§8 Предел последовательности обобщённых функций.

Определение 8.1. Скажем, что *последовательность* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ обобщённых функций (безразлично, из $D'(G)$, или из $S'(\mathbb{R}^n)$) *сходится к обобщённой функции f*, и напишем $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$, или $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, если $(f_n,\varphi) \underset{n\to\infty}{\to} (f,\varphi)$ для любой основной функции φ (из $D(G)$, или из $S(\mathbb{R}^n)$).

Пример 8.2. $\theta(n-x) \underset{n\to\infty}{\to} 1$ в $D'(\mathbb{R})$ и в $S'(\mathbb{R})$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Доказательство – упражнение.

Справка. Оливер Хевисайд, физик; 1850–1925, Великобритания.

Пример 8.3. $\delta(x-x_n) \underset{|x_n|\to\infty}{\to} 0$ в $D'(\mathbb{R})$ и в $S'(\mathbb{R})$.

Доказательство – упражнение.

Пример 8.4. $\dfrac{1}{x\pm i\cdot {}^1\!/_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mp i\pi\cdot\delta(x) + \mathrm{P}\frac{1}{x}$ в $D'(\mathbb{R})$.

Доказательство. Для удобства будем далее говорить о пределе при ε→0 вместо $n\to\infty$. Имеем в виду, что параметр ε принимает произвольные значения, стремящиеся к 0, а не только $1/n$.

Функции $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x\pm i\varepsilon}$ локально интегрируемы в $\mathbb{R}$ так как они непрерывны (знаменатели не обращаются в 0). Поэтому $(f_\varepsilon,\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx =$

(учитываем, что suppφ ⊂ [-*a*, *a*])

$$= \int_{-a}^{a} \frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx + \int_{-a}^{a} \frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\cdot\varphi(0). \qquad (*)$$

Второй интеграл в правой части (∗) равен

$$\int_{-a}^{a} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx\cdot\varphi(0) \mp \int_{-a}^{a} \frac{i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\cdot\varphi(0) = 0 \mp \varphi(0)\cdot i\varepsilon\cdot\tfrac{1}{\varepsilon} arctg\,\tfrac{x}{\varepsilon}\Big|_{-a}^{a} = \mp\varphi(0)\cdot 2i\cdot arctg\,\tfrac{a}{\varepsilon}$$

Поэтому он стремится к $\mp\varphi(0)\cdot i\pi = \mp\big(i\pi\cdot\delta(x),\varphi(x)\big)$ при ε→0. (**)

Рассмотрим теперь интеграл $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx$. В каждой точке $x \in [-a, a]$ подынтегральная функция стремится к $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ при ε→0. В то же время $\left|\dfrac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\right| = \dfrac{|x\mp i\varepsilon|}{x^2+\varepsilon^2}|\varphi(x)-\varphi(0)| = \dfrac{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}{x^2+\varepsilon^2}|\varphi(x)-\varphi(0)| \le$

$\le \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|$. Полученная функция непрерывна на сегменте [-a, a], кроме устранимого разрыва в нуле. Поэтому она интегрируема на [-a, a]. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-a}^{a}\frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx=\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx=V.p.\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx=$$

$$=V.p.\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx-V.p.\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x}\cdot\varphi(0)=\left(\mathrm{P}\tfrac{1}{x},\varphi(x)\right)-0. \qquad (***)$$

Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(f_\varepsilon,\varphi\right)=(**)+(***)=\mp\left(i\pi\cdot\delta(x),\varphi(x)\right)+\left(\mathrm{P}\tfrac{1}{x},\varphi(x)\right)$

По определению 8.1, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f_\varepsilon(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{1}{x\pm i\cdot\varepsilon}=\mp i\pi\cdot\delta(x)+\mathrm{P}\tfrac{1}{x}$. (67)

Определение 8.5. Формулы (67) называются *формулами Сохоцкого*.

Справка. Сохоцкий Юлиан Васильевич, 1842–1927, Россия.

Лемма 8.6. Пусть обобщённые функции h, h_k, где $k\in\mathbb{N}$, таковы, что для любой основной функции φ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\left(h_k,\varphi\right)=(h,\varphi)$. Пусть также $\varphi_s\xrightarrow[s\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)}0$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\left(h_k,\varphi_k\right)=0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, переходя, если надо, к подпоследовательностям, и перенумеровывая их члены заново, можем считать, что $\left|\left(h_k,\varphi_k\right)\right|\ge c>0$. Учитывая, что $\varphi_s\xrightarrow[s\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)}0$ и снова переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что

$$\left|2^k\cdot\varphi_k^{(\alpha)}\right|\le2^{-k}\ \text{при}\ |\alpha|\le k,\ k\in\mathbb{N}. \qquad (*)$$

Стало быть, $2^k\cdot\varphi_k\xrightarrow[k\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)}0$, но $\left|\left(h_k,\,2^k\cdot\varphi_k\right)\right|=2^k\cdot\left|\left(h_k,\,\varphi_k\right)\right|\ge2^k\cdot c\underset{k\to\infty}{\to}\infty$. (**)

Ниже, для краткости, обозначаем числа вида $\left(h_k,2^m\cdot\varphi_m\right)$, $\left(h,2^m\cdot\varphi_m\right)$ символами (k, m), соответственно, (h, m). По (**) можно найти такой номер k(1), что $\left|\left(k(1),\,k(1)\right)\right|\ge2$.

Далее, поскольку $2^k\cdot\varphi_k\xrightarrow[k\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)}0$, то $\left|\left(k(1),\,k\right)\right|\underset{k\to\infty}{\to}0$. Поэтому, начиная с некоторого номера N_0, будет выполняться $\left|\left(k(1),\,k\right)\right|\le2^{-(2-1)}$ ($k>N_0$). В то же время $\left(k,k(1)\right)\underset{k\to\infty}{\to}\left(h,k(1)\right)$, и поэтому при $k>N_1>N_0$ будет справедливо $\left|\left(k,k(1)\right)\right|\le\left|\left(h,k(1)\right)\right|+1$. Опять пользуясь (**), найдём номер $k(2)>N_1$ такой, что $\left|\left(k(2),\,k(2)\right)\right|\ge\left|\left(h,\,k(1)\right)\right|+2\cdot2$.

На следующем шаге, аналогично учитывая сходимости $\left|\left(k(j),\, k\right)\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\left(k, k(j)\right) \underset{k\to\infty}{\to} \left(h, k(j)\right)$, j = 1,2, можем найти номер N такой, что при $k > N$ будет верно $\left|\left(k(j),\, k\right)\right| \le 2^{-(3-j)}$, $\left|\left(k, k(j)\right)\right| \le \left|\left(h, k(j)\right)\right| + 1$, j = 1,2. Опять пользуясь (**) найдём номер $k(3) > N$ такой, что

$$\left|\left(k(3),\, k(3)\right)\right| \ge \left|\left(h,\, k(1)\right)\right| + \left|\left(h,\, k(2)\right)\right| + 2\cdot 3.$$

Аналогично продолжая это построение неограниченно, получим последовательность $\left\{h_{k(m)} : m \in \mathbb{N}\right\}$ такую, что

$$\left|\left(k(j),\, k(m)\right)\right| \le 2^{-(m-j)},\ j = 1,2,\ldots m-1, \qquad (***)$$

и

$$\left|\left(k(m),\, k(m)\right)\right| \ge \left|\left(h,\, k(1)\right)\right| + \ldots + \left|\left(h,\, k(m-1)\right)\right| + 2\cdot m. \qquad (****)$$

Теперь рассмотрим функцию $\psi(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} 2^{k(m)} \cdot \varphi_{k(m)}$. В силу (*) это основная функция и $\left(h_{k(m)}, \psi\right) = (k(m), k(m)) + \sum\limits_{j\in\mathbb{N}\backslash m} (k(m), k(j))$. Отсюда, учитывая (***), (****), и $\left|\left(h, k(j)\right)\right| \ge \left|\left(k(m), k(j)\right)\right| - 1$ при $j < m$, получаем

$$\left|\left(h_{k(m)}, \psi\right)\right| \ge \left|(k(m), k(m))\right| - \left|\sum_{j\in\mathbb{N}\backslash m} (k(m), k(j))\right| \ge$$

$$\ge \left|(k(m), k(m))\right| - \sum_{j<m} \left|(k(m), k(j))\right| - \sum_{j>m} \left|(k(m), k(j))\right| \ge m + 1 - \sum_{j>m} 2^{m-j} = m.$$

Видим, что $\left|\left(h_{k(m)}, \psi\right)\right| \underset{m\to\infty}{\to} \infty$ вопреки условию $\left(h_{k(m)}, \psi\right) \underset{m\to\infty}{\to} (h, \psi)$. ■

Теорема 8.7.(О полноте пространства $D'(\mathbb{R}^n)$). Пусть обобщённые функции h_k, $k \in \mathbb{N}$, таковы, что для любой основной функции φ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \left(h_k, \varphi\right) = (h, \varphi)$. Тогда h – тоже обобщённая функция.

Доказательство. Линейность h сразу следует из соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} \left(h_k, \varphi\right) = (h, \varphi)$ и линейности операции предельного перехода. Покажем, что h непрерывно.

Пусть $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)} 0$. Покажем, что $(h, \varphi_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Если это не так, то для бесконечного числа номеров k выполнено $\left|(h, \varphi_k)\right| > 2a$, где $a > 0$. Но $(h, \varphi_k) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(h_m, \varphi_k\right)$, а значит, для каждого такого k найдётся номер $m(k)$ такой, что при $m > m(k)$ будет $\left|(h_m, \varphi_k)\right| \ge a$. Перенумеровывая теперь обобщённые функции по правилу $g_k = h_{m(k)+1}$, получаем противоречие с леммой 8.6. ■

1) Что такое функция Хевисайда и функция $\theta(n-x)$?
2) Почему непрерывная функция локально интегрируема?
3) Почему разрыв функции $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ устраним?
4) Какая теорема о предельном переходе под знаком интеграла имеется в виду?
5) Почему верно неравенство (*) в лемме 8.6?
6) Как не свихнуться, изучая доказательство леммы 8.6?