§4 Метод разделения переменных

Рассмотренный выше метод Даламбера основан на возможности найти общее решение уравнения колебаний. Однако для других уравнений такая возможность представляется очень редко. В этом параграфе излагаются основы метода разделения переменных, который не требует нахождения общего решения исходного уравнения. Начнём с простого примера.

Пример 4.1. Рассмотрим смешанную задачу о свободных колебаниях струны с закреплёнными концами (в области $0 < x < l, \quad t > 0$).

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{36}$$

$$u(0,x) = \alpha \cdot \sin\frac{5\pi x}{l}, \quad u_t(0,x) = \beta \cdot \sin\frac{5\pi x}{l}, \tag{36-н}$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0. \tag{36-г}$$

Обращает на себя внимание сходство правых частей в (36-н).
Попробуем найти решение в виде $u(t,x) = F(t)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}$, где функцию $F(t)$ ещё нужно найти. Для этого подставим $u(t,x) = F(t)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}$ в данную задачу.
Тогда уравнение (36) примет вид

$$F''(t)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l} + a^2\cdot\frac{25\pi^2}{l^2}\cdot F(t)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l} = 0, \tag{37}$$

из начальных условий (36-н) получим

$$F(0)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l} = \alpha\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}, \quad F'(0)\cdot\sin\frac{5\pi x}{l} = \beta\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}, \tag{37-н}$$

граничные же условия (36-г) не дадут информации о $F(t)$: $F(t)\cdot\sin 0 = 0$, $F'(t)\cdot\sin 5\pi = 0$.

Бросается в глаза, что в (37) и (37-н) можно сократить на $\sin\frac{5\pi x}{l}$. Это и позволяет решить исходную задачу. Сократив, получаем:

$$F''(t) + a^2\cdot\frac{25\pi^2}{l^2}\cdot F(t) = 0, \qquad F(0) = \alpha, \quad F'(0) = \beta. \tag{38}$$

То есть, мы получили задачу Коши для **обыкновенного** дифференциального уравнения на функцию $F(t)$. Его общее решение есть $F(t) = C \cdot \cos\frac{5a\pi t}{l} + D \cdot \sin\frac{5a\pi t}{l}$. Из начальных условий находим значения произвольных постоянных: $C = \alpha, \quad D = \frac{\beta l}{5a\pi}$.

Итак, мы нашли функцию $F(t) = \alpha \cdot \cos\frac{5a\pi t}{l} + \frac{\beta l}{5a\pi} \cdot \sin\frac{5a\pi t}{l}$, а значит и

$$u(t,x) = \left(\alpha \cdot \cos\frac{5a\pi t}{l} + \frac{\beta l}{5a\pi} \cdot \sin\frac{5a\pi t}{l}\right) \cdot \sin\frac{5\pi x}{l}. \qquad \blacksquare$$

Обратим внимание, что ключевым обстоятельством, позволившим исключить переменную x (в составе функции $\sin\frac{5\pi x}{l}$) из исходной задачи (36), (36-н), (36-г), стал тот факт, что $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\frac{5\pi x}{l}\right) = -25\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin\frac{5\pi x}{l}$. Другими словами, функция $\sin\frac{5\pi x}{l}$ является собственной для линейного дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ (относящейся к числу $-25\frac{\pi^2}{l^2}$).

Возникает, поэтому, естественный вопрос: какие ещё есть собственные функции у оператора $\frac{d^2}{dx^2}$, удовлетворяющие условиям (36-г) наподобие функции $\sin\frac{5\pi x}{l}$? Этот вопрос есть частный случай следующей задачи.

$$0 < x < l, \quad -\big(p(x) \cdot u'(x)\big)' + q(x) \cdot u(x) = \lambda \cdot u(x), \tag{39}$$

$$\alpha \cdot u(0) - \beta \cdot u'(0) = 0, \quad \gamma \cdot u(l) + \delta \cdot u'(l) = 0. \tag{40}$$

Определение 4.2. Задача (39), (40) называется *задачей Штурма – Лиувилля*, если $p(x) > 0, \quad q(x) \ge 0, \quad |\alpha| + |\beta| > 0, \quad |\gamma| + |\delta| > 0$. При этом каждое значение числового параметра λ, при котором задача (39), (40) имеет ненулевое решение, называется *собственным числом* этой задачи.

Замечание. 1) Ш. Штурм (1803–1855), Ж. Лиувилль (1809–1882), Франция.

2)Упомянутый выше «естественный вопрос» получается из задачи (39), (40) при $p(x)\equiv 1, \quad q(x)\equiv 0, \quad \alpha=\gamma=1, \quad \beta=\delta=0$.

Далее в этом параграфе буквой *T* обозначается оператор Штурма – Лиувилля $-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\dfrac{d}{dx}\right)+q(x)$, то есть $Tu=-\left(p(x)\cdot u'\right)'+q(x)\cdot u$. Кроме того, ниже через $u_0(x)$, $u_l(x)$ обозначаются произвольные ненулевые решения задач $Tu=0, \quad \alpha\cdot u(0)-\beta\cdot u'(0)=0$ и $Tu=0, \quad \gamma\cdot u(l)+\delta\cdot u'(l)=0$ соответственно. Такие решения всегда существуют.

Лемма 4.3. Пусть $\lambda=0$ – не собственное число задачи (39), (40). Тогда функции $u_0(x)$, $u_l(x)$ – линейно независимы.

Доказательство. Пусть они линейно зависимы: $u_0(x)=c\cdot u_l(x)$. Тогда, очевидно, $u_l(x)$ – решение задачи $Tu=0, \quad \alpha\cdot u(0)-\beta\cdot u'(0)=0$. Но тогда $u_l(x)$ – ненулевое решение задачи (39), (40) при $\lambda=0$. Противоречие. ■

Следствие 4.4. Определитель Вронского $W(x)=\begin{vmatrix} u_0 & u_l \\ u_0' & u_l' \end{vmatrix}(x)\neq 0$. ■

Лемма 4.5. $p(x)\cdot W(x)=const$.

Доказательство – упражнение. Покажите, что $\left(p(x)\cdot W(x)\right)'=0$. Для этого раскройте определитель, умножьте на *p*(*x*), возьмите производную, а затем учтите равенства $Tu_0=Tu_l=0$. ■

Обозначим символом *M*(*T*) множество функций $u:(0,l)\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (40) и таких, что $Tu\in L_2(0,l)$.

Теорема 4.6. Пусть $\lambda=0$ – не собственное число задачи (39), (40). Тогда для любой функции *f* из $L_2(0,l)$ задача

$$Tu=f, \quad u\in M(T) \tag{41}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Из леммы 4.3 следует, что общее решение однородного уравнения $Tu=0$ можно записать в виде $u(x)=C\cdot u_0(x)+D\cdot u_l(x)$. Как известно, решение задачи (41) тогда можно искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$u(x) = C(x)\cdot u_0(x) + D(x)\cdot u_l(x), \qquad (42)$$

причём функции $C(x)$, $D(x)$ находят из системы:

$$\begin{cases} C'(x)\cdot u_0(x) + D'(x)\cdot u_l(x) = 0 \\ C'(x)\cdot u_0'(x) + D'(x)\cdot u_l'(x) = -f(x)/p(x) \end{cases}. \qquad (43)$$

По следствию 4.4, определитель системы (43) $W(x) = \begin{vmatrix} u_0 & u_l \\ u_0' & u_l' \end{vmatrix}(x) \neq 0$.

Решим её методом Крамера. Аргумент x у функций будем опускать. Лемма 4.5 позволяет вместо pW писать $p(0)W(0)$ или $p(l)W(l)$. Итак,

$$C' = \frac{1}{W}\cdot\begin{vmatrix} 0 & u_l \\ \dfrac{-f}{p} & u_l' \end{vmatrix} = \frac{f\cdot u_l}{p\cdot W} = \frac{f\cdot u_l}{p(0)\cdot W(0)}, \quad D' = \frac{1}{W}\cdot\begin{vmatrix} u_0 & 0 \\ u_0' & \dfrac{-f}{p} \end{vmatrix} = \frac{-f\cdot u_0}{p\cdot W} = \frac{-f\cdot u_0}{p(0)\cdot W(0)}.$$

Далее, по условию, $\alpha\cdot u(0) - \beta\cdot u'(0) = 0$. Учитывая (42), продолжаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\cdot\left(C(0)\cdot u_0(0) + D(0)\cdot u_l(0)\right) - \\ &-\beta\cdot\left(C'(0)\cdot u_0(0) + C(0)\cdot u_0'(0) + D'(0)\cdot u_l(0) + D(0)\cdot u_l'(0)\right) = \\ &= C(0)\left(\alpha\cdot u_0(0) - \beta\cdot u_0'(0)\right) + D(0)\left(\alpha\cdot u_l(0) - \beta\cdot u_l'(0)\right) - \\ &-\beta\cdot\left(C'(0)\cdot u_0(0) + D'(0)\cdot u_l(0)\right) \end{aligned}$$

В последнем выражении самая последняя скобка равна нулю в силу первого уравнения системы (43). Коэффициент при $C(0)$ равен нулю по выбору функции $u_0(x)$. Значит, остаётся равенство $D(0)\left(\alpha\cdot u_l(0) - \beta\cdot u_l'(0)\right) = 0$, причём выражение в скобке не может быть равно нулю. В самом деле, иначе функция $u_l(x)$ – ненулевое решение задачи (39), (40) при $\lambda = 0$. Противоречие. Заключаем, что $D(0) = 0$.

Аналогично из $\gamma\cdot u(l) + \delta\cdot u'(l) = 0$ и (42) выводим, что $C(l) = 0$. Значит,

$$-C(x) = C(l) - C(x) = \int_x^l C'(y)dy = \frac{1}{p(0)\cdot W(0)}\cdot\int_x^l f(y)\cdot u_l(y)dy,$$

$$D(x) = D(x) - D(0) = \int_0^x D'(y)dy = \frac{-1}{p(0)\cdot W(0)}\cdot\int_0^x f(y)\cdot u_0(y)dy.$$

Подставляя полученные выражения $C(x)$, $D(x)$ в (42), получим

$$u(x) = \int_0^l \frac{-1}{p(0)\cdot W(0)}\cdot\left(\begin{cases} u_0(x)\cdot u_l(y), & x < y \\ u_0(y)\cdot u_l(x), & x > y \end{cases}\right)\cdot f(y)dy. \qquad \blacksquare$$