§3 Метод Даламбера

Настоящий параграф посвящён применению теоремы 2.5 к решению некоторых краевых задач о колебательных процессах.

В качестве уравнения (22) возьмём уравнение свободных колебаний струны или стержня

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{27}$$

Сравнивая его с общим видом (22), находим

$$a(t,x) = 1, \quad b(t,x) = 0, \quad c(t,x) = -a^2.$$

Поэтому $\Delta = a^2$, и уравнения характеристик (26) принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dx}{dt} = -a.$$

Общие решения этих уравнений $x - at = C, \quad x + at = D$ соответственно. Значит, канонические переменные $\xi = x - at, \quad \eta = x + at$. Сделав эту замену переменных в уравнении (27), получим (проверьте!) уравнение во второй канонической форме $u_{\xi\eta} = 0$, которое легко решается непосредственным интегрированием: $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$. Здесь *f*, *g* – **произвольные** дважды непрерывно дифференцируемые функции. Возвращаясь к переменным *t*, *x*, получаем **общее решение** уравнения (27):

$$u(t,x) = f(x - at) + g(x + at). \tag{28}$$

Пример 3.1. Рассмотрим задачу Коши: уравнение (27) и начальные условия

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \tag{29}$$

Решить задачу Коши значит найти функцию, удовлетворяющую в области $t > 0, \quad -\infty < x < +\infty$ уравнению (27), а на её границе (то есть при $t = 0$) – начальным условиям (29).

Все решения (27) описываются формулой (28) (напомним, что функции *f*, *g* – произвольные). Нужно найти теперь такие *f*, *g*, чтобы выполнились условия (29). Для этого подставим формулу (28) в оба условия (29). Мы получим два уравнения для двух искомых функций:

$$f(x)+g(x)=u_0(x), \quad -a\cdot f'(x)+a\cdot g'(x)=u_1(x).$$

Первое равенство умножим на a, а второе проинтегрируем (по x):

$$a\cdot f(x)+a\cdot g(x)=a\cdot u_0(x), \quad -a\cdot f(x)+a\cdot g(x)=\int_0^x u_1(s)ds+K.$$

Понятно, что находя теперь разность и сумму полученных равенств, и деля оба раза на $2a$, получим формулы для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Не выписывая явно найденные выражения, обозначим их для дальнейшего символами $f_0(x)$ и $g_0(x)$. Подставляя их обратно в (28), получим решение данной задачи Коши:

$$u(t,x)=f_0(x-at)+g_0(x+at). \tag{30}$$

Пример 3.2. Смешанная задача о свободных колебаниях полуограниченной струны. В области $t>0, \quad x>0$ нужно найти решение уравнения (27) с начальными условиями (29) и граничным условием

$$u(t,0)=v(t), \tag{31}$$

$$(\text{или } u_x(t,0)=w(t)). \tag{31`}$$

Решение смешанной задачи ищется сначала в области $x-at>0$ (см. рис. 1, сектор I) под главной характеристикой $x-at=0$.

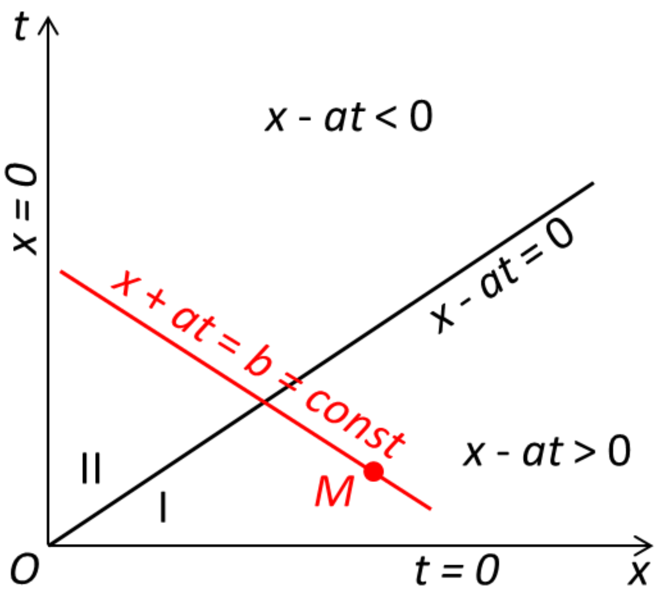

Рис. 1

Заметим, что сектор I ограничен только осью абсцисс $t = 0$ (в отличие от оси ординат). Поэтому решение данной задачи в секторе I определяется только начальными условиями (29). Значит, оно совпадает с полученным в предыдущем примере решением задачи Коши $u(t,x) = f_0(x-at) + g_0(x+at)$.

Теперь найдём решение при $x - at < 0$, то есть в секторе II (см. Рис. 1). Заметим, что функция $g_0(x+at)$ уже определена в этом секторе. Действительно, прямые линии (характеристики), задаваемые уравнениями вида $x + at = const$ заполняют и сектор I, и сектор II (Рис. 1, красный цвет). На каждой такой линии $x + at = const$, поэтому, $g_0(x+at) = const = g_0(M)$. Для характеристик другого семейства $x - at = const$ это неверно. Следовательно, для отыскания функции $u(t,x)$ в секторе II можно использовать функцию $g_0(x+at)$, а функцию $f_0(x-at)$ – нельзя. По этой причине будем искать решение $u(t,x)$ в секторе II в виде

$$u(t,x) = f_1(x-at) + g_0(x+at), \tag{32}$$

где функция $f_1(x-at)$ ещё должна быть найдена.

Сектор II ограничен только осью ординат $x = 0$. Поэтому логично применить для нахождения функции $f_1(x-at)$ условие (31) или (31`). Рассмотрим, например, применение условия (31`). Подставим (32) в (31`):

$$f_1'(-at) + g_0'(at) = w(t), \text{ или } f_1'(-at) = w(t) - g_0'(at).$$

Обозначим $s = -at, \quad t = -s/a$. Тогда можно записать $f_1'(s) = w(-s/a) - g_0'(-s)$. Теперь осталось проинтегрировать последнее равенство (по s): $f_1(s) = g_0(-s) + \int\limits_0^s w\left(-y/a\right)dy + K$. Наконец, найденную функцию $f_1(s)$ подставим в (32) (в том числе, заменяем s на $x - at$):

$$u(t,x) = g_0(at-x) + \int\limits_0^{x-at} w\left(-\frac{y}{a}\right)dy + K + g_0(x+at). \tag{33}$$

Итак, решение смешанной задачи (27), (29), (31`) даётся формулой

$$u(t,x)=\begin{cases}(30), & x-at>0\\(33), & x-at<0\end{cases}.$$

Пример 3.3. Смешанная задача о свободных колебаниях ограниченной струны с заданными законами движения концов.

Условие ограниченности струны означает, что задача поставлена в области $t>0,\quad 0<x<l$. Как и ранее, задача содержит уравнение (27), начальные условия (29), и, кроме того граничные условия

$$u(t,0)=v(t), \tag{34}$$

$$u(t,l)=w(t). \tag{35}$$

Поиск решения использует приёмы примеров 3.1 и 3.2 по схеме, изображённой на рис. 2. Опишем её кратко.

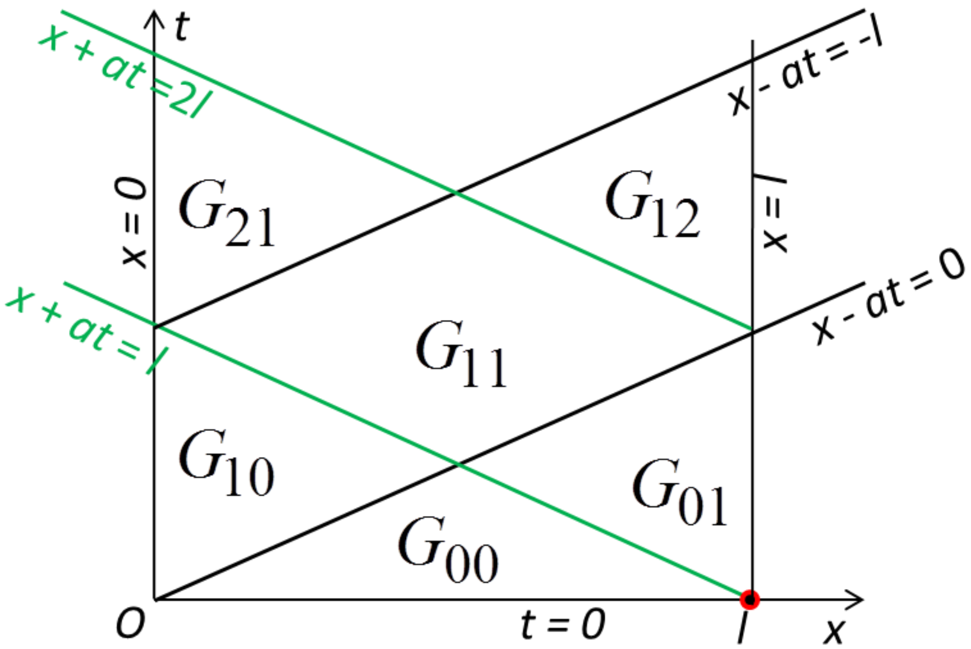

Рис. 2

Искомое решение в области G_{00} зависит только от начальных условий (при t = 0). Поэтому, действуя как в примере 3.1, найдём решение в виде

$$u(t,x)=f_0(x-at)+g_0(x+at).$$

При этом, по причине, изложенной в примере 3.2, функция $f_0(x-at)$ определена и в области G_{01}, а функция $g_0(x+at)$ – в области G_{10}. Значит, действуя, как в примере 3.2, в области G_{10} найдём решение в виде

$$u(t,x)=f_1(x-at)+g_0(x+at),$$

а в области G_{01} – в виде $$u(t,x)=f_0(x-at)+g_1(x+at).$$

По тем же причинам расположения характеристических прямых, функция $f_1(x-at)$ оказывается определённой уже и в областях G_{11}, G_{12}. Аналогично, функция $g_1(x+at)$ уже определена в областях G_{11}, G_{21}.

Таким образом, уже найдено решение в области G_{11}:

$$u(t,x)=f_1(x-at)+g_1(x+at).$$

В областях G_{21}, G_{12} решение определяется только граничными условиями (34) и (35) соответственно. Используем эти условия как в примере 3.2 для отыскания функций $f_2(x-at)$ (в области G_{21}) и $g_2(x+at)$ (в области G_{12}). Решение задачи в этих областях запишется тогда формулами

$$u(t,x)=f_2(x-at)+g_1(x+at) \qquad \text{(в области } G_{21}\text{)},$$

$$u(t,x)=f_1(x-at)+g_2(x+at) \qquad \text{(в области } G_{12}\text{)}.$$

Понятно, что этот процесс можно продолжать неограниченно, постепенно получая решение во всей области $t>0, \quad 0<x<l$.