§ 12. Преобразование Фурье обобщённых функций

П.1 Преобразование Фурье основных функций и определение преобразования Фурье обобщённых функций

Мы строим и изучаем теорию преобразования Фурье для обобщённых функций из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$. Соответственно, основные функции берутся из $S(\mathbb{R}^n)$. Вначале нам нужно определить и изучить преобразование Фурье для **основных** функций.

Определение 12.0. (Вместо 5.18) Последовательность $(\varphi_k)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ назовём *сходящейся к* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, и напишем $\varphi_k \xrightarrow{S \quad k\to\infty} \varphi$, если для любых мультииндексов α, β имеем $x^\beta \varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows x^\beta \varphi^{(\alpha)}(x)$ равномерно на $\mathbb{R}^n$.

Определение 12.1. Отображение $F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, заданное правилом
$$F(\varphi(x))(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}dx, \tag{83}$$
где $x, \lambda \in \mathbb{R}^n$ называется *прямым преобразованием Фурье*.

Аналогично, отображение $F^{-1}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$,
$$F^{-1}(\varphi(x))(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot e^{-i\cdot(x,\lambda)}dx \tag{84}$$
называется *обратным преобразованием Фурье*.

Теорема 12.2. (производная от преобразования Фурье)
$$F^{(\alpha)}(\varphi(x))(\lambda) = F\big((ix)^\alpha \cdot \varphi(x)\big)(\lambda) \tag{85}$$

Доказательство.
$$F^{(\alpha)}(\varphi(x))(\lambda) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}dx\right)^{(\alpha)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \left(e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)^{(\alpha_\lambda)}dx.$$
Так как $\left(e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)^{(\alpha_\lambda)} = \frac{\partial^{|\alpha|} e^{i\cdot(x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n)}}{\partial\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\partial\lambda_n^{\alpha_n}} = (ix_1)^{\alpha_1}\cdot(ix_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(ix_n)^{\alpha_n}\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)} = (ix)^\alpha \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}$
то
$$F^{(\alpha)}(\varphi)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\cdot(ix)^\alpha \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}dx = F\big((ix)^\alpha \cdot \varphi(x)\big)(\lambda). \quad \blacksquare$$

Теорема 12.3. (преобразование Фурье от производной)
$$F\big(\varphi^{(\alpha)}(x)\big)(\lambda) = (-i\lambda)^\alpha \cdot F(\varphi(x))(\lambda) \tag{86}$$

Доказательство. Рассмотрим частный случай $\alpha = \big(0,\ldots,\underset{k}{1},0,\ldots,0\big)$. Тогда
$$F\big(\varphi^{(\alpha)}(x)\big)(\lambda) = F\big(\varphi_{x_k}(x)\big)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{x_k}(x)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}dx. \qquad (*)$$
Интегрируя по частям, получим:
$$(*) = \varphi(x)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\Big|_{x_k=-\infty}^{x_k=+\infty} - \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\cdot\left(e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)_{x_k}dx.$$
Функция $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, значит её предел на $\pm\infty$ равен 0. Поэтому $\varphi(x)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\Big|_{x_k=-\infty}^{x_k=+\infty} = 0$. Следовательно,
$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\cdot\left(e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)_{x_k}dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\cdot(i\lambda_k)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}dx =$$
$-(i\lambda_k)\cdot F(\varphi)(\lambda)$. $\blacksquare$

Вывод. Преобразование Фурье преобразует операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную.

Теорема 12.4. Преобразования Фурье $F, F^{-1}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ являются линейными непрерывными операторами.

Доказательство. Линейность F, F^{-1} очевидна. По теореме 12.2 преобразование Фурье $F(\varphi)(\lambda)$ бесконечно дифференцируемо. Далее, зафиксируем произвольный мультииндекс β. Имеем:

$$\left|\lambda^\beta \cdot F(\varphi(x))(\lambda)\right| = \left|(-i\lambda)^\beta \cdot F(\varphi(x))(\lambda)\right| \overset{12.3}{=} \left|F(\varphi^{(\beta)}(x))(\lambda)\right| \le C_\beta = const.$$

Значит, $|F(\varphi(x))(\lambda)| \le \frac{C_\beta}{|\lambda^\beta|}$. По определению 5.13 заключаем, что $F(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$. Аналогично это доказывается и для $F^{-1}(\varphi)$.

Докажем непрерывность F, то есть импликацию

$$\varphi_s \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)\ s\to\infty} 0 \Rightarrow F(\varphi_s) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)\ s\to\infty} 0.$$

Пусть α, β - произвольные мультииндексы.

$$\left|\lambda^\beta \cdot F^{(\alpha)}[\varphi_s](\lambda)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} \left|(x^\alpha \varphi_s(x))^{(\beta)}\right| dx \le \sup\left\{\left|(x^\alpha \varphi_s(x))^{(\beta)}\right| : x \in \mathbb{R}^n\right\} \times$$
$$\times (1+|x|)^{n+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)}\, dx,$$

Откуда и следует нужное утверждение.

Непрерывность F^{-1} доказывается аналогично. ■

Теорема 12.5. $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I$ (I – тождественный оператор).

Доказательство. Покажем, что $(F \circ F^{-1})(\varphi) = \varphi$ для всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Из теоремы 5.21 и непрерывности операторов F и F^{-1} следует, что нам достаточно доказать равенство $(F \circ F^{-1})(\varphi) = \varphi$ для всех $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $supp\, \varphi \subset \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]^n = K$.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(K)$ с <u>ортонормированным</u> базисом $\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot e^{i\cdot(k,x)}$ (проверьте!), где $k = (\pi\varepsilon \cdot k_1, \dots, \pi\varepsilon \cdot k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$.

Разложим $\varphi(x)$ в ряд Фурье по этому базису:

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\varphi(x), \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot e^{i\cdot(k,x)}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot e^{i\cdot(k,x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\varphi(x), e^{i\cdot(k,x)}\right) \cdot \frac{\varepsilon^n}{2^n} \cdot e^{i\cdot(k,x)}.$$

Так как $\left(\varphi(x), e^{i\cdot(k,x)}\right) = \overline{\left(e^{i\cdot(k,x)}, \varphi(x)\right)} = \left(e^{-i\cdot(k,x)}, \varphi(x)\right)$, то

$$\varphi(x) = \sum_{k\in Z^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \left(e^{-i\cdot(k,x)}, \varphi(x)\right) \cdot (\pi\varepsilon)^n \cdot e^{i\cdot(k,x)} = \sum_{k\in Z^n} F^{-1}(\varphi)(k) \cdot e^{i\cdot(k,x)} \cdot (\pi\varepsilon)^n \to$$
$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} F^{-1}(\varphi)(\lambda) \cdot e^{i\cdot(\lambda,x)} d\lambda = F\left(F^{-1}(\varphi)\right)(x).$$ ■

Теорема 12.6. F – изометрия пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |F(\varphi)(\lambda)|^2 d\lambda. \qquad \text{(ii)}$$

Доказательство. Согласно теореме 5.10 (об аппроксимации основными функциями), пункт 2, нам достаточно доказать (ii) для $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. В этом случае мы можем записать $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathrm{supp}\varphi} |\varphi(x)|^2 dx.$

Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 12.5.

Тогда $\|\varphi\|^2 = \int_K |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\left(\varphi(x), \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot e^{i\cdot(k,x)}\right)\right|^2$ (равенство Парсеваля).

Следовательно, $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \left|\big(F(\varphi)\big)(k)\right|^2 \cdot (\pi\varepsilon)^n \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(\varphi)(\lambda)|^2 d\lambda$. Но в последней формуле начало и конец не зависят от ε. Значит они равны, что и даёт формулу (ii).

■

По теореме 12.4 для любой основной функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$её преобразование Фурье $F(f)$ – тоже основная функция. Тем более, $F(f)$ локально интегрируема. Значит, её можно рассматривать как регулярную обобщённую функцию, и применить к основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Получим:

$$\big(F(f(x))(\lambda), \varphi(\lambda)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)} dx\right) \cdot \varphi(\lambda) d\lambda =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) \cdot e^{i\cdot(x,\lambda)} d\lambda\big) dx = \big(f(x), F(\varphi(\lambda))(x)\big).$$

Теперь становится оправданным такое общее определение:

Определение 12.7. *Преобразование Фурье* $F: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ определено формулой

$$(F(f), \varphi) = \big(f, F(\varphi)\big). \qquad (87)$$

Корректность определения следует из того, что $F(\varphi) \in S$ и $f \in S'$.

Замечание. Из данного определения следует, что преобразование Фурье обобщенных функций можно рассматривать как продолжение преобразования Фурье, определенного на пространстве $S(\mathbb{R}^n)$.