§9 Дифференцирование обобщённых функций.

Дифференцирование в обобщённом смысле, как мы увидим ниже, осуществимо в гораздо большем числе случаев, чем дифференцирование классическое. Интуитивно понятно, что это расширяет круг разрешимых краевых задач, поскольку расширяется класс дифференцируемых функций.

Понятие обобщённой производной, как и введённые нами ранее операции замены переменных и умножения обобщённой функции на мультипликатор, определяются «за счёт» основных функций.

Определение 9.1. Пусть α – мультииндекс, f – обобщённая функция (безразлично, из $D'(G)$, или из $S'(\mathbb{R}^n)$). Её *обобщённой производной* $f^{(\alpha)}$ *порядка* α называется обобщённая функция, задаваемая правилом

$$\left(f^{(\alpha)},\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\cdot\left(f,\varphi^{(\alpha)}\right). \qquad (68)$$

Пример 9.2. $\theta'(x)=\delta(x)$.

Доказательство.

$$\left(\theta'(x),\varphi(x)\right)\overset{(68)}{=}-\left(\theta(x),\varphi'(x)\right)=-\int\limits_0^{+\infty}\varphi'(x)dx=-\left(\varphi(x)\Big|_0^{+\infty}\right)=\varphi(0)=\left(\delta(x),\varphi(x)\right). \quad \blacksquare$$

Очевидно, что обобщённое дифференцирование линейно:

Предложение 9.3. Если f, g – обобщённые функции, a, b – числа, α – мультииндекс, то $\left(a\cdot f+b\cdot g\right)^{(\alpha)}=a\cdot f^{(\alpha)}+b\cdot g^{(\alpha)}$. ■

Предложение 9.4. (Формула Лейбница) Пусть f – обобщённая функция, a – мультипликатор, α – мультииндекс, такой, что $|\alpha|=1$. Тогда

$$\left(f(x)\cdot a(x)\right)^{(\alpha)}=f^{(\alpha)}(x)\cdot a(x)+f(x)\cdot a^{(\alpha)}(x).$$

Доказательство. Подчеркнём ещё раз, что α имеет вид $\alpha = (0,\ldots0,1,0,\ldots0)$.

$$\left((a\cdot f)^{(\alpha)},\varphi\right)=-\left(a\cdot f,\varphi^{(\alpha)}\right)=-\left(f,a\cdot\varphi^{(\alpha)}\right)=-\left(f,(a\cdot\varphi)^{(\alpha)}-a^{(\alpha)}\cdot\varphi\right)=$$

$$=-\left(\left(f,(a\cdot\varphi)^{(\alpha)}\right)-\left(f,a^{(\alpha)}\cdot\varphi\right)\right)=\left(f^{(\alpha)},a\cdot\varphi\right)+\left(a^{(\alpha)}\cdot f,\varphi\right)=\left(a\cdot f^{(\alpha)}+a^{(\alpha)}\cdot f,\varphi\right). \ \blacksquare$$

Определение 9.5. Функцию $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ назовём *кусочно- гладкой функцией порядка k*, если $\mathbb{R}^n=S\coprod G_1\coprod\ldots\coprod G_m$, где $S=\bigcup\limits_{i=1}^m\partial G_i$, и при этом $f\in C^k\left(\overline{G_i}\right)$ для всех $i = 1,\ldots,m$.

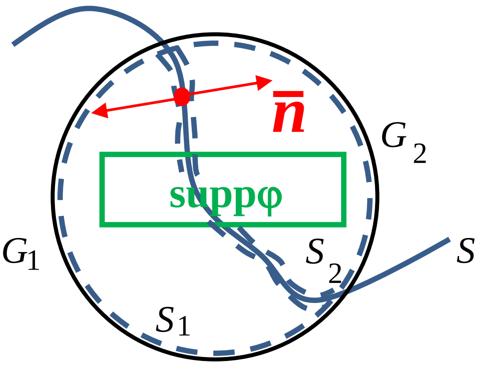
Пример 9.6. Функции $|x|$, $\theta(x)$, sign$x$, $\sin x/|x|$ – кусочно-гладкие (на $\mathbb{R}$).

Замечание. При $n > 1$ границы областей G_i обычно предполагаются кусочно-гладкими поверхностями (или кривыми).

Теорема 9.7. (О дифференцировании кусочно-гладкой функции) Пусть $n = 2$ или $n = 3$. Пусть $\mathbb{R}^n=G_1\coprod S\coprod G_2$, где S – общая кусочно-гладкая граница областей G_1 и G_2. Пусть $f \in C^1\left(\overline{G_i}\right)$ для i = 1, 2. Тогда обобщённая (в смысле $D'(\mathbb{R}^n)$) частная производная f_x от функции f по координате x равна

$$f_x = (f_x)_r + \left([f]_S \cdot \cos(x, \bar{n})\right)\delta_S, \qquad (69)$$

где $[f]_S$ – скачок функции f на границе S.



Доказательство. Рассмотрим случай n = 2. Каждая кусочно-гладкая функция локально интегрируема. Поэтому, применяя сначала (68), а затем (63), можем записать ($\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$):

$$(f_x, \varphi) = -(f, \varphi_x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} f \cdot \varphi_x dxdy =$$

$$= -\int\limits_{G_1} f \cdot \varphi_x dxdy - \int\limits_{G_2} f \cdot \varphi_x dxdy.$$

Последнее равенство верно, так как мера Лебега линии S равна 0. Но отдельно в областях G_1 и G_2 функция f имеет классическую производную по x. Из формулы Лейбница теперь следует

$$-\int\limits_{G_1} f \cdot \varphi_x dxdy = \int\limits_{G_1} f_x \cdot \varphi\, dxdy - \int\limits_{G_1} (f \cdot \varphi)_x\, dxdy. \qquad (*)$$

Пусть D – некоторый круг, содержащий компактный носитель suppφ, S_1 – граница области $D \cap G_1$ (см. рис.). Значит, S_1 – замкнутая кусочно-гладкая кривая. Вне области $D \cap G_1$ подынтегральные функции в (*) равны 0. Поэтому

$$\int\limits_{G_1} (f \cdot \varphi)_x\, dxdy = \int\limits_{G_1 \cap D} (f \cdot \varphi)_x\, dxdy.$$

Для последнего интеграла справедлива формула Грина. Приведём соответствующую теорему.

Теорема. (Формула Грина) Если функции P, Q непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной замкнутым контуром Γ, то

$$\int\limits_{\Omega} \left(Q_x - P_y\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy. \qquad (70)$$

Полагая $\Omega = G_1 \cap D, \quad \Gamma = S_1, \quad P \equiv 0, \quad Q = (f \cdot \varphi)_x$, а также, при $(x, y) \in S_1$, полагая $f_1(x, y) = \lim\limits_{\substack{(x', y') \in G_1 \cap D \\ (x', y') \to (x, y)}} f(x', y')$, по формуле (70) получим:

$$\int\limits_{G_1 \cap D} (f \cdot \varphi)_x \, dxdy = \int\limits_{S_1} \varphi \cdot f_1 dy = \int\limits_{S} \varphi \cdot f_1 dy = \int\limits_{S} \varphi \cdot f_1 \cdot \cos(x, \bar{n}_1) dS .$$

Здесь $\bar{n}_1$ – единичный вектор внешней нормали к S_1 (см. красный $\bar{n}$ на рисунке). Кроме того, мы воспользовались тем, что в элементарном прямоугольном треугольнике с катетом dy и гипотенузой dS выполнено

$$dy = \cos(y, \bar{\tau}) dS = \cos(x, \bar{n}) dS \text{ (см. рис. 2).}$$

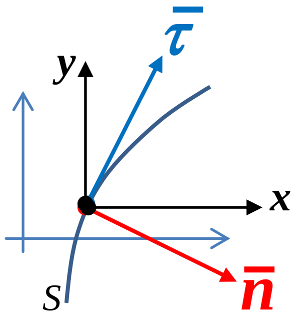


Рис. 2

Следовательно, (*) принимает вид

$$-\int\limits_{G_1} f \cdot \varphi_x dxdy = \int\limits_{G_1} f_x \cdot \varphi \, dxdy - \int\limits_{S} \varphi \cdot f_1 \cdot \cos(x, \bar{n}_1) dS . \quad (**)$$

Аналогично, учитывая, что $\cos(x, -\bar{n}_1) = -\cos(x, \bar{n}_1)$, получим

$$-\int\limits_{G_2} f \cdot \varphi_x dxdy = \int\limits_{G_2} f_x \cdot \varphi \, dxdy + \int\limits_{S} \varphi \cdot f_2 \cdot \cos(x, \bar{n}_1) dS . (***)$$

Складывая равенства (**) и (***), получим

$$(f_x, \varphi) = \int\limits_{G_1 \cup G_2} \varphi \cdot f_x dxdy + \int\limits_{S} \varphi \cdot (f_2 - f_1) \cdot \cos(x, \bar{n}_1) dS =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi \cdot f_x dxdy + \int\limits_{S} \varphi \cdot [f]_S \cdot \cos(x, \bar{n}_1) dS = \left((f_x)_r + [f]_S \cdot \cos(x, \bar{n}_1) \delta_S, \varphi \right).$$

Заключаем, что $f_x = (f_x)_r + [f]_S \cdot \cos(x, \bar{n}_1) \delta_S$. ■

Замечание. 1) Ясно, что аналогично выводится формула для f_y.

2) При $n = 3$ доказательство дословно такое же, но для перехода от интеграла по ограниченной области к интегралу по замкнутой границе вместо формулы Грина (70) используется формула Гаусса–Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \left(P_x + Q_y + R_z \right) dxdydz = \int\limits_{\Gamma} \left(P \cdot \cos(x, \bar{n}) + Q \cdot \cos(y, \bar{n}) + R \cdot \cos(z, \bar{n}) \right) d\Gamma . \quad (71)$$

3) При $n = 1$ получим сразу по формуле интегрирования по частям:

$$f_x = (f_x)_r + [f]_{x_0} \delta(x - x_0) \quad (72)$$

(Доказательство – упражнение)

4) Формула (72) легко обобщается на случай m точек разрыва классической производной f_x:

$$f_x = (f_x)_r + \sum_{i=1}^{m} [f]_{x_i} \delta(x - x_i) . \quad (73)$$