1 Многомерное гауссовское распределение и его свойства.

На практике часто используют многомерное гауссовоское распределение в силу центральной предельной теоремы и полученных теоретических результатов об этом распределении.

Определение 1.1. *Говорят, что случайный вектор* $X = (X_1, \dots, X_p)^T$ *имеет* p *- мерное нормальное распределение с параметрами* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$ *и* $\Sigma = (\sigma_{jl})_{j,l=1}^p$ *(*$X \sim N_p(\vec{\mu}), \Sigma)$*), если его функция плотности имеет вид:*

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p ||\Sigma||}} \cdot exp\{\frac{-1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\}.$$

При этом матрица Σ предполагается невырожденной и положительно определенной.

Замечание 1.2. *Если вектор* $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$*, то* $EX = \mu, Cov(\vec{X}) = \Sigma$.

Замечание 1.3. *В случае двумерного нормального распределения с вектором средних* $\mu = (\mu_1, \mu_2)$*, коэффициентом корреляции* ρ *и матрицей вторых моментов*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Функция плотности имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \quad (1)$$

Введем характеристическую функцию многомерного нормального распределения.

Лемма 1.4. *Пусть матрица* Σ *невырождена. Тогда случайный вектор* $X \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$*, тогда и только тогда, когда его характеристическая функция имеет вид:*

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{t}) = Ee^{i\vec{t}'\vec{X}} = exp\left\{i\vec{t}'\vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{t}'\Sigma\vec{t}\right\}.$$

Доказательство. Из алгебры известно, что для любой положительно определенной матрицы Σ существует невырожденная матрица C, такая что $C'\Sigma^{-1}C = E$. Тогда

$$\Sigma^{-1} = C'^{-1}C^{-1} = (CC')^{-1} \quad (2)$$

Рассмотрим вектор Y, такой что $X - \mu = CY$. Тогда с. вектор $Y \sim N(0, I)$. Вычислим характеристическую функцию вектора Y в случае независимости его координат:

$$\phi_Y(u) = Ee^{iu'Y} = \prod_{j=1}^p Ee^{iu_jY_j}.$$

Замечание: Характеристическая функция нормальной случайной величины (с параметрами μ, σ^2) равна $\phi(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

Так как $Y_j \sim N(0; 1)$, то

$$\phi_Y(u) = \prod_{j=1}^p e^{-\frac{u_j^2}{2}} = e^{-\frac{u'u}{2}}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь характеристическую функцию вектора X:

$$\phi(t) = Ee^{it'X} = Ee^{it'(CY+\mu)} = e^{it\mu}Ee^{it'CY}$$

Обозначим $t'C = u' = (u_1, \dots, u_p)$. Тогда из (3)

$$\phi(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{u'u}{2}} = e^{it\mu}e^{-\frac{(t'C)(t'C)'}{2}} = e^{it\mu}e^{-\frac{t'CC't}{2}} = e^{it\mu}e^{-\frac{t'\Lambda t}{2}} \text{в силу (2)}$$

□

Свойство инвариантности нормального случайного вектора относительно линейного преобразования.

Theorem 1.5. *Если* $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$ *и матрица* C *имеет ранг* k*, то вектор* $\vec{Y} = C\vec{X} \sim N_p(C\vec{\mu}, C\Sigma C^T)$.

Доказательство. Найдем характерисктическую функцию вектора Y:

$$\phi_Y(t) = Ee^{it'Y} = Ee^{it'CX} = Ee^{is'X}, \text{где } s' = t'C \tag{4}$$

$$= \exp\{\vec{s}'\vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{s}'\Sigma\vec{s}\} = \exp\{\vec{t}'C\vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{t}'C\Sigma C'\vec{t}\}. \tag{5}$$

□

Следствие 1.6. *Любая линейная комбинация нормального случайного вектора* X *вида* $c_1X_1 + \ldots + c_pX_p$ *имеет одномерное нормальное распределение.*

Доказательство. Достаточно взять в роли матрицы C вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$. Тогда из предыдущей теоремы $CX = c_1X_1 + \ldots + c_pX_p$ – это одномерная с.в., имеющая нормальное распределение. □

Следствие 1.7. *Частное распределение любого случайного подвектора вида* $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_k})$*, полученного из элементов нормального вектора, также является нормальным вектором.*

Доказательство проводится путем подбора матрицы из нулей и единиц. Например, $C = (0, 1, 0, \ldots, 0))$, то $CX = X_2$. Также можно получать подвектора, например, для трехмерного вектора $X = (X_1, X_2, X_3)^T$, взяв матрицу C в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

получим $CX = (X_1 \quad X_2)^T$.

Замечание 1.8. *Таким образом, каждая компонента нормального случайного вектора имеет одномерное нормальное распределение. В обратную сторону утверждение вообще говоря не верно.*

Определение 1.9. *Случайный вектор* $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$ *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $\vec{a} \neq 0$ *одномерная случайная величина* a^TX *имеет нормальное распределение с параметрами* $(\vec{a}^T\vec{\mu}, \vec{a}^T\Sigma\vec{a})$.

Если гауссовские случайные величины независимы, то они являются некоррелированными и наоборот. (Обратное утверждение в общем случае для негауссовских с.в. неверно.)

Theorem 1.10. *Пусть с.вектор* $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$*. Тогда*

1) с.в. X_i *и* $X_j, i \neq j$ *независимы тогда и только тогда, когда парный коэффициент корреляции* $\rho_{i,j} = 0$*;*

2) Компоненты $X_1, \ldots, X_p$ *с. вектора* $\bar{X}$ *независимы в совокупности тогда и только тогда, когда все парные коэффициенты корреляции равны нулю.*

Доказательство. 1) Из независимости с.в. следует сразу же их некоррелированность. Поэтому на самом деле доказать утверждение 1) нужно только в одну сторону. Проверим, что совместная функция плотности представима в виде произведения плотностей компонент вектора. Для двумерного случайного вектора (X_i, X_j) такое представление возможно тогда и только тогда , когда коэффициент парной корреляции $\rho = \rho_{ij} = 0$. В этом случае из (1) функция плотности двумерного нормального распределения примет вид:

$$f_{X,Y}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\} = f_X(x_1)f_Y(x_2).$$

2) В одну сторону доказательство очевидно, так как из независимости в совокупности с.в. следует попарная независимость,а значит и некоррелированность, следовательно все коэффициенты парной корреляции равны 0. Пусть теперь все парные коэффициенты корреляции равны нулю. Отсюда сразу следует, что ковариационная матрица диагональная. Тогда функция плотности примет вид:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p ||\Lambda||}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Lambda^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p)^2}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x_p-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\}$$

□

Theorem 1.11. *Случайный вектор (X_1, X_2) имеет двумерное нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями компонент тогда и только тогда, когда случайные величины $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ независимы и распределены нормально.*

Примем эту теорему без доказательства.

Theorem 1.12. *Если случайный вектор $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$, то случайная величина $Y^2 = (\vec{X} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu})$ имеет хи-квадрат распределение с p степенями свободы.*

Доказательство. Для любой положительно определенной матрицы Σ^{-1} найдется такая невырожденная матрица C, что

$$C^T \Sigma^{-1} C = E$$

Рассмотрим вектор $Z = C^{-1}(X - \mu)$. В силу теоремы о линейном преобразовании гауссовского случайного вектора $\vec{Z}$ имеет нормальное распределение с вектором средних $\mu = (0, 0, ..., 0))$ и ковариационной матрицей $Cov(Z) = E$. Так как вектор Z представляет собой линейное преобразование вектора X, то по теореме о линейном преобразовании он имеет многомерное гауссовское распределение $N_p(\vec{0}, E)$. А значит из следствия 1 его координаты стандартные нормальные одномерные с.в.

Если теперь рассмотреть квадратичную форму следующего вида:

$$Y^2 = (\vec{X} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}) = (CZ)^T \Sigma^{-1} (CZ) = Z^T C^T \Sigma^{-1} C Z$$

Так как $C^T \Sigma^{-1} C = E \Rightarrow Z^T Z = \sum\limits_{j=1}^{p} Z_j$. В силу того что $Z_j \sim N(0; 1)$, то $\sum\limits_{j=1}^{p} Z_j \sim \chi_p^2$. □

2 Оценки параметров многомерного нормального распределения и их некоторые свойства.

2.1 Оценивание вектора параметров μ

.