П.2 Задача о распределении температуры в пространственной области

Выведем дифференциальное уравнение распределения температуры. Будем придерживаться схемы рассуждений из предыдущего пункта.

Шаг 1. Выберем независимые переменные и искомую функцию будущей краевой задачи. Как видно из формулировки вопроса, искомой функцией удобно считать температуру $u(t, x)$ в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ данной области G в трёхмерном евклидовом пространстве. Поверхность, ограничивающую область G, обозначим через ∂G. Предполагаем, что ∂G – кусочно-гладкая поверхность.

Шаг 2. Выберем в области G произвольную ограниченную подобласть V с кусочно-гладкой границей S, а также произвольный промежуток времени $[t_0, t_1]$.

Шаг 3. Попытаемся двумя разными способами найти изменение количества теплоты в объёме V за промежуток времени $[t_0, t_1]$.

С одной стороны, на изменение температуры точек x области V от $u(t_0, x)$ до $u(t_1, x)$, при постоянных плотности ρ и теплоёмкости c среды, требуется количество теплоты

$$Q = \int_V c\rho\big(u(t_1,x) - u(t_0,x)\big)\,dV = \int_V \int_{t_0}^{t_1} c\rho \cdot u_t(t,x)\,dt\,dV\,. \qquad (10)$$

С другой стороны, количество Q, очевидно, складывается из количества Q_1 теплоты, выделенной за промежуток $[t_0, t_1]$ источниками тепла в области V, и из количества Q_2 теплоты, прошедшей через границу S области V за тот же промежуток $[t_0, t_1]$. При этом, если определена *функция интенсивности* источников тепла

$$F(t,x) = \lim_{x\in W,\, \mu(W)\to 0} \frac{Q(W)}{\mu(W)},$$

где W – произвольная окрестность точки x, $\mu(W)$ – мера Лебега (объём) этой окрестности, $Q(W)$ – количество тепла, выделенное источниками внутри W, то

$$Q_1 = \int_V \int_{t_0}^{t_1} F(t,x)\,dt\,dV\,. \qquad (11)$$

Далее, по закону Фурье распространения тепла можем записать

$$Q_2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_S \Big(k \cdot (\overline{n}, \overline{\operatorname{grad} u})\Big)\,dS dt\,. \qquad (*)$$

(Здесь $\bar{n}$ – единичный вектор <u>внешней</u> нормали к S). Понятно, что

$$(10) = (11) + (*).$$

Преобразуем последний интеграл, используя следующую теорему:

Теорема 1.2. (Формула Гаусса – Остроградского) Пусть в ограниченной области G с кусочно-гладкой границей S задано векторное поле $\bar{\Phi}$ класса гладкости C^1. Пусть $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к S. Тогда

$$\int_S \left(\bar{n}, \bar{\Phi}\right) dS = \int_G div \bar{\Phi}\, dG.$$

Применяя эту теорему при $G = V$, $\bar{\Phi} = \overline{\mathrm{grad}\, u} = \left(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}\right)$, получим

$$Q_2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_V k \cdot div \overline{\mathrm{grad}\, u}\, dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V k \cdot \Delta u\, dV dt . \qquad (12)$$

Учитывая теперь, что (10) = (11) + (12), а также произвол выбора области интегрирования V и промежутка $[t_0, t_1]$, можем записать:

$$c\rho \cdot u_t = F + k \cdot \Delta u .$$

Полученное дифференциальное уравнение, полагая $f = F/c\rho$, $a^2 = k/c\rho$, записывают в виде:

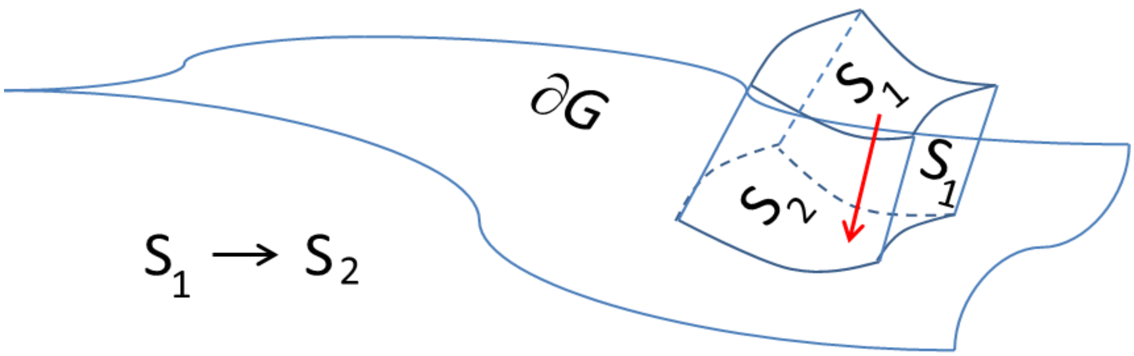
$$u_t - a^2 \cdot \Delta u = f . \qquad (13)$$

Определение 1.3. Уравнение (13) называется *уравнением теплопроводности*.

Заметим, что мы осуществили также и **Шаг 4**.

Выведем теперь <u>граничные условия</u>. Для этого, как и на **Шаге 2**, выберем в области G произвольную ограниченную подобласть V с кусочно-гладкой границей S. Однако теперь пусть поверхность S частично совмещается с границей ∂G нашей исходной области (см. рис.):

$$S = S_1 \cup S_2,\ \ S_1 \cap S_2 = \varnothing,\ S_1 \subset G,\ S_2 \subset \partial G.$$



Рассмотрим несколько стандартных случаев.

Случай 1. Через границу ∂G происходит теплообмен с окружающей средой температуры $u_1 = u_1(t, x)$. Тогда предполагают, что количество теплоты ΔQ, проходящей через участок ΔS границы ∂G за промежуток времени Δt, пропорционально разности температур внутри и снаружи области:

$$\Delta Q = k_1(u - u_1)\Delta S \Delta t.$$

Тогда можно записать аналог равенства (10) = (11) + (*):

$$\int\limits_V \int\limits_{t_0}^{t_1} c\rho \cdot u_t(t,x)\,dt\,dV = \int\limits_V \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t,x)\,dt\,dV + \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_1} \left(k \cdot (\bar{n}, \overline{\operatorname{grad} u})\right) dSdt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_2} k_1 \cdot (u - u_1)\,dSdt \qquad (**)$$

В равенстве (**) «устремим» S_1 к S_2 так, чтобы объём V устремился к 0 (см. рис.). Тогда, учитывая произвол промежутка времени и участка границы S_2, получим искомое граничное условие:

$$\left(k \cdot (\bar{n}, \overline{\operatorname{grad} u}) + k_1 \cdot (u - u_1)\right)\Big|_{x \in \partial G} = 0. \qquad (14)$$

Случай 2. На границе ∂G поддерживается заданный тепловой поток $q = q(t, x)$. Тогда последний интеграл в (**) примет вид $\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{S_2} q(t,x)\,dSdt$. Выполняя тот же предельный переход, что и в случае 1, получим:

$$\left(k \cdot (\bar{n}, \overline{\operatorname{grad} u}) + q\right)\Big|_{x \in \partial G} = 0. \qquad (15)$$

Случай 3. Граница ∂G теплоизолирована. Это частный подслучай случая 2 при $q \equiv 0$. Соответственно, вместо (15) получим

$$(\bar{n}, \overline{\operatorname{grad} u})\Big|_{x \in \partial G} = 0. \qquad (16)$$

Случай 4. На границе поддерживается фиксированная температура $u_0 = u_0(t, x)$. Тогда сразу же можем записать

$$u(t,x)\Big|_{x \in \partial G} = u_0(t,x). \qquad (17)$$

В качестве начального условия задаётся температура при $t = 0$:

$$u(0, x) = v_0(x). \qquad (18)$$

Итак, дифференциальное уравнение (13) с граничным условием одного из видов (14) – (17) и с начальным условием (18) – это и есть краевая задача о распределении температуры.