# §1 Примеры вывода уравнений и постановки краевых задач математической физики

## П.1 Задача о малых поперечных колебаниях струны

Выведем дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний однородной струны.

**Шаг 1.** Выберем независимые переменные и искомую функцию будущего дифференциального уравнения.

Поскольку струна тонкая, то её в распрямлённом состоянии можно отождествить с отрезком $[0, l]$ числовой прямой. В процессе поперечных колебаний, по определению, точки струны (то есть точки $x$ отрезка $[0, l]$) смещаются перпендикулярно этому отрезку в некоторой общей плоскости. Мы будем <u>исчерпывающе знать</u>, как колеблется струна, если в любой момент времени $t > 0$ для каждой точки $x$ струны будем знать её отклонение $u(t, x)$ от распрямлённого положения.

Поэтому независимые переменные задачи – время $t$, $0 < t < +\infty$ и (единственная) координата $x$, $0 < x < l$. Зависимая переменная – искомая функция $u(t, x)$ – отклонение точки $x$ в момент $t$.

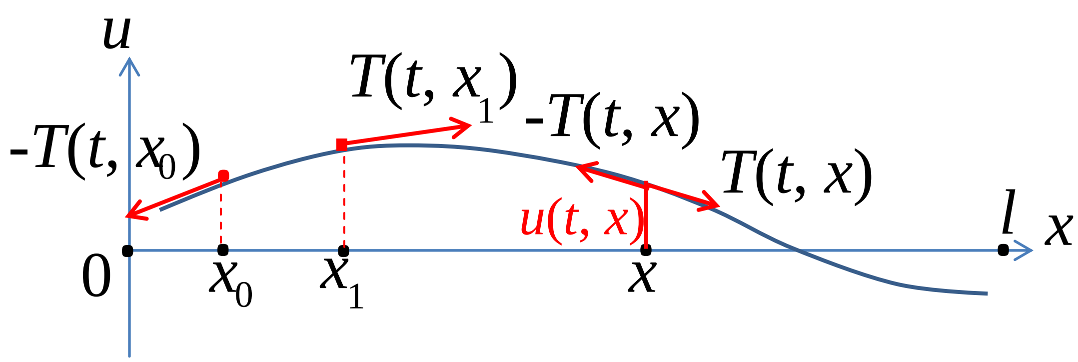
**Шаг 2.** В <u>произвольной</u> точке $(t_0, x_0)$ придадим переменным $t$, $x$ <u>произвольные</u> приращения, то есть рассмотрим отрезки $[t_0, t_1]$, $[x_0, x_1]$.

**Шаг 3.** На этом шаге мы дважды, двумя независимыми способами, найдём одну и ту же величину – перпендикулярную к струне равнодействующую проекций сил, приложенных к отрезку струны $[x_0, x_1]$.

С одной стороны, эта равнодействующая придаёт каждому маленькому отрезку $\Delta x$ струны ускорение $u_{tt}(t, \xi)$, где $\xi \in \Delta x$. По второму закону Ньютона, такое ускорение сообщено силой $\rho\cdot\Delta x\cdot u_{tt}(t, \xi)$, где $\rho$ – плотность материала струны. Считая, что наш отрезок $[x_0, x_1]$ разбит на отрезки длины $\Delta x$, и устремляя $\Delta x$ к 0, получим, что равнодействующая равна

$$F = \int_{x_0}^{x_1} \rho\cdot u_{tt}(t,x)dx\,. \qquad (1)$$

С другой стороны, эта же равнодействующая $F$ равна сумме проекций конкретных сил, приложенных к отрезку $[x_0, x_1]$. Так, в процессе колебаний, в материале струны возникают силы натяжения, направленные по касательным к профилю струны в каждой её точке $(x, u(t, x))$, в каждый момент $t$ (см. рис.).



При этом, по третьему закону Ньютона, для каждого $x$ сила натяжения $T(t, x)$, с которой левая часть струны действует на правую, уравновешивается силой $-T(t, x)$, с которой правая часть струны действует на левую.

Следовательно, из всех сил натяжения, приложенных к точкам отрезка $[x_0, x_1]$, остаются неуравновешенными только $T(t, x_1)$ и $-T(t, x_0)$. Найдём, например, величину силы $T(t, x_1)$. Она пропорциональна удлинению участка струны $[x_1, x_1 + \Delta x]$. Однако, из-за малости колебаний, удлинением этого участка можно пренебречь. Действительно, малость колебаний означает малость углов $\alpha(t, x)$ между осью $Ox$ и касательными к струне в момент $t$. Но тогда, как известно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$\alpha(t,x) \approx \sin\alpha(t,x) \approx \mathrm{tg}\,\alpha(t,x) = u_x(t,x),$$

то есть значения производной $u_x(t, x)$ малы. Мы позволим себе пренебрегать величинами более высокого порядка малости, чем $u_x(t, x)$.

Из теоремы Пифагора следует, что в любой момент $t$ длина участка струны $[x_1, x_1 + \Delta x]$ будет равна по-прежнему

$$s = \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} \sqrt{1+(u_x(t,x))^2}\,dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} \sqrt{1}\,dx = \Delta x.$$

Это означает, что величины сил натяжения, в частности $T(t, x_1)$, не зависят от времени: $|T(t, x_1)| = |T(x_1)|$. Кроме того, из-за однородности материала, величины сил натяжения одинаковы и во всех точках струны: $|T(x)| = |T(x_1)| = T_0 = \text{const}$.

Однако, проекция сил натяжения на ось $Ou$, перпендикулярную к нейтральному положению струны (ось $Ox$), всё же зависит от $x$. Она равна

$$|T(t,x)| \cdot \sin\alpha(t,x) \approx |T(t,x)| \cdot u_x(t,x) \approx T_0 \cdot u_x(t,x).$$

Значит, проекция на ось $Ou$ суммы $T(t, x_1) - T(t, x_0)$ двух оставшихся неуравновешенными сил натяжения $T(t, x_1)$ и $-T(t, x_0)$ равна

$$T_0 \cdot u_x(t,x_1) - T_0 \cdot u_x(t,x_0). \tag{2}$$

Заметим, что проекция сил на ось $Ox$ на процесс поперечных колебаний не влияет, и вычислять её не нужно.

Кроме сил натяжения в струне, на процесс колебаний могут влиять и другие силы, действующие вдоль оси $Ou$. Если известна плотность $P(t, x)$ этих сил, то их равнодействующая на отрезок $[x_0, x_1]$ равна

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} P(t,x)\,dx. \tag{3}$$

Теперь понятно, что должно выполняться равенство (1) = (2) + (3), так как (2) + (3) – это та же сила $F$, вычисленная другим способом.

**Шаг 4.** Запишем равенство (1) = (2) + (3) и приведём его к виду дифференциального уравнения.

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho\cdot u_{tt}(t,x)dx = T_0\cdot u_x(t,x_1) - T_0\cdot u_x(t,x_0) + \int_{x_0}^{x_1} P(t,x)dx\,, \qquad (4)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \rho\cdot u_{tt}(t,x)dx = T_0\cdot \int_{x_0}^{x_1} u_{xx}(t,x)dx + \int_{x_0}^{x_1} P(t,x)dx\,,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(\rho\cdot u_{tt}(t,x) - T_0\cdot u_{xx}(t,x) - P(t,x)\big)dx = 0\,.$$

Так как промежуток интегрирования $[x_0, x_1]$ выбран произвольно, то нулю равна сама подынтегральная функция:

$$\rho\cdot u_{tt}(t,x) - T_0\cdot u_{xx}(t,x) - P(t,x) = 0\,.$$

Мы получили искомое дифференциальное уравнение. Обычно его записывают в чуть ином виде (деля на $\rho$ и обозначая $T_0/\rho$ за $a^2$, $P/\rho$ за $f$):

$$u_{tt}(t,x) - a^2\cdot u_{xx}(t,x) = f(t,x)\,. \qquad (5)$$

**Определение 1.1.** Дифференциальное уравнение (5) называется (одномерным) *уравнением колебаний* или *волновым уравнением*.

**Шаг 5.** Теперь выведем начальные и граничные условия на функцию $u(t, x)$. Поскольку мы отождествили струну с отрезком $[0, l]$ числовой прямой, то граница состоит из двух точек: $x = 0$ и $x = l$. Эти точки равноправны, поэтому выведем граничное условие, например, на левом конце $x = 0$. Рассмотрим три типовых случая.

Случай 1. Конец $x = 0$ закреплён упруго. Это означает, что в процессе колебаний на точку $x = 0$ действует сила упругости $F_{упр}$, пропорциональная, как известно, отклонению этой точки от нейтрального положения. Это отклонение равно $u(t, 0)$, стало быть, $F_{упр} = k\cdot u(t, 0)$.

Вывод граничного условия производится так же, как и вывод уравнения колебаний, с помощью двоякого нахождения равнодействующей сил, приложенных к отрезку $[x_0, x_1]$. Разница лишь в том, что сейчас мы полагаем $x_0 = 0$. Рассуждая так же, как и на шаге 3, мы получим равенство вида (4), где $x_0 = 0$, а второй член в правой части (сила, приложенная к точке $x_0$) заменится на $k\cdot u(t, 0)$. В полученном равенстве теперь нужно устремить $x_1$ к 0. Будет:

$$0 = T_0\cdot u_x(t,0) - k\cdot u(t,0)\,,$$

или, обозначая $k/T_0 = \alpha$,

$$u_x(t,0) - \alpha\cdot u(t,0) = 0\,. \qquad (6)$$

Случай 2. Конец $x = 0$ не закреплён (свободен). Значит, к точке $x = 0$ не приложена вообще никакая сила. Снова всё аналогично шагу 3, но упоминавшийся выше второй член в правой части (4) (сила, приложенная к точке $x_0$) заменится теперь на 0. Переходя к пределу при $x_1$ стремящемся к 0, получим

$$u_x(t,0)=0. \qquad (7)$$

Случай 3. Конец $x = 0$ закреплён (жёстко). Стало быть, отклонений точки $x = 0$ от исходного положения не происходит:

$$u(t,0)=0. \qquad (8)$$

Кроме условий на границе, предполагаются известными отклонения $u_0(x)$ и скорости $u_1(x)$ точек $x$ струны в момент $t = 0$. Это и есть начальные условия рассматриваемой задачи:

$$u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x). \qquad (9)$$

Итак, дифференциальное уравнение (5) с граничными условиями одного из типов (6), (7) или (8) на каждом из концов $x = 0$, $x = l$ и с начальными условиями (9) – это и есть краевая задача о малых поперечных колебаниях однородной струны.