓



تحقق من فهمك

2A) **سجاد:** أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

2B) **نوافير:** تزيِّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

يمكنك أيضًا استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لإيجاد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا عُلم قياس زاوية داخلية له.

مثال 3 إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $135°$، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n - 2) \cdot 180$.

$135°n = (n - 2) \cdot 180°$	كتابة معادلة
$135°n = 180°n - 360°$	خاصية التوزيع
$-45°n = -360°$	بطرح $180n$ من كلا الطرفين
$n = 8$	بقسمة كلا الطرفين على -45

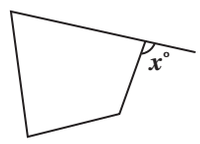
إذن للمضلع 8 أضلاع.

تحقق من فهمك

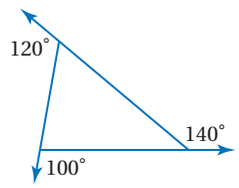
3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $144°$، فأوجد عدد أضلاعه.

مراجعة المفردات

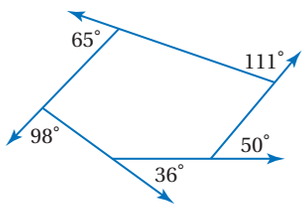
الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



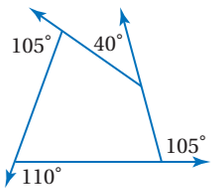
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$120° + 100° + 140° = 360°$



$65° + 98° + 36° + 50° + 111° = 360°$



$105° + 110° + 105° + 40° = 360°$

لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي $360°$. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

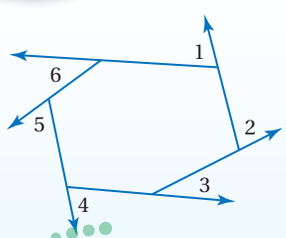
نظرية 5.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

مثال:

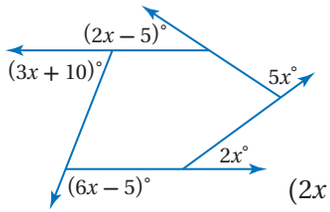
$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$$



ستبرهن نظرية 5.2 في السؤال 39

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع



a) **جبر:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$
$$(2x+5x+2x+6x+3x)^\circ + [-5+(-5)+10]^\circ = 360^\circ$$
$$18x^\circ = 360^\circ$$
$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.

تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

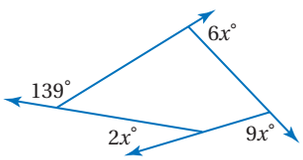
افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x ، ثم اكتب معادلة وحلّها.

$9x = 360^\circ$ نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

$x = 40^\circ$ بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40°.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

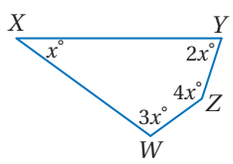
تأكد

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

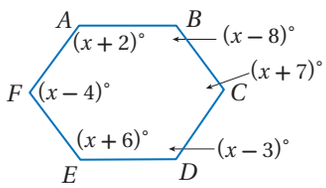
1) العشاري **2)** الخماسي

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



4)



المثال 2 **5)** **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.

أوجد قياس الزاوية الداخليّة له.

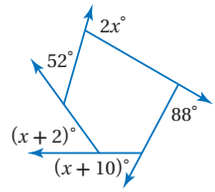
المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150° **7)** 170°

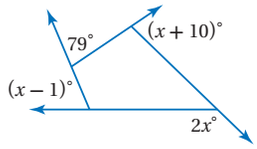
وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

8)



9)



أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي

11) ثُماني

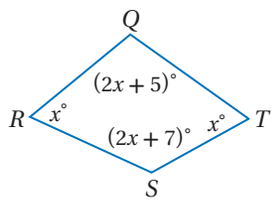
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

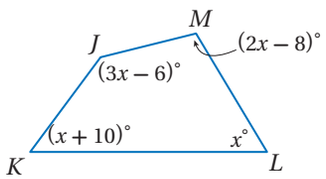
12) ذو 12 ضلعًا **13)** ذو 20 ضلعًا **14)** ذو 29 ضلعًا **15)** ذو 32 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

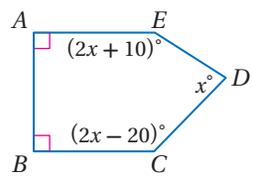
16)



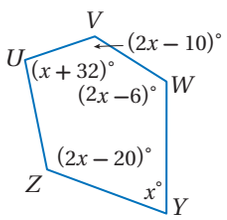
17)



18)



19)



20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

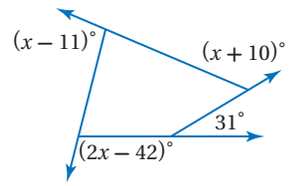
21) ذو12 ضلعاً **22)** الخماسي **23)** العشاري **24)** التُّساعي

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

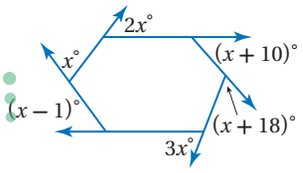
25) 60° **26)** 90° **27)** 120° **28)** 156°

المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29)



30)

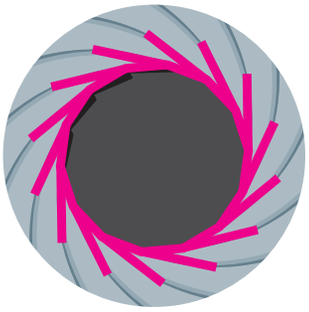


وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري **32)** الخماسي **33)** السداسي **34)** ذو 15 ضلعًا

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

تاريخ الرياضيات

أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع 236 - 318 هـ
مهندس وعالم بالحساب، عرف باسم «أبي كامل الحاسب»، وعاش في القرن الثالث الهجري، له رسالة في «المضلع ذي الزوايا الخمس وذي الزوايا العشر».

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 **37)** 13

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي $1080°$، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

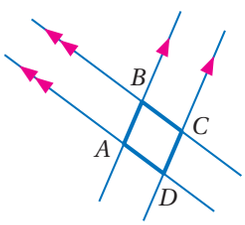
جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$(x+5)°, (x+10)°, (x+20)°, (x+30)°, (x+35)°, (x+40)°, (x+60)°, (x+70)°, (x+80)°, (x+90)°$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x°, (4x+13)°, (x+9)°, (2x-8)°, (4x-1)°$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.



a) **هندسيًّا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.

b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$		$m\angle B$		$m\angle C$		$m\angle D$	
	AB		BC		CD		DA	
$FGHJ$	$m\angle F$		$m\angle G$		$m\angle H$		$m\angle J$	
	FG		GH		HJ		JF	
$QRST$	$m\angle Q$		$m\angle R$		$m\angle S$		$m\angle T$	
	QR		RS		ST		TQ	

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

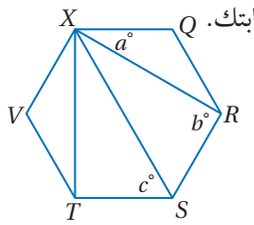
d) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

مسائل مهارات التفكير العليا

43) اكتشف الخطأ: قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. "فهل أيٌّ منهما ادعاؤها صحيح"؟ وضّح تبريرك.



44) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.

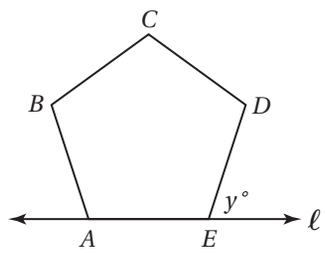
45) تبرير: إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

46) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

47) اكتب: وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على اختبار

48) إجابة قصيرة: الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $(\angle y)$؟

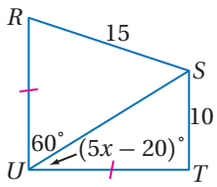


49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع
B خماسي
C سداسي
D ثماني

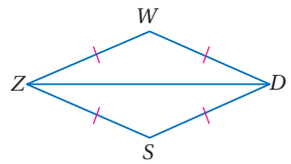
مراجعة تراكمية

50) جبر: اكتب متباينة تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x **(مهارة سابقة)**

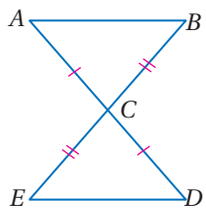


بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق: (مهارة سابقة)

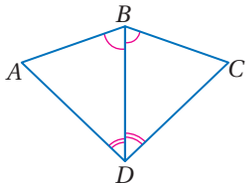
51)



52)

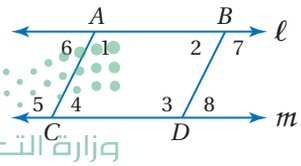


53)



استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\ell \parallel m$ ، حدِّد جميع أزواج الزوايا التي تصنف وفقًا لما يلي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

55) زاويتان متحالفتان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447