(***продолжение***)

Лемма 5.8. Если $f \in L_p(G)$, то $\|f_\varepsilon\| \le \|f\|$.

Доказательство. Положим $q = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Можем записать

$$\|f_\varepsilon\|^p = \int_G |f_\varepsilon(x)|^p dx = \int_G \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy\right|^p dx \le$$

$$\le \int_G \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy\right)^p dx =$$

$$= \int_G \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot (\omega_\varepsilon(x-y))^{\frac{1}{p}} \cdot (\omega_\varepsilon(x-y))^{\frac{1}{q}} dy\right)^p dx$$

По неравенству Гёльдера последний интеграл не превосходит $\le$

$$\int_G \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \cdot (\omega_\varepsilon(x-y))^{\left(\frac{1}{p}\right)\cdot p} dy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\omega_\varepsilon(x-y))^{\left(\frac{1}{q}\right)\cdot q} dy\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p dx. \quad (*)$$

Так как интеграл от шапочки ω_ε по $\mathbb{R}^n$ равен 1, то (*)

$= \int_G \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \cdot \omega_\varepsilon(x-y) dy\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \cdot \omega_\varepsilon(x-y) dy\, dx =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y) dx\, dy = \int_G |f(y)|^p dy = \|f\|^p.$ ■

Определение 5.9. Множество всех основных функций, удовлетворяющих определению 5.1 (то есть бесконечно дифференцируемых и финитных), обозначим $D(G)$.

Ниже будем обозначать норму функции *f* из пространства $C(\bar{G})$ через $\|f\|_C$, а норму функции *f* из пространства $L_p(G)$ – через $\|f\|_L$.

Теорема 5.10 (Об аппроксимации основными функциями)

Пусть область *G* ограничена в $\mathbb{R}^n$ и содержит носитель измеримой функции *f*. Тогда 1) если $f \in C(\bar{G})$, то $\|f - f_\varepsilon\|_C \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$;

2) если $f \in L_p(G)$, то $\|f - f_\varepsilon\|_L \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Доказательство. 1) $\|f - f_\varepsilon\|_C = \max\limits_{x \in \bar{G}} |f(x) - f_\varepsilon(x)|$. Но $|f(x) - f_\varepsilon(x)| =$

$$= \left| f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(y)| \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy =$$

$$= \int_{\bar{U}_\varepsilon(x)} |f(x) - f(y)| \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy \leq \max_{|y-x|\leq\varepsilon} |f(x) - f(y)| \cdot \int_{\bar{U}_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(x-y)dy =$$

$= \max\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} |f(x) - f(y)|$. Поэтому $\|f - f_\varepsilon\|_C \leq \max\limits_{x\in\bar{G}, |x-y|\leq\varepsilon} |f(x) - f(y)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

2) Здесь воспользуемся известным фактом, что произвольную функцию $f \in L_p(G)$ можно с любой точностью ε приблизить непрерывной функцией. Выберем $g \in C(\bar{G})$ так, чтобы $\|g - f\|_L < \varepsilon$. Тогда $\|f - f_\varepsilon\|_L \leq$
$\leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_L + \|g_\varepsilon - g\|_L + \|g - f\|_L < \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_L + \|g_\varepsilon - g\|_L + \varepsilon$.

Так как $g_\varepsilon - f_\varepsilon = (g - f)_\varepsilon$, то по лемме 5.8 $\|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_L =$
$= \|(g - f)_\varepsilon\|_L \leq \|g - f\|_L < \varepsilon$. Наконец,
$\|g_\varepsilon - g\|_L^p = \int_G |g_\varepsilon(x) - g(x)|^p dx \leq \max\limits_{x\in\bar{G}} |g_\varepsilon(x) - g(x)|^p \cdot \mu(G) = \mu(G) \cdot$
$(\|g_\varepsilon - g\|_C)^p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ в силу п. 1). ■

Доказанную теорему можно переформулировать следующим образом.

Следствие 5.11. 1) Множество $D(G)$ всюду плотно в $L_p(G)$.

2) $D(G) \cap C(\bar{G})$ всюду плотно в $C(\bar{G})$.

Выше множество основных функций $D(G)$ рассматривалось как подпространство других (нормированных) пространств. Однако в этом множестве существует своё понятие сходящейся последовательности.

Определение 5.12. Последовательность $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(G)$ назовём *сходящейся к* $\varphi \in D(G)$, и напишем $\varphi_n \xrightarrow{D(G),\ n\to\infty} \varphi$, если:

1) Существует компакт K, такой, что $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K \subset G$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

2) Для любого мультииндекса α имеет место равномерная сходимость

$$\varphi_n^{(\alpha)} \xrightarrow{K,\ n\to\infty} \varphi^{(\alpha)}.$$

Сейчас мы заведём ещё одно (более широкое) множество основных функций, ослабив в определении 5.1 условие финитности до условия быстрого убывания функций.

Определение 5.13. Будем говорить, что функция $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – *основная из* $S(\mathbb{R}^n)$, если она бесконечно дифференцируема и для любого многочлена $P(x)$, любого мультииндекса α, любого $\varepsilon > 0$, найдётся $A > 0$ такое, что $\left|P(x) \cdot \varphi^{(\alpha)}(x)\right| < \varepsilon$ при $|x| > A$. Другими словами, $P(x) \cdot \varphi^{(\alpha)}(x)$ равномерно сходится к 0 при $|x| \to \infty$ (быстрое убывание).

Множество $S(\mathbb{R}^n)$ называется множеством *быстро убывающих функций*.

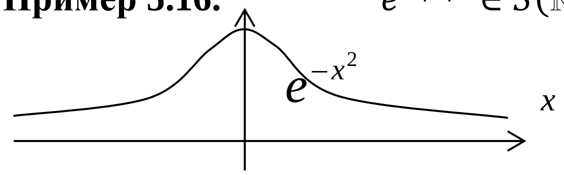
Предложение 5.14. $D(G) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение очевидно. ■

Предложение 5.15. Множества $D(G)$ и $S(\mathbb{R}^n)$ являются векторными пространствами.

Доказательство. (Упражнение) ■

Пример 5.16. $e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$ (Упражнение).



Определение 5.16. Последовательность $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ назовём *сходящейся к* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, и напишем $\varphi_k \xrightarrow{S,\ k\to\infty} \varphi$, если для любых мультииндексов α, β выполняется $x^\beta \varphi_k^{(\alpha)} \rightrightarrows x^\beta \varphi^{(\alpha)}$ на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.17. Тождественный оператор $I(\varphi) = \varphi$ из пространства $D(\mathbb{R}^n)$ в пространство $S(\mathbb{R}^n)$ является линейным и непрерывным.

Доказательство. Линейность очевидна. Покажем непрерывность. Пусть $\varphi_m \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n),\ m\to\infty} 0$. Тогда на некотором компакте K, содержащем все носители $\operatorname{supp}\varphi_m$ имеет место равномерная сходимость $\varphi_m^{(\alpha)} \xrightarrow{K,\ m\to\infty} 0$ для любого α. Поэтому, для любого β имеем равномерную сходимость

$$\left|x^\beta \varphi_m^{(\alpha)}(x)\right| \le \max\left\{\left|x^\beta\right| : x \in K\right\} \cdot \left|\varphi_m^{(\alpha)}(x)\right| \xrightarrow{K,\ m\to\infty} 0.$$

То есть, $I(\varphi_m) = \varphi_m \xrightarrow{S} 0$. ■

Теорема 5.18. Для любого $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ существует последовательность $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Выберем $(\eta_1^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n)$, где η_1^m – «шляпа» для шара $U_m(0)$. Положим $\varphi_m(x) = \varphi(x) \cdot \eta_1^m(x)$. Тогда

$$\sup_{x\in R^n}\left|x^\beta(\varphi - \varphi_m)^{(\alpha)}(x)\right| = \sup_{|x|>m}\left|x^\beta\right|\left|(\varphi(x)(1-\eta_1^m(x))^{(\alpha)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\gamma|,|\delta|<|\alpha|} \sup_{|x|>m}\left|x^\beta\right|\left|\varphi^{(\gamma)}(x)\cdot(1-\eta_1^m(x))^{(\delta)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\gamma|,|\delta|<|\alpha|} C(\delta) \cdot \sup_{|x|>m}\left|x^\beta\right|\left|\varphi^{(\gamma)}(x)\right| \qquad (*)$$

На последнем шаге использована оценка на производную «шляпы» из теоремы 5.5 (напомним, что у нас ε = 1). Далее, так как для каждого γ производная $\varphi^{(\gamma)}$ – основная функция из $S(\mathbb{R}^n)$, то при любом β $\sup_{|x|>m}\left|x^\beta\right|\left|\varphi^{(\gamma)}(x)\right| \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

Следовательно, и вся сумма (*) стремится к 0.

Таким образом, $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$. ■