(***продолжение***)

Введём следующее обозначение:

$$K(x,y)=\frac{-1}{p(0)\cdot W(0)}\cdot\left(\begin{cases}u_0(x)\cdot u_l(y), & x<y\\ u_0(y)\cdot u_l(x), & x>y\end{cases}\right).$$

Очевидна следующая лемма.

Лемма 4.7. Функция $K:[0,l]^2\to\mathbb{R}$ – непрерывна и $K(x,y)=K(y,x)$.■

Лемма 4.8. Любые два ненулевых решения $u_1(x)$, $u_2(x)$ задачи Штурма–Лиувилля (39), (40) линейно зависимы.

Доказательство. В силу условий (40) можем записать

$$\begin{cases}\alpha\cdot u_1(0)-\beta\cdot u_1'(0)=0\\ \alpha\cdot u_2(0)-\beta\cdot u_2'(0)=0\end{cases}$$

Таким образом, (α,β) – ненулевое решение этой линейной системы. Значит, её определитель равен нулю. Но этот определитель есть Вронскиан для пары $u_1(x)$, $u_2(x)$, вычисленный при $x=0$. Вронскиан линейно независимой пары решений был бы отличен от нуля в любой точке. Значит, функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ линейно зависимы. ■

Теорема 4.9. Если $\lambda=0$ – не собственное число задачи Штурма–Лиувилля (39), (40), то задача

$$Tu-\lambda u=f,\quad u\in M(T) \tag{44}$$

равносильна интегральному уравнению

$$u(x)-\lambda\cdot\int_0^l K(x,y)\cdot u(y)dy=\int_0^l K(x,y)\cdot f(y)dy \tag{45}$$

Доказательство. Пусть $u_0(x)$ – решение задачи (44). Тогда, очевидно, $u_0(x)$ есть также решение задачи $Tu=f+\lambda u_0,\quad u\in M(T)$, которое, по теореме 4.6, записывается в виде

$$u_0(x)=\lambda\cdot\int_0^l K(x,y)\cdot u_0(y)dy+\int_0^l K(x,y)\cdot f(y)dy,$$

что означает, что $u_0(x)$ удовлетворяет (45).

Обратно, пусть $u_0(x)$ есть решение уравнения (45). Снова рассмотрим вспомогательную задачу $Tu = f + \lambda u_0, \quad u \in M(T)$. По теореме 4.6 её решение равно

$$u(x) = \int_0^l K(x,y) \cdot \left(\lambda \cdot u_0(y) + f(y)\right) dy .$$

В то же время, $u_0(x)$ удовлетворяет (45), что означает

$$u_0(x) = \int_0^l K(x,y) \cdot \left(\lambda \cdot u_0(y) + f(y)\right) dy .$$

Значит, $u(x) = u_0(x)$, и $Tu_0 = f + \lambda u_0, \quad u_0 \in M(T)$, то есть $u_0(x)$ – решение задачи (44). ■

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма $S : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$,

$$Su(x) = \int_0^l K(x,y) \cdot u(y) dy .$$

Лемма 4.10. Оператор *S* – вполне непрерывный и самосопряжённый.
Доказательство. Как известно из курса функционального анализа, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным и симметричным ядром (лемма 4.7) вполне непрерывный и самосопряжённый. ■

Лемма 4.11. Если $\lambda = 0$ – не собственное число задачи Штурма–Лиувилля (39), (40), то

а) Операторы *T* и *S* имеют одни и те же собственные функции.

б) Число $\lambda \neq 0$ – собственное для $T \Leftrightarrow 1/\lambda$ – собственное число для *S*.

в) Собственные числа оператора *T* вещественны.

Доказательство. Применим теорему 4.9 в частном случае $f \equiv 0$: Если $\lambda = 0$ – не собственное число задачи (39), (40), то задача $Tu = \lambda u, \quad u \in M(T)$ равносильна интегральному уравнению $Su = \int_0^l K(x,y) \cdot u(y) dy = \frac{1}{\lambda} \cdot u$. Это доказывает сразу пункты а) и б). Но, так как оператор *S* самосопряжённый, то $1/\lambda \in \mathbb{R}$, а значит и $\lambda \in \mathbb{R}$, что доказывает в). ■

Лемма 4.12. Если $\lambda = 0$ – не собственное число задачи Штурма–Лиувилля (39), (40), то операторы *T* и *S* взаимно обратны на *M*(*T*).

Доказательство. При $\lambda = 0$ задачи (44), (45) принимают, соответственно, вид $Tu = f$ и $u = Sf$, что и доказывает утверждение. ■

Следствие 4.13. Если $\lambda = 0$ – не собственное число задачи Штурма–Лиувилля (39), (40), то $\mu = 0$ – не собственное число оператора *S*.

Доказательство. Если, наоборот, $\mu = 0$ – собственное число для *S*, то существует ненулевая функция *v*, такая, что $Sv = 0 \cdot v = 0$. Поскольку, в силу линейности *S*, ещё и $S(0) = 0$, то *S* – не инъективный оператор. Значит, он не может иметь обратного, в противоречие с леммой 4.12. ■

Непосредственно из леммы 4.11 а), следствия 4.13 и теоремы Гильберта–Шмидта вытекает

Следствие 4.14. В гильбертовом пространстве $L_2(0,l)$ существует ортонормированный базис из собственных функций задачи (39), (40). ■

В заключение параграфа покажем, как следствие 4.14 применяется к решению краевых задач.

Пример 4.15. Усложним пример 4.1, взяв в качестве начальных данных произвольные функции $u_0(x),\ u_1(x)$ из пространства $L_2(0,l)$.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{46}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \tag{46-н}$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0. \tag{46-г}$$

Для получения решения данной задачи попытаемся свести её к задачам вида (36), (36-н), (36-г) из примера 4.1. Для этого надо функции $u_0(x),\ u_1(x)$ разложить в ряды Фурье по собственным функциям оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$. Найдём такие собственные функции, налагая на них дополнительно условия (46-г). Стало быть, мы имеем задачу Штурма–Лиувилля

$$f_{xx} - \lambda \cdot f = 0, \quad f(0) = f(l) = 0, \tag{47}$$

получающуюся из задачи (39), (40) при $p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 0,\ \alpha = \gamma = 1,\ \beta = \delta = 0$. Легко убедиться, что число $\lambda = 0$ – не собственное для задачи (47). Действительно, при $\lambda = 0$ уравнение принимает вид $f_{xx} = 0$ и имеет общее решение $f(x) = C \cdot x + D$. Применив граничные условия $f(0) = f(l) = 0$, найдём, что $C = 0, \quad D = 0$, то есть $f \equiv 0$. Значит, по следствию 4.14, собственные функции задачи (47), которые мы найдём, образуют (ортонормированный) базис в пространстве $L_2(0,l)$. Так как, по лемме 4.11 в) собственные числа задачи (47) вещественны, то осталось рассмотреть случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения $f_{xx} - \lambda \cdot f = 0$ можно записать в виде $f(x) = C \cdot ch\sqrt{\lambda}x + D \cdot sh\sqrt{\lambda}x$. Далее, из условия $f(0) = 0$ получаем $C = 0$, то есть $f(x) = D \cdot sh\sqrt{\lambda}x$. Теперь из $f(l) = 0$ выводим $D \cdot sh\sqrt{\lambda}l = 0$. При $\lambda > 0$ $sh\sqrt{\lambda}l \neq 0$, поэтому $D = 0$, а значит опять $f \equiv 0$.

Наконец, при $\lambda < 0$ общее решение уравнения $f_{xx} - \lambda \cdot f = 0$ записывается в виде $f(x) = C \cdot \cos\sqrt{-\lambda}x + D \cdot \sin\sqrt{-\lambda}x$. Снова из $f(0) = 0$ следует $C = 0$. Поэтому $f(l) = D \cdot \sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, откуда $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, D – произвольно, $f_n(x) = D \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теперь нормируем найденные собственные функции $f_n(x)$, выбрав подходящие значения *D*: мы требуем

$$1 = \| f_n \|^2 = D^2 \cdot \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = D^2 \cdot \frac{l}{2}, \text{ значит } D = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Итак, мы нашли ортонормированный базис в $L_2(0,l)$, состоящий из функций

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (48)$$

Используем теперь этот базис для решения задачи (46), (46-н), (46-г).

Разложим функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ из (46-н) в ряды Фурье по базису (48):

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \cdot \int_0^l u_0(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (49)$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \cdot \int_0^l u_1(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (50)$$

Решение задачи (46), (46-н), (46-г) будем также искать в виде функционального ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n(t,x) . \qquad (51)$$

Теперь неизвестные слагаемые ряда (51) достаточно найти как решения задач

$$u_{tt}^n - a^2 u_{xx}^n = 0, \qquad (52)$$

$$u^n(0,x) = a_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad u_t^n(0,x) = b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{52-н}$$

$$u^n(t,0) = 0, \quad u^n(t,l) = 0. \tag{52-г}$$

Способ решения задач (52), (52-н), (52-г) описан в примере 4.1. Пользуясь его результатом, можем записать:

$$u^n(t,x) = \left(a_n \cdot \cos\frac{a\pi n t}{l} + \frac{b_n \cdot l}{5a\pi} \cdot \sin\frac{a\pi n t}{l} \right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Подставляя найденные функции в ряд (51), получим решение задачи (46), (46-н), (46-г): $$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{a\pi n t}{l} + \frac{b_n \cdot l}{5a\pi} \cdot \sin\frac{a\pi n t}{l} \right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \ .$$