§2 Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений (КЛДУ) 2-го порядка

П.1 Классификация КЛДУ в точке

Определение 2.1. *Квазилинейным* ЛДУ 2-го порядка в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + F\left(x, u(x), u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) = 0 \qquad (20)$$

Определение 2.2. Скажем, что уравнение (20) имеет *канонический вид в точке* $x^0 \in G$, если $a_{ij}\left(x^0\right) = 0$ при $i \neq j$, а $a_{ii}\left(x^0\right) \in \{-1, 0, 1\}$ (но не все нули одновременно!). При этом:

а) Если среди чисел $a_{ii}\left(x^0\right)$ встречаются нули, то говорят, что уравнение (20) *параболического типа*. В противном случае

б) Если все числа $a_{ii}\left(x^0\right)$ одного знака, то говорят, что уравнение (20) *эллиптического типа*. В противном случае говорят, что уравнение (20) *гиперболического типа*.

Если д.у. (20) имеет один и тот же канонический вид в каждой точке некоторой подобласти $G_1 \subset G$, то говорят, что (20) имеет *канонический вид в области* G_1.

Теорема 2.3. (О приведении к каноническому виду в точке) Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ задано уравнение (20). Тогда для любой точки $x^0 \in G$ найдётся линейная замена переменных $y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot x_j, \quad i = 1, \ldots, n$, после которой уравнение (20) приобретёт канонический вид в точке x^0.

Доказательство. Предположим сначала, что в (20) сделана какая-нибудь замена вида $y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot x_j, \quad i = 1, \ldots, n$. Вычислим тогда производные $u_{x_i x_j}$ по правилам дифференцирования сложной функции нескольких переменных:

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} \cdot \left(y_k\right)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} \cdot A_{ki}$$

$$u_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{y_k} \cdot A_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{y_k y_l} \cdot A_{lj} \cdot A_{ki}$$

Подставим эти производные в (20). Получим уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}\cdot A_{lj}\cdot A_{ki}+\tilde{F}\left(y,u(y),u_{y_1},\ldots,u_{y_n}\right)=0 .$$

Перегруппируем теперь слагаемые в левой части, собирая члены с $u_{y_k y_l}$:

$$\sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l}\cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot A_{lj}\cdot A_{ki}+\tilde{F}\left(y,u(y),u_{y_1},\ldots,u_{y_n}\right)=0 . \qquad (21)$$

Таким образом, полученное уравнение имеет коэффициенты $\tilde{a}_{kl}(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot A_{lj}\cdot A_{ki}$, или, в точке x^0, $\tilde{a}_{kl}(x^0)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\cdot A_{lj}\cdot A_{ki}$. Из алгебры известно (см. например Б. Л. ван дер Варден, «Алгебра», §90), что квадратичную форму $Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\cdot \xi_i\cdot \xi_j$ можно подходящей линейной заменой переменных $\eta_p=\sum_{q=1}^{n} B_{pq}\cdot \xi_q, \quad p=1,\ldots,n$ привести к каноническому виду $\tilde{Q}(\eta)=\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\cdot B_{ki}\cdot B_{lj}\right)\cdot \eta_k\cdot \eta_l$, в котором коэффициенты $\alpha_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\cdot B_{ki}\cdot B_{lj}$ принимают значения в соответствии с определением 2.2. Сравнивая формулы для коэффициентов $\tilde{a}_{kl}(x^0)$ и α_{kl} заключаем, что в качестве матрицы *A* искомой линейной замены переменных достаточно взять матрицу $B = (B_{pq})$. ■

П.2 Классификация КЛДУ в окрестности точки

В этом пункте рассматриваются только такие уравнения вида (20), в которых искомая функция зависит всего от двух переменных, например, $u = u(x,y)$. Тогда уравнение (20) можно записать в виде

$$a(x,y)\cdot u_{xx}+2b(x,y)\cdot u_{xy}+c(x,y)\cdot u_{yy}+f\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0 \qquad (22)$$

При этом подразумевается, что коэффициенты *a, b, c* не равны нулю одновременно.

Определение 2.4. Скажем, что в области *G* на плоскости сделана *гладкая* (второго порядка) *невырожденная замена переменных* (ГНЗП-2) $\xi=\xi(x,y), \quad \eta=\eta(x,y)$, если функции ξ, η принадлежат классу $C^2(G)$, а якобиан $J\begin{pmatrix}\xi,\eta\\ x,y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}$ не равен нулю в *G*.

Перед следующей теоремой нам нужна вспомогательная лемма.

Лемма 2.5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ – открытое множество, $z \in C^2(U)$, $z = z(x, y)$. Тогда эквивалентны условия: 1) $z(x, y)$ – решение уравнения

$$a(x, y) \cdot z_x^2 + 2b(x, y) \cdot z_x \cdot z_y + c(x, y) \cdot z_y^2 = 0. \qquad (23)$$

и $z_y \neq 0$ в U; 2) $z(x, y) = C$ – общее решение (обыкновенного!) д. у.

$$a(x, y) \cdot y'^2 - 2b(x, y) \cdot y' + c(x, y) = 0. \qquad (24)$$

Доказательство. Пусть $z(x, y)$ – решение уравнения (23). Рассмотрим уравнение $z(x, y) = C$. Так как $z_y \neq 0$ в U, то по теореме о неявной функции, на некотором интервале оси Ox определена функция $y = f(x, C)$. Тогда по теореме о производной неявной функции имеем $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{z_x}{z_y}$. Учитывая это, разделим (23) на $z_y^2 \neq 0$. Получим $a \cdot \left(\dfrac{z_x}{z_y}\right)^2 + 2b \cdot \left(\dfrac{z_x}{z_y}\right) + c = 0$, то есть $a \cdot \left(y'\right)^2 - 2b \cdot y' + c = 0$ (то есть (24)).

Обратно, пусть $z(x, y) = C$ – общее решение (24). Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in U$ проходит интегральная кривая $z(x, y) = C_0$, задающая на некотором интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ дифференцируемую функцию $y = y(x)$. Следовательно, $z_y(x_0, y_0) \neq 0$, иначе не существовала бы $y'(x_0)$. Снова по теореме о производной неявной функции имеем $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{z_x}{z_y}$. Подставляя в (24) и умножая затем на z_y^2 получаем уравнение (23). ■

Теорема 2.6. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^2$ задано уравнение (22) с коэффициентами класса $C^2(G)$ и $a \neq 0$. Тогда существуют три ГНЗП-2 такие, что для любой точки из G одна из них, приводит уравнение (22) к каноническому виду в этой точке.

Доказательство. Сначала выполним в уравнении (22) какую-нибудь ГНЗП-2, не требуя, чтобы она где-либо приводила (22) к каноническому виду. Пусть эта замена переменных $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$, а значит, $u = u\big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big)$. Тогда, по правилам дифференцирования сложной функции двух переменных, находим (выписаны только члены со вторыми производными):

$$u_{xx} = u_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_x^2 + 2u_{\varphi\psi} \cdot \varphi_x \psi_x + u_{\psi\psi} \cdot \psi_x^2 + \ldots$$

$$u_{xy} = u_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_x \cdot \varphi_y + u_{\varphi\psi} \cdot \big(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x\big) + u_{\psi\psi} \cdot \psi_x \cdot \psi_y + \ldots \qquad (25)$$

$$u_{yy} = u_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_y^2 + 2u_{\varphi\psi} \cdot \varphi_y \psi_y + u_{\psi\psi} \cdot \psi_y^2 + \ldots$$

Подставим теперь (25) в (22). Мы получим уравнение вида

$\tilde{a}(\varphi,\psi) \cdot u_{\varphi\varphi} + 2\tilde{b}(\varphi,\psi) \cdot u_{\varphi\psi} + \tilde{c}(\varphi,\psi) \cdot u_{\psi\psi} + \tilde{f}\left(\varphi,\psi,u,u_\varphi,u_\psi\right) = 0$, где

$$\tilde{a}(\varphi,\psi) = a(x,y) \cdot \varphi_x^2 + 2b(x,y) \cdot \varphi_x \cdot \varphi_y + c(x,y) \cdot \varphi_y^2$$

$$\tilde{b}(\varphi,\psi) = a(x,y) \cdot \varphi_x \cdot \psi_x + b(x,y)\left(\varphi_x \cdot \psi_y + \varphi_y \cdot \psi_x\right) + c(x,y) \cdot \varphi_y \cdot \psi_y$$

$$\tilde{c}(\varphi,\psi) = a(x,y) \cdot \psi_x^2 + 2b(x,y) \cdot \psi_x \cdot \psi_y + c(x,y) \cdot \psi_y^2.$$

Теперь мы покажем, что при подходящей замене $\varphi = \varphi(x,y), \quad \psi = \psi(x,y)$ можно добиться, чтобы $\tilde{a}(\varphi,\psi) = 0, \quad \tilde{c}(\varphi,\psi) = 0$. Заметим, что эти уравнения имеют одинаковый вид уравнения (23)

Уравнение (24) – квадратное относительно производной y'. Обозначим его дискриминант $\Delta = b^2 - ac$ и разрешим (24) относительно y':

$$y' = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a}, \qquad y' = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a}. \qquad (26)$$

Выбор замены переменных зависит от знака Δ: $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ или $\Delta = 0$.

1) $\Delta > 0$. Уравнения (26), следовательно, различны. Пусть мы нашли их общие решения и записали их в виде $C = \varphi(x,y), \quad D = \psi(x,y)$. Тогда искомая замена переменных есть $\varphi = \varphi(x,y), \quad \psi = \psi(x,y)$. Действительно, якобиан

$$J\begin{pmatrix}\varphi, \psi \\ x, y\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix} = \varphi_x \cdot \psi_y - \psi_x \cdot \varphi_y = \left(\varphi_y \cdot y'\right) \cdot \psi_y - \left(\psi_y \cdot y'\right) \cdot \varphi_y =$$

$$= \varphi_y \cdot \psi_y \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{a} - \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right) = -2\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \cdot \varphi_y \cdot \psi_y.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $y = y(x)$, и далее тем, что $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – интегралы первого и второго уравнений (26).)

По лемме 2.5 для $z = \varphi$, $z = \psi$, имеем $\varphi_y \neq 0$, $\psi_y \neq 0$. Следовательно,

$J\begin{pmatrix}\varphi, \psi \\ x, y\end{pmatrix} = -2\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \cdot \varphi_y \cdot \psi_y \neq 0$, то есть выбранная замена переменных невырожденная. По той же лемме $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – решения уравнения (24), а значит $\tilde{a}(\varphi,\psi) = 0, \quad \tilde{c}(\varphi,\psi) = 0$, и уравнение (22) примет вид $2\tilde{b} \cdot u_{\varphi\psi} + \tilde{f} = 0$. Выполнив в полученном уравнении ещё одну простую (очевидно, гладкую невырожденную) замену $\xi = \varphi - \psi$, $\eta = \varphi + \psi$, приведём его (проверьте!) к каноническому виду $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + f_1 = 0$.

2) $\Delta < 0$. Уравнение (26) различны, но имеют комплексно-сопряжённые правые части. Выберем переменные φ, ψ так же, как и в случае $\Delta > 0$.

Аналогично доказывается, что эта замена невырожденная и приводит уравнение (22) к виду $2\tilde{b}\cdot u_{\varphi\psi}+\tilde{f}=0$. После этого следует ещё раз заменить переменные по формулам $\xi=\varphi+\psi,\ \eta=i\varphi-i\psi$, и мы получим уравнение канонического вида $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+f_2=0$.

Замечание. Так как при $\Delta<0$ правые части уравнений (26) комплексно сопряжены, то и их первые интегралы φ, ψ – тоже:

$$\varphi=\operatorname{Re}\varphi+i\operatorname{Im}\varphi,\quad \psi=\operatorname{Re}\varphi-i\operatorname{Im}\varphi.$$

Значит, канонические переменные при $\Delta<0$ выражаются формулами

$$\xi=\varphi+\psi=2\operatorname{Re}\varphi,\ \ \eta=i\varphi-i\psi=-2\operatorname{Im}\varphi.$$

3) $\Delta=0$. Видим, что (26) – одно уравнение $y'=b/a$. Пусть $C=\varphi(x,y)$ – его общее решение. Выполним замену переменных $\varphi=\varphi(x,y),\quad \psi=x$. Она невырожденная, так как её якобиан $J\begin{pmatrix}\varphi,\psi\\ x,y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\varphi_y\neq 0$ по лемме 2.5

Далее, из той же леммы следует, что $\tilde{a}(\varphi,\psi)=0$, а значит $\tilde{\Delta}=\tilde{b}^2-\tilde{a}\cdot\tilde{c}=\tilde{b}^2=0\Rightarrow\tilde{b}=0$, то есть (22) приобретает канонический вид

$$u_{\psi\psi}+f_3=0. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Если в КЛДУ число независимых переменных больше двух, то в общем случае привести такое уравнение к каноническому виду сразу в некоторой области невозможно. Действительно, для этого число *n* новых (= старых) переменных должно быть не меньше числа условий на коэффициенты уравнения. Найдём число этих условий.

Во-первых, $a_{ij}(x)=0$ при $i\neq j$. Это $1+2+\ldots+(n-1)=0{,}5\cdot(n-1)\cdot n$ условий (формула суммы арифметической прогрессии).

Во-вторых, один из коэффициентов $a_{ii}(x)\neq 0$, например, $a_{11}(x)\neq 0$, а остальные $n-1$ коэффициентов $a_{ii}(x)$ равны либо 0, либо $a_{11}(x)$, либо $-a_{11}(x)$. Это, стало быть, ещё $n-1$ условие.

Итак, должно выполняться неравенство $0{,}5\cdot(n-1)\cdot n+n-1\leq n$, что возможно только при $n\leq 2$.

В заключение параграфа приведём важное

Определение 2.7. Уравнения (26) называются *дифференциальными уравнениями характеристик* исходного уравнения (22), а их интегральные линии $C=\varphi(x,y),\quad D=\psi(x,y)$ – *характеристиками* уравнения (22).