§6 Обобщённые функции

Определение 6.1. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – область. Линейное отображение $f: D(G) \to \mathbb{R}$ назовём *обобщённой функцией* (или *распределением*) *из* $D'(G)$, если
$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(G)} \varphi \quad \Rightarrow \quad f(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\varphi). \qquad (61)$$

Обозначение. Далее везде пишем (f, φ) вместо $f(\varphi)$.

Лемма 6.2. Свойство (61) равносильно тому, что
$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(G)} 0 \quad \Rightarrow \quad f(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (62)$$

Доказательство. Ясно, что (61) $\Rightarrow$ (62). Обратно, если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(G)} \varphi$, то пусть $\psi_n = \varphi_n - \varphi$. По (62) $f(\psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, $f(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\varphi)$. ■

Обозначение. Множество всех линейных отображений (функционалов) $f: D(G) \to \mathbb{R}$ со свойством (61) (или (62)) обозначается $D'(G)$.

Лемма 6.3. $D'(G)$ – векторное пространство.

Доказательство – упражнение. ■

Определение 6.4. Функция $f: G \to \mathbb{R}$ называется *локально интегрируемой в области* $G \subset \mathbb{R}^n$ (пишут $f \in L^{loc}(G)$), если для любого компакта $K \subset G$ существует интеграл $\int\limits_K |f(x)|dx$.

Теорема 6.5. Пусть $f \in L^{loc}(G)$. Тогда отображение $f_r: D(G) \to \mathbb{R}$, заданное правилом $(f_r, \varphi) = \int\limits_G f(x)\cdot\varphi(x)dx$ (63) является обобщённой функцией.

Доказательство. Линейность f_r очевидна. Докажем свойство (62). Пусть $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(G)} 0$. Из определения 5.12 при $\alpha = 0$ следует, что $\max\limits_{x\in K}|\varphi_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, где компакт $K \subset G$ содержит носители всех функций φ_n. Поэтому,
$$|(f_r, \varphi_n)| = \left|\int\limits_G f(x)\cdot\varphi_n(x)dx\right| \le \int\limits_K |f(x)|\cdot|\varphi_n(x)|dx \le \max_{x\in K}|\varphi_n(x)|\cdot\int\limits_K |f(x)|dx \underset{n\to\infty}{\to} 0. ■$$

Определение 6.6. Пусть $f \in L^{loc}(G)$. Тогда обобщённая функция, заданная формулой (63) называется *регулярной* обобщённой функцией.

Теорема 6.7. (дю Буа-Реймона) Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^{loc}(G)$. Тогда $\big(\forall \varphi \in D(G)\ (f_r, \varphi) = 0\big) \Leftrightarrow \big(f(x) = 0$ для почти всех $x \in G\big)$.

Доказательство. $\Leftarrow$). Если f равна 0 почти везде в G, то, независимо от φ, произведение $f \cdot \varphi$ также равно 0 почти везде в G. Поэтому $\left(f_r, \varphi\right) = \int\limits_G f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0$ для любой основной функции $\varphi \in D(G)$.

$\Rightarrow$). Произвольную область $G \subseteq \mathbb{R}^n$ можно представить как счётное объединение шаров:

$$G = \cup\{B(x_k, r_k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Пусть H – любой из таких шаров. Достаточно доказать, что $f = 0$ почти везде в H. Это, в свою очередь, последует из равенства $\int\limits_H |f(x)| dx = 0$. Докажем его.

$$\int\limits_H |f(x)| dx = \int\limits_H \operatorname{sign}(f(x)) \cdot f(x) dx \qquad (*)$$

Поскольку $f \in L^{loc}(G)$, f – измеримая функция. H – область, следовательно – измеримое множество. Значит, $\operatorname{sign}(f)$ – измеримая, ограниченная, а потому интегрируемая функция. Итак, $\operatorname{sign}(f) \in L_1(H)$. По теореме 5.10, к функции $\operatorname{sign}(f)$ сходится в пространстве $L_1(H)$ некоторая последовательность $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(H)$. Для любого номера k $\operatorname{sign}(f) = \varphi_k + (\operatorname{sign}(f) - \varphi_k)$. Поэтому, интеграл (*) равен сумме двух интегралов

$$\int\limits_H f(x) \cdot \varphi_k(x) dx + \int\limits_H \left(\operatorname{sign}(f(x)) - \varphi_k(x)\right) \cdot f(x) dx, \qquad (**)$$

из которых первый равен 0 при любом k по условию, а второй стремится к 0 при $k \to \infty$. Действительно,

$\left(\operatorname{sign}(f) - \varphi_k\right) \xrightarrow[k\to\infty]{L_1(H)} 0 \Rightarrow \left(\operatorname{sign}(f) - \varphi_k\right) \xrightarrow[k\to\infty]{\mu} 0 \Rightarrow$, поскольку мера Лебега $\mu(H) < \infty$, $\left(\operatorname{sign}(f) - \varphi_k\right) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} 0$. Так как $\bar{H}$ – компакт, то $\int\limits_{\bar{H}} |f(x)| dx = \int\limits_H |f(x)| dx < +\infty$. Кроме того, из формулы (58) следует, что $\left|\operatorname{sign}(f) - \varphi_k\right| \le 1 + |\varphi_k| \le 1 + 2$. Таким образом, выполнены условия теоремы о предельном переходе под знаком интеграла для второго интеграла в (**).

Итак, $\int\limits_H |f(x)| dx = 0$, что завершает доказательство. ■

Справка. Дю Буа-Реймон Пауль, 1831 – 1889, Германия.

Определение 6.8. Скажем, что обобщённая функция $f \in D'(G)$ *равна нулю в области* $G \subseteq \mathbb{R}^n$, если всегда $(f, \varphi) = 0$, когда $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Теорема 6.9. Пусть $\{G_i : i \in I\}$ – семейство областей в $\mathbb{R}^n$, $G = \cup\{G_i : i \in I\}$. Если $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ равна 0 во всех областях G_i, то f равна 0 и в G.

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset G$. Значит, $\{G_i : i \in I\}$ – открытое покрытие компакта $\operatorname{supp}\varphi$, и из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{G_{i_1}, \ldots G_{i_m}\}$. Далее, по теореме 5.6 найдутся $(\varphi_1, \ldots \varphi_m) \subset D(\mathbb{R}^n)$ с носителями $\operatorname{supp}\varphi_k \subset G_{i_k}$, такие, что при всех $x \in \operatorname{supp}\varphi$ выполнено $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) = 1$. Поэтому при $x \in \operatorname{supp}\varphi$ имеем $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x) \cdot \varphi_1(x) + \ldots + \varphi(x) \cdot \varphi_m(x)$, причём $\operatorname{supp}(\varphi \cdot \varphi_k) \subset G_{i_k}$. Значит,

$$(f, \varphi) = (f, \varphi \cdot (\varphi_1 + \ldots + \varphi_m)) = (f, \varphi \cdot \varphi_1) + \ldots + (f, \varphi \cdot \varphi_m) = 0. \quad ■$$

Определение 6.10. *Носителем обобщённой функции* $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ назовём множество $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \setminus \left(\cup \{G : f \text{ равно } 0 \text{ в } G\} \right)$.

Определение 6.11. Всякая не регулярная обобщённая функция называется *сингулярной*.

Примеры сингулярных обобщённых функций

6.12. *Дельта-функция Дирака* $\delta(x) : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$. Доказательства линейности, непрерывности (в смысле (62)), сингулярности этого отображения, а также отыскание носителя аналогичны примеру 6.13 (см. ниже), но значительно проще технически. Они предоставляются слушателям.

Справка. Дирак Поль Адриен Морис, 1902 – 1984, Великобритания.

6.13. Пусть S – кусочно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $\mu : S \to \mathbb{R}$ – измеримая, интегрируемая функция. *Простой слой* $\mu\delta_S : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ задаётся формулой $(\mu\delta_S, \varphi(x)) = \int\limits_S \mu(x) \cdot \varphi(x) dS$.

Из линейности интеграла следует, что простой слой линеен:

$$(\mu\delta_S, a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x)) = \int\limits_S \mu(x)(a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x)) dS = a \cdot (\mu\delta_S, \varphi(x)) + b \cdot (\mu\delta_S, \psi(x))$$

Проверим, что выполнено свойство (62). Пусть $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(G)} 0$. Из определения 5.12 при $\alpha = 0$ следует, что $\max\limits_{x \in K} |\varphi_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, где компакт K содержит носители всех функций φ_n. Поэтому,

$$|(\mu\delta_S, \varphi_n(x))| \le \int\limits_{S \cap K} |\mu(x)| \cdot |\varphi_n(x)| dS \le \max_{x \in K} |\varphi_n(x)| \cdot \int\limits_{S \cap K} |\mu(x)| dS \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Покажем, что носитель простого слоя находится на поверхности S. Очевидно, что если $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus S$, то $(\mu\delta_S, \varphi(x)) = \int\limits_S \mu(x) \cdot \varphi(x) dS = 0$. По определению 6.8, $\mu\delta_S$ равен 0 на разности $\mathbb{R}^n \setminus S$. По определению 6.10,

$\operatorname{supp}\mu\delta_S \subset \mathbb{R}^n \setminus \left(\mathbb{R}^n \setminus S\right) = S$. Если, кроме того, известно, что $\mu(x) > 0$ при всех $x \in S$, то $\operatorname{supp}\mu\delta_S = S$. Действительно, предположим противное: $\mu\delta_S$ равен 0 в области G и $G \cap S \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in G \cap S$. Возьмём $\varepsilon > 0$ настолько малым, что шар $U_\varepsilon(x_0) \subset G$, а в качестве основной функции – шапочку ω_ε. Тогда $\left(\mu\delta_S, \omega_\varepsilon(x)\right) = \int\limits_S \mu(x)\cdot\omega_\varepsilon(x)dS > 0$, несмотря на то, что $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon \subset G$. Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{supp}\mu\delta_S = S$.

Покажем, что $\mu\delta_S$ – сингулярная обобщённая функция. Предположим противное: найдётся $f \in L^{loc}(G)$ такая, что при всех $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\left(\mu\delta_S, \varphi(x)\right) = \left(f_r(x), \varphi(x)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\varphi(x)dx .$$

Тогда при $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus S$ обязательно $\left(\mu\delta_S, \varphi(x)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\varphi(x)dx = 0$. По теореме дю Буа-Реймона, $f(x) = 0$ почти везде в $\mathbb{R}^n \setminus S$. Но мера Лебега самой поверхности S в $\mathbb{R}^n$ тоже равна 0. Значит, $f(x) = 0$ почти везде в $\mathbb{R}^n$. Но тогда $\left(\mu\delta_S, \varphi(x)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\varphi(x)dx = 0$ при всех $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, то есть $\mu\delta_S = 0$. Противоречие. Итак, $\mu\delta_S$ – сингулярная обобщённая функция.

6.14. *Двойной слой* $-\frac{\partial}{\partial \overline{n}}\mu\delta_S : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ задаётся формулой

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \overline{n}}\mu\delta_S, \varphi(x)\right) = \int\limits_S \mu(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{n}}(x)dS .$$

Двойной слой также обладает свойствами, доказанными в 6.13 для простого слоя. Доказательства аналогичны.

Определение 6.15. Функция $\mu : S \to \mathbb{R}$ из примеров 6.13, 6.14 называется *плотностью простого (двойного) слоя*.