П.2 Свойства преобразования Фурье обобщённых функций

Теорема 12.8. Преобразование Фурье $F: S' \to S'$ линейно и если $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$, то и $F(f_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(f)$ (непрерывность).

Доказательство. Линейность очевидна. Непрерывность сразу следует из определений 8.1 и 12.7. ■

Теорема 12.9. $F^{-1}(f(x)) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} F\big(f(-x)\big), \quad \forall f \in S'.$

Доказательство. Обозначим $G(f(x)) = (2\pi)^{-n} \cdot F\big(f(-x)\big)$ и покажем, что $G \circ F = F \circ G = I$, т.е. что оператор G – обратный к F. Имеем

$$\big((G\circ F)(f(\lambda))(\lambda), \varphi(\lambda)\big) = (2\pi)^{-n} \cdot \big(F\big(F(f(\lambda))(-x)\big)(\lambda), \varphi(\lambda)\big) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \cdot \big(F(f(\lambda))(-x), F(\varphi(\lambda))(x)\big) = (2\pi)^{-n} \cdot \big(F(f(\lambda))(x), F(\varphi(\lambda))(-x)\big) =$$

$$= \Big(F(f(\lambda))(x), (2\pi)^{-n} \cdot F(\varphi(-\lambda))(x)\Big) = \Big(F(f(\lambda))(x), F^{-1}(\varphi(\lambda))(x)\Big) = .$$

$$= \Big(f(\lambda), F\Big(F^{-1}(\varphi(\lambda))(x)\Big)(\lambda)\Big) = \big(f(\lambda), \varphi(\lambda)\big), \qquad \text{то есть } G\circ F = I.$$

Аналогично, доказывается равенство $F \circ G = I$. ■

Пример 12.10. Вычислим $F\big(\delta(x-x_0)\big)$. Для $\varphi \in S\big(\mathbb{R}^n\big)$ имеем

$$\Big(F\big(\delta(x-x_0)\big)(\lambda), \varphi(\lambda)\Big) = \big(\delta(x-x_0), F(\varphi(\lambda))(x)\big) = F(\varphi(\lambda))(x_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) \cdot \underbrace{e^{i\cdot(\lambda, x_0)}}_{\text{лок. инт.}} d\lambda = \Big(e^{i\cdot(\lambda,x_0)}, \varphi(\lambda)\Big) .$$

Полученное равенство верно для любой основной функции φ. Значит,

$$F\big(\delta(x-x_0)\big)(\lambda) = e^{i\cdot(\lambda,x_0)}. \tag{88}$$

При $x_0 = 0$ будет
$$F\big(\delta(x)\big)(\lambda) = 1. \tag{89}$$

Отсюда
$$\delta(x) = F^{-1}(1(\lambda))(x) = (2\pi)^{-n} \cdot F(1(\lambda))(x). \tag{90}$$

Нижеперечисленные свойства доказываются прямо по определению 12.7 в сочетании с соответствующим свойством классического преобразования Фурье (см. предыдущую лекцию). Применяются также определения операций над обобщёнными функциями (дифференцирование, умножение на мультипликатор и др.). **Доказательства оставляются читателям.**

12а. Производная от преобразования Фурье:

$$F^{(\alpha)}(f(x))(\lambda) = F\Big((ix)^{\alpha} \cdot f(x)\Big)(\lambda) \tag{91}$$

12б. Преобразование Фурье производной:

$$F\left(f^{(\alpha)}(x)\right)(\lambda)=(-i\lambda)^{\alpha}\cdot F(f(x))(\lambda). \qquad (92)$$

12в. Преобразование Фурье сдвига:

$$F(f(x-x_0))(\lambda)=F(f(x))(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x_0,\lambda)}. \qquad (93)$$

12г. Сдвиг преобразования Фурье:

$$F(f(x))(\lambda+\lambda_0)=F\left(e^{i\cdot(x,\lambda_0)}\cdot f(x)\right)(\lambda) \qquad (94)$$

12д. Формула подобия:

$$F(f(c\cdot x))(\lambda)=\frac{1}{|c|^n}F(f(x))\left(\frac{\lambda}{c}\right),\ \text{где } c\neq 0. \qquad (95)$$

12е. Преобразование Фурье прямого произведения:

$$F(f(x)\times g(y))(\lambda,\mu)=F(f(x))(\lambda)\times F(f(y))(\mu). \qquad (96)$$

Теорема 12.11. Если f – финитная обобщенная функция, то функция $F(f)(\lambda)$ принадлежит пространству $M(S)$ и удовлетворяет условиям предложения 7.9. Кроме того, справедлива формула:

$$F(f(x))(\lambda)=\left(f(x),\eta(x)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\right), \qquad (97)$$

для любой «шляпы» $\eta(x)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ такой, что $\operatorname{supp}\eta(x)\supset\operatorname{supp} f(x)$.

Доказательство. Ниже пишем f вместо $f(x)$. Пусть α – мультииндекс.

$$\left(F^{(\alpha)}(f)(\lambda),\varphi(\lambda)\right)=(-1)^{|\alpha|}\cdot\left(F(f)(\lambda),\varphi^{(\alpha)}(\lambda)\right)=(-1)^{|\alpha|}\cdot\left(f,F\left(\varphi^{(\alpha)}(\lambda)\right)(x)\right)=$$

$$=\left(f,(ix)^{\alpha}\cdot F(\varphi)(x)\right)=\left(f,\eta(x)\cdot(ix)^{\alpha}\cdot F(\varphi)(x)\right)=\left(f,\eta(x)\cdot(ix)^{\alpha}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}d\lambda\right)=$$

$$=(78)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(f,\eta(x)\cdot(ix)^{\alpha}\cdot\varphi(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)d\lambda=\int_{\mathbb{R}^n}\left(f,\eta(x)\cdot(ix)^{\alpha}\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\right)\cdot\varphi(\lambda)d\lambda.$$

Итак,
$$F^{(\alpha)}(f)(\lambda)=\left(f,\eta(x)\cdot(ix)^{\alpha}\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\right), \qquad (*)$$

откуда при $\alpha=(0,\ldots,0)$ получаем (97).

Включение $F(f)(\lambda)\in M(S)$ можно вывести из непрерывности f и равенства (*). ■

12ж. Преобразование Фурье свёртки

Теорема 12.12. Пусть $f,g\in S'$ и g – финитная. Тогда

$$F(f*g)=F(f)\cdot F(g). \qquad (98)$$

Доказательство.

$$\left(F(f*g),\varphi\right)=\left(f*g,F(\varphi)\right)=\left(f(x),\left(g(y),\eta(y)\cdot F(\varphi)(x+y)\right)\right)=$$

$$=\left(f(x),\left(g(y),\eta(y)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x+y,\lambda)}d\lambda\right)\right)=$$

$$=\left(f(x),\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(g(y),\eta(y)\cdot\varphi(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}\cdot e^{i\cdot(y,\lambda)}\right)d\lambda\right)=$$

$$=\left(f(x),\int\limits_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\left(g(y),\eta(y)\cdot e^{i\cdot(y,\lambda)}\right)}_{F(g)(\lambda),\ \text{по } 12.11}\cdot\varphi(\lambda)\cdot e^{i\cdot(x,\lambda)}d\lambda\right)=$$

$$=\left(f(x),F\left(F\left(g(y)\right)(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)\right)(x)\right)=\left(F\left(f(x)\right)(\lambda),F\left(g(y)\right)(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)\right)=$$

$$(12.11)=\left(F(f)\cdot F(g),\varphi\right)$$

■

П.3 Преобразование Лапласа обобщённых функций из $S'(\mathbb{R})$

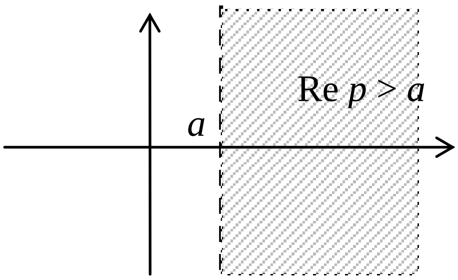
Наряду с преобразованием Фурье активно применяется ещё одно интегральное преобразование – преобразование Лапласа.

Определение 13.1. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ локально интегрируема, $f(t)=0$ при $t<0$, а также удовлетворяет неравенству $\left|f(t)\right|\le A\cdot e^{at}$ при достаточно больших $A>0$ и $a>0$.

Тогда функция f называется *оригиналом*, а функция $L(f):\{p=\sigma+i\omega\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}p=\sigma>a\}\to\mathbb{C}$, заданная правилом

$$L(f)(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt, \tag{99}$$

называется *преобразованием Лапласа оригинала f* или *изображением f*.



Теорема 13.2. $L(f)(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re}p>a$, причем $L(f)(p)$ равномерно сходится к нулю при $\operatorname{Re}p\to\infty$.

Доказательство. Функция $L(f)(p)$ задана как интеграл, зависящий от параметра (см. (99)). Её аналитичность вытекает из аналитичности функции e^{-pt} и из теоремы о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. Далее

$$\left|f(t)\cdot e^{-pt}\right|=\left|f(t)\cdot e^{-(\sigma+iw)t}\right|=\left|f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right|\le A\cdot e^{(a-\sigma)t}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le \int_0^{+\infty} A\cdot e^{(a-\sigma)t}dt = A\cdot\frac{1}{a-\sigma}\cdot e^{(a-\sigma)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{\sigma-a}\xrightarrow[\sigma\to\infty]{}0. \qquad \blacksquare$$

Следующая теорема устанавливает связь между преобразованием Лапласа и преобразованием Фурье обобщённых функций.

Теорема 13.3. (б/д) $L(f)(p) = F\left(f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right)(-\omega)$. ■

Тот факт, что $f(t)$ – оригинал, а $L(f)(p)$ – его изображение часто записывают в виде $f(t)\leftrightarrow L(f)(p)$, или $f(t)\leftrightarrow \overline{f}(p)$.

Список основных свойств преобразования Лапласа весьма схож с таковым для преобразования Фурье. Он приводится в отдельном файле.