§5 Основные функции

Определение 5.1. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – область. Функцию $\varphi: G \to \mathbb{R}$ назовём *основной функцией* (или *пробной функцией*) из $D(G)$, если

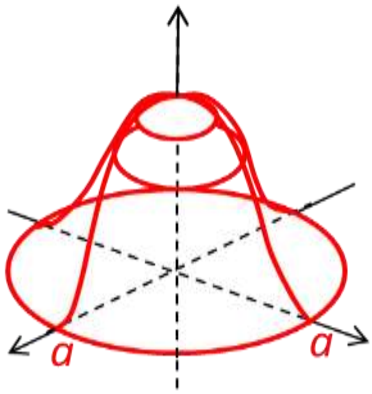
а) $\varphi \in C^\infty(G)$ (φ – бесконечно дифференцируема в G),

б) носитель $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in G:\ \phi(x) \neq 0\}}$ – компакт (φ – финитна).

П.1 Примеры основных функций.

Определение 5.2. *Шапочкой* (размера $a > 0$) называется функция $\omega_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\omega_a(x) = \begin{cases} C_a \cdot e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}. \qquad (53)$$



Здесь $C_a = (J_a)^{-1}$, $J_a = \int_{\mathbb{R}^n} exp\left(\frac{-a^2}{(a^2-|x|^2)}\right) dx$. Таким образом, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_a(x) dx = 1$.

Далее кратко обозначим: $a(x) = -\frac{a^2}{a^2-|x|^2} = -\frac{a^2}{a^2-x_1^2-\cdots-x_n^2}$. $\qquad (54)$

Лемма 5.3. Каждая шапочка – основная функция из $D(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Сразу из определения 5.2 следует, что носитель $\operatorname{supp}\omega_a$ – замкнутый шар радиуса a в $\mathbb{R}^n$, и потому компактен.

Покажем, что $\omega_a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При $|x| > a$ это очевидно. Пусть $|x| < a$. Покажем по индукции по $|\alpha|$, что любая производная от «шапочки» имеет вид

$$\omega_a^{(\alpha)}(x) = q_1(x) \cdot a(x)^{p_1} \cdot e^{a(x)} + \cdots + q_s(x) \cdot a(x)^{p_s} \cdot e^{a(x)}\ , \qquad (55)$$

где все $q_i(x)$ – одночлены (и потому ограниченны при $|x| < a$).

При $|\alpha| = 0$ имеем $\omega_a^{(0)}(x) = \omega_a(x) = C_a \cdot e^{a(x)}$, то есть формула (55) верна.

Предположим, что она верна для некоторого α, зафиксируем произвольное $i \leq n$ и рассмотрим производную порядка $\beta = (\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$, то есть производную от (55) по координате x_i. Заметим, что $\left(q_j(x)\right)_{x_i}$ – также одночлен, что $\left(e^{a(x)}\right)_{x_i} = e^{a(x)} \cdot (a(x))_{x_i}$, а также, что $(a(x)^k)_{x_i} = k \cdot a(x)^{k-1} \cdot \frac{2x_i}{a^2}\left(a(x)\right)^2 = \frac{2kx_i}{a^2} \cdot$ $\cdot\, (a(x))^{k+1}$. Из этих замечаний следует, что формула (55) верна (для любого $i \leq n$).

По теореме о мат. индукции, все производные $\omega_a^{(\alpha)}(x)$ имеют вид (55).

Далее, $\omega_a^{(\alpha)}(x) \xrightarrow[|x|\to a-0]{} 0$, так как $a(x)^k \cdot e^{a(x)} = (-a^2)^k \cdot \frac{((a^2-|x|^2)^{-1})^k}{e^{(a^2-|x|^2)^{-1}}} \xrightarrow[|x|\to a-0]{} 0$ при любом натуральном k, поскольку бесконечно большая в знаменателе более высокого порядка, чем в числителе. Кроме того, $\omega_a^{(\alpha)}(x) \equiv 0 \xrightarrow[|x|\to a+0]{} 0$. Заключаем, что любая производная от «шапочки» непрерывна при $|x| = a$. ■

Соглашение. Вместо $\omega_1(x)$ будем писать просто $\omega(x)$.

Лемма 5.4. (О связи шапочек) $\omega_a(x) = a^{-n} \cdot \omega(a^{-1} \cdot x)$.

Доказательство – упражнение. Подсказка: сделаем в интеграле J_aзамену переменных $y_i = \frac{x_i}{a}, \quad i = 1, \dots n$. Это даст $J_a = a^n \cdot J_1$. Поэтому $C_1 = \frac{1}{J_1} = \frac{a^n}{J_a} = a^n \cdot C_a$, откуда (при $|x| < a$) получаем $\omega\left(\frac{x}{a}\right) = C_1 \cdot e^{\frac{-1}{1-\left|\frac{x}{a}\right|^2}} = C_1 \cdot e^{\frac{-a^2}{a^2-|x|^2}} = a^n \cdot C_a \cdot e^{\frac{-a^2}{a^2-|x|^2}} = a^n \cdot \omega_a(x)$. ■

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Для $\delta > 0$ниже обозначаем $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \rho(x, A) < \delta\}$ – «δ-раздутие» множества A.

Теорема 5.5. (О существовании «шляпы»). Пусть A – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся основная функция $\eta_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

1) $\eta_\varepsilon | A_\varepsilon \equiv 1$, 2) $\eta_\varepsilon | \mathbb{R}^n \setminus A_{3\varepsilon} \equiv 0$, 3) $0 \le \eta_\varepsilon(x) \le 1$,

4) для любого мультииндекса α, $\left|\eta_\varepsilon^{(\alpha)}(x)\right| \le \frac{C(\alpha)}{\varepsilon^{|\alpha|}}$, где $C(\alpha)$ = const.

Доказательство. Заметим, что $A_\delta = \bigcup_{x \in A} U_\delta(x)$, где $U_\delta(x)$ – открытый шар радиуса δ с центром в точке x. Следовательно, A_δ – открытое, и потому измеримое множество. Рассмотрим множество $A_{2\varepsilon}$ и его характеристическую функцию $\chi_{2\varepsilon}$. Искомой функцией будет

$$\eta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{2\varepsilon}(y) \cdot \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{A_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x - y) dy. \qquad (56)$$

Теперь покажем, что выполняются пункты а) и б) определения 5.1. Интеграл в правой части (56) зависит от параметра x. По теореме о дифференцировании интеграла по параметру получаем:

$$\eta_\varepsilon^{(\alpha)}(x) = \int_{A_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon^{(\alpha_x)}(x - y) dy. \qquad (57)$$

По лемме 5.3 «шапочка» имеет любые производные $\omega_a^{(\alpha)}(x)$, поэтому интеграл (57) – от непрерывной (даже дифференцируемой) функции по ограниченному измеримому множеству. Значит он существует, следовательно функция $\eta_\varepsilon(x)$ имеет любые производные $\eta_\varepsilon^{(\alpha)}(x)$, $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Если $x \notin A_{3\varepsilon}$, то $U_\varepsilon(x) \cap A_{2\varepsilon} = \emptyset$. Учитывая, что $\omega_\varepsilon(x - y) = 0$ при $y \notin U_\varepsilon(x)$, заключаем, что интеграл (56) равен 0. Это доказывает 2) и финитность $\eta_\varepsilon(x)$.

Если $x \in A_\varepsilon$, то $U_\varepsilon(x) \subset A_{2\varepsilon}$. Теперь 1) вытекает из равенства

$$\eta_\varepsilon(x) = \int_{A_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(z) dz = 1.$$

Так как «шапочка» неотрицательна, то 3) следует из неравенств

$$0 \le \eta_\varepsilon(x) = \int_{A_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x - y) dy \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x - y) dy = 1.$$

Наконец, $\left|\eta_\varepsilon^{(\alpha)}(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} \left|\omega_\varepsilon^{(\alpha_x)}(x - y)\right| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\omega_\varepsilon^{(\alpha)}(z)\right| dz =$ (по лемме 5.4) $=$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\varepsilon^{-n} \cdot \omega\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \right)^{(\alpha_z)} \right| dz = \begin{bmatrix} z_i = \varepsilon \cdot t_i, \quad t_i = \varepsilon^{-1} \cdot z_i \\ dz = \varepsilon^n \cdot dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-|\alpha|} \cdot \left|\omega^{(\alpha)}(t)\right| dt = \varepsilon^{-|\alpha|} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\alpha)}(t)\right| dt.$$

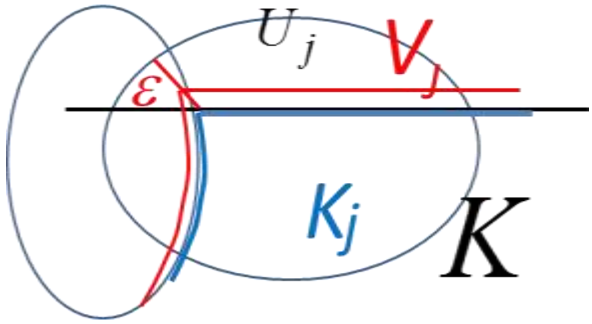
Последний интеграл и есть константа $C(\alpha)$. ■

Теорема 5.6. (О разбиении единицы) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $\{U_1, \dots, U_m\}$ – его открытое минимальное покрытие ограниченными множествами. Тогда существуют бесконечно дифференцируемые функции $e_0, e_1, \dots, e_m$ со свойствами:

1) $e_1, \dots, e_m$ – основные функции из $D(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} e_k \subset U_k, \quad k = 1, \dots m$.

2) $e_0(x) + e_1(x) + \dots + e_m(x) \equiv 1$.

3) $e_1(x) + \dots + e_m(x) \equiv 1$ при $x \in K$.



Доказательство. Так как покрытие $\{U_1, \dots, U_m\}$ минимальное, то $K_1 = K \backslash \cup \{U_i : i \neq 1\}$ – непустое компактное множество, $K_1 \subset U_1$. Следовательно, непрерывная функция $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \min\{|x - y| : y \in \mathbb{R}^n \backslash U_1\}$, достигает на компакте K_1 некоторого наименьшего значения $\varepsilon_1 > 0$. Положим $Q_1 = \mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^n \backslash U_1)_{\varepsilon_1/2}$, $V_1 = \mathbb{R}^n \backslash \overline{(\mathbb{R}^n \backslash U_1)_{\varepsilon_1/2}}$. Тогда Q_1 – компактное множество, V_1– открытое, и $K_1 \subset V_1 \subset Q_1 \subset U_1$. Включения $K_1 \subset V_1 \subset U_1$ означают, что $\{V_1, U_2, \dots, U_m\}$ – минимальное покрытие K.

Пусть уже выбраны $V_1, , \dots, V_{j-1}$ и $Q_1, \dots Q_{j-1}$. Тогда построим непустой компакт $K_j = K \backslash \left(\cup \{V_i : 1 \leq i < j\} \cup (\cup \{U_i : i > j\})\right)$, затем, аналогично первому шагу, определим число $\varepsilon_j > 0$ и положим $Q_j = \mathbb{R}^n \backslash \left(\mathbb{R}^n \backslash U_j\right)_{\varepsilon_j/2}$, $V_j = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\left(\mathbb{R}^n \backslash U_j\right)_{\varepsilon_j/2}}$. Снова имеем включения $K_j \subset V_j \subset Q_j \subset U_j$ и $\left\{V_1, \dots V_j, U_{j+1}, \dots, U_m\right\}$ – покрытие K.

После m шагов получим компакты $Q_1, \dots Q_m$, открытое покрытие $\left\{V_1, \dots V_m\right\}$ компакта K, такие, что $K_j \subset V_j \subset Q_j \subset U_j$ для всех $j \leq m$.

Пусть теперь $\delta = (1/6) \cdot \min\left\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq m\right\}$. По теореме 5.5 существуют «шляпы» $h_j = \eta_\delta^j$ для компактов Q_j. Положим теперь

$$e_j(x) = \begin{cases} \dfrac{h_j(x)}{(h_1(x) + \dots + h_m(x))}, x \in \cup \left\{Q_j : 1 \leq j \leq m\right\} \\ \qquad\qquad 0, \text{ иначе} \end{cases}, \; e_0 = 1 - (e_1 + \dots + e_m).$$

Тогда финитность e_j и пункт 2) выполнены. Так как $\left(Q_j\right)_{3\delta} \subset U_j$, то $\operatorname{supp} e_j \subset U_j$.

Бесконечная дифференцируемость e_j в точках носителя следует из того, что таковы её числитель и знаменатель и, кроме того, этот знаменатель не обращается в 0 на носителе функции h_j. Бесконечная дифференцируемость e_j на границе носителя выполняется по тем же причинам, что и для «шапочек».

Пункт 3) вытекает из того, что $K \subset \cup \left\{Q_j, j \in \{1, \dots, m\}\right\}$. ■

Теорема 5.7. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция с носителем из G, $\varepsilon > 0$. Тогда функция

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x-y)dy \tag{58}$$

– основная из $D(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции f_ε доказывается применением теоремы о дифференцировании интеграла (58) по параметру, аналогично рассуждениям для шляпы (56).

Докажем, что f_ε финитна. Имеем $\mathrm{supp}\omega_\varepsilon(x-y) = U_\varepsilon(x)$, $\mathrm{supp}f(y) \subset G$. Значит, если x «далеко» от G, в смысле $min\{|x-y|: y \in \bar{G}\} > \varepsilon$, то $U_\varepsilon(x) \cap G = \emptyset$ и потому подынтегральное выражение в (58) равно 0 при всех $y \in \mathbb{R}^n$, и $f_\varepsilon(x) = 0$. Итак, $\mathrm{supp}f_\varepsilon(y) \subset G_\varepsilon = \cup \{U_\varepsilon(x): x \in G\}$, что и означает финитность функции f_ε. ■