§11. Свёртка обобщённых функций

Напомним вначале, что *свёрткой* обычных (не обобщённых!) локально интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)dy \qquad (79)$$

Таким образом, свёртка обычных функций – это интеграл, зависящий от параметра x. Он существует далеко не всегда. Например, если $f(x)\equiv g(x)\equiv 1$, то, по (79), $(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} dy$, и интеграл в правой части расходится при всех x.

Определение 11.1. *Свёрткой* обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ из $D'\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ называется обобщённая функция, заданная правилом

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}\Big(f(y),\big(g(x),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\big)\Big), \qquad (80)$$

где $\eta_k(x,y)\in D\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$, $k = 1, 2,\ldots$ – основные функции, причём на шаре $|x|^2+|y|^2\le k^2$ функция η_k тождественно равна 1.

Замечание. Обратите внимание, что функция $\varphi(x + y)$ не финитная (почему?), а значит и не основная. Функция же $\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)$ является основной. Всюду далее такие последовательности функций $\eta_k(x,y)$ мы будем называть ***исправляющими***. Заметим, что предел в формуле (80), а значит и свёртка, может и не существовать.

Теорема 11.2. Если свертка $f*g$ обобщенных функций f и g существует, то она тоже является обобщенной функцией, т.е. линейным непрерывным функционалом на пространстве основных функций.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $k\in\mathbb{N}$ отображение

$$h_k : D\left(\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R},\ (h_k,\varphi)=\Big(f(y),\big(g(x),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\big)\Big).$$

По определению 11.1 можно написать

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(h_k,\varphi), \text{ или } f*g=\lim_{k\to\infty}h_k .$$

Нетрудно видеть, что все отображения h_k линейны. Покажем, что они непрерывны. Зафиксируем $k\in\mathbb{N}$, и пусть $\varphi_s\xrightarrow[s\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^n\right)}0$. Тогда для всех s носители основных функций $\psi_s^k(x,y)=\eta_k(x,y)\cdot\varphi_s(x+y)$ содержатся в компакте $\operatorname{supp}\big(\eta_k(x,y)\big)$. Их частные производные имеют вид конечных сумм

$$\left(\psi_s^k\right)^{(\alpha)}=\sum_{|\beta|,|\gamma|\le|\alpha|}\eta_k^{(\beta)}\cdot\varphi_s^{(\gamma)}(x+y).$$

Но, все производные $\varphi_s^{(\gamma)}$ равномерно на $\operatorname{supp}\left(\eta_k(x,y)\right)$ сходятся к нулю. Значит, так себя ведут и производные $\left(\psi_s^k\right)^{(\alpha)}$. Это означает, что $\psi_s^k \xrightarrow[s\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^{2n}\right)} 0$.

Далее, так как прямое произведение $f \times g$ непрерывно на $D\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$, то $\left(f \times g, \psi_s^k\right) = \left(h_k, \varphi_s\right) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, что и доказывает непрерывность h_k. Итак, все h_k являются обобщёнными функциями. Для завершения доказательства осталось применить теорему 8.7 о полноте пространства $D'\left(\mathbb{R}^n\right)$. ■

Условия существования свёртки.

Теорема 11.3. Пусть (а) $f(x)$, $g(x)$ – регулярные обобщённые функции из $D'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Пусть также (б) функция $h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)\cdot g(x-y)|dy$ локально интегрируема в $\mathbb{R}^n$. Тогда свёртка обобщённых функций $f(x)$, $g(x)$ существует, регулярна и выражается формулой (79):

$$\left(f * g\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)dy. \tag{81}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^n\right)$ и компакт $K = \operatorname{supp}\varphi$. В определении свёртки 11.1 возьмём исправляющую последовательность $\eta_k(x,y),\ k \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\eta_k(x,y) \equiv 1$ на произведении $P(k) = B_x(k) \times B_y(k)$ шаров радиуса k, и $\eta_k(x,y) \equiv 0$ вне $P(k+1)$. Тогда $\left(f * g, \varphi\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(f(y), \left(g(x), \eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)\right) =$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\cdot\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)dxdy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z-y)\cdot\eta_k(z-y,y)\cdot\varphi(z)dzdy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)\cdot g(z-y)\cdot\eta_k(z-y,y)\cdot\varphi(z)dydz \tag{I}$$

Можно проверить, что в (I) выполнены условия теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Поэтому(I) =

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \lim_{k\to\infty}\left(\eta_k(z-y,y)\cdot f(y)\cdot g(z-y)\cdot\varphi(z)\right)dydz = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)\cdot g(z-y)\cdot\varphi(z)dydz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(z-y)dydz = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(z-y)dy, \varphi(z)\right) =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)dy, \varphi(x)\right).$$

Сравнивая теперь исходный пункт наших преобразований с конечным результатом, получаем $(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot g(x-y)dy$ ■

Теорема 11.4. Пусть $f,g\in D'\left(\mathbb{R}^n\right)$, причем одна из них, скажем g, имеет компактный носитель. Тогда свертка $f*g$ существует, и верна формула

$$(f*g,\varphi)=\left(f(x)\times g(y),\eta(y)\cdot\varphi(x+y)\right) \tag{82}$$

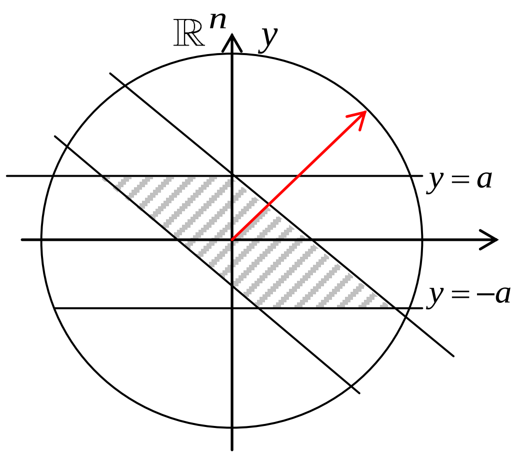
где $\eta(y)\in D\left(\mathbb{R}^n\right)$ − любая основная функция, такая что $\eta(y)\equiv 1$ на $\mathrm{supp}\,g(y)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathrm{supp}\,\varphi(x+y)$. Ясно, что если $x+y=const$, то $\varphi(x+y)=const$. По условию, $\mathrm{supp}\,g(y)$ − компакт, поэтому его можно включить в достаточно большой шар: $\mathrm{supp}\,g(y)\subset U(0,a)=\{y:|y|\le a\}$.

По 11.1, $(f*g,\varphi)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(f(y),\left(g(x),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)\right)$. Возьмем шар $B(0,k)$ в $\mathbb{R}^{2n}$, содержащий пересечение $\mathrm{supp}\,\varphi(x+y)\cap\{(x,y):|y|\le a\}$ (см. рис.). При достаточно большом k справедливо тождество:

$$\eta_k(x,y)\cdot\eta(y)\cdot\varphi(x+y)=\eta(y)\cdot\varphi(x+y)$$

Следовательно, $(f*g,\varphi)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(f(x)\times(\eta(y)\cdot g(y)),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)=$



$$=\lim_{k\to\infty}\left(f(x),\left(\eta(y)\cdot g(y),\left(\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(f(x),\left(g(y),\left(\underbrace{\eta(y)\cdot\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)}_{\eta(y)\cdot\varphi(x+y)}\right)\right)\right)=$$

$$=\left(f(x)\times g(y),\eta(y)\cdot\varphi(x+y)\right).■$$

Свойства свёртки обобщённых функций

Следующие четыре свойства свёртки следуют сразу из её определения. Ввиду простоты их доказательства оставляются слушателям как упражнения.

а) Коммутативность: $f*g=g*f$.

Доказательство. Используйте коммутативность прямого произведения.

б) Линейность по каждому аргументу:

$$(\alpha\cdot f_1+\beta\cdot f_2)*g=\alpha\cdot(f_1*g)+\beta\cdot(f_2*g).$$

в) $\delta(x)$ **- нейтральный элемент** (относительно свертки):

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Доказательство. Используйте определение функции Дирака.

9 г). Сдвиг $f(x+h)*g(x)=(f*g)(x+h).$

Доказательство. Используйте определение сдвига обобщённой функции.

9 д) Дифференцирование: $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)=\frac{\partial f}{\partial x_i}*g=f*\frac{\partial g}{\partial x_i}.$

Доказательство.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g),\varphi\right)=-\left(f*g,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\eta_k(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)-\varphi(x+y)\cdot\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}\right)=$$

Заметим, далее, что последовательность $\eta_k(x,y)+\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}$ является исправляющей, ибо это последовательность основных функций, которая на шарах $|x|^2+|y|^2\le k^2$ тождественно равна 1. Учитывая это, продолжаем:

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x)\times g(y)\right),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\left[\eta_k(x,y)+\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_i}\right]\cdot\varphi(x+y)\right)-$$

$$-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}*g(y),\eta_k(x,y)\cdot\varphi(x+y)\right)+(f*g,\varphi)-(f*g,\varphi)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}*g,\varphi\right).$$

Ясно, что данное утверждение можно распространить на производные любого порядка. ■

9 е) Ассоциативность: вообще говоря, свертка **не** ассоциативна

Пример 9.4. $(1*\delta')*\theta=(1'*\delta)*\theta=(0*\delta)*\theta=0*\theta=0$ − нулевой элемент в пространстве обобщенных функций. С другой стороны, $1*(\delta'*\theta)=1*(\delta*\theta')=1*(\delta*\delta)=1*\delta=1$. Но $1\ne 0$ в пространстве обобщенных функций.

1) Почему все производные $\varphi_s^{(\gamma)}$ равномерно на $\operatorname{supp}(\eta_k(x,y))$ сходятся к 0? (11.2)
2) Почему $\int\limits_{B_y(k+1,0)}|f(y)|dy\cdot\int\limits_{B_x(k+1,0)}|g(x)|dx<+\infty$? (11.3)

3) Что означают записи $B(0,k)$, $B(0,k)$? (11.4)