и условии некоррелированности факторов:

$$cov(f^{(1)}, f^{(2)}) = \beta^{(1)T} A \beta^{(2)} = 0.$$

Решая аналогично первому шагу задачу на условный экстремум , можно показать, что:

$$\begin{cases} A\beta^{(2)} = \lambda\beta^{(2)} \\ \alpha^{(2)} = \lambda\beta^{(2)} \end{cases}$$

Причем $Q = trA - \lambda_1 - \lambda$, то есть минимум будет достигаться $\lambda = \lambda_2$ - наибольшем собственном значении матрицы ковариаций вектора ξ, не учитывая число λ_1. По найденному собственному значению можно также восстановить собственные векторы, соответствующие ему : $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}$ и показать, что

$$cov(\xi_j, f^{(2)}) = \alpha_j^{(2)}.$$

Таким образом, продолжая этот процесс далее , получаем, что

$$cov(\xi_j, f^{(i)}) = \alpha_j^{(i)}$$

и $|\alpha_j^{(1)}|^2 = \lambda_i$ - доля дисперсии вектора исходных признаков, объясняемая i -ым фактором.

Для сокращения количества обобщенных факторов $(m < k)$ используется те же критерии, что и в методе главных компонент : критерий Кайзера, критерий, основанный на доле суммарной дисперсии, приходящейся на первые факторы, критерий Кэттела и др.

Замечание 5.1. *Так как матрица ковариаций на практике неизвестна, то находится ее оценка на основе выборочных данных, и для выборочной ковариационной матрицы находятся собственные векторы и собственные значения, которые будут являться оценками собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы A.*

6 Каноническая модель факторного анализа.

Модель факторного анализа имеет вид:

$$\xi = \alpha f + \varepsilon.$$

Пусть $A = M(\xi\xi^T)$ - ковариационная матрица исходных признаков, а $\Sigma = M(\varepsilon\varepsilon^T)$ - диагональная матрица ковариаций характерных факторов. Тогда:

$$A = M((\alpha f + \varepsilon)(\alpha f + \varepsilon)^T) = \alpha M(ff^T)\alpha^T + \Sigma = \alpha\alpha^T + \Sigma \quad (24)$$

или:

$$\begin{cases} cov(\xi_i, \xi_j) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_i^{(s)} \alpha_j^{(s)}, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \quad i \neq j \\ D(\xi_i) = \sum_{s=1}^{m} \left(\alpha_i^{(s)}\right)^2 + D(\varepsilon_i), \quad i = \overline{1,k} \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, ковариации исходных признаков полностью воспроизводятся матрицей нагрузок, а для воспроизведения их дисперсий нужны также дисперсии характерных факторов. Заметим, что поскольку

$$M(\xi f^T) = M((\alpha f + \varepsilon) f^T) = \alpha M(f f^T) = \alpha,$$

то также, как и в методе главных компонент

$$cov(\xi_j, f^{(s)}) = \alpha_j^{(s)}, \quad j = \overline{1,k}, \quad s = \overline{1,m}.$$

Модель (23) при условиях (25) носит название канонической модели факторного анализа. Различных уравнений в системе (25) $k(k+1)/2$, число же неизвестных параметров равно $km + k = k(m+1)$. Заметим, что если решение системы (25) существует, то оно определяется с точностью до ортогонального преобразования матрицы факторных нагрузок. Для того, чтобы данная задача имела единственное решение необходимо установить дополнительные условия для матрицы факторных нагрузок. Поскольку ортогональное преобразование порядка m однозначно определяется заданием $m(m-1)/2$ элементов, то необходимо, соответственно, наложить дополнительно $m(m-1)/2$ условий на параметры модели. Обычно полагают, что для элементов матрицы $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(24)}, \ldots, \alpha^{(m)})$ выполнено одно из следующих условий:

1. матрица $\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha$ должна быть диагональной;

2. матрица $B^T \alpha$, где B заданная матрица порядков $k \times m$, должна быть нижней треугольной матрицей.

Задача канонического факторного анализа в общем случае не имеет аналитического решения и может быть решена только численно, используя ту или иную итерационную процедуру.

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Будем полагать, что обобщенные и характерные факторы имеют нормальное распределение (это соответственно означает, что исходные признаки имеют многомерное нормальное распределение), а матрица факторных нагрузок удовлетворяет условию $\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha = J$, где J - диагональная матрица с упорядоченными по убыванию диагональными элементами. Заметим, что мы наложили дополнительно $m(m-1)/2$ условий на параметры модели. Таким образом, количество условий на параметры теперь равно $k(k+1)/2 + m(m-1)/2$, а число неизвестных параметров по прежнему равно $k(m+1)$. Чтобы задача не являлась неопределенной