Оглавление

1 Нормированные пространства **3**
- 1.1 Основные определения . . . 3
- 1.2 Вспомогательные неравенства . . . 6
- 1.3 Примеры нормированных пространств . . . 9
- 1.4 Сепарабельность . . . 13
- 1.5 Линейные ограниченные операторы . . . 14
- 1.6 Пространство линейных ограниченных операторов . . . 18
- 1.7 Изоморфизмы и изометрии . . . 19
- 1.8 Линейные ограниченные функционалы . . . 23
  - 1.8.1 Общий вид функционала в некоторых пространствах . . . 24
- 1.9 Теорема Хана-Банаха . . . 28
- 1.10 Геометрическая форма теоремы Хана–Банаха . . . 34
- 1.11 Теорема Банаха–Штейнгауза . . . 38
- 1.12 Естественная изометрия . . . 40
- 1.13 Принцип открытости отображения . . . 41
- 1.14 Вполне непрерывные операторы . . . 44
- 1.15 Сопряжённые операторы . . . 49

2 Гильбертовы пространства **52**
- 2.1 Основные определения и свойства . . . 52
- 2.2 Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции . . . 54
- 2.3 Общий вид функционала в гильбертовом пространстве . . . 56
- 2.4 Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве . . . 57
- 2.5 Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве . . . 59
- 2.6 Сопряжённые и самосопряжённые операторы . . . 61
- 2.7 Вполне непрерывные операторы . . . 65
- 2.8 Проекторы в гильбертовых пространствах . . . 68
- 2.9 Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств . . . 69

3 Некоторые свойства пространства $C(K)$ **71**
- 3.1 Общий вид функционала на пространстве $C[a;b]$ . . . 71
  - 3.1.1 Функции ограниченной вариации . . . 71
  - 3.1.2 Интеграл Римана–Стилтьеса . . . 73

3.1.3 Общий вид функционала на пространстве $C[a;b]$ 76
3.2 Теорема Стоуна–Вейерштрасса 78

4 Спектральная теория 82
4.1 Основные определения 82
4.2 Классификация точек спектра 84
4.3 Непустота спектра 85
4.4 Спектральный радиус 87
4.5 Спектр сопряжённого и самосопряжённого операторов 89
4.6 Спектр вполне непрерывного оператора 92
4.7 Уравнения Риса–Шаудера и уравнения Фредгольма 96
4.8 Теорема Гильберта–Шмидта 101
4.8.1 Применение к решению уравнений Риса–Шаудера 103
4.9 Теорема о неподвижной точке и ее применения 107
4.9.1 Применение к решению уравнений Риса–Шаудера 108
4.9.2 Применение к решению уравнений Вольтерры 109

5 Введение в общую теорию меры 112
5.1 Основные определения 112
5.2 Продолжение мер 113
5.3 Различные виды сходимости, связанные с понятием меры 115

Литература 119

Глава 1

Нормированные пространства

1.1 Основные определения

Определение. Множество E называется *линейным* (*векторным*) *пространством над полем* Λ, если в E определена бинарная операция «сложение» $(x, y) \mapsto x + y$ и определена операция $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ умножения элементов E на элементы поля Λ, причём выполняются следующие условия:

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для всех $x, y, z \in E$;

2) $x + y = y + x$ для всех $x, y \in E$;

3) существует такой элемент $0 \in E$, что $0 + x = x$ для всех $x \in E$;

4) для каждого $x \in E$ существует такой элемент $-x \in E$, что $x + (-x) = 0$;

5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и любых $x, y \in E$;

7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

8) $1 \cdot x = x$ для любого $x \in E$ (здесь 1 — нейтральный элемент по умножению поля Λ).

Замечание. Из первых четырех свойств следует, что E — абелева группа по сложению.

Пусть E — линейное пространство над полем Λ и $A \subset E$. *Линейной оболочкой* множества A называется множество

$$\operatorname{sp} A = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in \Lambda,\ x_i \in A,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать линейные пространства над полем $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\Lambda = \mathbb{C}$.

Определение. Пусть E — линейное пространство над полем Λ. *Норма* на E — это функция $\|\cdot\|\colon E \to [0;+\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in E$ (неравенство треугольника).

Линейное нормированное пространство (ЛНП) — это пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — линейное пространство, а $\|\cdot\|$ — норма на E.

Замечание. Любое ЛНП становится метрическим пространством, если метрику в нем определить формулой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Задача. Проверьте, что формула $\rho(x, y) = \|x-y\|$ действительно определяет метрику на ЛНП.

Коль скоро любое ЛНП является метрическим пространством (и, тем более, топологическим), то все определения и факты, касающиеся метрических и топологических пространств, верны и для ЛНП. В частности, в ЛНП автоматически появляются понятия открытых и замкнутых шаров, открытого и замкнутого множества, замыкания множества, всюду плотного множества, фундаментальной последовательности, предельной точки, полноты и т.п.

Определение. Пусть E — ЛНП, $x \in E$ и $r > 0$.

- *открытым шаром* в E с центром в точке x радиуса r называется множество $U(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\}$;
- *замкнутым шаром* в E с центром в точке x радиуса r называется множество $\overline{U}(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| \leqslant r\}$;
- множество $A \subset E$ называется *ограниченным*, если существует такое число $r > 0$, что $A \subset U(0, r)$.
- последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве E *сходится* к точке $x \in E$, если $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. В этом случае будем писать $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ или просто $x_n \to x$.

Предложение 1.1. *Пусть E — ЛНП, $A \subset E$ и $x \in E$. Тогда $x \in \bar{A}$ в том и только том случае, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, сходящаяся к x.*

Замечание. Не следует путать понятие замкнутого шара $\overline{U}(x, r)$ с замыканием открытого шара $\overline{U(x, r)}$. Хотя в ЛНП всегда $\overline{U}(x, r) = \overline{U(x, r)}$, но в метрических пространствах это равенство выполняется не всегда.

Свойства нормы.

1) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$. Действительно, так как

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|;$$
$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|;$$

то

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|;$$
$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|;$$

откуда следует нужное неравенство.

2) непрерывность нормы: если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$. В самом деле,

$$0 \leqslant \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0.$$

3) непрерывность алгебраических операций:

(a) если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$;

$$0 \leqslant \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

(b) если $\lambda_n \to \lambda$ и $x_n \to x$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leqslant \\ \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = \\ = |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Определение. Пусть E — ЛНП и $L \subset E$. L называется *подпространством* в E, если

1) $x + y \in L$ для любых $x, y \in L$;

2) $\lambda x \in L$ для любого $x \in L$ и любого $\lambda \in \Lambda$;

3) $\|x\|_L = \|x\|_E$ для каждого $x \in L$.

Теорема 1.2. *Если L — подпространство в E, то $\overline{L}$ — тоже подпространство в E.*

Доказательство. Проверим выполнение трёх пунктов из определения подпространства. Пусть $x, y \in \overline{L}$. Тогда найдутся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов L, сходящиеся к точкам x и y соответственно. Тогда по третьему свойству нормы последовательность $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ сходится к $x + y$, откуда, по предложению 1.1 $x + y \in \overline{L}$.

Пусть $x \in \overline{L}$ и $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$, сходящуюся к x. По одному из доказанных свойств нормы последовательность $\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ сходится к λx, откуда, опять по предложению 1.1 $\lambda x \in \overline{L}$.

Третий пункт очевиден, так как $\overline{L} \subset E$. □

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в ЛНП E называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер n_0, что при каждых $n, m \geqslant n_0$ верно неравенство $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Метрическое (в частности, линейное нормированное) пространство называется *полным*, если в нем сходится каждая фундаментальная последовательность.

Полное ЛНП называется *банаховым*.

Теорема 1.3. *1) Если L — замкнутое подпространство в банаховом пространстве E, то L — тоже банахово пространство;*

2) если E — ЛНП, L — подпространство в E и L — банахово, то L замкнуто в E.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в L. Тогда эта последовательность фундаментальна и в E, а в силу того, что пространство E является банаховым, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $x \in E$. Наконец, в силу замкнутости L будет $x \in L$.

2) Пусть $x \in \overline{L}$. Найдётся тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$, сходящаяся к x. Так как эта последовательность фундаментальна, а L — банахово, то $x \in L$. Таким образом $\overline{L} \subset L$, откуда получаем равенство $\overline{L} = L$, которое и означает, что L замкнуто в E. □

1.2 Вспомогательные неравенства

1. *Неравенство Гёльдера для рядов*: пусть для чисел $p > 0$ и $q > 0$ выполняется равенство $1/p + 1/q = 1$. Если числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}.$$

При $p = q = 2$ получаем неравенство Коши–Буняковского:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2.$$

2. *Интегральное неравенство Гёльдера*: пусть $p > 0$, $q > 0$ и $1/p + 1/q = 1$. Пусть x, y — такие измеримые по Лебегу функции на $[a; b]$, что $|x|^p$ и $|y|^q$ интегрируемы по Лебегу на $[a; b]$. Тогда функция $x \cdot y$ тоже интегрируема по Лебегу на $[a; b]$, причем
$$\int_a^b |x(t) \cdot y(t)| dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt\right)^{1/q}.$$

3. *Неравенство Минковского для рядов*: пусть $p \geqslant 1$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$ сходятся. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$ тоже сходится, причем
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}.$$

4. *Интегральное неравенство Минковского*: пусть $p \geqslant 1$ и x, y — такие измеримые по Лебегу функции на $[a; b]$, что $|x|^p$ и $|y|^p$ интегрируемы по Лебегу на $[a; b]$. Тогда функция $|x + y|^p$ тоже интегрируема по Лебегу на $[a; b]$, причем
$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Для доказательства вышеприведенных неравенств нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.4 (Неравенство Юнга)**.** *Пусть $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$ и $a, b \geqslant 0$. Тогда $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^{1/p} - t/p$. Исследуем эту функцию на экстремум: $\varphi'(t) = \dfrac{1}{p} t^{(1-p)/p} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p}\left(t^{-1/q} - 1\right)$. Единственный корень производной — точка $t = 1$. Так как $\varphi''(t) = -\dfrac{1}{pq} t^{-1/q-1}$, а $\varphi''(1) = -\dfrac{1}{pq} < 0$, то $t = 1$ — точка максимума.

Рассмотрим число $t_0 = \dfrac{a^p}{b^q}$. Так как $\varphi(t_0) \leqslant \varphi(1)$, то $\dfrac{a}{b^{q/p}} - \dfrac{a^p}{pb^q} \leqslant 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$, откуда, умножая на b^q, получаем что $ab^{q-q/p} - \dfrac{a^p}{p} \leqslant \dfrac{b^q}{q}$. □

Для доказательства неравенства Гёльдера для рядов положим
$$a = \frac{|x_m|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{|y_m|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}}$$

и применим неравенство Юнга к числам a и b:
$$\frac{|x_m y_m|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|x_m|^p}{p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p}+\frac{|y_m|^q}{q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q}.$$
Осталось просуммировать эти неравенства по всем $m\in\mathbb{N}$. Таким образом неравенство Гёльдера для рядов доказано.

Доказательство интегрального неравенства Гёльдера аналогично доказательству для рядов. Для этого надо положить
$$\alpha=\frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}},\qquad \beta=\frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b|y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}},$$
записать неравенство Юнга с числами α и β и проинтегрировать полученное неравенство по отрезку $[a;b]$.

Докажем неравенство Минковского для рядов. Для этого сначала докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p$ сходится. Пусть $N_1=\{n\in\mathbb{N}:x_n\geqslant y_n\}$ и $N_2=\{n\in\mathbb{N}:x_n<y_n\}$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p=\sum_{n\in N_1}|x_n+y_n|^p+\sum_{n\in N_2}|x_n+y_n|^p\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n\in N_1}|2x_n|^p+\sum_{n\in N_2}|2y_n|^p\leqslant 2^p\sum_{n\in N_1}|x_n|^p+2^p\sum_{n\in N_2}|y_n|^p\leqslant$$
$$\leqslant 2^p\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p+2^p\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p<+\infty.$$
Теперь перейдем к доказательству неравенства:
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}\quad(*)$$
Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p<+\infty$, то к правой части неравенства $(*)$ можно применить неравенство Гёльдера:
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}\leqslant$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac1q}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac1q}=$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{p}\right)^{\frac1q}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{p}\right)^{\frac1q}.$$

Далее полученное неравенство приводится к виду

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p},$$

откуда получаем неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1-1/q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Интегральное неравенство Минковского доказывается аналогично.

1.3 Примеры нормированных пространств

1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. Норма элемента $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в этих пространствах задаётся формулой $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$.

   Очевидно, что первые две аксиомы нормы выполнены. Третья аксиома нормы — это известное из курса математического анализа неравенство. Так же из курса математического анализа известно, что оба пространства являются банаховыми.

2) Пусть Γ — произвольное множество. $M(\Gamma)$ — линейное пространство всех ограниченных числовых функций, заданных на Γ. Норму на этом пространстве определим следующим образом: $\|x\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|$.

   Аксиомы нормы: первая и вторая очевидны. Для доказательства третьей заметим, что $|x(\gamma)+y(\gamma)|\leqslant|x(\gamma)|+|y(\gamma)|\leqslant\|x\|+\|y\|$ для каждого $\gamma\in\Gamma$ и перейдем в этом неравенстве к супремуму по $\gamma\in\Gamma$:

   $$\|x+y\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)+y(\gamma)|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

   Полнота: пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $M(\Gamma)$, то есть такая, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер n_0, что если $m,n\geqslant n_0$, то $\|x_n-x_m\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x_n(\gamma)-x_m(\gamma)|<\varepsilon$. В частности, для каждого фиксированного $\gamma\in\Gamma$ числовая последовательность $\{x_n(\gamma)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$. Обозначим $x(\gamma)=\lim_{n\to\infty}x_n(\gamma)$. Получим функцию $x\colon\Gamma\to\Lambda$. Осталось показать, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x и что $x\in M(\Gamma)$.

   Для доказательства сходимости перейдем к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве $|x_n(\gamma)-x_m(\gamma)|<\varepsilon$ и получим, что $|x_n(\gamma)-x(\gamma)|\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant n_0$ для каждого $\gamma\in\Gamma$.

Докажем ограниченность функции x. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, то найдется такой номер n_1, что $\sup_{\gamma\in\Gamma}|x_{n_1}(\gamma) - x(\gamma)| \leqslant 1$ и поэтому для каждого $\gamma \in \Gamma$

$$|x(\gamma)| = |x(\gamma) - x_{n_1}(\gamma) + x_{n_1}(\gamma)| \leqslant |x(\gamma) - x_{n_1}(\gamma)| + |x_{n_1}(\gamma)| \leqslant \\ \leqslant 1 + \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_{n_1}(\gamma)| = C.$$

3) ℓ_∞ — пространство всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Так как $\ell_\infty = M(\mathbb{N})$, то все аксиомы нормы выполнены и пространство ℓ_∞ — банахово.

4) Пространство c — пространство всех сходящихся последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Ясно, что $c \subset \ell_\infty$, а так как нормы на c и ℓ_∞ задаются одинаково, то c — это подпространство в ℓ_∞.

   Аксиомы нормы выполнены, так как они выполнены для пространства ℓ_∞. Пространство c банахово, так как замкнуто в ℓ_∞ (см. теорему 1.3). Докажем это: пусть $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства c, сходящаяся к некоторому $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Надо показать, что $y \in c$. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $x^n \to y$, то найдётся такой номер n_0, что $\|x^n - y\| = \sup_{m\in\mathbb{N}}|x_m^n - y_m| < \varepsilon/3$ для любого $n \geqslant n_0$. Так как последовательность $x^{n_0} = \{x_p^{n_0}\}_{p=1}^{\infty}$ фундаментальна, то найдётся такой номер n_1, что $|x_p^{n_0} - x_q^{n_0}| < \varepsilon/3$ если $p, q \geqslant n_1$. Пусть теперь $k, l \geqslant n_1$. Тогда

$$|y_k - y_l| = |y_k - x_k^{n_0} + x_k^{n_0} - x_l^{n_0} + x_l^{n_0} - y_l| \leqslant \\ \leqslant |y_k - x_k^{n_0}| + |x_k^{n_0} - x_l^{n_0}| + |x_l^{n_0} - y_l| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

5) Пространство c_0 — пространство всех сходящихся к нулю последовательностей. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = \max_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Ясно, что $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$, а так как нормы на каждом из этих трёх пространств задаются одинаково, то c_0 — это подпространство и в c и в ℓ_∞.

   Аксиомы нормы выполнены, так как они выполнены для пространства ℓ_∞. Пространство c_0 банахово, так как замкнуто в c.

6) Пространство c_{00} — пространство последовательностей, у которых отлично от нуля лишь конечное число координат с нормой $\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Ясно, что c_{00} — подпространство в c_0. Это пространство не является банаховым, так как оно не замкнуто в банаховом пространстве c_0. Чтобы в этом убедится, достаточно рассмотреть в c_{00} элементы $x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$. Несложно проверить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots) \in c_0 \setminus c_{00}$.

7) Пусть K — компакт. Множество всех непрерывных функций $x\colon K \to \Lambda$ с нормой $\|x\| = \max_{t\in K}|x(t)|$ будем обозначать $C(K)$.

   Аксиомы нормы проверяются как для $M(\Gamma)$. Полнота: заметим, что $C(K)$ является подпространством в $M(K)$. Тогда достаточно показать, что $C(K)$ замкнуто в $M(K)$ (теорема 1.3). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в $C(K)$, сходящаяся к функции $x \in M(K)$. Но сходимость по норме пространства $M(K)$ — это равномерная сходимость, а предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций — непрерывная функция. Поэтому $x \in C(K)$ и, следовательно, $C(K)$ замкнуто в $M(K)$.

8) Пространство $P[a;b]$ — множество всех многочленов, заданных на $[a;b]$, рассматриваемое, как подпространство в $C[a;b]$. Это пространство не полное, так как не замкнуто в $C[a;b]$: например, функция sin многочленом, очевидно, не является, но из известной формулы

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

   следует, что существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции sin.

   На самом деле верен более общий факт — любая непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ является пределом равномерно сходящейся к ней последовательности многочленов. Другими словами, $\overline{P[a;b]} = C[a;b]$. Это — классическая теорема Вейерштрасса. В разделе 3.2 будет доказана так называемая теорема Стоуна–Вейерштрасса, частным случаем которой является упомянутая классическая теорема.

9) Пусть $p \geqslant 1$ и ℓ_p — множество всех числовых последовательностей, суммируемых в p-й степени, то есть

$$\ell_p = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty\right\}.$$

   Норма в ℓ_p определяется так: $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$. Выполнение первой и второй аксиом нормы очевидны, а третья аксиома — это неравенство Минковского для рядов.

   Докажем полноту пространств ℓ_p. Пусть $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в ℓ_p. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число n_0, что $\|x^n - x^m\| < \varepsilon$ для любых $n, m \geqslant n_0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^n - x_k^m|^p < \varepsilon^p, \tag{$*$}$$

откуда $|x_k^n - x_k^m| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant n_0$ для каждого k. Последнее неравенство означает, что для каждого k последовательность $\{x_k^n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальная в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$). Пусть $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^n$ и $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Осталось доказать, что $x \in \ell_p$ и что $x^n \to x$.

Сначала докажем, что последовательность x^n сходится к x. Из неравенства $(*)$ следует, что $\sum_{k=1}^j |x_k^n - x_k^m|^p < \varepsilon^p$ для каждого натурального j. Зафиксируем в последнем неравенстве n и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим неравенство $\sum_{k=1}^j |x_k^n - x_k|^p \leqslant \varepsilon^p$, верное для всех j. Но тогда и

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k^n - x_k|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{$**$}$$

Итак, $\|x^n - x\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Это означает, что $x^n \to x$.

Осталось доказать, что $x \in \ell_p$, то есть, что ряд $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p$ сходится:

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p = \sum_{k=1}^\infty |x_k - x_k^{n_0} + x_k^{n_0}|^p \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_k - x_k^{n_0}|^p + \sum_{k=1}^\infty |x_k^{n_0}|^p < +\infty,$$

так как первое слагаемое в силу $(**)$ не превосходит числа ε^p, а второе не превосходит некоторой константы, так как $x^{n_0} \in \ell_p$.

Среди пространств ℓ_p наиболее интересными являются пространства ℓ_1 и ℓ_2:

(a) ℓ_1 — пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$;

(b) ℓ_2 — пространство квадратично суммируемых последовательностей с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}$.

10) Пусть $p \geqslant 1$. На множестве $\mathbb{R}^n$ (или на $\mathbb{C}^n$) рассмотрим норму $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$. Полученное пространство будем обозначать ℓ_p^n.

11) Пространство ℓ_∞^n — это множество $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) со следующей нормой: $\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

12) Пусть $p \geqslant 1$ и $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим отношение эквивалентности на множестве всех измеримых по Лебегу функций, интегрируемых в p-й степени на $(a; b)$, то есть таких, для которых $\int_a^b |x(t)|^p\,dt < +\infty$ следующим образом: $x \sim y \iff x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ на $(a; b)$.

Пространство $\mathcal{L}_p(a; b)$ — множество классов эквивалентности множества всех измеримых по Лебегу функций, интегрируемых в p-й степени на $(a; b)$. Норма: $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$.

Аксиомы нормы: первая выполнена за счёт того, что мы не различаем функции, отличающиеся на множестве меры ноль, вторая очевидна, а третья — это интегральное неравенство Минковского.

Наиболее интересные среди этих пространств — это пространства $\mathcal{L}_1(a;b)$ и $\mathcal{L}_2(a;b)$.

Сходимость $x_n \xrightarrow{\mathcal{L}_p(a;b)} x_0$ в них выглядит так:

В $\mathcal{L}_1(a;b)$: $\int\limits_a^b |x_n(t) - x_0(t)|\,dt \to 0$ — сходимость в среднем;

В $\mathcal{L}_2(a;b)$: $\int\limits_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^2\,dt \to 0$ — сходимость в среднеквадратичном.

Все пространства $\mathcal{L}_p(a;b)$ банаховы.

Замечание. Все пространства ℓ_p, ℓ_∞, c, c_0, c_{00} — бесконечномерные (система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $e_n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$ — бесконечная линейно независимая система).

1.4 Сепарабельность

Определение. Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счётное всюду плотное подмножество.

1) пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ сепарабельны. В качестве счётного всюду плотного множества можно взять, например, множества $\mathbb{Q}^n$ и $\mathbb{Q}^{2n}$ соответственно.

2) пространства ℓ_p $(p \geqslant 1)$, c, c_0, c_{00} сепарабельны.

   Докажем это для пространства c_0. Рассмотрим множество

$$A = \left\{(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots) \mid r_i \in \mathbb{Q},\ i = \overline{1,n};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

   Это множество счётно. Докажем, что оно всюду плотно в c_0. Рассмотрим произвольный $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$ и шар $U(x, \varepsilon)$. Так как $x_n \to 0$, то найдётся номер n_0, что при $n > n_0$ будет $|x_n| < \varepsilon/2$. Обозначим $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots)$. найдём такие рациональные числа $r_1, r_2, \ldots, r_{n_0}$, что $\max_{i=\overline{1,n}} |x_i - r_i| < \varepsilon/2$ и обозначим $y = (r_1, r_2, \ldots, r_{n_0}, 0, 0, \ldots)$. Ясно, что $y \in A$. Тогда получим:

$$\|x - y\| \leqslant \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - y\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   Доказательство сепарабельности пространства c аналогично. Только в качестве счётного, всюду плотного множества надо взять множество

$$A = \left\{(r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, r_{n+1}, \ldots) \mid r_i \in \mathbb{Q},\ i = \overline{1, n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Докажем, что все пространства ℓ_p сепарабельны. В таких пространствах счётным всюду плотным множеством будет множество

$$A = \left\{(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots) \mid r_i \in \mathbb{Q},\ i = \overline{1, n};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Убедимся в этом. Рассмотрим произвольный $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ и шар $U(x, \varepsilon)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ сходится, то найдётся такой номер n_0, что $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon^p/2$. Теперь найдём рациональные числа $r_1, \ldots, r_{n_0}$, для которых выполняется неравенство $\sum_{n=1}^{n_0}|x_n - r_n|^p < \varepsilon^p/2$. Тогда последовательность $y = (r_1, \ldots, r_{n_0}, 0, 0, \ldots)$ принадлежит множеству A и

$$\|x - y\| = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{n_0}|x_n - r_n|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|^p} < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}} = \varepsilon.$$

3) пространство ℓ_∞ не сепарабельно. Чтобы это доказать, достаточно проверить, что в пространстве ℓ_∞ не выполнено свойство Суслина. В свою очередь, для этого достаточно найти в ℓ_∞ несчётное число точек, расстояние между которыми равно 1 (тогда открытые шары радиуса 1/2 с центрами в этих точках будут образовывать несчётное семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств). Определим для каждого множества $A \subset \mathbb{N}$ последовательность $x(A) \in \ell_\infty$ следующим образом:

$$x(A)_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in A; \\ 0, & \text{если } n \notin A. \end{cases}$$

Несложно проверить, что если $A_1 \neq A_2$, то $\|x(A_1) - x(A_2)\| = 1$. Осталось заметить, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ несчётно.

4) $C[a; b]$ — сепарабельное пространство. В этом пространстве счётное всюду плотное подмножество — всевозможные многочлены с рациональными коэффициентами.

5) все пространства $\mathcal{L}_p(a; b)$ сепарабельны. Без доказательства.

1.5 Линейные ограниченные операторы

Определение. Пусть E и F — два ЛНП. Оператор (отображение) $T\colon E \to F$ называется *линейным*, если

1) $T(x + y) = Tx + Ty$ для любых $x, y \in E$;

2) $T(\lambda x) = \lambda \cdot Tx$ для любого $x \in E$ и любого $\lambda \in \Lambda$.

Эти два условия можно заменить на одно: $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$.

Примеры:

1) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = kx$;

2) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = ax + by$.

3) $T\colon C[a;b] \to C[a;b]$, $Tx(t) = a(t) \cdot x(t)$, где $a \in C[a;b]$ — фиксированная функция.

Теорема 1.5. *Если линейный оператор $T\colon E \to F$ непрерывен хотя бы в одной точке $x_0 \in E$, то он непрерывен всюду на E.*

Доказательство. Пусть $x_1 \in E$ и $\varepsilon > 0$. Для этого ε найдётся такое $\delta > 0$, что если $\|x - x_0\| < \delta$, то $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$.

Пусть теперь $\|x_1 - x\| < \delta$. Тогда

$$\|Tx_1 - Tx\| = \|Tx_1 - Tx_0 + Tx_0 - Tx\| = \|T(x_1 + x_0 - x) - Tx_0\| < \varepsilon,$$

так как $\|(x_1 + x_0 - x) - x_0\| = \|x_1 - x\| < \delta$. □

Определение. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называется *ограниченным*, если T переводит единичный шар $\overline{U}(0, 1)$ пространства E в ограниченное множество в пространстве F.

Другими словами, оператор $T\colon E \to F$ ограничен, если $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < +\infty$.

Определение. Число $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ называется *нормой* линейного ограниченного оператора $T\colon E \to F$ и обозначается $\|T\|$.

Теорема 1.6. *Пусть $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) оператор T непрерывен;

(2) оператор T ограничен;

(3) существует такое число $C > 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in E$.

Доказательство. (1) ⇒ (2). Так как оператор T непрерывен, то существует такое $\delta > 0$, что если $\|x\| < \delta$, то $\|Tx\| < 1$. Рассмотрим произвольный $x \in \overline{U}(0, 1)$. Так как $\|x\| \leqslant 1$, то $\|\frac{\delta}{2}x\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta$ и, следовательно, $\|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$, откуда $\|Tx\| < \frac{2}{\delta}$.

(2) ⇒ (3). Для $x = 0$ неравенство $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ выполнено при любой константе $C > 0$. Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ и

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|z\| \leqslant 1} \|Tz\| = \|T\|.$$

Из последнего неравенства получаем, что $\|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|$. Таким образом, в качестве константы C можно взять любое число $C \geqslant \|T\|$.

(3) $\Rightarrow$ (1). В силу теоремы 1.5 достаточно показать непрерывность оператора T в нуле. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon/C$. Пусть $\|x\| \leqslant \varepsilon/C$. Тогда $\|Tx\| \leqslant C\|x\| \leqslant C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$. □

Следствие 1. *Если $T\colon E \to F$ — линейный ограниченный оператор, то $\|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|$ для каждого $x \in E$.*

Следствие 2. *Если для каждого $x \in E$ верно неравенство $\|Tx\| \leqslant C \cdot \|x\|$, то $\|T\| \leqslant C$.*

Доказательство. $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} C \cdot \|x\| = C$. □

Следствие 3. *Пусть E, F, H — ЛНП и $T\colon E \to F$, $S\colon F \to H$ — два линейных ограниченных оператора. Тогда оператор $S \circ T\colon E \to H$ тоже линейный и непрерывный, причём $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. В частности, $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$ для каждого натурального n.*

Доказательство. $\|S \circ T(x)\| = \|S\,(T(x))\| \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. По следствию 2 теперь заключаем, что $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. □

Примеры:

1) Нулевой оператор $\Theta\colon E \to F$, $\Theta x = 0$ для всех $x \in E$. $\|\Theta\| = 0$;

2) Тождественный оператор $I\colon E \to E$, $Ix = x$ для каждого $x \in E$. $\|I\| = 1$;

3) $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где все a_k — фиксированные вещественные числа. Оценим норму оператора T:

$$\|Tx\| = |a_1x_1 + \ldots + a_nx_n| \leqslant |a_1x_1| + \ldots + |a_nx_n| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \|x\|.$$

Из этого неравенства и следствия 2 из теоремы 1.6 получаем оценку $\|T\| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Убедимся, что эта оценка точная. Для этого рассмотрим точку

$$\tilde{x} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right).$$

Ясно, что $\|\tilde{x}\| = 1$. Тогда

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \geqslant \|T\tilde{x}\| = \\ = \left|\frac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} + \ldots + \frac{a_n^2}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Таким образом, $\|T\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

4) *Оператор Фредгольма* — это оператор вида

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds,$$

где x — функция, заданная на отрезке $[a;b]$, а K — функция, заданная на квадрате $[a;b]^2$. Функция K называется *ядром* оператора Фредгольма. Линейность оператора Фредгольма непосредственно следует из линейности интеграла. Докажем, что если функции x и K непрерывны, то Tx — тоже непрерывная функция.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ядро K непрерывно, то найдётся такое число $\delta > 0$, что если $\rho((t_1,s_1),(t_2,s_2)) < \delta$, то

$$|K(t_1,s_1) - K(t_2,s_2)| < \frac{\varepsilon}{\|x\| \cdot (b-a)}.$$

Пусть теперь $|t_1 - t_2| < \delta$. Тогда

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| = \left|\int_a^b (K(t_1,s) - K(t_2,s))x(s)\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)||x(s)|\,ds < \int_a^b \frac{\varepsilon}{\|x\| \cdot (b-a)}|x(s)|\,ds \leqslant \varepsilon.$$

Докажем, что оператор T ограничен:

$$\|Tx\| = \max_{t\in[a;b]} |Tx(t)| = \max_{t\in[a;b]} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)x(s)|\,ds \leqslant L(b-a)\|x\|.$$

Таким образом, мы доказали, что если ядро K непрерывно, то оператор Фредгольма — это ограниченный оператор из $C[a;b]$ в $C[a;b]$.

5) Рассмотрим оператор Фредгольма $Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, где ядро K удовлетворяет условию $\iint\limits_{aa}^{bb} |K(t,s)|^2\,ds\,dt < +\infty$, а x — функция из пространства $\mathcal{L}_2(a;b)$. Докажем, что в таком случае $Tx \in \mathcal{L}_2(a;b)$:

$$\|Tx\| = \left(\int_a^b |Tx(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 ds\right) dt\right)^{1/2} = \|x\| \cdot \left(\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}.$$

Таким образом доказано, что $Tx \in \mathcal{L}_2(a;b)$ и что оператор T ограничен.

6) *Оператор Вольтерры* — это оператор вида

$$Tx(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds,$$

где x — функция, заданная на отрезке $[a;b]$, а K — функция, заданная на треугольнике $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a;b], s \in [a,t]\}$. Функция K называется *ядром* оператора Вольтерры. Линейность оператора Вольтерры непосредственно следует из линейности интеграла. Можно доказать, что если функции x и K непрерывны, то Tx — тоже непрерывная функция и что если $x \in \mathcal{L}_2(a;b)$ и $K \in \mathcal{L}_2\left((a;b)^2\right)$, то $Tx \in \mathcal{L}_2(a;b)$.

7) пусть $p \geqslant 1$. Рассмотрим операторы сдвига $T, S\colon \ell_p \to \ell_p$:

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots);$$
$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots).$$

Ясно, что $\|Tx\| = \|x\|$ и что $\|Sx\| \leqslant \|x\|$ для каждого $x \in \ell_p$. Тогда $\|T\| = 1$ и $\|S\| \leqslant 1$. Заметим, что $S \circ T = I$ и что $T \circ S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

8) Рассмотрим подпространство $C^{(1)}[a;b] \subset C[a;b]$, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций и оператор дифференцирования $T\colon C^{(1)}[a;b] \to C[a;b]$, $T = \dfrac{d}{dt}$ или $Tx = \dfrac{dx}{dt} = x'$. Этот оператор неограничен. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим последовательность $x_n(t) = \sin nt$. Тогда $\|x_n\| \leqslant 1$ для каждого n, в то время как $\|Tx_n\| = \max_{t\in[a;b]} |n \cdot \cos nt| = n$ для всех n, больших некоторого n_0. Таким образом, $\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = +\infty$.

1.6 Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E и F — ЛНП над полем Λ. Символом $L(E,F)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов из E в F.

Множество $L(E,F)$ образует линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на элементы поля Λ. Убедимся, что ранее введенное понятие нормы оператора ($\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$) действительно является нормой на $L(E,F)$.

1) $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0$ для каждого $x \in \overline{U}(0,1)$. Но тогда $Tx = 0$ для каждого $x \in \overline{U}(0,1)$, откуда $Tx = 0$ для каждого $x \in E$;

2) $\|\alpha T\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \cdot \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = |\alpha| \cdot \|T\|$;

3) $\|T+S\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|(T+S)x\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} (\|Tx\| + \|Sx\|) \leqslant \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| + \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Sx\| = $
$= \|T\| + \|S\|$.

Теорема 1.7. *Если пространство F банахово, то $L(E,F)$ тоже банахово.*

Доказательство. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность операторов в пространстве $L(E,F)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число n_0, что если $n, m \geqslant n_0$, то $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Докажем, что для каждого $x \in E$ последовательность $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в F. Действительно, из неравенства

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\| \quad \text{при} \quad n, m \geqslant n_0 \quad (*)$$

вытекает требуемое утверждение. Так как пространство F полно, то формула $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ определяет отображение $T\colon E \to F$. Осталось показать, что отображение T линейно и непрерывно и что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к T.

Линейность отображения T вытекает из следующей цепочки равенств:

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n y = \alpha T x + \beta T y.$$

Непрерывность. Пусть $n \geqslant n_0$. Перейдем в неравенстве $(*)$ к пределу при $m \to \infty$. Получим, что $\|(T_n - T)x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$ для каждого $x \in E$. Это неравенство показывает, что оператор $T_n - T$ непрерывен, откуда следует, что оператор $T = T_n - (T_n - T)$ тоже непрерывен, как разность двух непрерывных операторов. Из этого же неравенства следует, что $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, откуда $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. □

1.7 Изоморфизмы и изометрии

Определение. Пусть E и F — ЛНП и $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Оператор T называется *изоморфизмом* (*линейным гомеоморфизмом*), если T биективен, непрерывен и оператор T^{-1} непрерывен. В этом случае говорят, что пространства E и F изоморфны (линейно гомеоморфны) и пишут $E \sim F$.

Замечание. Линейная биекция $T\colon E \to F$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 \cdot \|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant C_2 \cdot \|x\|$ для каждого $x \in E$.

Определение. Пусть (X, ρ) и (Y, d) — метрические пространства. Биекция $f\colon X \to Y$ называется *изометрией*, если $d(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$ для любых точек $x_1, x_2 \in X$.

Задача. Убедитесь, что изометрия является непрерывным отображением.

Задача. Пусть E — ЛНП, $a \in E$ — фиксированный элемент и $S\colon E \to E$ — отображение, заданное формулой $S(x) = x+a$ для каждого $x \in E$. Докажите, что S является изометрией (в частности, S — гомеоморфизм).

Определение. Пусть E и F — ЛНП и $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Оператор T называется *изометрическим изоморфизмом*, если T одновременно изоморфизм и изометрия. В этом случае говорят, что пространства E и F изометрически изоморфны и пишут $E \cong F$.

Замечание. Если $T\colon E \to F$ — изометрический изоморфизм, то единичная сфера пространства E переходит в точности на единичную сферу пространства F.

Задача. Пусть E — ЛНП над полем Λ, $\lambda \in \Lambda$ и оператор $T\colon E \to E$ задан формулой $Tx = \lambda x$. Проверьте, что если $\lambda \neq 0$, то T — изоморфизм. Найдите $\|T\|$ и $\|T^{-1}\|$. При каких λ оператор T будет изометрическим изоморфизмом?

Задача. Рассмотрим оператор $T\colon C[0;1] \to C[2,4]$, заданный формулой $Tx = x \circ \varphi$, где $\varphi\colon [2,4] \to [0;1]$, $\varphi(t) = t/2 - 1$. Убедитесь, что оператор T — изометрический изоморфизм. Найдите оператор T^{-1}.

Пример. $C[0;1] \sim C([0;1] \cup [2,3])$. Вообще, теорема Милютина утверждает, что если X и Y — несчётные метрические компакты, то $C(X) \sim C(Y)$. В частности, линейно гомеоморфными будут пространства функций на канторовом множестве, на отрезке $[a;b]$, на любой его конечной степени $[a;b]^n$, на его счётной степени $[a;b]^{\aleph_0}$.

Задача. Докажите, что

1) $\ell_1^2 \sim \ell_\infty^2 \sim \ell_2^2$;

2) $\ell_1^2 \cong \ell_\infty^2$.

Лемма 1.8. *Если F — ЛНП и $T\colon \mathbb{R}^n \to F$ — линейный оператор, то T непрерывен. То же самое верно и для оператора $T\colon \mathbb{C}^n \to F$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_k T e_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|Te_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n \|Te_k\|^2} = C \cdot \|x\|.$$

Доказательство леммы для оператора $T\colon \mathbb{C}^n \to F$ дословно такое же. □

Теорема 1.9. *Если E — n-мерное ЛНП над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$), то $E \sim \mathbb{R}^n$ ($E \sim \mathbb{C}^n$).*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $p_1, \ldots, p_n$ — базис в E. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Определим оператор $T\colon \mathbb{R}^n \to E$ формулой $Tx = \sum_{k=1}^n x_k p_k$.

Несложно проверить, что T — линейная биекция.

Оператор T непрерывен по предыдущей лемме. Докажем непрерывность оператора T^{-1}. Пусть S — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $q\colon S \to [0; +\infty)$, $q(x) = \|Tx\|$. Это отображение непрерывно, а значит достигает на компакте S своего минимального значения: найдётся такая точка $\bar{x} \in S$, что $q(\bar{x}) = \min_{x \in S} q(x) = \alpha$. Докажем, что $\alpha > 0$. От противного: пусть $\alpha = 0$. Тогда $0 = \alpha = q(\bar{x}) = \|T\bar{x}\|$ откуда $T\bar{x} = 0$. Но тогда, в силу инъективности оператора T, получаем, что $\bar{x} = 0$, чего быть не может, так как $0 \notin S$. Итак, $\alpha > 0$ и для всех $x \in S$ будет $\|Tx\| \geqslant \alpha$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geqslant \alpha,$$

откуда $\|Tx\| \geqslant \alpha \cdot \|x\|$. Теперь, пользуясь тем, что T — биекция и вводя обозначение $x = T^{-1}y$, получим неравенство

$$\|T^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \|y\|,$$

выполненное для всех $y \in E$. Последнее неравенство равносильно непрерывности оператора T^{-1}.

Изоморфизм $E \sim \mathbb{C}^n$ доказывается аналогично. □

Следствие. *Если E — конечномерное пространство и $T\colon E \to F$ — линейный оператор, то T непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\Lambda = \mathbb{C}$ и $S\colon E \to \Lambda^n$ — изоморфизм, существующий в силу предыдущей теоремы. Тогда T можно записать в виде $T = T \circ S^{-1} \circ S$. Оператор S непрерывен по определению, а оператор $T \circ S^{-1}$ непрерывен по лемме 1.8. Значит, оператор T тоже непрерывен. □

Теорема 1.10. *Пространство, изоморфное банахову, само банахово.*

Доказательство. Пусть F — банахово пространство $T\colon E \to F$ — изоморфизм. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в E. Так как $\|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x_m - x_n\|$, то последовательность $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в F и, в силу полноты этого пространства, сходится. Пусть $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$ и $x = T^{-1}y$. Убедимся, что $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. В самом деле

$$0 \leqslant \|x_n - x\| = \left\|T^{-1}(Tx_n) - T^{-1}y\right\| = \left\|T^{-1}(Tx_n - y)\right\| \leqslant \\ \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|Tx_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Следствие 1. *Любое конечномерное ЛНП банахово.*

Следствие 2. *Множество A в конечномерном ЛНП компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Пример. В пространствах c_{00}, c_0, c, ℓ_∞, ℓ_p при $p \geqslant 1$ замкнутые единичные шары с центром в нуле не компактны, так как из последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $e_n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность. Действительно, так как $\|e_n - e_m\| = 1$ в c_{00}, c_0, c, ℓ_∞ и $\|e_n - e_m\| = \sqrt[p]{2}$ в ℓ_p при $n \neq m$, то ни в одном из этих пространств ни сама последовательность, ни любая ее бесконечная подпоследовательность не фундаментальна, и, следовательно, не может быть сходящейся.

Пример. В пространстве $C[0;1]$ замкнутый единичный шар с центром в нуле не компактен. Рассмотрим в этом пространстве последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданных формулой $x_n(t) = 2n(n+1)\cdot\rho\left(t, [0;1] \setminus \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right)$. Несложно убедиться, что $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и что $\|x_n - x_m\| = 1$. Значит, из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Оказывается, некомпактность шаров в некоторых пространствах, установленная в двух примерах выше, — это свойство бесконечномерных пространств, присущее им всем.

Лемма 1.11 (Лемма о почти перпендикуляре)**.** *Пусть E — ЛНП и $L \subset E$ — замкнутое подпространство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in E$ такой, что $\|x\| = 1$ и $\rho(x, L) \geqslant 1 - \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $y \in E \setminus L$. Так как $\rho(y, L) = \inf_{l \in L}\|y - l\|$, то найдётся такой $l_0 \in L$, что $\|y - l_0\| \leqslant \dfrac{\rho(y,L)}{1-\varepsilon}$. Положим $x = \dfrac{y - l_0}{\|y - l_0\|}$. Тогда $\|x\| = 1$. Оценим $\rho(x, L)$:

$$\rho(x, L) = \inf_{l\in L}\|x - l\| = \inf_{l\in L}\left\|\frac{y - l_0}{\|y - l_0\|} - l\right\| = \\ = \inf_{l\in L}\frac{1}{\|y - l_0\|}\cdot\|y - l_0 - \|y - l_0\|\cdot l\| \geqslant \frac{1}{\|y - l_0\|}\cdot\rho(y, L) \geqslant \\ \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\rho(y,L)}\cdot\rho(y, L) = 1 - \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 1.12 (Ф. Рис). *Если E — бесконечномерное ЛНП, то замкнутый шар $\overline{U}(0,1) \subset E$ не компактен.*

Доказательство. Определим по индукции такую последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{U}(0,1)$, что $\|x_i - x_j\| \geqslant 1/2$ если $i \neq j$. Рассмотрим произвольный элемент $0 \neq x_1 \in E$ и одномерное подпространство L_1, натянутое на x_1. Так как L конечномерно, то оно замкнуто и можно применить к нему лемму о почти перпендикуляре: пусть $\varepsilon = 1/2$ и x_2 — такой элемент из E, что $\|x_2\| = 1$ и $\rho(x_2, x_1) \geqslant \rho(x_2, L_1) \geqslant 1/2$. Пусть уже определены точки $x_1, \dots, x_k$ со свойством $\|x_i - x_j\| \geqslant 1/2$ для любой пары различных индексов $i, j \leqslant k$. Рассмотрим замкнутое подпространство $L_k = \mathrm{sp}\{x_1, \dots, x_k\}$. По лемме найдётся $x_{k+1} \in E$ такой, что $\rho(x_{k+1}, L_k) \geqslant 1/2$. Ясно, что тогда $\|x_i - x_{k+1}\| \geqslant 1/2$ для всех $i \leqslant k$. Итак, мы построили нужную последовательность. Так как из этой последовательности нельзя извлечь сходящуюся бесконечную подпоследовательность, то единичный шар $\overline{U}(0,1)$ не компактен. □

Следствие. *Если E — бесконечномерное ЛНП и $K \subset E$ — компакт, то K — замкнутое, ограниченное, нигде не плотное в E множество.*

Доказательство. Замкнутость K следует из того, что компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве всегда замкнуто.

Если предположить, что K — неограниченное множество, то найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, что $\|x_n\| \geqslant n$. Из такой последовательности нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Предположим, что $\operatorname{Int} \overline{K} \neq \varnothing$. Тогда, в силу замкнутости K, $\operatorname{Int} K \neq \varnothing$. В таком случае найдутся точка $x \in K$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\overline{U}(x, \varepsilon) \subset K$. Таким образом, шар $\overline{U}(x, \varepsilon)$ является компактом (как замкнутое подмножество в компакте K), что противоречит теореме 1.12. □

1.8 Линейные ограниченные функционалы

Определение. Пусть E — линейное пространство над полем Λ. *Линейный функционал* на E — это линейное отображение (оператор) $f \colon E \to \Lambda$. Если E — ЛНП и $\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| < +\infty$, то линейный функционал f на E называется *ограниченным*, а число $\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$ в этом случае называется его *нормой* и обозначается $\|f\|$.

Определение. Множество всех линейных непрерывных функционалов на ЛНП E с естественными операциями сложения и умножения на скаляры и снабженное нормой из предыдущего определения, называется *сопряженным* (*к E*) *пространством* и обозначается E^*. Очевидно, что $E^* = L(E, \Lambda)$. *Вторым сопряженным* (*к E*) *пространством* называется пространство $(E^*)^*$, которое для краткости обозначается E^{**}.

Замечание. В силу равенства $E^* = L(E, \Lambda)$ из теоремы 1.7 следует, что сопряженное пространство E^* банахово для любого ЛНП E.

Примеры:

1) $E = C[a;b]$, $f(x) = \int_a^b t \cdot x(t)\,dt$. Линейность этого функционала следует из линейности интеграла. Убедимся, что этот функционал ограничен:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b t \cdot x(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |t| \cdot |x(t)|\,dt \leqslant \int_a^b |t| \cdot \max_{t\in[a;b]}|x(t)|\,dt = \\ = \int_a^b |t| \cdot \|x\|\,dt = \|x\| \cdot \int_a^b |t|\,dt = C \cdot \|x\|.$$

2) $f\colon c_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^2}$. Линейность функционала следует из свойств рядов. Проверим, будет ли этот функционал ограничен:

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\max_{n\in\mathbb{N}}|x_n|}{n^2} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x\|}{n^2} = \|x\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\|x\|.$$

1.8.1 Общий вид функционала в некоторых пространствах

Теорема 1.13 (Общий вид функционала на пространстве $\mathbb{R}^n$)**.** *Для любого $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ существует единственный элемент $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что для каждого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k. \qquad (*)$$

Верно и обратное: для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ формула $(*)$ определяет линейный непрерывный функционал на $\mathbb{R}^n$, причём $\|f\| = \|a\|$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ канонический базис $\{e_k\}_{k=1}^n$. Тогда для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем иметь $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, откуда

$$f(x) = f\left(\sum\nolimits_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum\nolimits_{k=1}^n x_k f(e_k).$$

Осталось ввести обозначение $a_k = f(e_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Единственность: предположим, что $\sum_{k=1}^n a_k x_k = f(x) = \sum_{k=1}^n b_k x_k$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Подставляя в это равенство e_k вместо x, будем получать равенство $a_k = b_k$.

2) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$. Очевидно, это линейное отображение. Докажем ограниченность:

$$|f(x)| = \left|\sum\nolimits_{k=1}^n a_k x_k\right| \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^n |a_k x_k| \leqslant \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n x_k^2} = \|a\| \cdot \|x\|.$$

Таким образом, $\|f\| \leqslant \|a\|$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим $y = a/\|a\|$. Имеем $\|y\| = 1$ и

$$f(y) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{a_k}{\|a\|} = \frac{1}{\|a\|} \sum_{k=1}^n a_k^2 = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|,$$

откуда $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(y)| = \|a\|$. Итак, равенство $\|f\| = \|a\|$ доказано. $\square$

Пример. Рассмотрим функционал $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданный формулой $f(x) = 3x_1 - x_2 + 5x_3$. Так как

$$|f(x)| = |3x_1 - x_2 + 5x_3| \leqslant 3|x_1| + |x_2| + 5|x_3| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{35} \cdot \|x\|,$$

то $\|f\| \leqslant \sqrt{35}$. Рассмотрим точку $y = \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$. Ясно, что $\|y\| = 1$ и что $f(y) = \sqrt{35}$. Значит, $\|f\| = \sqrt{35}$.

Теорема 1.14 (Общий вид функционала на пространстве c_0)**.** *Для любого функционала $f \in c_0^*$ существует единственный элемент $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_1$ такой, что для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$*

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n. \qquad (**)$$

Верно и обратное: для каждого $a \in \ell_1$ формула $(**)$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве c_0, причём $\|f\| = \|a\|_{\ell_1}$.

Доказательство. 1) пусть $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ положим

$$x^n = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Так как $\|x - x^n\|_{c_0} \to 0$, то $x = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

Пусть теперь $f \in c_0^*$. Так как f линеен и непрерывен, то

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{k=1}^n x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum\nolimits_{k=1}^n x_k e_k\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum\nolimits_{k=1}^\infty x_k \cdot f(e_k).$$

Пусть теперь $a_k = f(e_k)$. Надо убедиться, что $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Действительно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = f(\operatorname{sgn} a_1, \ldots, \operatorname{sgn} a_n, 0, 0, \ldots) \leqslant \|f\|,$$

но тогда и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \|f\| < +\infty.$$

Осталось показать единственность a. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ для всех $x \in c_0$. Поочередно подставляя в это равенство e_n вместо x, будем получать равенства $a_n = b_n$.

2) Пусть $a \in \ell_1$. Ясно, что формула $(**)$ определяет линейный функционал. Докажем его ограниченность:

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_{\ell_1} \cdot \|x\|_{c_0}.$$

Таким образом доказана ограниченность функционала f и оценка $\|f\| \leqslant \|a\|$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим последовательность $x^n = (\operatorname{sgn} a_1, \ldots, \operatorname{sgn} a_n, 0, 0, \ldots) \in c_0$. Очевидно, что $\|x^n\| \leqslant 1$ и что $f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \to \|a\|$ при $n \to \infty$. Значит, $\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x^n)| = \|a\|$. □

Теорема 1.15 (Общий вид функционала на пространстве ℓ_1)**.** *Для каждого функционала $f \in \ell_1^*$ существует единственный $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_\infty$ такой, что для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n. \tag{$***$}$$

Верно и обратное: для каждого $a \in \ell_\infty$ формула $(***)$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве ℓ_1, причём $\|f\| = \|a\|_{\ell_\infty}$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_\infty$. Тогда $|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_n| \leqslant \|a\|_{\ell_\infty} \cdot \|x\|_{\ell_1}$. Таким образом, $\|f\| \leqslant \|a\|_{\ell_\infty}$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим $e_n \in \ell_1$. Для каждого n имеем $\|e_n\| = 1$ и $\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(e_n)| = |a_n|$, откуда $\|f\| \geqslant \sup_n |a_n| = \|a\|$.

Для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$ символом x^n обозначим последовательность $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Так как $\|x - x^n\| \to 0$, то $x = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Пусть теперь $f \in \ell_1^*$. Так как f линеен и непрерывен, то $f(x) = \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot f(e_k)$. $a_k := f(e_k)$. Осталось показать, что $\{f(e_k)\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$.

$$|a_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\|.$$

Тогда и $\|a\| = \sup_k |a_k| \leqslant \|f\|$.

Единственность: как и для $\mathbb{R}^n$. □

Теорема 1.16 (Общий вид функционала на пространстве ℓ_p)**.** *Пусть $p > 1$ и q — такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Каждый $a \in \ell_q$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве ℓ_p по формуле*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \tag{$\star$}$$

причём $\|f\| = \|a\|_{\ell_q}$. Верно и обратное: для каждого $f \in \ell_p^*$ существует единственный $a \in \ell_q$ (где $1/p + 1/q = 1$) такой, что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_q$. Тогда $|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_n| \leqslant \|a\|_{\ell_q} \cdot \|x\|_{\ell_p}$. Таким образом, $\|f\| \leqslant \|a\|_{\ell_q}$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим $y = (|a_1|^{q-1} \operatorname{sgn} a_1, |a_2|^{q-1} \operatorname{sgn} a_2, \ldots)$. Докажем, что $y \in \ell_p$: $\sum \left(|a_k|^{q-1} \operatorname{sgn} a_k\right)^p \leqslant \sum |a_k|^{(q-1)p} = \sum |a_k|^q < +\infty$. Рассм. $y/\|y\|$. Имеем: $f(y/\|y\|) = \ldots = \|a\|_{\ell_q}$.

Пусть $f \in \ell_p^*$ и $x = \sum x_n e_n$. Так как f непрерывен, то $f(x) = \sum x_n f(e_n) = \sum x_n a_n$. Надо доказать, что $\{a_n\} \in \ell_q$. Рассм.

$$z^n = (|a_1|^{q-1} \operatorname{sgn} a_1, \ldots, |a_n|^{q-1} \operatorname{sgn} a_n, 0, 0, \ldots) \in \ell_p.$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q = |f(z^n)| \leqslant \|f\| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \|f\| \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{1/p}}_{\alpha}.$$

Разделим обе части неравенства на α и получим $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \|f\|$.

Единственность доказывается по аналогии с предыдущими теоремами. □

Следствие. $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$*,* $c_0^* \cong \ell_1$*,* $\ell_1^* \cong \ell_\infty$*,* $\ell_p^* \cong \ell_q$ *если* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*.*

Доказательство. Изометричность пространств в каждой паре вытекает из теорем 1.13, 1.14, 1.15 и 1.16. Линейность построенных изометрий в этих теоремах вытекает из легко проверяемого равенства $f_{\lambda a + \mu b} = \lambda f_a + \mu f_b$. □

Теорема 1.17. *Пусть $p > 1$ и q — такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Каждая функция $\varphi \in \mathcal{L}_q(a;b)$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{L}_p(a;b)$ по формуле*

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t)\, dt \tag{$*$}$$

причём $\|f\| = \|\varphi\|_{\mathcal{L}_q(a;b)}$. Верно и обратное: для каждого $f \in (\mathcal{L}_p(a;b))^*$ существует единственная функция $\varphi \in \mathcal{L}_q(a;b)$ (где $1/p + 1/q = 1$) такая, что $f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t)\, dt$.

Следствие. *Пространства $\mathcal{L}_p(a;b)$ банаховы при $p > 1$.*

1.9 Теорема Хана-Банаха

Определение. Пусть E — линейное пространство. Отображение $p\colon E \to \mathbb{R}$ называется *выпуклым функционалом*, если для любых $x, y \in E$ и произвольного $t \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y).$$

Определение. Пусть E — линейное пространство. *Полунормой* на E называется отображение $p\colon E \to [0;+\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in E$;

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и любого $x \in E$.

Очевидно, что каждая норма является полунормой и что каждая полунорма является выпуклым функционалом. Обратное неверно, как показывают следующие примеры.

1) $p\colon C[0;1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = |x(0)|$ — полунорма, но не норма;

2) $p\colon C[0;1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = \max_{t\in[0;1/2]} |x(t)|$ — полунорма но не норма;

3) $p\colon C[0;1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = |x(0)|^2$ — выпуклый функционал, но не полунорма.

Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X каждое линейно упорядоченное подмножество имеет мажоранту, то в X существует максимальный элемент.*

Теорема 1.18 (Первая теорема Хана-Банаха). *Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $p\colon E \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал. Пусть $L \subset E$ — линейное подпространство, $\varphi\colon L \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, причём $\varphi(x) \leqslant p(x)$ для каждого $x \in L$. Тогда существует такой линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{R}$, что $f(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in L$ и $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$.*

Доказательство. Для каждого $x_0 \notin L$ множество

$$\mathrm{sp}\{x_0, L\} = \{\alpha x_0 + l : \alpha \in \mathbb{R},\ l \in L\}$$

является линейным подпространством в E. Заметим, что если $\alpha x_0 + l = \alpha_1 x_0 + l_1$, то $\alpha = \alpha_1$ и $l = l_1$.

Строим продолжение функционала φ на подпространство $\mathrm{sp}\{x_0, L\}$:

$$\tilde{\varphi}(\alpha x_0 + l) = \alpha \tilde{\varphi}(x_0) + \varphi(l) = \alpha c + \varphi(l).$$

Докажем, что $\tilde{\varphi}$ — линейное отображение и что $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in L$.

Теперь подберем константу c так, чтобы для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого $l \in L$ выполнялось неравенство $\tilde{\varphi}(\alpha x_0 + l) \leqslant p(\alpha x_0 + l)$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда c должно удовлетворять неравенству $c \leqslant \frac{p(\alpha x_0 + l) - \varphi(l)}{\alpha}$ для любого $\alpha > 0$ и любого $l \in L$.

Пусть $\alpha < 0$. Тогда c должно удовлетворять неравенству $c \geqslant \frac{\varphi(m) - p(m - \beta x_0)}{\beta}$, для любого $\beta > 0$ и любого $m \in L$ (где $\beta = -\alpha$).

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(m) + \beta\varphi(l) &= (\alpha+\beta)\cdot\varphi\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}m + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}l\right) \leqslant (\alpha+\beta)\cdot p\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}m + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}l\right)\\ &= (\alpha+\beta)\cdot p\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(m - \beta x_0) + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(l + \alpha x_0)\right) \leqslant\\ &\leqslant \alpha \cdot p(m - \beta x_0) + \beta \cdot p(l + \alpha x_0).\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\frac{\varphi(m) - p(m - \beta x_0)}{\beta} \leqslant \frac{p(l + \alpha x_0) - \varphi(l)}{\alpha}.$$

Таким образом видно, что константа c, удовлетворяющая вышеприведенным неравенствам, существует.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ всевозможных пар вида $(\tilde{\varphi}, L_{\tilde{\varphi}})$, где $\tilde{\varphi}$ — продолжение функционала φ на подпространство $L_{\tilde{\varphi}} \supset L$, такое, что $\tilde{\varphi}(x) \leqslant p(x)$ для каждого $x \in L_{\tilde{\varphi}}$. По доказанному ранее это множество непусто. Заведем на $\mathcal{A}$ порядок, положив $(\tilde{\varphi}_1, L_{\tilde{\varphi}_1}) \leqslant (\tilde{\varphi}_2, L_{\tilde{\varphi}_2})$ тогда и только тогда, когда $L_{\tilde{\varphi}_1} \subset L_{\tilde{\varphi}_2}$ и $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)$ для каждого $x \in L_{\tilde{\varphi}_1}$.

Пусть $\{(\tilde{\varphi}_s, L_{\tilde{\varphi}_s}) : s \in S\} \subset \mathcal{A}$ — линейно упорядоченное подмножество. Построим для него мажоранту: пусть $M = \cup_{s\in S} L_{\tilde{\varphi}_s}$. Определим $\psi\colon M \to \mathbb{R}$ следующим образом: если $x \in L_{\tilde{\varphi}}$, то $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x)$. Это определение корректно, т.к. если ...

Таким образом, пара (ψ, M) является мажорантой. Все условия леммы Цорна выполнены, значит в $\mathcal{A}$ существует максимальный элемент (f, L_f). Для этой пары $L_f = E$. Если это не так, то найдётся $x_0 \in E \setminus L_f$ то по доказанному ранее функционал f можно бы было продолжить на подпространство □

Теорема 1.19 (Вторая теорема Хана-Банаха). *Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $p\colon E \to \mathbb{R}$ — полунорма. Пусть $L \subset E$ — линейное подпространство, $\varphi\colon L \to \mathbb{C}$ — линейный функционал, причём $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$ для каждого $x \in L$. Тогда существует такой линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{C}$, что $f(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in L$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ всюду на E.*

Доказательство. Ограничиваясь умножением на вещественные числа, можно считать, что E — это линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим функционал $\varphi_0\colon L \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(x) = \Re\varphi(x)$. Проверим, что φ_0 — вещественно-линейный функционал:

- $\varphi_0(x+y) = \varphi_0(x) + \varphi_0(y)$;
- $\varphi_0(\alpha x) = \alpha\varphi_0(x)$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$

По условию, $|\varphi_0(x)| = |\Re\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x)| \leqslant p(x)$ для каждого $x \in L$.

По теореме 1.18 φ_0 можно продолжить до функционала $f_0\colon E \to \mathbb{R}$, причём $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ для каждого $x \in E$.

Определим теперь продолжение функционала φ на E формулой $f(x) = f_0(x) - if_0(ix)$. Докажем, что f — это линейный функционал над полем $\mathbb{C}$, что он является продолжением φ и что $|f(x)| \leqslant p(x)$.

Линейность:

- $f(x+y) =$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$
- $f(ix) = f_0(ix) - if_0(-x) = i(-if_0(ix) - f_0(-x)) = i(f_0(x) - if_0(ix)) = if(x)$
- $f((\alpha + i\beta)x) =$

Продолжение: Пусть $x \in L$. Тогда $f(x) = f_0(x) - if_0(ix) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) = = \Re\varphi(x) - i\Re\varphi(ix) = \Re\varphi(x) - i\Re(i\varphi(x)) = \Re\varphi(x) + i\Im\varphi(x) = \varphi(x)$

Оценка: $f(x) = re^{i\gamma}$. Рассмотрим число $\theta = e^{-i\gamma}$. Имеем: $|f(x)| = r = \theta \cdot f(x) = f(\theta x) = f_0(\theta x) - if_0(i\theta x) = f_0(\theta x) \leqslant p(\theta x) = |\theta| p(x) = p(x)$. □

Теорема 1.20 (Третья теорема Хана-Банаха)**.** *Пусть E — ЛНП над полем Λ, $L \subset E$ — линейное подпространство и $\varphi \in L^*$ — линейный непрерывный функционал. Тогда существует такой линейный непрерывный функционал $f \in E^*$, что $f(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in L$ и $\|f\| = \|\varphi\|$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Для нее выполняются условия $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ и $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$. Значит, p — полунорма и выпуклый функционал.

Так как $\varphi \in L^*$, то для каждого $x \in L$ $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x)$.

1) Если $\Lambda = \mathbb{C}$, то по теореме 1.19 φ продолжается до f, причём, для всех $x \in E$ будет $|f(x)| \leqslant p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$, откуда следует, что $\|f\| \leqslant \|\varphi\|$.

2) Пусть $\Lambda = \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x) \leqslant |\varphi(x)| \leqslant p(x)$ и по теореме 1.18 существует линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) \leqslant p(x)$ для каждого $x \in E$.

Рассмотрим $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) =$ (так как p — полунорма) $= p(x)$.

Из двух полученных неравенств следует, что $|f(x)| \leqslant p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$, то есть f ограничен ($f \in E^*$) и $\|f\| \leqslant \|\varphi\|$.

Докажем теперь, что $\|f\| \geqslant \|\varphi\|$ (для обоих случаев):

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leqslant 1,\, x \in L\} = \\ = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1,\, x \in L\} \leqslant \\ \leqslant \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1,\, x \in E\} = \|f\|.$$

□

Далее, в следствиях 1–7 E — произвольное ЛНП.

Следствие 1. *Для каждого* $0 \neq x \in E$ *существует такой* $f \in E^*$, *что* $\|f\| = 1$ *и* $f(x) = \|x\|$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E одномерное подпространство $L = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}$ и определим на нем функционал формулой $\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \|x\|$. Очевидно, что φ — линейный. Кроме того, $\varphi(x) = \|x\|$ и $\|\varphi\| = 1$. По третьей теореме Хана–Банаха существует $f \in E^*$, продолжающий φ с сохранением нормы. □

Следствие 2. *Пусть* $x, y \in E$ *и* $x \neq y$. *Тогда существует такой* $f \in E^*$, *что* $\|f\| = 1$ *и* $f(x) \neq f(y)$.

Доказательство. Так как $x \neq y$, то $x - y \neq 0$ и по следствию 1 найдётся такой $f \in E^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$. Но $f(x-y) = f(x) - f(y)$. □

Следствие 3. *Пусть* $x_1, \ldots, x_n \in E$ *— конечная линейно независимая система векторов. Тогда существуют такие функционалы* $f_1, \ldots, f_n \in E^*$, *что* $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Определим для $i = 1, \ldots, n$ линейные функционалы $\varphi_i \colon L \to \Lambda$ формулой $\varphi_i(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_i$. По следствию из теоремы 1.10 эти функционалы непрерывны. Тогда $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. По третьей теореме Хана–Банаха функционалы φ_i продолжаются с сохранением нормы до функционалов $f_i \in E^*$. □

Следствие 4. *Если* E *— бесконечномерное пространство, то* E^* *тоже бесконечномерное.*

Доказательство. Предположим, что $\dim E^* = n$. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — ЛНС векторов в E. По следствию 3 найдутся $f_1, \ldots, f_{n+1} \in E^*$, такие что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1 f_1 + \ldots + c_{n+1} f_{n+1} = 0$. Имеем

$$c_j = c_1 f_1(x_j) + \ldots + c_{n+1} f_{n+1}(x_j) = 0.$$

Итак, все $c_j = 0$, следовательно система $f_1, \ldots, f_{n+1}$ линейно независима, что противоречит равенству $\dim E^* = n$. □

Следствие 5. *Для каждого $x \in E$ выполняется равенство*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1,\ f \in E^*\}.$$

Доказательство.

$$\sup\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1,\ f \in E^*\} \leqslant \sup\{\|f\| \cdot \|x\| : \|f\| \leqslant 1,\ f \in E^*\} = \|x\|.$$

По следствию 1 существует такой $f_0 \in E^*$, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x) = \|x\|$. Тогда $\sup\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1,\ f \in E^*\} \geqslant |f_0(x)| = \|x\|$. □

Следствие 6. *Пусть L — замкнутое линейное подпространство в E и $x \notin L$. Тогда существует такой $f \in E^*$, $\|f\| = 1$, что $f(x) = \rho(x, L)$ и $f(l) = 0$ для каждого $l \in L$.*

Доказательство. Пусть $M = \mathrm{sp}\{x, L\} = \{\alpha x + l : \alpha \in \Lambda,\ l \in L\}$. Ясно, что M — линейное подпространство в E. Представление $\alpha x + l$ любого элемента из M единственно. Определим функционал $\varphi\colon M \to \Lambda$ формулой $\varphi(\alpha x + l) = \alpha \cdot \rho(x, L)$. Видно, что φ — линейный, что $\varphi(l) = 0$ для всех $l \in L$ и что $\varphi(x) = \rho(x, L)$.

Пусть $z \in M$. Оценим норму функционала φ:

$$|\varphi(z)| = |\varphi(\alpha x + l)| = |\alpha| \cdot \rho(x, L) = |\alpha| \cdot \inf_{l' \in L}\|x - l'\| \leqslant \\ \leqslant |\alpha| \cdot \|x - (-l/\alpha)\| = \|\alpha x + l\| = \|z\|.$$

Таким образом, φ ограничен и $\|\varphi\| \leqslant 1$. Докажем обратное неравенство: так как $\rho(x, L) = \inf_{l \in L}\|x - l\|$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ существует $l_n \in L$ такой, что $\|x - l_n\| < \rho(x, L) + 1/n$. Тогда

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(z)| : z \in M,\ \|z\| \leqslant 1\} \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\varphi\left(\frac{x - l_n}{\|x - l_n\|}\right)\right| = \\ = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(l_n)}{\|x - l_n\|}\right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\frac{\rho(x, L)}{\|x - l_n\|}\right| \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\frac{\rho(x, L)}{\rho(x, L) + 1/n}\right| = 1.$$

(так как L замкнуто, то $\rho(x, L) \neq 0$!).

Далее, по третьей теореме Хана–Банаха продолжаем функционал φ с сохранением нормы на все пространство. □

Следствие 7. *Если E^* сепарабельно, то E тоже сепарабельно.*

Доказательство. Пусть E^* сепарабельно и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счётное всюду плотное в E^* множество. Так как $\|f_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1}|f_n(x)|$, то найдётся x_n, такой что $\|x_n\| \leqslant 1$ и $\|f_n\|/2 \leqslant |f_n(x_n)| \leqslant \|f_n\|$. Рассмотрим замкнутое линейное подпространство $L = \overline{\mathrm{sp}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ и докажем, что $L = E$.

Предположим, что $L \neq E$. По следствию 6 найдётся $f_0 \in E^*$, $\|f_0\| = 1$, такой что $f_0(L) = \{0\}$. Так как множество $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в E^*, то найдётся последовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся к f_0 в E^*. Так как норма — функция непрерывная, то $\|f_{n_k}\| \to \|f_0\| = 1$. С другой стороны, $\|f_{n_k}\| \leqslant 2|f_{n_k}(x_{n_k})| = 2|(f_{n_k} - f_0)(x_{n_k})| \leqslant 2\|f_{n_k} - f_0\| \cdot \|x_{n_k}\| \to 0$.

Пусть M — множество всевозможных линейных комбинаций точек множества $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с рациональными коэффициентами:

$$M = \{r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \mid r_k \in \mathbb{Q},\ k = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество M счётно. Докажем, что оно всюду плотно в E. Пусть $x \in E$ и $\varepsilon > 0$. В силу равенства $E = L$ найдётся такая точка $z = \alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n$, что $\|x - z\| < \varepsilon/2$. Далее, для каждого $k = 1, \ldots, n$ найдётся такое рациональное число r_k, что $|\alpha_k - r_k| \cdot \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2n}$. Очевидно, что $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in M$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\|x - (r_1x_1 + \ldots + r_nx_n)\| = \|x - z + z - (r_1x_1 + \ldots + r_nx_n)\| \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|x - z\| + \|(\alpha_1 - r_1)x_1 + \ldots + (\alpha_n - r_n)x_n)\| < \\
&\qquad< \frac{\varepsilon}{2} + \|(\alpha_1 - r_1)x_1\| + \ldots + \|(\alpha_n - r_n)x_n)\| < \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, множество M всюду плотно в E. □

Следствие 8. *Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $f_1, \ldots, f_n, g$ — линейные функционалы на E, причём $\bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Тогда $g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ для некоторых $\alpha_k \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $T\colon E \to \mathbb{R}^n$, определённое формулой $Tx = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Так как все f_k — линейные отображения, то T — линейный оператор и $T(E)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Определим линейный функционал $\varphi\colon T(E) \to \mathbb{R}$ формулой $\varphi(Tx) = g(x)$. Проверим, что это отображение задано корректно. Действительно, если $Tx = Ty$, то $T(x - y) = 0$, откуда, по определению T, будем иметь $f_k(x - y) = 0$ для каждого $k = 1, \ldots, n$. Но тогда, по условию, $g(x - y) = 0$ и $g(x) = g(y)$.

Функционал φ непрерывен, так как задан на конечномерном пространстве (следствие из теоремы 1.9).

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — продолжение φ. Докажем, что $g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого $x \in E$

$$\begin{aligned}
&g(x) = \varphi(Tx) = f(Tx) = f(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \\
&\qquad = f\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\underbrace{f(e_k)}_{\text{об. } \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right)(x).
\end{aligned}$$

□

Следствие 9. *Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $f_1, \ldots, f_n, g$ — линейные функционалы на E, обладающие следующим свойством: если $|f_k(x)| < 1$ для каждого $k = 1, \ldots, n$, то $|g(x)| < 1$. Тогда $g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ для некоторых $\alpha_k \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $f_k(x) = 0$ для $k = 1, \ldots, n$. Тогда $|g(x)| < 1$. В силу линейности функционалов $f_1, \ldots, f_n, g$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ будем иметь $f_k(mx) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $|g(mx)| < 1$, откуда $|g(x)| < 1/m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $g(x) = 0$. Таким образом, $\bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Осталось применить предыдущее следствие. $\square$

1.10 Геометрическая форма теоремы Хана–Банаха

Определение. Пусть E — линейное пространство. Подпространство $L \subset E$ такое, что $L \neq E$, называется *гиперплоскостью*, если в E не существует собственного подпространства, более широкого, чем L, то есть если M — такое подпространство в E, что $L \subset M \subset E$, то либо $M = L$ либо $M = E$.

Теорема 1.21 (Признак гиперплоскости). *1) Если L — гиперплоскость в ЛНП E, то для каждого $x \notin L$ будет $\mathrm{sp}\{x, L\} = E$. 2) Пусть $L \subset E$ — подпространство и $L \neq E$. Если найдётся такой $x_0 \in E$, что $\mathrm{sp}\{x_0, L\} = E$, то L — гиперплоскость.*

Доказательство. 1) Так как $x \notin L$, то $L \subset \mathrm{sp}\{x, L\}$ и $L \neq \mathrm{sp}\{x, L\}$. Тогда по определению гиперплоскости $\mathrm{sp}\{x, L\} = E$.

2) Пусть M — подпространство в E и $L \subsetneq M$. Рассмотрим $m \in M \setminus L$. Так как по условию $\mathrm{sp}\{x_0, L\} = E$, то $m = \alpha x_0 + l$, причём $\alpha \neq 0$. Тогда $x_0 = (m - l)/\alpha \in M$, откуда $\mathrm{sp}\{x_0, L\} = E \subset M$. $\square$

Замечание. Если L — гиперплоскость в E, то L либо замкнуто, либо всюду плотно в E.

Пример. $E = C[a; b]$, $L = \{x \in C[a; b] : x(a) = 0\}$ — гиперплоскость. Действительно, рассмотрим функцию $x_0 \equiv 1$. Тогда $x = x(a) \cdot x_0 + (x - x(a) \cdot x_0)$.

Пример. $E = C[a; b]$, $L = P[a; b]$ все многочлены. L — всюду плотное подпространство, но не гиперплоскость: рассмотрим функцию $x(t) = \sin t$. Тогда $\mathrm{sp}\{x, P[a; b]\} \neq C[a; b]$.

Пример. Пусть $E = \ell_2$. Докажем, что $L = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ — всюду плотное подпространство в E. Для этого достаточно показать, что все $e^k \in \overline{L}$. Для каждого фиксированного k рассмотрим элемент

$$a^n = (\underbrace{-1/n, \ldots, -1/n}_{k-1}, 1, \underbrace{-1/n, \ldots, -1/n}_{n-k+1}, 0, 0, \ldots) \in L.$$

Тогда $\|e^k - a^n\| = \sqrt{1/n} \to 0$. Раз все $e_k \in \overline{L}$, то и $\ell_2 = \overline{\mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}} \subset \overline{L}$.

L не является гиперплоскостью, так как для $z = (1, 0, 0, \ldots)$ равенство $\mathrm{sp}\{x, L\} = E$ невозможно: например, последовательность $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$ не принадлежит $\mathrm{sp}\{x, L\}$ но принадлежит E. Действительно, если предположить, что для некоторого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in L$ и некоторого $\lambda \in \Lambda$ выполнено равенство $\lambda z + x = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$, то получим

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

чего быть не может, так как ряд в правой части равенства расходится.

Теорема 1.22. *1) Если $f\colon E \to \Lambda$ — ненулевой линейный функционал, то $f^{-1}(0)$ — гиперплоскость в E.*

2)Если L — гиперплоскость в E, то найдётся ненулевой линейный функционал $f\colon E \to \Lambda$ такой, что $L = f^{-1}(0)$.

Доказательство. 1) Так как $f \neq 0$, то найдётся такой $x_0 \in E$, что $f(x_0) = 1$. Докажем, что $\mathrm{sp}\{x_0, f^{-1}(0)\} = E$. Действительно, любой $x \in E$ можно записать в виде $x = f(x) \cdot x_0 + (x - f(x) \cdot x_0)$. По теореме 1.21 получаем, что $f^{-1}(0)$ — гиперплоскость.

2)По теореме 1.21 найдётся такой $x_0 \in E \setminus L$, что $E = \mathrm{sp}\{x_0, L\}$. Рассмотрим функционал $f(x) = f(\alpha x_0 + l) = c\alpha$, где c — произвольное ненулевое число. Ясно, что $L = f^{-1}(0)$. □

Следствие. *Если f_1, f_2 — ненулевые линейные функционалы на E и $f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0)$, то $f_1 = cf_2$.*

Теорема 1.23. *1) Если $f \in E^*$ и $f \neq 0$, то $f^{-1}(0)$ — замкнутая гиперплоскость в E.*

2) Если L — замкнутая гиперплоскость в E, то найдётся такой ненулевой линейный функционал $f \in E^*$, что $L = f^{-1}(0)$.

Доказательство. 1) очевидно.

2) Определим f как в предыдущей теореме: пусть $x_0 \in E \setminus L$, такой что $E = \mathrm{sp}\{x_0, L\}$. Рассмотрим функционал $f(x) = f(\alpha x_0 + l) = \alpha$. Достаточно доказать его ограниченность: $|f(x)| = |f(\alpha x_0 + l)| = |\alpha|$. Видно, что достаточно доказать неравенство $|\alpha| \leqslant c \cdot \|\alpha x_0 + l\|$. Имеем: $\|\alpha x_0 + l\| = |\alpha| \cdot \|x_0 - (-l/\alpha)\| \geqslant |\alpha| \cdot \rho(x_0, L)$. □

Определение. Множество A в линейном пространстве L называется *выпуклым*, если $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ для любых точек $x, y \in A$ и любого числа $\lambda \in [0; 1]$.

Теорема 1.24. *Множество $A \subset L$ выпукло тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$ и любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0;1]$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.*

Доказательство. ($\Longleftarrow$) очевидно.

($\Longrightarrow$) По индукции. При $k = 2$ очевидно. Пусть при $k = n$ доказано.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k x_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}}_{\in A} + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

□

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A в линейном пространстве называется множество

$$\operatorname{co}(A) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n : x_k \in A, \lambda_k \geqslant 0, k = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Несложно проверить, что $\operatorname{co}(A)$ является пересечением семейства всех выпуклых множеств, содержащих множество A, а следовательно $\operatorname{co}(A)$ — наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее множество A.

Примеры выпуклых множеств: 1) Открытые и замкнутые шары в ЛНП;

2) Если A и B выпуклые, то $A \pm B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, λA — выпуклые.

Теорема 1.25. *Пусть E — ЛНП и $A \subset E$ — выпуклое подмножество. Тогда множества $P = \{x \in E : \rho(x, A) < \varepsilon\}$ и $P_1 = \{x \in E : \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ тоже выпуклы.*

Доказательство. Пусть p_1, $p_2 \in P$. Тогда найдутся a_1, $a_2 \in A$ такие, что $\rho(p_k, a_k) < \varepsilon$. Тогда

$$\|\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - (\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2)\| < \varepsilon.$$

□

Определение. Пусть E — ЛНП и $V \subset E$ — такое выпуклое подмножество, что $0 \in \operatorname{Int} V$. Отображение $p_V \colon E \to \mathbb{R}$, $p_V(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha V\}$ называется *функционалом Минковского* множества V.

Так как $0 \in \operatorname{Int} V$, то функционал Минковского определен корректно.

Пример. Если $V = U(0,1)$ или $V = \overline{U}(0,1)$, то $p_V(x) = \|x\|$.

Докажем для случая $V = U(0,1)$. Действительно, если $\alpha > \|x\|$, то $x \in \alpha U(0,1) = U(0,\alpha)$. Если же $\alpha < \|x\|$, то $x \notin \alpha U(0,1) = U(0,\alpha)$. Таким образом, $\inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha V\} = \|x\|$.

Теорема 1.26. *Пусть E — ЛНП, $V \subset E$ — выпуклое подмножество и $0 \in \operatorname{Int} V$. Тогда*

1) p_V — выпуклый функционал;

2) $p_V(\lambda x) = \lambda p_V(x)$ для каждого $\lambda \geqslant 0$;

3) $\{x \in E : p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in E : p_V(x) \leqslant 1\}$.

Доказательство. (1) Пусть $x, y \in E$ и $\lambda \in [0; 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению функционала Минковского существует число $\alpha > 0$ такое, что $x \in \alpha V$ и $\alpha < p_V(x) + \varepsilon$. Аналогично, существует такое число $\beta > 0$, что $y \in \beta V$ и $\beta < p_V(y) + \varepsilon$. Видно, что $x/\alpha \in V$ и $y/\beta \in V$. Тогда

$$\frac{\lambda\alpha}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{(1-\lambda)\beta}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta} \cdot \frac{y}{\beta} = \frac{\lambda x + (1-\lambda)y}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta} \in V,$$

откуда $\lambda x + (1-\lambda)y \in (\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)V$.

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} p_V(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \leqslant \\ &\leqslant \lambda(p_V(x) + \varepsilon) + (1-\lambda)(p_V(y) + \varepsilon) = \\ &= \lambda p_V(x) + (1-\lambda)p_V(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε первое утверждение доказано.

(2) $p_V(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda x \in \alpha V\} = \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda} V\right\} = (\alpha/\lambda \text{ об. } \beta) = \inf\{\lambda\beta > 0 : x \in \beta V\} = \lambda \inf\{\beta > 0 : x \in \beta V\} = \lambda \cdot p_V(x)$.

(3) Пусть $p_V(x) < 1$. Тогда найдётся $\alpha \in (0; 1)$ такое, что $x \in \alpha V$ (то есть $x/\alpha \in V$). Представим $x = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \cdot 0$, откуда видно (в силу выпуклости множества V), что $x \in V$.

Пусть теперь $x \in V$. Тогда $x \in 1 \cdot V$, откуда получаем, что $p_V(x) \leqslant 1$. □

Теорема 1.27 (Теорема о разделении выпуклых множеств)**.** *Пусть E — ЛНП над полем $\mathbb{R}$, A и B — выпуклые непересекающиеся подмножества в E и множество B открыто. Тогда существует такой ненулевой функционал $f \in E^*$, что $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x \in A$ и $y \in B$.*

Доказательство. Зафиксируем $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ и рассмотрим вектор $z = a_0 - b_0$. Заведем множество $V = B - A + z$. Ясно, что $0 \in V$ и что V — выпуклое множество. Запишем множество V в виде $V = \bigcup_{a \in A}(B - a + z)$. Множество $B - a + z$ открыто, как сдвиг открытого множества. Значит и само V открыто. Рассмотрим функционал Минковского p_V множества V и докажем, что $p_V(z) \geqslant 1$. Действительно, если $p_V(z) < 1$, то $z \in V$, откуда $z = a - b + z$, то есть $a = b$.

Рассмотрим подпространство $L = \{\alpha z : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Определим на L линейный функционал φ формулой $\varphi(\alpha z) = \alpha$.

Если $\alpha > 0$, то $\varphi(\alpha z) = \alpha \leqslant \alpha p_V(z) = p_V(\alpha z)$.

Если $\alpha < 0$, то $\varphi(\alpha z) = \alpha \leqslant p_V(\alpha z)$.

Если $\alpha = 0$, то $\varphi(\alpha z) = \varphi(0) = 0 = p_V(0) = p_V(\alpha z)$.

Теперь, по первой теореме Хана–Банаха φ можно продолжить на E с сохранением неравенства: существует линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) \leqslant p_V(x)$ и $f(\alpha z) = \varphi(\alpha z)$.

Для каждого $x \in V$ будет $f(x) \leqslant p_V(x) \leqslant 1$. Так как множество V открыто и $0 \in V$, то найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что $\overline{U}(0, \varepsilon) \subset V$. Таким образом, если $x \in \overline{U}(0, \varepsilon)$, то $f(x) \leqslant 1$. Аналогично, если $x \in \overline{U}(0, \varepsilon)$, то $-f(x) = f(-x) \leqslant 1$. Значит, $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in \overline{U}(0, \varepsilon)$, откуда $\|f\| \leqslant 1/\varepsilon$.

Пусть $x - y + z \in V$. Тогда $f(x - y + z) \leqslant 1$ или $f(x) - f(y) + f(z) \leqslant 1$ откуда $f(x) \leqslant f(y)$. □

Замечание. Теорему о разделении выпуклых множеств можно понимать так: из условия $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x \in A$ и $y \in B$ следует, что найдётся такое число $t \in \mathbb{R}$, что $f(x) \leqslant t \leqslant f(y)$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Последнее означает, что сдвиг $f^{-1}(0) + x_0$ гиперплоскости $f^{-1}(0)$ в точку x_0 такую, что $f(x_0) = t$, разделяет пространство E на два полупространства, в одном из которых содержится множество A, а в другом — множество B.

Теорема 1.28 (Теорема о строгом разделении выпуклых множеств). *Пусть E — ЛНП над полем $\mathbb{R}$, A и B — выпуклые непересекающиеся замкнутые подмножества в E и множество B компактно. Тогда существует ненулевой функционал $f \in E^*$ такой, что* $\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{y \in B} f(y)$.

1.11 Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха–Штейнгауза

Определение. Множество A в топологическом пространстве X называется *нигде не плотным*, если $\operatorname{Int} \bar{A} = \varnothing$.

Множество A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда для любого непустого открытого множества $U \subset X$ найдётся такое непустое открытое множество $V \subset U$, что $V \cap A = \varnothing$.

Задача. Докажите, что замыкание нигде не плотного множества — тоже нигде не плотное множество.

Определение. Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется множеством *первой категории* в X, если A можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных в X множеств. Множество, не являющееся множеством первой категории, называется множеством *второй категории.*

Теорема 1.29 (Теорема Бэра о категории)**.** *Если X — полное метрическое пространство, то X — множество второй категории, то есть X нельзя представить в виде счётного объединения нигде не плотных в X множеств. Более того, если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное семейство нигде не плотных в X множеств, то множество $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ всюду плотно в X.*

Доказательство. Надо доказать, что если $U \subset X$ — непустое открытое множество, то $U \bigcap (X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \varnothing$.

Так как множество A_1 нигде не плотно, то найдется такой шар $U(x_1, \varepsilon_1)$, что $\overline{U(x_1, \varepsilon_1)} \subset U$ и $U(x_1, \varepsilon_1) \cap A_1 = \varnothing$. Так как множество A_2 нигде не плотно, то найдется такой шар $U(x_2, \varepsilon_2)$, что $\overline{U(x_2, \varepsilon_2)} \subset U(x_1, \varepsilon_1)$ и $U(x_2, \varepsilon_2) \cap A_2 = \varnothing$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных шаров $\overline{U(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \subset U(x_n, \varepsilon_n)$ таких, что $U(x_n, \varepsilon_n) \cap A_n = \varnothing$, причём можно считать, что $\varepsilon_n \to 0$.

В силу оценки $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon_n \to 0$ получаем, что последовательность центров найденных шаров является фундаментальной, а в силу полноты сходится. Пусть $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Тогда $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U(x_n, \varepsilon_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n, \varepsilon_n)$, откуда $x_0 \in U \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. □

Замечание. Теорема Бэра о категории также верна и для локально компактных хаусдорфовых пространств и для всех полных Чеху пространств (класс полных по Чеху пространств содержит все полные метрические пространства и все локально компактные хаусдорфовы пространства).

Задача. Докажите, что теорема Бэра эквивалентна следующему утверждению: в полном метрическом пространстве пересечение счетного семейства открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

Теорема 1.30 (теорема Банаха–Штейнгауза)**.** *Пусть E и F — ЛНП и E — банахово пространство. Пусть $\{T_s\}_{s\in S} \subset L(E, F)$ — произвольное семейство линейных непрерывных операторов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *семейство $\{T_s\}_{s\in S}$ равномерно ограничено, то есть существует такая константа $C > 0$, что $\|T_s\| \leqslant C$ для каждого $s \in S$;*

2. *семейство $\{T_s\}_{s\in S}$ поточечно ограничено, то есть для каждого $x \in E$ существует такая константа $C_x > 0$, что $\|T_s x\| \leqslant C_x$ для каждого $s \in S$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Зафиксируем $x \in E$. Тогда для каждого $s \in S$ будет $\|T_s x\| \leqslant \|T_s\| \cdot \|x\| \leqslant C \cdot \|x\| \overset{\text{об.}}{=} C_x$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$B_n = \bigcap\nolimits_{s\in S} \{x \in E : \|T_s x\| \leqslant n\}.$$

Так как норма — функция непрерывная, то множества B_n замкнуты. Докажем, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E$. В самом деле, если $x \in E$ то для каждого $s \in S$ $\|T_s x\| \leqslant C_x$. Выберем натуральное число $n_0 \geqslant C_x$. Тогда $x \in B_{n_0}$.

Итак, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Так как E — банахово, то по теореме Бэра о категории по крайней мере одно из множеств B_n имеет непустую внутренность. Пусть $\operatorname{Int} B_k \neq \varnothing$. Тогда найдётся шар $U(x_0, r) \subset B_k$. Пусть $x \in \overline{U}(0,1)$. Тогда $x \cdot \dfrac{r}{2} + x_0 \in U(x_0, r) \subset B_k$. Оценим $\|T_s x\|$:

$$\|T_s x\| = \frac{2}{r} \cdot \left\| T_s \left(x \cdot \frac{r}{2} + x_0 - x_0 \right) \right\| \leqslant \frac{2}{r} \left(\left\| T_s \left(x \cdot \frac{r}{2} + x_0 \right) \right\| + \|T_s x_0\| \right) \leqslant \frac{4k}{r}.$$

Таким образом получили, что $\|T_s\| \leqslant \dfrac{4k}{r}$ для всех $s \in S$. □

Следствие. *Пусть E — банахово пространство, F — нормированное пространство, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность операторов в $L(E,F)$. Предположим, что для каждого $x \in E$ последовательность $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в F. Тогда $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, и существует такой оператор $T \in L(E,F)$, что $T_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$ для каждого $x \in E$.*

Доказательство. Пусть $T\colon E \to F$ отображение, определенное формулой $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Несложно убедиться, что T — линейный оператор. Осталось доказать его ограниченность. Так как для каждого $x \in X$ последовательность $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в Y, то можно применить теорему Банаха–Штейнгауза, согласно которой $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Из неравенства $\|T_n x\| \leqslant C\|x\|$, справедливого для всех $x \in X$ и всех $n \in \mathbb{N}$, получаем при $n \to \infty$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Следовательно, оператор T ограничен. □

1.12 Естественная изометрия

Пусть E — ЛНП над полем Λ и E^* — его сопряжённое. Для каждого $x \in E$ рассмотрим отображение $\hat{x}\colon E^* \to \Lambda$, действующее по правилу $\hat{x}(f) = f(x)$.

Так как $\hat{x}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \hat{x}(f) + \beta \hat{x}(g)$, то $\hat{x}$ — линейное отображение для каждого $x \in E$.

Убедимся, что $\hat{x}$ — непрерывное отображение для каждого $x \in E$:

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\hat{x}(f)| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f(x)| = \|x\| < +\infty$$

(последнее равенство — это следствие 5 из теоремы 1.20). Таким образом, мы показали, что каждый $x \in E$ определяет линейное непрерывное отображение $\hat{x}\colon E^* \to \Lambda$, то есть $\hat{x} \in E^{**}$.

Естественным образом возникает отображение $\varkappa\colon E \to E^{**}$, $\varkappa(x) = \hat{x}$.

Убедимся, что $\varkappa$ — линейное отображение:

$$\varkappa(\alpha x + \beta y)(f) = (\widehat{\alpha x + \beta y})(f) = f(\alpha x + \beta y) = \\ = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha\hat{x}(f) + \beta\hat{y}(f) = (\alpha\varkappa(x) + \beta\varkappa(y))(f).$$

Таким образом, $\varkappa$ — изометрический изоморфизм между пространством E и подпространством $\varkappa(E)$ пространства E^{**}. Если же $\varkappa$ окажется изометрическим изоморфизмом между E и E^{**}, то в этом случае пространство E называется *рефлексивным*.

Пример. Все пространства ℓ_p и $\mathcal{L}_p(a;b)$ при $p > 1$ рефлексивны.

Теорема 1.31 (Признак ограниченности множества)**.** *Множество A в ЛНП E ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $f \in E^*$ множество $f(A)$ ограничено в Λ.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ очевидно.

$(\Leftarrow)$ Рассмотрим множество $\{\hat{x}\}_{x\in A} \subset E^{**}$ и докажем, что оно поточечно ограничено. Пусть $f \in E^*$. Тогда для некоторой константы $C_f > 0$ имеем $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leqslant C_f$. Теперь по теореме Банаха–Штейнгауза получаем, что множество $\{\hat{x}\}_{x\in A}$ равномерно ограничено, то есть найдется $C > 0$ со свойством $\|\hat{x}\| \leqslant C$ для всех $x \in A$, откуда получаем, что $\|x\| \leqslant C$ для всех $x \in A$. □

Теорема 1.32. *Для каждого ЛНП E существует банахово пространство $\widetilde{E}$, обладающее свойством, что существует такое отображение $\varphi\colon E \to \widetilde{E}$ что φ — изометрический изоморфизм между E и $\varphi(E)$ и множество $\varphi(E)$ всюду плотно в $\widetilde{E}$. (пространство $\widetilde{E}$ в этом случае называется* пополнением *пространства E).*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varkappa\colon E \to E^{**}$. В качестве $\widetilde{E}$ можно взять замыкание подпространства $\varkappa(E)$ в пространстве E^{**}. □

1.13 Принцип открытости отображения (3-й принцип функционального анализа)

Теорема 1.33. *Пусть E, F — банаховы пространства и $T\colon E \to F$ — линейная непрерывная сюръекция. Тогда T является открытым отображением, то есть для каждого множества G открытого в E его образ $T(G)$ открыт в F.*

Доказательство. Шары в пространстве E будем обозначать $U(x, \varepsilon)$, а в пространстве F — $V(y, \varepsilon)$. Обозначение $W(z, \varepsilon)$ — общее.

(1) $W(z,\varepsilon) = z + W(0,\varepsilon)$; $W(0,n\varepsilon) = nW(0,\varepsilon)$;

(2) $\dfrac{W(z,\varepsilon)+W(-z,\varepsilon)}{2} = W(0,\varepsilon)$;

(3) для каждого шара $U(0,\varepsilon)\subset E$ множество $\overline{TU(0,\varepsilon)}$ выпукло и симметрично относительно нуля;

(4) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(0,n\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU(0,\varepsilon)$;

(5) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nTU(0,\varepsilon)}$.

По теореме Бэра о категории найдётся n, что $\operatorname{Int}\overline{nTU(0,\varepsilon)} \neq \varnothing$. Пусть $V(y,\gamma)\subset\overline{nTU(0,\varepsilon)}$. Тогда $V(y/n,\gamma/n)\subset\overline{TU(0,\varepsilon)}$.

Таким образом доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся точка $y\in F$ и число $\delta>0$ такие, что $V(y,\delta)\subset\overline{TU(0,\varepsilon)}$. По свойству (3) будет также $V(-y,\delta)\subset\overline{TU(0,\varepsilon)}$. Теперь, по свойствам (1) и (3), получаем, что $V(0,\delta)\subset\overline{TU(0,\varepsilon)}$.

(6) Для $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$ найдётся такое $\delta_n > 0$, что $V(0,\delta_n)\subset\overline{TU(0,\varepsilon/2^n)}$. Можно считать, что $\delta_n\to 0$.

Пусть $n=1$. Тогда $V(0,\delta_1)\subset\overline{TU(0,\varepsilon/2)}$. Рассмотрим произвольный $y\in V(0,\delta_1)$. Тогда найдётся такой $x_1\in E$, что $\|x_1\|<\varepsilon/2$ и $\|y-Tx_1\|<\delta_2$.

Получили точку $y-Tx_1\in V(0,\delta_2)\subset\overline{TU(0,\varepsilon/2^2)}$. найдётся $x_2\in E$, такой что $\|x_2\|<\varepsilon/2^2$ и $\|y-Tx_1-Tx_2\|<\delta_3$.

Продолжая построение, получим такую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в E, что $\|x_n\|<\varepsilon/2^n$ и
$$\|y-Tx_1-\ldots-Tx_n\|<\delta_{n+1}. \tag{$*$}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, так как последовательность его частичных сумм фундаментальна:
$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| = \|x_{n+1}+\ldots+x_{n+p}\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^{n+p}} < \frac{\varepsilon}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
а пространство E является банаховым.

Итак, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. Тогда $y = Tx_0$ в силу неравенства $(*)$. Кроме того, $\|x_0\|<\varepsilon$, то есть $x_0\in U(0,\varepsilon)$, откуда получаем, что $y=Tx_0\in TU(0,\varepsilon)$. Итак, доказано включение $V(0,\delta_1)\subset TU(0,\varepsilon)$.

(7) Пусть G открыто в E и $y\in T(G)$. Тогда $y=Tx$ для некоторого $x\in G$. Пусть $U(x,\varepsilon)\subset G$.

$TU(x,\varepsilon) = Tx + TU(0,\varepsilon) = y + TU(0,\varepsilon)\supset y + V(0,\delta_1) = V(y,\delta_1)$.

Итак, $y\in V(y,\delta_1)\subset TU(x,\varepsilon)\subset T(G)$. □

Теорема 1.34 (Теорема Банаха об обратном операторе)**.** *Пусть E, F — банаховы пространства и $T\colon E\to F$ — линейная непрерывная биекция. Тогда оператор T^{-1} непрерывен. Другими словами, T — изоморфизм.*

Доказательство. $T^{-1}\colon F\to E$. Пусть U открыто в E. Тогда $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ — открыто. □

Определение. Пусть X и Y — множества и $f\colon X \to Y$ произвольное отображение. *Графиком* отображения f называется множество

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Если E и F — ЛНП, то их декартово произведение $E \times F$ становится ЛНП с естественными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

относительно нормы $\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$.

1) Если E и F — банаховы, то $E \times F$ тоже банахово.

2) Если E и F — линейные пространства и $T\colon E \to F$ — линейный оператор, то $\mathrm{Gr}(T)$ — линейное подпространство в $E \times F$.

3) Если X и Y — топологические пространства, пространство Y хаусдорфово и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то $\mathrm{Gr}(f)$ является замкнутым подмножеством в $X \times Y$. Обратное не верно. Например, график отображения $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданный формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

замкнут в $\mathbb{R}^2$, но само отображение f не является непрерывным.

Теорема 1.35 (Теорема о замкнутом графике)**.** *Пусть E и F — банаховы пространства и $T\colon E \to F$ — такой линейный оператор, что его график замкнут. Тогда T непрерывен.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $U\colon \mathrm{Gr}(T) \to E$, определенное формулой $U(x, Tx) = x$. Очевидно, что U — биекция.

Докажем, что U непрерывно:

$$\|U(x, Tx)\| = \|x\| \leqslant \max\{\|x\|, \|Tx\|\} = \|(x, Tx)\|.$$

Так как по условию $\mathrm{Gr}(T)$ является банаховым пространством (как замкнутое подпространство в банаховом пространстве $E \times F$) то можно применить теорему Банаха об обратном операторе, согласно которой оператор U^{-1} непрерывен.

Теперь рассмотрим отображение $V\colon \mathrm{Gr}(T) \to F$, определённое формулой $V(x, Tx) = Tx$. Докажем, что V непрерывно:

$$\|V(x, Tx)\| = \|Tx\| \leqslant \max\{\|x\|, \|Tx\|\} = \|(x, Tx)\|.$$

Теперь непрерывность оператора T следует из равенства $T = V \circ U^{-1}$. $\square$

1.14 Вполне непрерывные операторы

Определение. Множество A в топологическом пространстве X называется *относительно компактным*, если множество $\bar{A}$ компактно.

Пример. Любое ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ относительно компактно, так как замыкание ограниченного множества — ограниченное множество.

Предложение 1.36. *Множество A в метрическом пространстве X является относительно компактным тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек множества A можно извлечь сходящуюся в X подпоследовательность.*

Замечание. Если множество A в метрическом пространстве относительно компактно, то оно ограничено.

Определение. Пусть E и F — ЛНП. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называется *вполне непрерывным* (*компактным*), если для любого ограниченного множества $A \subset E$ множество $T(A)$ относительно компактно в F.

Из вышеприведенного замечания следует, что любой вполне непрерывный оператор непрерывен.

Пример. Если E — бесконечномерное ЛНП, то тождественный оператор $I\colon E \to E$ не является вполне непрерывным.

Пример. Если E и F — ЛНП и хотя бы одно из пространств E и F конечномерно, то любой непрерывный линейный оператор $T\colon E \to F$ вполне непрерывен.

Теорема 1.37. *Если T и S — вполне непрерывные операторы и $\lambda \in \Lambda$, то операторы $T + S$ и $\lambda \cdot T$ тоже вполне непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим в E ограниченное множество A и произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (T+S)A$. Зафиксируем такие $x_n \in A$, что $(T + S)x_n = y_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пользуясь вполне непрерывностью оператора T, выберем из последовательности $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(A)$ сходящуюся в F подпоследовательность $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь, пользуясь вполне непрерывностью оператора S, из последовательности $\{Sx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset S(A)$ извлекаем сходящуюся в F подпоследовательность $\{Sx_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда подпоследовательность $\{y_{n_{k_m}}\}_{n=1}^{\infty} = \{(T + S)x_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ — сходящаяся.

Теперь докажем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ оператор λT вполне непрерывен. Пусть $A \subset E$ — ограниченное множество и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность в $\lambda T(A)$. Зафиксируем такие $x_n \in A$, что $\lambda T x_n = y_n$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пользуясь вполне непрерывностью оператора T, выберем из последовательности $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(A)$ сходящуюся в F подпоследовательность $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda T x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся. □

Теорема 1.38. *Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — конечный набор непрерывных операторов. Если хотя бы один из этих операторов вполне непрерывен, то оператор $T_1 \circ \ldots \circ T_n$ тоже вполне непрерывен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если T — линейный непрерывный оператор и множество A относительно компактно, то множество $T(A)$ также относительно компактно.

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(A)$ — произвольная последовательность. Зафиксируем точки $x_n \in A$ такие, что $y_n = Tx_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и x — ее предел. Осталось убедиться, что подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке $y = Tx$:

$$0 \leqslant \|y_{n_k} - y\| = \|Tx_{n_k} - Tx\| = \|T(x_{n_k} - x)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x_{n_k} - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

□

Определение. Пусть A — подмножество в метрическом пространстве (M, ρ) и $\varepsilon > 0$. Множество $B \subset M$ называется *ε-сетью* для A, если для любого $a \in A$ найдётся такой $b \in B$, что $\rho(a; b) < \varepsilon$. По другому: $A \subset \bigcup_{b \in B} U(b, \varepsilon)$. Конечная ε-сеть — это ε-сеть, являющаяся конечным множеством.

Замечание. Если B — ε-сеть для A, то в M существует 2ε-сеть для A, состоящая из точек множества A.

Пример. $M = \mathbb{R}$, $A_1 = (0; 1)$, $A_2 = [0; 1]$. Одноточечное множество $\{1/2\}$ является $1/2$-сетью для A_1, но не для A_2. Для A_2 $1/2$-сетями будут являться, например, множества $\{0, 1/2, 1\}$ или $\{1/3, 2/3\}$.

Теорема 1.39 (Теорема Хаусдорфа)**.** *Множество A в полном метрическом пространстве M относительно компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в M существует конечная ε-сеть для A.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим семейство $\{U(x, \varepsilon)\}_{x \in \bar{A}}$. Оно является открытым покрытием компакта $\bar{A}$. Извлечём из него конечное подпокрытие $\{U(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^{n}$. Тогда точки $\{x_1, \ldots, x_n\}$ образуют ε-сеть.

($\Leftarrow$) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность точек множества A. Надо доказать, что из нее можно извлечь сходящуюся в M подпоследовательность.

Пусть $\varepsilon = 1$. По условию, для A существует конечная 1-сеть. Другими словами, множество A покрыто конечным числом шаров радиуса 1. Так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечна, то хотя бы один из этих шаров (обозначим его U_1) содержит бесконечное число элементов этой последовательности: $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U_1$.

Пусть теперь $\varepsilon = 1/2$. Множество A покрывается конечным числом шаров радиуса $1/2$. Так как последовательность $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечна, то хотя бы один из этих шаров (обозначим его U_2) содержит бесконечное число элементов этой последовательности: $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U_2$.

Продолжая этот процесс, получим для каждого натурального k последовательность $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U_k$, причём

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \supset \{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \supset \{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \supset \ldots \supset \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \supset \ldots .$$

Теперь рассмотрим «диагональную» последовательность $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Она является подпоследовательностью исходной последовательности. Убедимся, что она, кроме того, фундаментальна: если $n > m$, то $\rho(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) < 2/m$. Окончательно, в силу полноты пространства M получаем, что последовательность $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке из M. □

Теорема 1.40. *Пусть F — банахово пространство. Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,F)$ — последовательность вполне непрерывных операторов и $T_n \to T$ в $L(E,F)$, то оператор T тоже вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $A \subset E$ — ограниченное подмножество и $C > 0$ — такое число, что $\|x\| \leqslant C$ для каждого $x \in A$. В силу теоремы Хаусдорфа достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ в F существует конечная ε-сеть для множества $T(A)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такое число n_0, что $\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Так как множество $T_{n_0}(A)$ относительно компактно, то в F существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$ для множества $T_{n_0}(A)$, причём можно считать, что $B \subset T_{n_0}(A)$. Убедимся, что это же множество B является ε-сетью для $T(A)$. Пусть $y \in T(A)$. Зафиксируем такой $x \in A$, что $Tx = y$. Так как $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — $\varepsilon/2$-сеть для $T_{n_0}(A)$, то найдётся такой индекс j, что $\|y_j - T_{n_0}x\| < \varepsilon/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\|y_j - y\| &= \|y_j - Tx\| = \|y_j - T_{n_0}x + T_{n_0}x - Tx\| \leqslant \\ &\leqslant \|y_j - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - Tx\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|T_{n_0} - T\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Множество всех вполне непрерывных операторов из E в F обозначим $K(E,F)$. Из теоремы 1.37 и теоремы 1.40 получаем следующее утверждение:

Следствие. *Если пространство F банахово, то $K(E,F)$ — замкнутое линейное подпространство в $L(E,F)$.*

Определение. Пусть (K,ρ) — метрический компакт. Множество $A\subset C(K)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что если $\rho(t_1,t_2)<\delta$, то $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$ для всех $x\in A$.

Пример. Семейство функций $\{x_\alpha(t)=\sin\alpha t:\alpha\in[a;b]\}\subset C[0;1]$ равностепенно непрерывно. Действительно, используя теорему Лагранжа о среднем значении, получим

$$|x_\alpha(t_1)-x_\alpha(t_2)|=|\sin\alpha t_1-\sin\alpha t_2|=|\alpha\cos\xi|\cdot|t_1-t_2|\leqslant \\ \leqslant|\alpha|\cdot|t_1-t_2|\leqslant\max\{|a|,|b|\}\cdot|t_1-t_2|.$$

Таким образом, в качестве δ в определении равностепенной непрерывности можно взять любое число, не превосходящее число ε/C, где $C=\max\{|a|,|b|\}$.

Пример. Семейство функций $\{x_n(t)=\sin nt:n\in\mathbb{N}\}\subset C[0;1]$ не является равностепенно непрерывным. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим точки $t_n=\frac{\pi}{2n}$ и точку $t_0=0$.

$$|x_n(t_n)-x_n(t_0)|=1$$

Пример. Семейство функций $\{x_n(t)=t^n:n\in\mathbb{N}\}\subset C[0;1]$ не является равностепенно непрерывным.

Пример. Если $0<b<1$, то семейство функций $\{x_n(t)=t^n:n\in\mathbb{N}\}\subset C[0;b]$ равностепенно непрерывно.

Теорема 1.41 (Теорема Арцела – Асколи). *Пусть (K,ρ) — метрический компакт. Множество $A\subset C(K)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) $A\subset\bar{A}$ и $\bar{A}$ — компакт, следовательно множество A ограничено. Докажем, что оно равностепенно непрерывно. Пусть $\varepsilon>0$. Так как пространство $C(K)$ банахово, то по теореме Хаусдорфа для множества A в $C(K)$ существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $B=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Так как функции x_i равномерно непрерывны, то найдутся такие $\delta_i>0$, что $\rho(t_1,t_2)<\delta_i\ \Rightarrow|x_i(t_1)-x_i(t_2)|<\varepsilon/3$, $i=1,\ldots,n$.

Пусть $\delta=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$. Рассмотрим произвольную функцию $x\in A$ и функцию $x_i\in B$ со свойством $\|x-x_i\|<\varepsilon/3$. Пусть $|t_1-t_2|<\delta$. Тогда

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant|x(t_1)-x_i(t_1)|+|x_i(t_1)-x_i(t_2)|+|x_i(t_2)-x_i(t_2)|< \\ <\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ в $C(K)$ найдётся конечная ε-сеть для A. Пусть $\varepsilon > 0$. найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\text{если } \rho(t_1, t_2) < \delta, \text{ то } |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon/3 \text{ для всех } x \in A. \tag{$*$}$$

Рассмотрим какое-нибудь покрытие компакта K открытыми шарами радиуса δ и извлечем из него конечное подпокрытие. Центры оставшихся шаров будут образовывать конечную δ-сеть $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ для K. Далее, для каждой функции $x \in A$ функция $x|_T = (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in \ell_\infty^n$. В силу ограниченности множества A множество $\{x|_T : x \in A\}$ ограничено в ℓ_∞^n. Так как пространство ℓ_∞^n конечномерно, то множество $\{x|_T : x \in A\}$ еще и относительно компактно. Пусть $\{x_1|_T, \dots, x_m|_T\}$ — $\varepsilon/3$-сеть для этого множества. Докажем, что множество $\{x_1, \dots, x_m\}$ — ε-сеть для A.

Пусть $x_0 \in A$. Тогда $x_0|_T \in \{x|_T : x \in A\}$ и, следовательно, найдётся $x_i|_T$ такой, что

$$\|x_0|_T - x_i|_T\|_{\ell_\infty^n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_0(t_k) - x_i(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$**$}$$

Осталось доказать, что $\|x_0 - x_i\|_{C(K)} = \max_{t \in K} |x_0(t) - x_i(t)| < \varepsilon$.

Пусть $t \in K$. Выберем такую точку $t_k \in T$, что $\rho(t, t_k) < \delta$. Тогда в силу ($*$) и ($**$)

$$\begin{aligned} |x_0(t) - x_i(t)| \leqslant |x_0(t) - x_0(t_k)| + |x_0(t_k) - x_i(t_k)| + |x_i(t_k) - x_i(t)| < \\ < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Пример. Оператор Фредгольма с непрерывным ядром. $T\colon C[a;b] \to C[a;b]$, $Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$.

Пусть A — ограниченное множество в $C[a;b]$, то есть $\|x\| \leqslant L$ для всех $x \in A$. Множество $T(A)$ ограничено, так как $\|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \leqslant L \cdot \|T\|$ для всех $x \in A$. Осталось показать, что множество $T(A)$ равностепенно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ядро K непрерывно, то найдётся такое $\delta > 0$, что $\rho((t_1, s_1), (t_2, s_2)) < \delta \Rightarrow |K(t_1, s_1) - K(t_2, s_2)| < \dfrac{\varepsilon}{L(b-a)}$. Тогда

$$\begin{aligned} |Tx(t_1) - Tx(t_2)| = \left| \int_a^b K(t_1, s)x(s)\,ds - \int_a^b K(t_2, s)x(s)\,ds \right| \leqslant \\ \leqslant \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| \cdot |x(s)|\,ds \leqslant \frac{\varepsilon}{L(b-a)} \cdot L(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Пример. Оператор Фредгольма с квадратично суммируемым ядром.

Определение. Пусть E и F — ЛНП. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называется *конечномерным*, если $T(E)$ — конечномерное подпространство в F.

Пример. Оператор Фредгольма $T\colon C[a;b] \to C[a;b]$ с ядром $K(t,s) = ts + t^2$. Действительно, для каждой функции $x \in C[a;b]$ $Tx(t) = \alpha t^2 + \beta t$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пример. $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, 0, 0, \ldots)$.

Теорема 1.42. *Любой непрерывный конечномерный оператор вполне непрерывен.*

Пример. $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Этот оператор вполне непрерывный, но не конечномерный. Для доказательства достаточно проверить, что множество $T\left(U(0,1)\right) = \{x \in \ell_2 : |x_n| \leqslant 1/n\}$ (гильбертов кирпич) относительно компактно.

Теорема 1.43. *Если $T\colon E \to F$ — линейный конечномерный непрерывный оператор, то найдутся (не единственные) $y_1, \ldots, y_n \in F$ и $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ такие, что $Tx = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$.*

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — базис в подпространстве $T(E)$. Тогда для каждого $x \in E$ найдётся единственный набор чисел $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in \Lambda$ со свойством $Tx = f_1(x) y_1 + \ldots + f_n(x) y_n$. Таким образом, возникают отображения $f_i\colon E \to \Lambda$. Осталось доказать, что $f_i \in E^*$. □

1.15 Сопряжённые операторы

Определение. Пусть E и F — ЛНП и $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Оператор $T^*\colon F^* \to E^*$, определенный формулой $T^*(f) = f \circ T$, называется *сопряжённым* (к T) *оператором.*

Пример. $(\lambda I_E)^* = \lambda I_{E^*}$. При $\lambda = 1$ получаем, что $(I_E)^* = I_{E^*}$.

Свойства сопряжённого оператора:

1) $(T + U)^* = T^* + U^*$;

2) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$;

3) $(T \circ U)^* = U^* \circ T^*$;

4) Если T — сюрьекция, то T^* — инъекция;

5) Если E — банахово и T^* — изоморфизм, то и T — изоморфизм;

Теорема 1.44. *1) Если $T \in L(E, F)$ то $T^* \in L(F^*, E^*)$, причём $\|T^*\| = \|T\|$;*

2) отображение $*\colon L(E,F) \to L(F^*, E^*)$ линейно и изометрично.

Доказательство. Линейность оператора T^* проверяется непосредственно. Проверим его непрерывность:

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\| .$$

Таким образом, $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Докажем неравенство $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. Если $Tx \neq 0$, то по следствию 1 из третьей теоремы Хана–Банаха найдется такой функционал $f \in F^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(Tx) = \|Tx\|$. Тогда

$$\|Tx\| = f(Tx) = |f(Tx)| = |f \circ T(x)| = |T^*(f)(x)| \leqslant \\ \leqslant \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = \|T^*\| \cdot \|x\|.$$

Если же $Tx = 0$, то неравенство $\|Tx\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|x\|$ очевидно. Таким образом, $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. □

Теорема 1.45. *Если оператор T — изоморфизм, то T^* тоже изоморфизм, причём $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Доказательство.

$$I_{E^*} = I_E^* = \left(T^{-1} \circ T\right)^* = T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* .$$

$$I_{F^*} = I_F^* = \left(T \circ T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1}\right)^* \circ T^*.$$

Таким образом, оператор $\left(T^{-1}\right)^*$ является и левым, и правым обратным для оператора T^*. Значит, $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$. □

Теорема 1.46. *Если оператор $T \in L(E, F)$ вполне непрерывен, то и оператор T^* вполне непрерывен.*

Задача. Пусть $T\colon E \to F$ — линейный непрерывный оператор. Рассмотрим оператор $T^{**}\colon E^{**} \to F^{**}$. Ранее доказывали, что $E \subset E^{**}$. Докажите, что $T^{**}|_E = T$.

Для доказательства достаточно заметить, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} E^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & F^{**} \\ E \arrow[u, "\kappa_E"] \arrow[r, "T"] & F \arrow[u, "\kappa_F"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\kappa_E"'] & F \arrow[d, "\kappa_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & F^{**} \\
E \arrow[u, "\kappa_E"] \arrow[r, "T"] & F \arrow[u, "\kappa_F"']
\end{tikzcd}$$

Задача. Рефлексивность пространства ℓ_p при $p > 1$ следует из коммутативности следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
\ell_p \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha_{pq}"'] & \ell_p^{**} \arrow[d, "\alpha_{qp}^*"] \\
& \ell_q^*
\end{tikzcd}$$

Здесь $\alpha_{pq}\colon \ell_p \to \ell_q^*$ — канонический изоморфизм и $1/p + 1/q = 1$.

Заметим, что рассуждение типа «так как ℓ_p^* изоморфно ℓ_q, а ℓ_q^* изоморфно ℓ_p» не доказывает рефлексивность пространства ℓ_p. Для рефлексивности пространства мало того, чтобы оно было изоморфно своему второму сопряженному.

Глава 2

Гильбертовы пространства

2.1 Основные определения и свойства

Определение. Пусть E — линейное пространство над полем $\Lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Скалярное произведение* на E — это функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \Lambda$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для каждого $x \in E$;

2) если $\langle x, x\rangle = 0$, то $x = 0$;

3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ для всех $x, y \in E$;

4) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in E$ и любого $\lambda \in \Lambda$;

5) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ для всех $x, y, z \in E$.

Линейное пространство, снабжённое скалярным произведением, называется *унитарным*.

Свойства скалярного произведения:

- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle$;
- $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
- Неравенство Коши–Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$.

Доказательство: если $y = 0$, то неравенство очевидно. Пусть $y \neq 0$. Тогда $0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda} \langle x, y\rangle + \lambda \langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle y, y\rangle$. Подставим в это неравенство число $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$:

$$0 \leqslant \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle \cdot \overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}.$$

Учитывая, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, получаем неравенство Коши–Буняковского.

В любом унитарном пространстве E формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ определяет норму на E. Проверим выполнение аксиом нормы:

1) очевидно, что первая аксиома $\|x\| = 0 \iff x = 0$ выполнена;

2) выполнение аксиомы $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ также очевидно;

3) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$.

Новый вариант неравенства Коши–Буняковского: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Определение. Если унитарное пространство E полно относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то полученное нормированное пространство называется *гильбертовым*. Традиционно гильбертово пространство обозначают символом H.

Примеры гильбертовых пространств:

- $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$;
- $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$;
- ℓ_2, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$;
- $\mathcal{L}_2(a;b)$, $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$.

Теорема 2.1 (Непрерывность скалярного произведения)**.** *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в гильбертовом пространстве H, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Доказательство. $0 \leqslant |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$. □

Теорема 2.2 (Равенство параллелограмма)**.** *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда для любых $x, y \in H$ выполняется равенство*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Доказательство. Достаточно сложить почленно следующие равенства:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\,;$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle\,.$$

□

Пример. Пространство $C[a;b]$ не гильбертово. Среди пространств ℓ_p только ℓ_2 гильбертово. Среди пространств $\mathcal{L}_p(a;b)$ только $\mathcal{L}_2(a;b)$ гильбертово.

2.2 Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции

Определение. Два элемента x, y в гильбертовом пространстве H называются *ортогональными* (обозначение $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$. Если $L \subset H$, то запись $x \perp L$ означает, что $x \perp y$ для всех $y \in L$. Наконец, $L^{\perp} = \{x \in H : x \perp L\}$.

Предложение 2.3. *Если $L \subset H$ — произвольное подмножество, то $L^{\perp}$ — замкнутое линейное подпространство в H.*

Доказательство. Пусть $x, y \in L^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \Lambda$ и $z \in L$. Так как

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle = 0,$$

то $\alpha x + \beta y \in L^{\perp}$. Таким образом $L^{\perp}$ — линейное подпространство.

Осталось показать, что $L^{\perp}$ замкнуто в H. Пусть x_0 — предельная для $L^{\perp}$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\perp}$, сходящуюся к x_0. По теореме 2.1 $\langle x_n, l\rangle \to \langle x_0, l\rangle$ для каждого $l \in L$, откуда $\langle x_0, l\rangle = 0$ для всех $l \in L$, то есть $x_0 \in L^{\perp}$. □

Теорема 2.4 (Теорема Пифагора)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $x, y \in H$ и $x \perp y$. Тогда $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Доказательство. $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$. □

Следствие. *Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — попарно ортогональные элементы в гильбертовом пространстве. Тогда $\|x_1 + \ldots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_k\|^2$.*

Теорема 2.5 (Теорема о наилучшем приближении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое линейное подпространство и $x \notin L$. Тогда в L существует единственный y, ближайший к x, то есть такой, что $\|x - y\| = \inf_{l \in L}\|x - l\|$, причём $(x - y) \perp L$.*

Доказательство. Обозначим $d = \inf_{l \in L}\|x - l\|$. По определению инфимума для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такой элемент $l_n \in L$, что

$$d^2 \leqslant \|x - l_n\|^2 < d^2 + 1/n. \qquad (*)$$

Докажем, что последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Составим равенство параллелограмма для $x - l_n$ и $x - l_m$:

$$\|(x - l_n) + (x - l_m)\|^2 + \|(x - l_n) - (x - l_m)\|^2 = 2\|x - l_n\|^2 + 2\|x - l_m\|^2.$$

$$\|l_m - l_n\|^2 = 2\|x - l_n\|^2 + 2\|x - l_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{l_n + l_m}{2}\right\|^2 <$$
$$< 2(d^2 + 1/n) + 2(d^2 + 1/m) - 4d^2 = 2/n + 2/m.$$

Итак, последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пусть $\lim_{n\to\infty} l_n = y$. В неравенстве $(*)$ перейдем к пределу при $n \to \infty$ и получим, что $\|x - y\| = d = \inf_{l\in L}\|x - l\|$.

Докажем, что $(x - y) \perp L$. Пусть $l \in L$. Так как $y + \lambda l \in L$ при любом $\lambda \in \Lambda$, то

$$\begin{aligned} d^2 \leqslant \|x - y - \lambda l\|^2 &= \langle x - y - \lambda l, x - y - \lambda l\rangle = \\ &= \langle x - y, x - y\rangle - \langle x - y, \lambda l\rangle - \langle \lambda l, x - y\rangle + \langle \lambda l, \lambda l\rangle = \\ &= \|x - y\|^2 - \overline{\lambda}\,\langle x - y, l\rangle - \lambda\,\langle l, x - y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\langle l, l\rangle = \\ &= d^2 - \overline{\lambda}\,\langle x - y, l\rangle - \lambda\,\langle l, x - y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\langle l, l\rangle\,, \end{aligned}$$

откуда

$$\overline{\lambda}\,\langle x - y, l\rangle + \lambda\,\langle l, x - y\rangle - \lambda\overline{\lambda}\,\langle l, l\rangle \leqslant 0.$$

Положим в последнем неравенстве $\lambda = \frac{\langle x-y, l\rangle}{\|l\|^2}$. Тогда

$$\frac{\overline{\langle x - y, l\rangle} \cdot \langle x - y, l\rangle}{\|l\|^2} + \frac{\langle x - y, l\rangle \cdot \overline{\langle x - y, l\rangle}}{\|l\|^2} \leqslant \frac{\langle x - y, l\rangle \cdot \overline{\langle x - y, l\rangle}}{\|l\|^2}.$$

Из этого неравенства следует равенство $|\langle x - y, l\rangle|^2 = 0$, которое (в силу произвольности $l \in L$) влечет, что $(x - y) \perp L$.

Единственность. Предположим, что $y, y_1 \in L$ — ближайшие к x. Тогда по доказанному $x - y \in L^{\perp}$ и $x - y_1 \in L^{\perp}$. Так как $L^{\perp}$ — линейное подпространство, то и $(x - y) - (x - y_1) = y_1 - y \in L^{\perp}$. Кроме того, $y_1 - y \in L$. Тогда $\langle y_1 - y, y_1 - y\rangle = 0$, откуда получаем, что $y = y_1$. □

Теорема 2.6 (Теорема о проекции)**.** *Пусть H — гильбертово и $L \subset H$ — замкнутое линейное подпространство. Тогда для каждого $x \in H$ найдутся единственный $y \in L$ и единственный $z \in L^{\perp}$ такие, что $x = y + z$.*

Доказательство. Пусть $y \in L$ — ближайший к x. Запишем x в виде $x = y + (x - y)$. По теореме о наилучшем приближении $z = x - y \in L^{\perp}$. Докажем единственность: пусть $x = y + z = y_1 + z_1$. Тогда $y - y_1 = z_1 - z$. Кроме того, $\langle y - y_1, z_1 - z\rangle = 0$. Значит, $y - y_1 = z_1 - z = 0$. □

Следствие 1. *Пусть H — гильбертово пространство и $L \subset H$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $L = L^{\perp\perp}$;

2) L — замкнутое подпространство.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Включение $L \subset L^{\perp\perp}$ очевидно. Пусть теперь $l \in L^{\perp\perp}$. Тогда по теореме о проекции l единственным образом представляется в виде $y+z$, где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$. Из равенства

$$0 = \langle l, z\rangle = \langle y+z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle = \langle z, z\rangle$$

следует, что $z = 0$, откуда $l = y \in L$. □

Следствие 2. *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое подпространство и $x \in H$. Если x представлен в виде $x = y+z$ где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$, то y — ближайший к x из L, а z — ближайший к x из $L^{\perp}$.*

Доказательство. Для доказательства следствия достаточно показать, что z — ближайший к x из $L^{\perp}$. Применим теорему о проекции к подпространству $L^{\perp}$: согласно ей, x единственным образом представляется в виде $x = v+w$, где $v \in L^{\perp}$ и $w \in L^{\perp\perp}$, причём v — ближайший к x в подпространстве $L^{\perp}$. Но по предыдущему следствию $w \in L$. Значит, в силу единственности разложения $w = y$ и $v = z$. □

Следствие 3. *Пусть H — гильбертово пространство и $L \subset H$ — подпространство. Тогда $\overline{L} \neq H$ если и только если найдётся такой отличный от нуля $z \in H$, что $z \perp L$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Так как $z \perp L$, то из непрерывности скалярного произведения следует, что $z \perp \overline{L}$. Таким образом, $z \notin \overline{L}$.

($\Rightarrow$) Так как $\overline{L} \neq H$, то существует $x \in H \setminus \overline{L}$. По теореме о проекции $x = y+z$, где $y \in \overline{L}$ и $z \in \overline{L}^{\perp}$, причём $z \neq 0$. □

Пример. Рассмотрим пространство ℓ_∞ и в нем замкнутое подпространство $L = \{(t, 0, 0, \ldots) : t \in \mathbb{R}\}$. Пусть $a = (0, 1, 0, 0, \ldots)$. Тогда

$$\rho(a, L) = \inf_{x \in L} \|a - x\| = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|(-t, 1, 0, 0, \ldots)\| = 1.$$

Пусть теперь $x = (t, 0, 0, \ldots) \in L$ такая, что $|t| \leqslant 1$. Тогда $\|a - x\| = \|(-t, 1, 0, 0, \ldots)\| = 1$. Таким образом, любая такая точка x — ближайшая к a.

2.3 Общий вид функционала в гильбертовом пространстве

Теорема 2.7 (Теорема Риса). *1) Пусть H — гильбертово пространство. Тогда для каждого $y \in H$ отображение $f_y \colon H \to \Lambda$, определённое формулой $f_y(x) = \langle x, y\rangle$, является линейным непрерывным функционалом на пространстве H, причём $\|f_y\| = \|y\|$.*

2) для каждого $f \in H^*$ найдётся единственный $y \in H$ такой, что $f = f_y$.

Доказательство. 1) Линейность отображения f_y вытекает из линейности скалярного произведения по первому сомножителю. Проверим непрерывность: $|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|$. Кроме того, из этого неравенства следует оценка $\|f_y\| \leqslant \|y\|$. Обратная оценка: $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = |f_y(y)| \leqslant \|f_y\| \cdot \|y\|$.

2) Пусть $f \in H^*$. Рассмотрим в H замкнутое линейное подпространство $L = f^{-1}(0)$. Если $L = H$, то $f \equiv 0$ и тогда $f = f_0$. Пусть теперь $L \neq H$. Тогда по следствию 3 из теоремы о проекции найдётся такой $0 \neq z \in H$, что $z \perp L$. Рассмотрим $z_0 = z/f(z)$. Тогда $f(z_0) = 1$. Для каждого $x \in H$ будет $(x - f(x) \cdot z_0) \in L$, откуда вытекает, что $\langle x - f(x) \cdot z_0, z_0\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x, z_0\rangle = \langle f(x) \cdot z_0, z_0\rangle$ или

$$f(x) = \left\langle x, \frac{z_0}{\|z_0\|^2} \right\rangle.$$

Таким образом, $f = f_{z_0/\|z_0\|^2}$.

Единственность. Предположим, что $f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle$ для всех $x \in H$. Тогда $\langle x, y - y_1\rangle = 0$ для каждого $x \in H$. В частности, $\langle y - y_1, y - y_1\rangle = 0$, откуда $y = y_1$. □

Замечание. Теорема 2.7 устанавливает изометрическую биекцию между H и H^* при помощи соответствия $y \in H \leftrightarrow f_y \in H^*$, причём $(y_1 + y_2) \leftrightarrow f_{y_1} + f_{y_2}$ и $\lambda y \leftrightarrow \bar{\lambda} f_y$. Если гильбертово пространство рассматривается над полем $\mathbb{R}$, то это соответствие является изометрическим изоморфизмом.

Пример. $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, ℓ_2, $\mathcal{L}_2(a; b)$.

2.4 Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве

Определение. Пусть H — гильбертово пространство. Система элементов $\{x_s\}_{s \in S} \subset H$ называется *ортогональной*, если $x_s \neq 0$ для каждого $s \in S$ и $x_{s_1} \perp x_{s_2}$ для любых различных $s_1, s_2 \in S$. Если, сверх того, $\|x_s\| = 1$ для всех $s \in S$, то система $\{x_s\}_{s \in S}$ называется *ортонормированной*.

Определение. Система элементов $\{x_s\}_{s \in S}$ линейного пространства X называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Предложение 2.8. *Любая ортогональная система линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\{x_s\}_{s \in S}$ — ортогональная система и $\{x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_n}\}$ — ее произвольная конечная подсистема. Рассмотрим равенство

$$\lambda_1 x_{s_1} + \lambda_2 x_{s_2} + \ldots + \lambda_n x_{s_n} = 0.$$

Умножая его скалярно на x_{s_k}, получим, что все λ_k равны нулю. □

Обратное неверно.

Теорема 2.9 (Теорема Э. Шмидта об ортогонализации)**.** *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— линейно независимая система в гильбертовом пространстве* H*. Тогда в* H *существует такая ортонормированная система* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$*, что* $\operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_n\} = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_n\}$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$*.*

Доказательство. Строить систему $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем по индукции. Положим $y_1 = x_1/\|x_1\|$. Ясно, что $\operatorname{sp}\{x_1\} = \operatorname{sp}\{y_1\}$. Предположим, что ортонормированная система $\{y_1,\ldots,y_k\}$ построена, причём $\operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_j\} = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_j\}$ для всех $j \leqslant k$. Обозначим $\operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_k\} = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_k\} = L_k$ — k-мерное замкнутое линейное подпространство в H. Так как $x_{k+1} \notin L_k$, то по теореме о проекции $x_{k+1} = x'_{k+1} + x''_{k+1}$, где $x'_{k+1} \in L_k$, а $0 \neq x''_{k+1} \perp L_k$. Положим $y_{k+1} = \dfrac{x''_{k+1}}{\|x''_{k+1}\|}$. Осталось доказать, что $\operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_{k+1}\} = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_{k+1}\}$.

Пусть $z \in \operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_{k+1}\}$. Тогда

$$z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = \underbrace{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{k+1} x'_{k+1}}_{\in L_k = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_k\}} + \underbrace{\lambda_{k+1} x''_{k+1}}_{=\lambda y_{k+1}} \in \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_{k+1}\}.$$

Пусть теперь $z \in \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_{k+1}\}$. Тогда

$$z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k + \underbrace{\lambda_{k+1} y_{k+1}}_{=\lambda x''_{k+1}} =$$

$$= \underbrace{\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k - \lambda x'_{k+1}}_{\in \operatorname{sp}\{L_k, x'_{k+1}\} = L_k} + \underbrace{\lambda x'_{k+1} + \lambda x''_{k+1}}_{=\lambda x_{k+1}} \in \operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_{k+1}\}.$$

□

Пример. $H = \mathcal{L}_2(-1,1)$. $\{x_n(t) = t^n : n = 0,1,2,\ldots\}$ — не ортогональная линейно-независимая система. Применяя к ней процесс ортогонализации, получим систему многочленов Лежандра $P_n(t) = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}\cdot 2^n \cdot n!} \cdot \dfrac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Определение. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется *полной*, если $\overline{\operatorname{sp}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = H$.

Пример. $H = \mathcal{L}_2(-\pi,\pi)$. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система.

Пример. $H = \mathcal{L}_2(0;\pi)$. $\left\{\dfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi/2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi/2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — полные ортонормированные системы.

Пример. $H = \ell_2$. $x_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, ... По следствию из теоремы о проекции $\overline{\mathrm{sp}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = \ell_2$, значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система. Ясно, что эта система не ортогональна.

Пример. $H = \ell_2$. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная, ортонормированная.

Пример. $H = \ell_2$. $x_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$, $x_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$, ... — ортонормированная система. Она полна по следствию из теоремы о проекции.

2.5 Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Определение. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система элементов гильбертова пространства H и $x \in H$ — произвольный элемент. Скалярные произведения $c_n = \langle x, e_n \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Сумма $p_k(x) = c_1 e_1 + \ldots c_k e_k$ — *многочлен Фурье* элемента x, а сумма $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ — *ряд Фурье* элемента x.

Вопрос: возможно ли равенство $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x$?

Теорема 2.10 (Экстремальное свойство многочлена Фурье). *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная система элементов гильбертова пространства H, $L_k = \mathrm{sp}\{e_1, \ldots, e_k\}$ и $x \in H$ — произвольный элемент. Тогда $p_k(x)$ — ближайший к x из L_k.*

Доказательство. По теореме о проекции x единственным образом раскладывается в сумму $x = y + z$, где $y \in L_k$, $z \in L_k^{\perp}$.

С другой стороны, $x = p_k(x) + (x - p_k(x))$, причём $p_k(x) \in L_k$ по определению, а $(x - p_k(x)) \perp L_k$. Чтобы доказать последнее соотношение, достаточно убедиться, что $\langle x - p_k(x), e_j \rangle = 0$ для каждого $j \leqslant k$:

$$\langle x - p_k(x), e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle p_k(x), e_j \rangle = c_j - c_j = 0. \quad \square$$

Следствие (Неравенство Бесселя). *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная система элементов гильбертова пространства H и $x \in H$ — произвольный элемент. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Доказательство. Для каждого натурального n

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k e_k\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \|p_n(x)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2 = \|p_n(x) + (x - p_n(x))\|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Определение. Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется *замкнутой*, если для каждого $x \in H$ выполняется равенство $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$, называемое *равенством Парсеваля*.

Теорема 2.11. *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная система элементов гильбертова пространства H. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута $\Longleftrightarrow$ для каждого $x \in H$ выполняется равенство $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$.*

Доказательство. $x = p_n(x)+(x-p_n(x))$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|x - p_n(x)\|^2. \qquad (*)$$

Пусть система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута. Перейдём к пределу в равенстве $(*)$ и, с учетом замкнутости, получим, что $\|x - p_n(x)\|^2 \to 0$.

В обратную сторону. Пусть для каждого $x \in H$ выполнено равенство $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Другими словами, $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. Тогда

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|c_k e_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \quad \square$$

Теорема 2.12. *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H замкнута тогда и только тогда, когда она полна.*

Доказательство. 1) Пусть система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута. Рассмотрим произвольный $x \in H$. По условию, $x = \lim_{k\to\infty} p_k(x)$, а так как все $p_k(x) \in \operatorname{sp}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $x \in \overline{\operatorname{sp}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

2) Пусть система полна. Рассмотрим произвольный $x \in H$ и $\varepsilon > 0$. В силу полноты найдётся такой $y = a_1 e_1 + \ldots + a_{n_0} e_{n_0}$, что $\|x - y\| < \varepsilon$. Тогда при $n \geqslant n_0$

$$\|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - (|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 - (|c_1|^2 + \ldots + |c_{n_0}|^2) = \|x\|^2 - \|p_{n_0}(x)\|^2 = \|x - p_{n_0}(x)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 < \varepsilon^2.$$

Таким образом показано, что $p_n(x) \to x$, то есть что $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Применяя предыдущую теорему, получаем, что система замкнута. $\square$

Определение. Полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве называется *базисом Шаудера.*

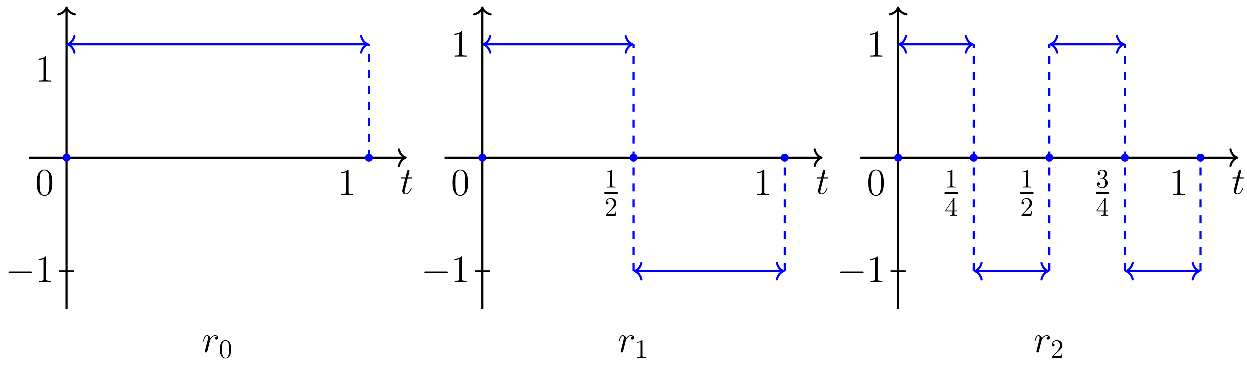
Пример. Система Хаара. $\chi_0^0(t) \equiv 1$,

$$\chi_0^1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0; 1/2); \\ -1, & t \in (1/2; 1). \end{cases}$$

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & t \in \left(\frac{k}{2^n}; \frac{k+1/2}{2^n}\right); \\ -\sqrt{2^n}, & t \in \left(\frac{k+1/2}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right); \\ 0, & \text{в др. случаях.} \end{cases}$$

при $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Это полная ортонормированная система в $\mathcal{L}_2(0; 1)$.

Пример. Система Радемахера в $\mathcal{L}_2(0;1)$. $r_n(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^n\pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.



Система Радемахера в $\mathcal{L}_2(0;1)$ является ортонормированной, но не полной. Ортонормированность проверяется непосредственно, а неполнота следует из того, что $\langle r_1r_2, r_n\rangle = 0$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2.6 Сопряжённые и самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве

Теорема 2.13. *Пусть H — гильбертово пространство и $T\colon H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Тогда существует единственный линейный непрерывный оператор $T^*\colon H \to H$, такой что $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для любых x, $y \in H$ и $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доказательство. 1) Существование. Зафиксируем $y \in H$ и рассмотрим отображение $F_y\colon H \to \Lambda$, определённое формулой $F_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Из свойств скалярного произведения и линейности самого оператора T следует, что F_y — линейное отображение. Докажем, что оно ограничено: $|F_y(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leqslant \|Tx\| \cdot \|y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|$. Таким образом, $\|F_y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$. По теореме Риса об общем виде функционала существует единственный $z_y \in H$ такой, что $F_y(x) = \langle x, z_y\rangle$, причём $\|F_y\| = \|z_y\|$. Таким образом у нас возникло соответствие $y \mapsto z_y$. С помощью него и определим отображение $T^*\colon H \to H$, $T^*(y) = z_y$.

Проверим соблюдение условия $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для любых x, $y \in H$:

$$\langle Tx, y\rangle = F_y(x) = \langle x, z_y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,.$$

2) Линейность. Для произвольных $x, y, z \in H$ верно равенство

$$\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle = \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle Tx, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle Tx, z\rangle = \\ = \overline{\alpha}\,\langle x, T^*y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, T^*z\rangle = \langle x, \alpha T^*y + \beta T^*z\rangle\,.$$

Отсюда следует равенство $T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha T^*y + \beta T^*z$ (если $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ для всех $x \in H$, то, подставляя $x = u - v$, получим, что $u = v$).

3) Ограниченность. $\|T^*y\| = \|z_y\| = \|F_y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$.

4) Так как T^* — ограниченный, то существует ограниченный T^{**}, причём $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$. Докажем, что $T^{**} = T$:

$$\langle T^{**}x, y\rangle = \overline{\langle y, T^{**}x\rangle} = \overline{\langle T^*y, x\rangle} = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle \text{ для всех } x, y \in H.$$

Получили, что $\langle T^{**}x - Tx, y\rangle = 0$ для всех $x, y \in H$ откуда (см. п.2) следует, что $T^{**}x = Tx$ для всех $x \in H$.

5) Единственность. Предположим, что для всех $x, y \in H$ выполняется равенство $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, Sy\rangle$. Тогда $\langle x, T^*y - Sy\rangle = 0$, откуда, (см. п.2) следует, что $T^* = S$. □

Определение. Оператор T^*, существование которого доказано в теореме 2.13, называется *сопряжённым* (к T) оператором.

Задача. Сравните это понятие сопряжённого оператора в гильбертовом пространстве с введённым ранее, в разделе 1.15, понятием сопряжённого оператора (если $T\colon E \to F$, то $T^*\colon F^* \to E^*$, $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$).

Примеры сопряжённых операторов.

- Если $I\colon H \to H$ — тождественный оператор, то $\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Iy\rangle$. Таким образом, $I^* = I$.

- Если $\mathbb{O}\colon H \to H$ — нулевой оператор, то $\langle \mathbb{O}x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle = \langle x, \mathbb{O}y\rangle$. Таким образом, $\mathbb{O}^* = \mathbb{O}$.

- $T = \lambda I$. $\langle Tx, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} y\right\rangle$. Таким образом, $(\lambda I)^* = \overline{\lambda} I$.

- Оператор Фредгольма.

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\,ds\right)\,dt = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\,dt\right)\,ds = \\ &= \int_a^b x(s)\left(\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}\,dt\right)\,ds.\end{aligned}$$

  Значит, $\overline{T^*y(s)} = \int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}\,dt\,ds$. Если перейти к привычным обозначениям, то получим равенство $T^*x(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}x(t)\,ds$. Таким образом, если $K(t,s)$ — ядро оператора Фредгольма T, то у оператора T^* ядром будет функция $\overline{K(s,t)}$.

- Оператор сдвига $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Из равенства

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \cdot \bar{y}_1 + x_1 \cdot \bar{y}_2 + x_2 \cdot \bar{y}_3 + x_3 \cdot \bar{y}_4 + \ldots = \langle x, T^*y\rangle$$

  следует, что $T^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

Свойства:

- $(T+S)^* = T^* + S^*$.

$$\begin{aligned}\langle x, (T+S)^* y\rangle = \langle (T+S)x, y\rangle = \langle Tx + Sx, y\rangle = \\ = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle = \langle x, T^* y + S^* y\rangle\,;\end{aligned}$$

- $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

$$\begin{aligned}\langle x, (\lambda T)^* y\rangle = \langle (\lambda T)x, y\rangle = \langle \lambda \cdot Tx, y\rangle = \\ = \lambda \cdot \langle Tx, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, T^* y\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} T^* y\right\rangle\,;\end{aligned}$$

- $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;

$$\begin{aligned}\langle x, (S\circ T)^* y\rangle = \langle (S\circ T)x, y\rangle = \langle S(Tx), y\rangle = \\ = \langle Tx, S^* y\rangle = \langle x, T^*(S^* y)\rangle = \langle x, (T^*\circ S^*)y\rangle\,;\end{aligned}$$

- Если $T\colon H \to H$ — изоморфизм, то T^* тоже изоморфизм, причём $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Действительно, нужное утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned} I = I^* = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*, \\ I = I^* = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^* \end{aligned}$$

и того факта, что если f, g — такие отображения множества X в себя, что $f \circ g = \mathrm{id}_X$, то g — инъекция, а f — сюрьекция.

Замечание. Из теоремы 2.13 и свойств сопряжённого оператора следует, что отображение $*\colon L(H,H) \to L(H,H)$, заданное формулой $*(T) = T^*$, является полулинейной изометрической биекцией.

Определение. Пусть H — гильбертово пространство. Оператор $T\colon H \to H$ называется *самосопряжённым*, если $T = T^*$, то есть если $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ для всех $x, y \in H$.

Примеры самосопряжённых операторов:

- $I = I^*$, $0 = 0^*$;
- оператор λI самосопряжён тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathbb{R}$;
- оператор Фредгольма самосопряжён тогда и только тогда, когда $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

Свойства самосопряжённого оператора:

- Если T, S — самосопряжённые и $n \in \mathbb{N}$, то $T + S$ и T^n — самосопряжённые.

- Если T — самосопряжённый, то $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.
$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle};$$

- Если $T\colon H \to H$ — произвольный линейный ограниченный оператор, то операторы $T \circ T^*$ и $T^* \circ T$ являются самосопряжёнными. Действительно, $(T \circ T^*)^* = T^{**} \circ T^* = T \circ T^*$. Доказательство самосопряжённости оператора $T^* \circ T$ аналогично.

- Если T и S — самосопряжённые, то $T \circ S$ самосопряжён тогда и только тогда, когда $T \circ S = S \circ T$. Действительно, если оператор $T \circ S$ самосопряжён, то
$$T \circ S = (T \circ S)^* = S^* \circ T^* = S \circ T.$$
Обратно, пусть операторы T и S перестановочны. Тогда
$$T \circ S = S \circ T = S^* \circ T^* = (T \circ S)^*.$$

Теорема 2.14. *Пусть H — гильбертово пространство и $T\colon H \to H$ — линейный непрерывный самосопряжённый оператор. Тогда*
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| .$$

Доказательство. В одну сторону неравенство очевидно:
$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (\|Tx\| \cdot \|x\|) \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left(\|T\| \cdot \|x\|^2\right) \leqslant \|T\|.$$

Осталось доказать неравенство в другую сторону. Пусть $C = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$. Рассмотрим произвольный $0 \neq x \in H$. Тогда
$$\left|\left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leqslant C,$$
откуда вытекает оценка
$$|\langle Tx, x\rangle| \leqslant C\|x\|^2 \tag{$*$}$$
для всех $x \in H$.

Пусть $x, y \in H$. Рассмотрим скалярные произведения
$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle ,$$
$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle - \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle$$
и почленно вычтем второе равенство из первого. Получим равенство
$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle =$$
$$= 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle y, Tx\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\overline{\langle Tx, y\rangle} = 4\Re\langle Tx, y\rangle ,$$

откуда, используя $(*)$

$$|4\Re\langle Tx, y\rangle| \leqslant |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \leqslant \\ \leqslant C\|x+y\|^2 + C\|x-y\|^2 = 2C(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Пусть теперь $y = \frac{\|x\|\cdot Tx}{\|Tx\|}$. Подставляя этот y в последнее неравенство, получим оценку $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$, откуда $\|T\| \leqslant C = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$. □

2.7 Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве

Теорема 2.15. *Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный, то оператор T^* тоже вполне непрерывный.*

Доказательство. Пусть $A \subset H$ — ограниченное множество (то есть $\|x\| \leqslant C$ для любого $x \in A$). Надо доказать, что множество $T^*(A)$ относительно компактно в H.

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset T^*(A)$ — произвольная последовательность. Выберем $x_n \in A$ так, чтобы $y_n = T^*x_n$.

Так как оператор T вполне непрерывен, то множество $T(T^*(A))$ относительно компактно и, следовательно, из последовательности $\{Ty_n\}_{n=1}^\infty$ можно извлечь сходящуюся в H подпоследовательность $\{Ty_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Докажем, что последовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится в H, для чего достаточно показать ее фундаментальность.

$$\|y_{n_k} - y_{n_l}\|^2 = \langle y_{n_k} - y_{n_l}, y_{n_k} - y_{n_l}\rangle = \\ = \langle T^*x_{n_k} - T^*x_{n_l}, T^*x_{n_k} - T^*x_{n_l}\rangle = \langle TT^*x_{n_k} - TT^*x_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l}\rangle = \\ = \langle Ty_{n_k} - Ty_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l}\rangle \leqslant \underbrace{\|Ty_{n_k} - Ty_{n_l}\|}_{\to 0 \text{ при } k,l\to\infty} \cdot \underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_l}\|}_{\leqslant 2C} \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0.$$

□

Теорема 2.16. *Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой конечномерный оператор $T_\varepsilon\colon H \to H$, что $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Так как оператор T вполне непрерывен, то $\overline{T\overline{U}(0,1)}$ является компактом. Семейство $\left\{U(x,\varepsilon) : x \in \overline{T\overline{U}(0,1)}\right\}$ — открытое покрытие этого компакта. Пусть $\{U(x_1,\varepsilon), \ldots, U(x_k,\varepsilon)\}$ — его конечное подпокрытие. Рассмотрим в H конечномерное подпространство $L = \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_k\}$. По теореме о проекции любой элемент $h \in H$ единственным образом представляется в виде суммы $h = y_h + z_h$, где $y_h \in L$ и $z_h \in L^{\perp}$. Рассмотрим отображение $P\colon H \to H$ определённое формулой $Ph = y_h$.

1) P — линейный.

2) P — ограниченный, так как $\|Ph\|^2 = \|y_h\|^2 \leqslant \|y_h\|^2 + \|z_h\|^2 = \|h\|^2$.

3) Определим $T_\varepsilon = P \circ T$ и докажем, что $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$. Пусть $x \in \overline{U}(0,1)$. Тогда $Tx \in T\overline{U}(0,1) \subset \cup_{i=1}^{k} U(x_i, \varepsilon)$ и, значит, найдётся такой x_{i_0}, что $\|Tx - x_{i_0}\| < \varepsilon$.

4) $\|Tx - T_\varepsilon x\| = \|Tx - PTx\| \leqslant \|Tx - x_{i_0}\| < \varepsilon$. □

Следствие. *Оператор $T\colon H \to H$ — вполне непрерывен тогда и только тогда, когда существует последовательность конечномерных операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к T.*

Теорема 2.17. *Если $T\colon H \to H$ — конечномерный оператор, то найдутся $y_1, \ldots, y_n \in H$ и $z_1, \ldots, z_n \in H$ такие, что $T(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k \rangle\, y_k$ для всех $x \in H$.*

Доказательство. По теореме 1.43 найдутся $y_1, \ldots, y_n \in H$ и функционалы $f_1, \ldots, f_n \in H^*$ такие, что $T(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k$ для всех $x \in H$. Осталось применить теорему об общем виде функционала на гильбертовом пространстве. □

Теорема 2.18. *Если $H = \mathcal{L}_2(a;b)$, то любой конечномерный оператор есть оператор Фредгольма.*

Доказательство. По предыдущей теореме

$$Tx(t) = \sum_{k=1}^{n} \langle x(s), z_k(s) \rangle \cdot y_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b x(s)\overline{z_k(s)}\, ds \cdot y_k(t) =$$
$$= \int_a^b \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} y_k(t)\overline{z_k(s)} \right) x(s)\, ds.$$

□

Теорема 2.19. *Если $T\colon \mathcal{L}_2(a;b) \to \mathcal{L}_2(a;b)$ — оператор Фредгольма с ядром K, удовлетворяющим условию $\iint\limits_{aa}^{bb} |K(t,s)|^2 dtds < +\infty$, то T вполне непрерывен.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда ядро K непрерывно на $[a;b] \times [a;b]$. В этом случае найдётся такое число $L > 0$, что $|K(t,s)| \leqslant L$ для всех $t, s \in [a;b]$.

Пусть $A \subset \mathcal{L}_2(a;b)$ — ограниченное множество и $M > 0$ — такое число, что $\|x\|_{\mathcal{L}_2(a;b)} < M$ для всех $x \in A$.

Докажем, что в том случае, когда ядро непрерывно, $T(A)$ будет равностепенно непрерывным семейством непрерывных функций. Пусть $\varepsilon > 0$. найдётся такое $\delta > 0$, что если $\rho((t_1, s_1), (t_2, s_2)) < \delta$, то

$$|K(t_1, s_1) - K(t_2, s_2)| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}.$$

Пусть теперь $x \in A$ и $|t_1 - t_2| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}|Tx(t_1) - Tx(t_2)| &= \left|\int_a^b (K(t_1, s) - K(t_2, s))\, x(s) ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| \cdot |x(s)| ds \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds} \cdot \sqrt{\int_a^b |x(s)|^2\, ds} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}\right)^2 \cdot (b-a)} \cdot \|x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, любая функция из множества $T(A)$ непрерывна, а само это множество равностепенно непрерывно.

Теперь покажем, что множество $T(A)$ ограничено в $C[a;b]$:

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &= \left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \leqslant \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)| ds \leqslant \\ &\leqslant L \cdot \int_a^b |x(s)| ds \leqslant L \cdot \sqrt{\int_a^b |x(s)|^2 ds} \cdot \sqrt{\int_a^b ds} \leqslant L \cdot M \cdot \sqrt{b-a}.\end{aligned}$$

Мы доказали, что множество $T(A) \subset C[a;b]$ ограничено и равностепенно непрерывно, что, в силу теоремы Арцела–Асколи, эквивалентно относительной компактности этого множества. Осталось показать, что множество $T(A)$ относительно компактно и в пространстве $\mathcal{L}_2(a;b)$.

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(A)$. Тогда, в силу относительной компактности множества $T(A)$ в пространстве $C[a;b]$, эта последовательность сходится к некоторой функции $y \in C[a;b]$. Покажем, что $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ в $\mathcal{L}_2(a;b)$:

$$\begin{aligned}\|y_n - y\|_{\mathcal{L}_2(a;b)} &= \sqrt{\int_a^b |y_n(t) - y(t)|^2\, dt} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\int_a^b \max_{t\in[a;b]} |y_n(t) - y(t)|^2\, dt} = \sqrt{\int_a^b \|y_n - y\|^2_{C[a;b]}\, dt} = \\ &= \|y_n - y\|_{C[a;b]} \cdot \sqrt{b-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь ядро K квадратично суммируемо. Зафиксируем последовательность K_n непрерывных функций, сходящуюся к K в пространстве $\mathcal{L}_2(a;b)^2$. Пусть T_n — операторы Фредгольма с ядрами K_n. Тогда они вполне непрерывны по первой части этой теоремы и сходятся к T. Тогда и оператор T вполне непрерывен (теорема 1.40). □

2.8 Проекторы в гильбертовых пространствах

Определение. Пусть E — линейное пространство. Линейный оператор $P\colon E \to E$ называется *проектором* (*оператором проектирования*) если $P \circ P = P$.

Задача. Линейный оператор $P\colon E \to E$ является проектором тогда и только тогда, когда $P|_{\operatorname{im} P} = I_{\operatorname{im} P}$.

Задача. Докажите, что если $P\colon E \to E$ — проектор, то оператор $I - P$ тоже проектор, причём $\ker P = \operatorname{im}(I-P)$ и $\operatorname{im} P = \ker(I-P)$.

Пример. $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x,y) = (x+y,0)$ — проектирование на ось абсцисс вдоль прямой $y = -x$.

Лемма 2.20. *Если $P\colon E \to E$ — проектор, то любой элемент $x \in E$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, где $y \in \ker P$ и $z \in \operatorname{im} P$.*

Доказательство. $x = Px + (x - Px)$. □

Теорема 2.21. *Если P — проектор в гильбертовом пространстве H, то $\ker P \perp \operatorname{im} P$ тогда и только тогда, когда $P = P^*$.*

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть $x \in \operatorname{im} P$ и $y \in \ker P$. Тогда $\langle x,y\rangle = \langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle = \langle x,0\rangle = 0$.

($\Longrightarrow$) Пусть $x,y \in H$ и $x = a_x + b_x$, $y = a_y + b_y$, где $a_x, a_y \in \ker P$ и $b_x, b_y \in \operatorname{im} P$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Px,y\rangle = \langle P(a_x+b_x), a_y+b_y\rangle = \langle b_x, a_y+b_y\rangle = \langle b_x, b_y\rangle = \\ = \langle b_x, P(a_y+b_y)\rangle = \langle a_x+b_x, Py\rangle = \langle x, Py\rangle\,.\end{aligned}$$

□

Пример. Существуют линейные операторы, для которых образ и ядро совпадают. Например, пусть $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — проектор, заданный формулой $T(x,y) = (0,y)$, а $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот вокруг нуля на $\pi/2$ по часовой стрелке. Тогда $\ker S \circ T = \operatorname{im} S \circ T = \big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\big\}$.

2.9 Изоморфизм всех сепарабельных гильбертовых пространств

Определение. Гильбертовы пространства H_1 и H_2 называются *изоморфными* (обозначение $H_1 \cong H_2$), если существует линейная биекция $T\colon H_1 \to H_2$ со свойством $\langle x, y\rangle_{H_1} = \langle Tx, Ty\rangle_{H_2}$.

Замечание. Из последнего равенства следует, что отображение T непрерывно в обе стороны и, более того, является изометрией, так как $\langle x, x\rangle_{H_1} = \langle Tx, Tx\rangle_{H_2}$, откуда $\|x\|_{H_1} = \|Tx\|_{H_2}$ для каждого $x \in H_1$.

Теорема 2.22. *Если H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, то $H \cong \ell_2$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счётное всюду плотное в H множество. Докажем, что в этом множестве существует такое линейно независимое подмножество $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\overline{\mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}} = H$. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство всех линейно независимых подмножеств множества $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, упорядоченное по включению:

$$A_1 \preccurlyeq A_2 \Longleftrightarrow A_1 \subset A_2.$$

Любое линейно упорядоченное подмножество $\{A_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{A}$ имеет мажоранту: в ее качестве можно взять $\bigcup_{s\in S} A_s$. Теперь можно применить лемму Цорна: согласно этой лемме в $\mathcal{A}$ существует максимальный элемент $A_{s_0} = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что $\overline{\mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}} = H$. Заметим, что $x_n \in \mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ для каждого n (если бы это было не так, то множество $\{x_n\} \cup \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ было бы линейно независимым и получили бы противоречие с максимальностью множества $A_{s_0} = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$). Итак, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$$H = \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} \subset \overline{\mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}} \subset H.$$

Теперь проведем процесс ортогонализации системы $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (теорема 2.9): согласно этой теореме в H существует такая ортонормированная система $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\mathrm{sp}\{z_1, \ldots, z_j\} = \mathrm{sp}\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_j}\}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots$, откуда получаем равенство $\mathrm{sp}\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Из равенства $\overline{\mathrm{sp}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} = H$ и ортонормированности получаем, что система $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, а по теореме 2.12 она является замкнутой. Тогда по теореме 2.11 любой $x \in H$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по системе $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n\rangle\, z_n$. Определим отображение $T\colon H \to \ell_2$ формулой $Tx = (\langle x, z_1\rangle, \langle x, z_2\rangle, \ldots)$ и докажем, что T требуемое отображение.

- Корректность. Надо убедиться, что $Tx \in \ell_2$. Это следует из замкнутости системы ($\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, z_n\rangle|^2 = \|x\|^2 < +\infty$);

- Линейность. Очевидно.
- Инъекция. Очевидно.
- Сюрьекция. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ сходится в H. Для этого достаточно доказать, что последовательность его частичных сумм фундаментальна:

$$\|S_{k+p} - S_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n z_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+p} \|a_n z_n\|^2 = \\ = \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Итак, $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \in H$. Осталось убедиться в том, что $Th = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно,

$$Th = \{\langle h, z_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} = \\ = \left\{ \left\langle \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k z_k, z_n \right\rangle \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \langle a_k z_k, z_n \rangle \right\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty};$$

- Сохранение скалярного произведения:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n, \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, z_k \rangle z_k \right\rangle = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \langle x, z_n \rangle z_n, \langle y, z_n \rangle z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle \cdot \overline{\langle y, z_n \rangle} = \\ = \left\langle T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n \right), T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, z_k \rangle z_k \right) \right\rangle = \langle Tx, Ty \rangle .$$

$\square$

Следствие. $\mathcal{L}_2(a;b) \cong \ell_2$.

Доказательство. Система Хаара $\{\chi_n^k\}_{n=0}^{\infty}{}_{k=0}^{2^n-1}$. Коэффициенты Фурье $\left\langle x, \chi_n^k \right\rangle$ будут образовывать последовательность, принадлежащую пространству ℓ_2. $\square$

Глава 3

Некоторые свойства пространства $C(K)$

3.1 Общий вид функционала на пространстве $C[a;b]$

3.1.1 Функции ограниченной вариации

Определение. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Конечное множество $T = \{t_k\}_{k=0}^{n} \subset [a;b]$ называется *разбиением* отрезка $[a;b]$, если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Пусть T — разбиение $[a;b]$ и $x\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Число $\nu(T) = \sum_{k=0}^{n-1}|x(t_{k+1}) - x(t_k)|$ называется *вариационной суммой* функции x.

Величина

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(x) = \sup\left\{\nu(T) : T \text{ — разбиение } [a;b]\right\},$$

называется *полной вариацией* функции x на отрезке $[a;b]$. Если $\mathrm{V}_a^b(x) < +\infty$ то функция x называется *функцией ограниченной вариации* (*Ф.О.В.*) на отрезке $[a;b]$.

Свойства:

- если функция x монотонна на $[a;b]$, то $\mathrm{V}_a^b(x) = |x(b) - x(a)|$;
- $\mathrm{V}_a^b(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathrm{const}$;
- $\mathrm{V}_a^b(\alpha x) = |\alpha|\,\mathrm{V}_a^b(x)$;
- $\mathrm{V}_a^b(x+y) \leqslant \mathrm{V}_a^b(x) + \mathrm{V}_a^b(y)$;

  Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1}|(x+y)(t_{k+1}) - (x+y)(t_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|x(t_{k+1}) - x(t_k)| + \sum_{k=0}^{n-1}|y(t_{k+1}) - y(t_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(x) + \mathop{\mathrm{V}}_a^b(y).$$

Так как это неравенство верно для любого разбиения отрезка $[a;b]$, то и $\mathrm{V}_a^b(x+y) \leqslant \mathrm{V}_a^b(x) + \mathrm{V}_a^b(y)$.

- если x — Ф.О.В., то $\mathrm{V}_a^c(x) + \mathrm{V}_c^b(x) = \mathrm{V}_a^b(x)$ для любого $c \in (a;b)$.

  Доказательство. Пусть $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a;b]$ и $c \in [t_k, t_{k+1}]$. В силу неравенства $|x(t_{k+1}) - x(t_k)| \leqslant |x(t_{k+1}) - x(c)| + |x(c) - x(t_k)|$ получаем

  $$\nu(T) \leqslant \nu(T \cup \{c\}) = \nu(\{t_i\}_{i=0}^k \cup \{c\}) + \nu(\{c\} \cup \{t_i\}_{i=k+1}^n) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c(x) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(x),$$

  откуда $\mathrm{V}_a^b(x) \leqslant \mathrm{V}_a^c(x) + \mathrm{V}_c^b(x)$. Обратно, пусть $\nu(\{t_i\}_{i=0}^n)$ и $\nu(\{t'_j\}_{j=0}^m)$ — вариационные суммы функции x на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Тогда $\nu(\{t_i\}_{i=0}^n \cup \{t'_j\}_{j=0}^m)$ — вариационная сумма для x на всем отрезке $[a;b]$. Отсюда получаем неравенство

  $$\nu(\{t_i\}_{i=0}^n) + \nu(\{t'_j\}_{j=0}^m) = \nu(\{t_i\}_{i=0}^n \cup \{t'_j\}_{j=0}^m) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(x),$$

  откуда $\mathrm{V}_a^c(x) + \mathrm{V}_c^b(x) \leqslant \mathrm{V}_a^b(x)$.

- если x – Ф.О.В. на $[a;b]$, то x ограничена на $[a;b]$.

Символом $V[a;b]$ будем обозначать множество всех вещественнозначных функций ограниченной вариации, заданных на отрезке $[a;b]$.

Из свойств вариации следует, что V_a^b — норма на линейном пространстве $E = \{x \in V[a;b] : x(a) = 0\}$.

Пример. Непрерывная Ф.О.В.: $x(t) = \sin t$, $t \in [0;3\pi]$. $\mathrm{V}_0^{3\pi}(x) = 6$.

Пример. Разрывная Ф.О.В.: $x(t) = \operatorname{sgn} t$, $t \in [-1;1]$. $\mathrm{V}_{-1}^1(x) = 2$.

Пример. Непрерывная функция, не являющаяся Ф.О.В.: $x(t) = t \cdot \cos\dfrac{\pi}{2t}$, $t \in (0;1]$ и $x(0) = 0$. Если разбиение T — это точки

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1,$$

то соответствующая этому разбиению вариационная сумма будет равна

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \text{ откуда } \mathop{\mathrm{V}}_0^1(x) = +\infty.$$

Пример. Разрывная функция, не являющаяся Ф.О.В.: функция Дирихле на отрезке $[0;1]$. Если в качестве точек $t_2, t_4, \ldots, t_{2n-2}$ разбиения T брать рациональные числа, а в качестве $t_1, t_3, \ldots, t_{2n-1}$ — иррациональные, то $\nu(T) = 2n$, откуда $\mathrm{V}_0^1(x) = +\infty$.

3.1.2 Интеграл Римана–Стилтьеса

Пусть x и g — вещественнозначные функции, заданные на отрезке $[a; b]$ и $T = \{t_k\}_{k=0}^{n}$ — разбиение $[a; b]$. Выберем точки $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ и составим сумму $\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k))$.

Число $\lambda(T) = \max\{|t_{k+1} - t_k| : k = 0, \ldots, n-1\}$ будем называть *мелкостью* разбиения T.

Если существует предел

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T),$$

не зависящий от выбора точек ξ_k, то он называется *интегралом Римана–Стилтьеса от функции x по функции g на отрезке* $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b x(t)dg(t).$$

Замечание. Если $g(t) = t$, то интеграл Римана–Стилтьеса совпадает с обычным интегралом Римана от функции x по отрезку $[a; b]$.

Свойства интеграла Римана–Стилтьеса:

(1) если существуют $\alpha \int_a^b x(t)dg(t)$ и $\beta \int_a^b y(t)dg(t)$, то

$$\int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))dg(t) = \alpha \int_a^b x(t)dg(t) + \beta \int_a^b y(t)dg(t);$$

(2) если существуют $\alpha \int_a^b x(t)dg(t)$ и $\beta \int_a^b x(t)dh(t)$, то

$$\int_a^b x(t)d(\alpha g(t) + \beta h(t)) = \alpha \int_a^b x(t)dg(t) + \beta \int_a^b x(t)dh(t);$$

(3) если существует $\int_a^b x(t)dg(t)$, то

$$\int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^c x(t)dg(t) + \int_c^b x(t)dg(t)$$

для любой точки $c \in [a; b]$. Обратное неверно, как показывает следующий пример: пусть $[a; b] = [-1; 1]$ и $x = \chi_{(0;1]}$, $g = \chi_{[0;1]}$. Тогда $\int_{-1}^0 x(t)dg(t) = \int_0^1 x(t)dg(t) = 0$. Теперь рассмотрим число $\delta > 0$ и такое разбиение T отрезка $[-1; 1]$, что $-1 < t_k < 0 < t_{k+1} < 1$ и $\lambda(T) < \delta$. Тогда

$$\int_{-1}^1 x(t)dg(t) = x(\xi_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_k < 0; \\ 1, & \text{если } \xi_k > 0. \end{cases}$$

(4) интегралы $\int_a^b x(t)dg(t)$ и $\int_a^b g(t)dx(t)$ либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют, причём, если они оба существуют, то

$$\int_a^b x(t)dg(t) + \int_a^b g(t)dx(t) = x(t)g(t)|_a^b$$

(формула интегрирования по частям).

Доказательство. Рассмотрим интегральную сумму для $\int_a^b x(t)dg(t)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)g(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)g(t_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x(\xi_{k-1})g(t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)g(t_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k)(x(\xi_{k-1}) - x(\xi_k)) + x(\xi_{n-1})g(t_n) - x(\xi_0)g(t_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k)(x(\xi_{k-1}) - x(\xi_k)) +$$
$$+ g(t_0)(x(t_0) - x(\xi_0)) + g(t_n)(x(\xi_{n-1})) - x(t_n)) +$$
$$+ \underbrace{x(t_n)g(t_n) - x(t_0)g(t_0)}_{=x(b)g(b)-x(a)g(a)=x(t)g(t)|_a^b}$$

Теорема 3.1 (Теорема Жордана)**.** *Если g — Ф.О.В. на $[a;b]$, то $g = u - v$, где u и v — неубывающие на $[a;b]$ функции.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(t) = \mathrm{V}_a^t(g)$ для каждого $t \in [a;b]$. Функция u — неубывающая на $[a;b]$, так как если $t_1 > t_2$, то

$$u(t_1) = \mathop{\mathrm{V}}_a^{t_1}(g) = \mathop{\mathrm{V}}_a^{t_2}(g) + \mathop{\mathrm{V}}_{t_2}^{t_1}(g) \geqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^{t_2}(g) = u(t_2).$$

Осталось показать, что функция $v = u - g$ неубывающая. Пусть $t_1 > t_2$.

$$v(t_1) - v(t_2) = u(t_1) - u(t_2) - g(t_1) + g(t_2) = \mathop{\mathrm{V}}_{t_2}^{t_1}(g) - (g(t_1) - g(t_2)) \geqslant 0.$$

□

Теорема 3.2. *Если x непрерывна на $[a;b]$ и g — Ф.О.В. на $[a;b]$, то $\int_a^b x(t)dg(t)$ существует.*

Доказательство. Сначала докажем эту теорему для случая, когда функция g является неубывающей. Пусть T — какое-нибудь разбиение отрезка $[a;b]$. Рассмотрим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:

$$s(T)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(g(t_{k+1})-g(t_k)),\ \text{где } m_k=\min_{t\in[t_k,t_{k+1}]} x(t);$$
$$S(T)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(g(t_{k+1})-g(t_k)),\ \text{где } M_k=\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} x(t).$$

Очевидно, что $s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T)$. Убедимся, что какие бы два разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a;b]$ мы не взяли, всегда будет $s(T_1)\leqslant S(T_2)$. Для этого рассмотрим разбиение $T_3=T_1\cup T_2$. Тогда $s(T_1)\leqslant s(T_3)\leqslant S(T_3)\leqslant S(T_2)$. Таким образом, существует $\sup\{s(T)\mid T \text{ — разбиение } [a;b]\}\overset{\text{об.}}{=}J$.

Зафиксируем какое-либо разбиение $T=\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a;b]$. Из неравенств $s(T)\leqslant J\leqslant s(T)$ и $s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T)$ следует, что

$$|J-\sigma(T)|\leqslant S(T)-s(T)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(g(t_{k+1})-g(t_k)).$$

Пусть $\varepsilon>0$. В силу равномерной непрерывности функции x найдётся такое $\delta>0$, что $|x(t')-x(t'')|<\varepsilon/\operatorname{V}_a^b(g)$, если $|t'-t''|<\delta$. Значит, если T — такое разбиение $[a;b]$, что $\lambda(T)<\delta$, то

$$|J-\sigma(T)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(g(t_{k+1})-g(t_k))<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\operatorname{V}_a^b(g)}\cdot(g(t_{k+1})-g(t_k))=\varepsilon.$$

Итак, теорема доказана для случая, когда функция g неубывающая.

Докажем теперь теорему в общем случае. По теореме Жордана функцию g можно представить в виде разности $u-v$ неубывающих функций. Тогда интегралы $\int_a^b x(t)du(t)$ и $\int_a^b x(t)dv(t)$ по доказанному ранее существуют, а по второму свойству интеграла Римана–Стилтьеса существует и интеграл $\int_a^b x(t)d(u(t)-v(t))=\int_a^b x(t)dg(t)$. □

Следствие 1. *Если x — Ф.О.В. на $[a;b]$, а g непрерывна на $[a;b]$, то интеграл $\int_a^b x(t)dg(t)$ существует.*

Доказательство. Следует из свойства (4) интеграла Римана–Стилтьеса. □

Следствие 2. *Если $x\in C[a;b]$, а g — Ф.О.В. на $[a;b]$, то*

$$\left|\int_a^b x(t)dg(t)\right|\leqslant\|x\|\cdot\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{V}}}(g).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}|\sigma(T)| = |\sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k))| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |x(\xi_k)| \cdot |(g(t_{k+1}) - g(t_k))| \leqslant \\ \leqslant \|x\| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |(g(t_{k+1}) - g(t_k))| \leqslant \|x\| \cdot \bigvee_a^b(g).\end{aligned}$$

□

Пример. Пусть $x \in C[a;b]$ и $g(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t \in [a,c); \\ \beta, & \text{если } t \in (c,b]; \\ \gamma, & \text{если } t = c. \end{cases}$

Тогда $\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)) = x(\xi_k) \cdot (\beta - \alpha) \to x(c) \cdot (\beta - \alpha)$. Таким образом, $\int_a^b x(t)dg(t) = x(c) \cdot (g(c+0) - g(c-0))$.

Пример. Пусть $x \in C[a;b]$ и $g(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t \in [a;b); \\ \beta, & \text{если } t = b. \end{cases}$

Тогда $\sigma(T) = x(\xi_{n-1})(g(b) - g(t_{n-1})) \to x(b) \cdot (\beta - \alpha)$. Таким образом, $\int_a^b x(t)dg(t) = x(b) \cdot (g(b) - g(b-0))$.

Теорема 3.3. *Если x непрерывна на $[a;b]$, g — Ф.О.В. на $[a;b]$ и всюду на интервале $(a;b)$ существует g', то $(RS)\int_a^b x(t)dg(t) = (R)\int_a^b x(t)g'(t)dt$ если последний интеграл существует.*

Доказательство. Пусть T — разбиение $[a;b]$. По теореме Лагранжа о промежуточном значении найдутся такие точки $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, что $g(t_{k+1}) - g(t_k) = g'(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$. Тогда

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)g'(\xi_k)(t_{k+1} - t_k).$$

□

3.1.3 Общий вид функционала на пространстве $C[a;b]$

Теорема 3.4 (Общий вид функционала на пространстве $C[a;b]$)**.** *Формула $f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$, где g — Ф.О.В. на $[a;b]$, определяет линейный ограниченный функционал на пространстве $C[a;b]$, причём $\|f\| \leqslant V_a^b(g)$. Для каждого функционала $f \in C^*[a;b]$ найдётся такая Ф.О.В. g, что $g(a) = 0$ и $f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$.*

Доказательство. Линейность следует из первого свойства интеграла Римана–Стилтьеса:

$$f(\alpha x+\beta y)=\int_a^b(\alpha x(t)+\beta y(t))dg(t)=$$
$$=\alpha\int_a^b x(t)dg(t)+\beta\int_a^b y(t)dg(t)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Ограниченность вытекает из второго следствия из теоремы 3.2:

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)dg(t)\right|\leqslant\|x\|\cdot\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g),\ \text{откуда}\ \|f\|\leqslant\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g).$$

Пусть теперь f — линейный ограниченный функционал на пространстве $C[a;b]$. Рассмотрим банахово пространство $M[a;b]$ всех ограниченных на $[a;b]$ функций с нормой $\|x\|=\sup_{t\in[a;b]}|x(t)|$. Очевидно, что $C[a;b]$ — подпространство в $M[a;b]$. Тогда по третьей теореме Хана–Банаха функционал f продолжается на все пространство $M[a;b]$ до линейного непрерывного функционала $\tilde{f}$, причём $\|f\|=\|\tilde{f}\|$.

Далее для каждого $t\in(a;b)$ рассмотрим функции $u_t\in M[a;b]$, определенные формулой $u_t(s)=\begin{cases}1, & \text{если } s\in[a,t);\\ 0, & \text{если } s\in[t,b].\end{cases}$ и функции $u_a\equiv 0$ и $u_b\equiv 1$.

Определим функцию g на $[a;b]$ следующим образом: $g(t)=\tilde{f}(u_t)$ для каждого $t\in[a;b]$ и докажем, что она имеет ограниченную вариацию. Для этого оценим вариационную сумму:

$$\nu(T)=\sum_{k=0}^{n-1}|g(t_{k+1})-g(t_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\left(g(t_{k+1})-g(t_k)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\left(\tilde{f}(u_{t_{k+1}})-\tilde{f}(u_{t_k})\right)=\tilde{f}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\left(u_{t_{k+1}}-u_{t_k}\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\|\tilde{f}\|\cdot\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\left(u_{t_{k+1}}-u_{t_k}\right)\right\|\leqslant\|\tilde{f}\|.$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $x\in C[a;b]$. Пусть $T=\{t_k\}_{k=0}^n$ — «равномерное» разбиение $[a;b]$, то есть такое, что $t_{k+1}-t_k=(b-a)/n$ для всех k. Теперь для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим «ступенчатую» функцию $y_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)\left(u_{t_{k+1}}-u_{t_k}\right)$ и докажем, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к x на отрезке $[a;b]$. Действительно, пусть $\varepsilon>0$. Из равномерной непрерывности функции x следует, что найдётся такое $\delta>0$, что $|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$, если $|t'-t''|<\delta$. Теперь найдём такое n_0, что $(b-a)/n_0<\delta$. Тогда при всех $n\geqslant n_0$ на каждом из отрезков $[t_k,t_{k+1}]$ будет выполняться неравенство $|y_n(t) - x(t)| = |x(t_k) - x(t)| < \varepsilon$. Следовательно, $y_n \rightrightarrows x$ на всем отрезке $[a; b]$. Тогда, в силу непрерывности функционала $\tilde{f}$ будем иметь $\tilde{f}(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{f}(x)$. С другой стороны,

$$\tilde{f}(y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\left(\tilde{f}(u_{t_{k+1}}) - \tilde{f}(u_{t_k})\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\left(g(t_{k+1}) - g(t_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b x(t)dg(t),$$

откуда для любой функции $x \in C[a; b]$ получаем равенство $\tilde{f}(x) = f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$. □

3.2 Теорема Стоуна–Вейерштрасса

Теорема 3.5 (Теорема Дини)**.** *Пусть K — компакт и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность непрерывных вещественнозначных функций на K, что $x_n(t) \leqslant x_{n+1}(t)$ для всех $t \in K$ и $n = 1, 2, \ldots$. Если существует такая непрерывная функция $x\colon K \to \mathbb{R}$, что $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ для всех $t \in K$ (то есть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к x поточечно), то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к x равномерно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Множества $V_n = \{t \in K : x(t) - x_n(t) < \varepsilon\}$ открыты и образуют возрастающую последовательность $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$. Ясно, что семейство $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ является открытым покрытием компакта K. Пусть $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n_0}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда

$$K = \bigcup_{j=1}^{n_0} V_j = V_{n_0} = V_{n_0+1} = \ldots.$$

Последнее равенство означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер n_0, что $x(t) - x_n(t) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$ и каждого $t \in K$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к x равномерно. □

Лемма 3.6. *Существует последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ многочленов, равномерно сходящаяся к функции $\sqrt{t}$ на отрезке* $[0; 1]$.

Доказательство. Определим последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ рекуррентными формулами

$$p_1 \equiv 0 \ \text{ и } \ p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right) \ \text{ при } n = 1, 2, \ldots. \qquad (*)$$

Докажем по индукции, что

$$p_n(t) \leqslant \sqrt{t} \quad \text{для всех} \quad t \in [0;1] \text{ и } n = 1, 2, \dots. \tag{$**$}$$

Это неравенство верно при $n = 1$. Предположим, что $p_n(t) \leqslant \sqrt{t}$. Так как

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) =& \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right) = \\ &= \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + p_n(t)\right)\right),\end{aligned}$$

то из индуктивного предположения и неравенства $t \leqslant 1$ следует, что

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geqslant \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}2\sqrt{t}\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство $(**)$ доказано.

Из $(*)$ и $(**)$ вытекает, что $p_n(t) \leqslant p_{n+1}(t)$ для всех $t \in [0;1]$ и $n = 1, 2, \dots$. Вместе с $(**)$ это показывает, что при каждом $t \in [0;1]$ существует предел $x(t)$ последовательности $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Переход к пределу в $(*)$ дает нам равенство $x(t) = \sqrt{t}$ для всех $t \in [0;1]$, а из теоремы Дини следует, что последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на отрезке $[0;1]$ сходится к x. □

Определение. Пусть K — топологическое пространство и $C(K)$ — множество всех непрерывных вещественнозначных функций на K. Семейство $\mathcal{P} \subset C(K)$ называется *кольцом функций*, если для всех $x, y \in \mathcal{P}$ функции $x + y$, $x - y$ и $x \cdot y$ тоже принадлежат $\mathcal{P}$.

Замечание. Само множество $C(K)$ является кольцом, содержащим все постоянные функции и замкнутым относительно равномерной сходимости.

Лемма 3.7. *Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое кольцо непрерывных ограниченных вещественнозначных функций на топологическом пространстве K. Если $\mathcal{P}$ содержит все постоянные функции и замкнуто относительно равномерной сходимости, то для всех $x, y \in \mathcal{P}$ функции $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ тоже принадлежат $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Так как

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{и} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

то достаточно показать, что если $x \in \mathcal{P}$, то и $|x| \in \mathcal{P}$. Пусть $x \in \mathcal{P}$ и $c > 0$ — такое число $|x(t)| \leqslant c$ для всех $t \in K$. Достаточно доказать, что $\frac{1}{c}|x| \in \mathcal{P}$; поэтому можно считать, что $|x(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in K$. По предыдущей лемме функция $|x| = \sqrt{x^2}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, а именно последовательности $x_n(t) = p_n\left(x^2(t)\right)$. □

Теорема (теорема Вейерштрасса). *Если $x\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то найдётся последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленов, равномерно сходящаяся к x.*

Определение. Говорят, что кольцо $\mathcal{P} \subset C(K)$ *разделяет точки* пространства K, если для любых различных t, $s \in K$ найдётся такая функция $x \in \mathcal{P}$, что $x(t) \neq x(s)$.

Теорема 3.8 (теорема Стоуна–Вейерштрасса). *Если $\mathcal{P} \subset C(K)$ — замкнутое кольцо, содержащее все постоянные функции и разделяющее точки компакта K, то $\mathcal{P} = C(K)$.*

Другая формулировка: любое кольцо $\mathcal{P}$ непрерывных вещественнозначных функций на компакте K, содержащее все постоянные функции и разделяющее точки компакта K, всюду плотно в $C(K)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой функции $x \in C(K)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $x_\varepsilon \in \mathcal{P}$, что $|x_\varepsilon(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in K$.

Для каждой пары различных точек $a, b \in K$ существует функция $h \in \mathcal{P}$ такая, что $h(a) \neq h(b)$. Функция g, определенная формулой

$$g(t) = \frac{h(t) - h(a)}{h(b) - h(a)}$$

также принадлежит $\mathcal{P}$ и обладает тем свойством, что $g(a) = 0$ и $g(b) = 1$. Наконец, определим функцию $x_{a,b} \in \mathcal{P}$ формулой:

$$x_{a,b}(t) = (x(b) - x(a))\, g(t) + x(a).$$

Для нее выполняются равенства $x_{a,b}(a) = x(a)$ и $x_{a,b}(b) = x(b)$.

Рассмотрим множества

$$U_{a,b} = \{t \in K : x_{a,b}(t) < x(t) + \varepsilon\} \quad \text{и} \quad V_{a,b} = \{t \in K : x_{a,b}(t) > x(t) - \varepsilon\}\,.$$

Каждое из них является окрестностью точек a и b. Зафиксируем точку b и рассмотрим открытое покрытие $\{U_{a,b}\}_{a \in K}$ компакта K. Пусть $\{U_{a_1,b}, \dots, U_{a_k,b}\}$ — его конечное подпокрытие. По лемме 3.7 функция $x_b = \min\{x_{a_1,b}, \dots, x_{a_k,b}\}$ принадлежит $\mathcal{P}$. Очевидно, что $x_b(t) < x(t) + \varepsilon$ для всех $t \in K$ и что $x_b(t) > x(t) - \varepsilon$ для всех $t \in V_b = \cap_{j=1}^{k} V_{a_j,b}$.

Множество V_b является окрестностью точки b. Возьмем конечное подпокрытие $\{V_{b_1}, \dots, V_{b_m}\}$ открытого покрытия $\{V_b\}_{b \in K}$ компакта K. В силу леммы 3.7 функция $x_\varepsilon = \max\{x_{b_1}, \dots, x_{b_m}\}$ принадлежит $\mathcal{P}$. Очевидно, что $|x_\varepsilon(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in K$. □

Пример. $C[a;b] \supset P[a;b]$. Так как $P[a;b]$ содержит все константы и разделяет точки (например, функция $p(t) = t$), то $\overline{P[a;b]} = C[a;b]$.

Пример. $\mathcal{P} = \{x \in C[a;b] : x(a) = 0\}$ — замкнутое кольцо, разделяющее точки (например, функция $x(t) = t - a$). Из констант содержит только тождественный ноль. Ясно, что $\mathcal{P} \neq C[a;b]$.

Пример. $\mathcal{P} = \{x \in C[a;b] : x(a) = x(b)\}$ — замкнутое кольцо, содержащее все константы, но не разделяющее точки. Ясно, что $\mathcal{P} \neq C[a;b]$.

Пример. Пусть $K = [a;b] \times [a;b]$. Рассмотрим в $C(K)$ кольцо $\mathcal{P}$ всех многочленов вида $p(t,s) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} t^i s^j$. Это кольцо содержит все константы и различает точки. Значит, что $\bar{\mathcal{P}} = C(K)$.

Пример. $C[0;2\pi]$.

$$\mathcal{P} = \{a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \mid n \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{P}$ — это кольцо, так как

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Это кольцо различает все точки, кроме точек 0 и 2π. Ясно, что $C(S^1) \cong \{x \in C[0;2\pi] : x(0) = x(2\pi)\}$. В пространстве $C(S^1)$ кольцо $\mathcal{P}$ будет всюду плотно.

Пример. Условие компактности K в теореме Стоуна–Вейерштрасса существенно. Например, замыкание кольца в $C(\mathbb{R})$, состоящего из всех функций, постоянных вне некоторого интервала, удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна–Вейерштрасса, но не совпадает с $C(\mathbb{R})$(например, не содержит функцию $\sin t$).

Теорема (Хьюитт). *Если тихоновское пространство K удовлетворяет теореме Стоуна–Вейерштрасса, то K — компакт.*

Пусть теперь $C(K)$ — множество всех комплекснозначных непрерывных функций, заданных на K.

Теорема 3.9 (теорема Стоуна–Вейерштрасса). *Замкнутое кольцо в $C(K)$, которое разделяет точки пространства K, содержит все постоянные функции и замкнуто относительно перехода к комплексно-сопряжённой функции, совпадает с $C(K)$.*

Пример. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Рассмотрим в $C(D)$ кольцо

$$\mathcal{P} = \{f \in C(D) : f \text{ аналитична на } \operatorname{Int} D\}.$$

Это кольцо содержит все константы, разделяет точки (например, функция $f(z) = z$), но не содержит функцию $\bar{f}(z) = \bar{z}$. Значит, $\bar{\mathcal{P}} \neq C(D)$.

Глава 4

Спектральная теория линейных операторов

4.1 Основные определения

В этой главе все пространства предполагаются банаховыми над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Пусть E — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $T\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным* числом оператора T, если для оператора $\lambda I - T$ существует ограниченный обратный оператор. В противном случае λ называется *сингулярным* числом оператора T.

Множество всех регулярных чисел называется *резольвентой* оператора T и обозначается $\rho(T)$; множество всех сингулярных чисел называется *спектром* оператора T и обозначается $\sigma(T)$. Таким образом, $\rho(T) \sqcup \sigma(T) = \mathbb{C}$.

Теорема 4.1. *Если $T\colon E \to E$ — линейный ограниченный оператор и $\|T\| < 1$, то существует ограниченный оператор $(I-T)^{-1}$, причём $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

Доказательство. Докажем, что частичные суммы S_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ образуют фундаментальную последовательность:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} T^k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|T\|^k \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь, в силу полноты пространства E получаем, что оператор $U = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ существует и непрерывен. Осталось показать, что $U \circ (I-T) =$

$(I-T)\circ U = I$.

$$U\circ(I-T)x = \lim_{n\to\infty} S_n(x-Tx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} T^k(x-Tx) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x - Tx + Tx - T^2x + \ldots + T^{n-1}x - T^nx + T^nx - T^{n+1}x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x - T^{n+1}x) = x,$$

так как $0 \leqslant \|T^nx\| \leqslant \|T^n\|\cdot\|x\| \leqslant \|T\|^n\cdot\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Равенство $(I-T)\circ U = I$ доказывается аналогично. □

Замечание. Равенство $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ для оператора T с $\|T\| < 1$ аналогично равенству $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\ldots$, верному для любого комплексного числа z такого, что $|z| < 1$.

Следствие 1. *Если $|\lambda| > \|T\|$, то $\lambda \in \rho(T)$ и оператор $\lambda I - T$ имеет непрерывный обратный, равный $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\frac{1}{\lambda}T$. Для него $\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\| < 1$ и из теоремы теоремы 4.1 следует равенство $\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n}$. Теперь из равенств

$$I = \left(I - \frac{T}{\lambda}\right)\circ\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = (\lambda I - T)\circ\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}$$

и

$$I = \left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\circ\left(I - \frac{T}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\circ(\lambda I - T)$$

следует, что

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}. \quad \square$$

Следствие 2. *$\sigma(T)$ — ограниченное множество, лежащее в шаре $\overline{U}(0,\|T\|)$.*

Следствие 3. *Если $|\lambda| \to \infty$, то $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \to 0$.*

Доказательство.

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} =$$
$$= \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0.$$

□

Теорема 4.2. $\rho(T)$ — *открытое множество на комплексной плоскости.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$. Достаточно доказать, что для произвольного $\lambda \in U(\lambda_0, \varepsilon)$ существует непрерывный оператор $(\lambda I - T)^{-1}$. Представим оператор $\lambda I - T$ в виде

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 I - \lambda I) = (\lambda_0 I - T) \circ \big(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}\big).$$

Так как $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$, то по теореме 4.1 оператор

$$I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}$$

имеет непрерывный обратный. Значит и композиция

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) \circ \big(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}\big)$$

тоже имеет непрерывный обратный. □

Следствие. $\sigma(T)$ — *компактное множество на комплексной плоскости.*

Пример. Если $T = 0$, то $\sigma(T) = \{0\}$. Если $T = I$, то $\sigma(T) = \{1\}$.

4.2 Классификация точек спектра

Из определения спектра следует, что если $T\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор и $\lambda \in \sigma(T)$, то оператор $\lambda I - T$ не биективен (если бы он был биективен, то по теореме Банаха об обратном операторе оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ был бы непрерывным и тогда бы число λ принадлежало резольвенте $\rho(T)$).

Итак, пусть оператор $\lambda I - T$ не является биекцией. Если $\lambda I - T$ — не инъекция, то число λ называется *собственным числом* оператора T. Множество всех собственных чисел оператора T называется *точечным спектром* и обозначается $\sigma_p(T)$. Пусть теперь оператор $\lambda I - T$ инъективен, но не сюръективен. В этом случае множество тех λ, для которых $\overline{(\lambda I - T)(E)} = E$, называется *непрерывным спектром* и обозначается $\sigma_c(T)$, а оставшее множество тех λ, для которых $\overline{(\lambda I - T)(E)} \neq E$, называется *остаточным спектром* и обозначается $\sigma_r(T)$. Таким образом, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$.

Разберем более подробно тот случай, когда оператор $\lambda I - T$ не инъективен. Пусть $x_1 \neq x_2$ (то есть $x_1 - x_2 \neq 0$), но $(\lambda I - T)x_1 = (\lambda I - T)x_2$ или, что равносильно, $(\lambda I - T)(x_1 - x_2) = 0$. Другими словами, оператор $\lambda I - T$ не инъективен тогда и только тогда, когда найдётся такой $0 \neq x \in E$, что $(\lambda I - T)x = 0$. Последнее означает, что уравнение $\lambda x = Tx$ имеет ненулевое решение. Любой элемент $x \in E$ такой, что $\lambda x = Tx$, называется *собственным вектором оператора T, соответствующим собственному числу λ*. Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному числу λ, обозначается E_λ и называется *собственным подпространством* оператора T.

4.3 Непустота спектра

Лемма 4.3. *Если* $S_n \to S$ *и* $T_n \to T$, *то* $S_n \circ T_n \to S \circ T$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\|S_n \circ T_n - S \circ T\| = \|S_n \circ (T_n - T) + (S_n - S) \circ T\| \leqslant \\ \leqslant \|S_n \circ (T_n - T)\| + \|(S_n - S) \circ T\| \leqslant \\ \leqslant \|S_n\| \cdot \|T_n - T\| + \|S_n - S\| \cdot \|T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Рассмотрим отображение $R\colon \rho(T) \to L(E, E)$, заданное формулой $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$. Оно называется *резольвентная функция.*

Лемма 4.4. *1.* $R(\lambda) \circ R(\mu) = R(\mu) \circ R(\lambda)$;

2. $R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) \cdot R(\lambda) \circ R(\mu)$.

Доказательство. 1)

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} \circ (\mu I - T)^{-1} = ((\mu I - T) \circ (\lambda I - T))^{-1} = \\ = \left(\mu\lambda I - \lambda T - \mu T + T^2\right)^{-1} = \\ = ((\lambda I - T) \circ (\mu I - T))^{-1} = (\mu I - T)^{-1} \circ (\lambda I - T)^{-1}.\end{aligned}$$

2) Так как

$$(\mu I - T) \circ R(\lambda) \circ R(\mu) = R(\lambda)$$

и

$$(\lambda I - T) \circ R(\lambda) \circ R(\mu) = R(\mu),$$

то

$$\begin{aligned}R(\lambda) - R(\mu) = \\ = (\mu I - T) \circ R(\lambda) \circ R(\mu) - (\lambda I - T) \circ R(\lambda) \circ R(\mu) = \\ = ((\mu I - T) - (\lambda I - T)) \circ R(\lambda) \circ R(\mu) = (\mu - \lambda) \cdot R(\lambda) \circ R(\mu).\end{aligned}$$

□

Лемма 4.5. *Если* $S_n \to S$ *и существуют* S_n^{-1} *и* S^{-1}, *то* $S_n^{-1} \to S^{-1}$.

Доказательство. 1) Пусть сначала $S_n \to I$. Тогда при достаточно больших n будет выполнено неравенство $\|I - S_n\| < 1$. Следовательно,

$$S_n^{-1} = (I - (I - S_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - S_n)^k.$$

Тогда

$$\|S_n^{-1} - I\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} (I - S_n)^k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|(I - S_n)^k\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|(I - S_n)\|^k = \frac{\|I - S_n\|}{1 - \|I - S_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2) Пусть $S_n \to S$. Тогда по лемме 4.3 $S_n \circ S^{-1} \to I$. Теперь по доказанному $(S_n \circ S^{-1})^{-1} \to I$. Другими словами, $S \circ S_n^{-1} \to I$, откуда $S_n^{-1} \to S^{-1}$. □

Лемма 4.6. *Если $f \in \big(L(E, E)\big)^*$, то функция $f \circ R \colon \rho(T) \to \mathbb{C}$ голоморфна на $\rho(T)$.*

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f \circ R(\lambda + h) - f \circ R(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{R(\lambda + h) - R(\lambda)}{h}\right) =$$
$$= f\left(\lim_{h\to 0} \frac{R(\lambda + h) - R(\lambda)}{h}\right) = f\left(\lim_{h\to 0} \frac{-h \cdot R(\lambda + h) \circ R(\lambda)}{h}\right) =$$
$$= f\left(-[R(\lambda)]^2\right).$$

□

Теорема 4.7. *Если E — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $T \colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор, то $\sigma(T) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что $\sigma(T) = \varnothing$. Тогда $\rho(T) = \mathbb{C}$ и для любого функционала $f \in \big(L(E, E)\big)^*$ функция $f \circ R$ голоморфна на всей комплексной плоскости, то есть является целой функцией. По следствию 3 из теоремы 4.1 $R(\lambda) \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$, а, значит, и $f(R(\lambda)) \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$. Другими словами, найдется такое число $M > 0$, что $|f(R(\lambda))| \leqslant M$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда по теореме Лиувилля $f \circ R$ — постоянная функция, откуда, в силу того, что $f(R(\lambda)) \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$, получаем равенство $f \circ R(\lambda) = 0$ для любого функционала $f \in \big(L(E, E)\big)^*$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Но тогда $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = 0$, чего быть не может. □

Пример. 1) $T \colon C[0; 1] \to C[0; 1]$, $Tx(t) = (2t+1) \cdot x(t)$. $\sigma(T) = \sigma_r(T) = [1; 3]$.

2) $T \colon \mathcal{L}_2(0; 1) \to \mathcal{L}_2(0; 1)$, $Tx(t) = (2t + 1) \cdot x(t)$. $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [1; 3]$.

4.4 Спектральный радиус

Определение. Пусть $T\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор. Число $r(T) = \min\left\{r \geqslant 0 : \sigma(T) \subset \overline{U}(0,r)\right\}$ называется *спектральным радиусом* оператора T.

Ясно, что $r(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$. Из следствия 2 из теоремы 4.1 вытекает, что $r(T) \leqslant \|T\|$.

Лемма 4.8. *Если $T\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Доказательство. $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} \overset{\text{об.}}{=} a$. Пусть $\varepsilon > 0$. найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, что $\sqrt[m]{\|T^m\|} < a + \varepsilon$. Каждое число $n \in \mathbb{N}$ поделим с остатком на m: $n = a_n m + b_n$, где $b_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Тогда $1 = a_n m/n + b_n/n$; $b_n/n \to 0$ и $a_n/n \to 1/m$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших n

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} = \|T^{a_n m + b_n}\|^{1/n} \leqslant \|T^m\|^{a_n/n} \cdot \|T\|^{b_n/n} \to \|T^m\|^{1/m} < a + \varepsilon$$

Таким образом доказано, что для достаточно больших n будет $\sqrt[n]{\|T^n\|} < a+\varepsilon$, что означает

$$a \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < a + \varepsilon,$$

откуда следует нужное равенство. □

Если $p_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ — многочлен ($a_0 \neq 0$) и $T\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор, то символом $p_n(T)$ будем обозначать оператор $p_n(T) = a_0 T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_{n-1}T + a_n I$.

Свойства:

1. пусть $q_m(\lambda) = b_0\lambda^m + \ldots + b_m$. Тогда

   $$p_n(\lambda) \cdot q_m(\lambda) = a_0 b_0 \lambda^{n+m} + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\lambda^{n+m-1} + \ldots + a_n b_m$$

   и, аналогично

   $$p_n(T) \circ q_m(T) = a_0 b_0 T^{n+m} + (a_1 b_0 + a_0 b_1) T^{n+m-1} + \ldots + a_n b_m I;$$

2. пусть $p_n(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. Тогда

   $$p_n(T) = a_0(T - \lambda_1 I) \circ \ldots \circ (T - \lambda_n I);$$

3. $T^n - a^n I = (T - aI) \circ (T^{n-1} + aT^{n-2} + \ldots + a^{n-2}T + a^{n-1}I)$.

Лемма 4.9. *Пусть $S = S_1 \circ \ldots \circ S_n$.*
1) если все S_i^{-1} существуют, то существует и S^{-1}.
2) если существует S^{-1} и S_i перестановочны, то существуют все S_i^{-1}.

Доказательство. 1) очевидно.
2) $I = S \circ S^{-1} = S_i \circ U$; $I = S^{-1} \circ S = V \circ S_i$. Тогда

$$U = \underbrace{V \circ S_i}_{I} \circ U = V \circ \underbrace{S_i \circ U}_{I} = V,$$

откуда $U = V$. Следовательно, U — обратный для S_i. $\square$

Теорема 4.10 (О полиномиальном отображении спектра)**.** *Если p_n — многочлен, то $\sigma(p_n(T)) = p_n(\sigma(T))$.*

Доказательство. 1) пусть $\lambda_0 \in \sigma(p_n(T))$. Тогда оператор $\lambda_0 I - p_n(T)$ не имеет обратного. Рассмотрим $\lambda_0 - p_n(\lambda) = -a_0(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ и соответствующий ему $\lambda_0 I - p_n(T) = -a_0(T - \lambda_1 I) \circ \ldots \circ (T - \lambda_n I)$. По лемме 4.9 найдётся i, что оператор $\lambda_i I - T$ не имеет обратного, то есть $\lambda_i \in \sigma(T)$. Но $\lambda_0 = p_n(\lambda_i)$, откуда $\lambda_0 \in p_n(\sigma(T))$.

2) Если $\lambda_0 \in p_n(\sigma(T))$, то существует такое $\mu \in \sigma(T)$, что $\lambda_0 = p_n(\mu)$. Рассмотрим $\lambda_0 - p_n(\lambda) = -a_0(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ и соответствующий ему $\lambda_0 I - p_n(T) = -a_0(T - \lambda_1 I) \circ \ldots \circ (T - \lambda_n I)$. Тогда $\mu = \lambda_i$, откуда оператор $\lambda_i I - T$ не имеет обратного. Тогда по лемме 4.9 оператор $\lambda_0 I - p_n(T)$ не имеет обратного. $\square$

Теорема 4.11. $r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$.

Доказательство. 1) пусть $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда $\lambda^n \in \sigma(T)^n = \sigma(T^n)$ для любого натурального n. Значит, по следствию 2 из теоремы 4.1 будет $|\lambda^n| \leqslant \|T^n\|$, откуда $|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|T^n\|}$ для любого натурального n. Но тогда и $|\lambda| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$, то есть $r(T) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$

2) пусть $|\lambda| > r(T)$. Тогда $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n/\lambda^{n+1}$ (следствие 1 из теоремы 4.1). Тогда $f(R(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(T^n)/\lambda^{n+1}$, откуда $\sup_n |f(T^n)/\lambda^{n+1}| < \infty$. Тогда по признаку ограниченности множества (теорема 1.31) $\left\|T^n/\lambda^{n+1}\right\| \leqslant M_\lambda$ для всех n, откуда $\|T^n\| \leqslant M_\lambda \left|\lambda^{n+1}\right| = M_\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda^n$ также для всех n. Извлекая корень из последнего неравенства, получим, что

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \sqrt[n]{M_\lambda} \cdot \sqrt[n]{|\lambda|} \cdot |\lambda|.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant |\lambda| = r(T) + \varepsilon$. $\square$

Пример. $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $T(x_1, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Очевидно, что $T^n = 0$. Тогда $\{0\} = \sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$, откуда $\sigma(T) = \{0\}$.

Пример. $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots)$. Ясно, что $T^2 = I$. Тогда $\{1\} = \sigma(T^2) = [\sigma(T)]^2$, откуда $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$. Несложно найти ненулевые решения уравнения $\pm x = Tx$. Например, $x = (x_1, \pm x_1, x_3, \pm x_3, \ldots)$. Таким образом, $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{-1, 1\}$.

4.5 Спектр сопряжённого и самосопряжённого операторов в гильбертовом пространстве

Всюду в этом разделе H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $T\colon H \to H$ — линейный непрерывный оператор.

Теорема 4.12. $\overline{\sigma(T)} = \sigma(T^*)$.

Доказательство. 1) Пусть $\lambda \notin \sigma(T^*)$. Тогда оператор $\lambda I - T^*$ имеет непрерывный обратный. Но

$$\left((\lambda I - T^*)^{-1}\right)^* = ((\lambda I - T^*)^*)^{-1} = (\bar{\lambda} I - T)^{-1},$$

откуда $\bar{\lambda} \notin \sigma(T)$. Следовательно, $\lambda \notin \overline{\sigma(T)}$.

2) Пусть теперь $\lambda \notin \overline{\sigma(T)}$. Тогда $\bar{\lambda} \notin \sigma(T)$. Это означает, что оператор $(\bar{\lambda} I - T)^{-1}$ существует и непрерывен. Но тогда существует и непрерывен сопряжённый оператор $\left((\bar{\lambda} I - T)^{-1}\right)^* = (\lambda I - T^*)^{-1}$. Значит, $\lambda \notin \sigma(T^*)$. □

Теорема 4.13. *Если $\lambda \in \sigma_r(T)$, то $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Другими словами, $\overline{\sigma_r(T)} \subset \sigma_p(T^*)$.*

Доказательство. Так как $\lambda \in \sigma_r(T)$, то $\overline{(\lambda I - T)H} \neq H$. Тогда по следствию из теоремы о проекции найдётся такой ненулевой $z \in H$, что $z \perp (\lambda I - T)H$. Другими словами, $\langle (\lambda I - T)x, z\rangle = 0$ для каждого $x \in H$, откуда $\langle x, (\lambda I - T)^* z\rangle = 0$ для каждого $x \in H$. Следовательно, $(\lambda I - T)^* z = (\bar{\lambda} I - T^*)z = 0$, а это означает, что $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. □

Теорема 4.14. *Если $\lambda \in \sigma_p(T)$, то $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T^*) \cup \sigma_p(T^*)$. Другими словами, $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma_r(T^*) \cup \sigma_p(T^*)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$. Значит, существует такой $x_0 \neq 0$, что $\lambda x_0 = T x_0$ или, равносильно, $(\lambda I - T)x_0 = 0$. Тогда $\langle (\lambda I - T)x_0, y\rangle = 0$ для любого $y \in H$, откуда получаем, что $\langle x_0, (\lambda I - T)^* y\rangle = 0$. Другими словами, $x_0 \perp (\lambda I - T)^* H$. По следствию из теоремы о проекции $\overline{(\lambda I - T)^* H} \neq H$, откуда либо $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$ (если $\bar{\lambda} I - T$ — инъекция), либо $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. □

Пример. $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Рассмотрим уравнение $\lambda x = Tx$:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 0; \\ \lambda x_2 = x_1; \\ \lambda x_3 = x_2; \\ \vdots \\ \lambda x_n = x_{n-1}; \\ \vdots \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то, очевидно, все $x_n = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то из первого уравнения $x_1 = 0$, а тогда и все остальные $x_n = 0$. Таким образом, $\sigma_p(T) = \varnothing$. Тогда из теоремы 4.13 следует, что $\sigma_r(T^*) = \varnothing$.

Рассмотрим оператор T^* и найдём $\sigma_p(T^*)$. Так как $T^*x = (x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots)$, то уравнение $\lambda x = T^*x$ принимает вид

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2; \\ \lambda x_2 = x_3; \\ \vdots \\ \lambda x_n = x_{n+1}; \\ \vdots \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то уравнение $\lambda x = T^*x$ имеет ненулевое решение $x = (1, 0, 0, \ldots)$. Если $\lambda \neq 0$ и $x_1 = 0$, то и все остальные $x_n = 0$. Пусть $x_1 \neq 0$. Тогда $x_n = \lambda^{n-1}x_1$ при $n \geqslant 2$ и последовательность $(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots, \lambda^{n-1}x_1, \ldots)$ принадлежит ℓ_2 тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 1$. Таким образом, $\sigma_p(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = U(0,1)$.

Так как $\|T^n\| = 1$ для каждого n, то $r(T) = 1$. Получаем, что

$$U(0,1) = \sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} \subset \overline{\overline{U}(0,1)} = \overline{U}(0,1),$$

откуда, в силу компактности спектра, $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \overline{U}(0,1)$.

Из того, что $\sigma_r(T^*) = \varnothing$ и $\sigma_p(T^*) = U(0,1)$, следует, что $\sigma_c(T^*) = S(0,1)$. Теперь из теорем 4.13 и 4.14 следует, что $\sigma_r(T) = U(0,1)$, откуда $\sigma_c(T) = S(0,1)$.

Теорема 4.15. *Если $T = T^*$, то $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$. Значит, существует такой $x \neq 0$, что $\lambda x = Tx$. Тогда $\langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$, откуда $\lambda = \frac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$, так как $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. □

Теорема 4.16. *Если $T\colon H \to H$ — самосопряжённый оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.*

Доказательство. Пусть $x \in E_{\lambda_1}$ и $y \in E_{\lambda_2}$. Тогда $\lambda_1 \langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \lambda_2 \langle x, y\rangle$. Значит, $\langle x, y\rangle = 0$. □

Теорема 4.17. *Если $T = T^*$ и $\lambda \notin \sigma_p(T)$, то $\overline{(\lambda I - T)H} = H$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\overline{(\lambda I - T)H} \neq H$. По следствию из теоремы 2.6 найдётся такой $z \neq 0$, что $z \perp (\lambda I - T)H$. Тогда для каждого $x \in H$ будет выполняться равенство $0 = \langle(\lambda I - T)x, z\rangle = \left\langle x, (\overline{\lambda} I - T)z\right\rangle$ из которого следует, что $\overline{\lambda} z = Tz$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то получаем противоречие с тем, что $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Если же $\lambda \notin \mathbb{R}$ то и $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$ и тогда $z = 0$. □

Следствие. *Если $T = T^*$, то $\sigma_r(T) = \varnothing$.*

Теорема 4.18. *Если $T = T^*$, то $\lambda \in \rho(T)$ тогда и только тогда, когда найдётся константа $c > 0$ такая, что $\|(\lambda I - T)x\| \geqslant c \cdot \|x\|$ для каждого $x \in H$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Пусть $\lambda \in \rho(T)$. Значит, оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ существует. Тогда

$$\|x\| = \left\|(\lambda I - T)^{-1} \circ (\lambda I - T)x\right\| \leqslant \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \cdot \|(\lambda I - T)x\|,$$

откуда получаем, что в качестве c можно взять $\frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}$.

($\Leftarrow$). Достаточно доказать, что существует обратный к $\lambda I - T$. Его непрерывность будет следовать из теоремы Банаха об обратном операторе.

1) Докажем, что $\lambda I - T$ — инъекция. Пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда

$$\|(\lambda I - T)x_1 - (\lambda I - T)x_2\| \geqslant c \cdot \|x_1 - x_2\| > 0,$$

откуда $(\lambda I - T)x_1 \neq (\lambda I - T)x_2$.

2) Докажем, что $\lambda I - T$ — сюрьекция. Так как $\lambda \notin \sigma_p(T)$, то из теоремы 4.17 получим $\overline{(\lambda I - T)H} = H$, поэтому достаточно доказать, что подпространство $(\lambda I - T)H$ замкнуто. Пусть последовательность $y_n = (\lambda I - T)x_n$ сходится к $y \in H$. Тогда

$$c \cdot \|x_n - x_m\| \leqslant \|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\|,$$

откуда следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в H, а, следовательно, $x_n \to x$.

Тогда последовательность $(\lambda I - T)x_n$ сходится как к $(\lambda I - T)x$, так и к y. Таким образом, $y \in (\lambda I - T)H$. □

Теорема 4.19. *Если $T = T^*$, то $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = a + ib$ и $b \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\lambda - \overline{\lambda}\right| \cdot \|x\|^2 = |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle - \langle x, (\lambda I - T)x\rangle| \leqslant \\ 2 \cdot |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle| \leqslant 2 \cdot \|(\lambda I - T)x\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Таким образом, $|b| \cdot \|x\| \leqslant \|(\lambda I - T)x\|$. Тогда по предыдущей теореме $\lambda \in \rho(T)$. □

В теореме 2.14 было доказано, что если $T = T^*$, то $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Введем обозначения: $\sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = M_T$ и $\inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = m_T$.

Теорема 4.20. *Если $T = T^*$, то $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$.*

Доказательство. Рассмотрим следующее равенство:

$$\langle(\lambda I - T)x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle = \\ = \lambda\|x\|^2 - \|x\|^2 \cdot \left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \|x\|^2 \cdot \left(\lambda - \left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right).$$

Пусть $\lambda \notin [m_T, M_T]$. Тогда $d = \rho(\lambda, [m_T, M_T]) > 0$. В силу теоремы 4.18 из неревенства

$$\|(\lambda I - T)x\| \cdot \|x\| \geqslant |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle| = \\ = \|x\|^2 \cdot \left|\lambda - \left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \geqslant \|x\|^2 \cdot d$$

следует, что $\lambda \in \rho(T)$. Таким образом, включение $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$ доказано. □

Теорема 4.21. *Если $T = T^*$, то $r(T) = \|T\|$.*

Доказательство. Так как $T = T^*$, то $T^2 = (T^2)^*$. Тогда

$$\|T^2\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T^2x, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, Tx\rangle| = \\ = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\right)^2 = \|T\|^2.$$

Далее, $\|T^4\| = \left\|\left(T^2\right)^2\right\| = \left\|T^2\right\|^2 = \|T\|^4$ и т.д.

Тогда $r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|T^{2^n}\|} = \|T\|$. □

4.6 Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

Везде в этом параграфе H — гильбертово пространство.

Теорема 4.22. *Если пространство H бесконечномерно и $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, то $0 \in \sigma(T)$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq x_1 \in H$. Так как H бесконечномерно, то найдётся $0 \neq x_2 \in H \setminus \mathrm{sp}\{x_1\}$. Аналогично, найдётся $0 \neq x_3 \in H \setminus \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ и т.д. Так как система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима, то по теореме 2.9 существует такая ортонормированная система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{sp}\{y_1, \ldots, y_k\}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Так как множество $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено, то $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно.

Предположим, что $0 \notin \sigma(T)$. Тогда существует непрерывный оператор T^{-1}. Из неравенства

$$2 = \|y_n - y_m\|^2 = \|T^{-1}Ty_n - T^{-1}Ty_m\|^2 \leqslant \|T^{-1}\|^2 \cdot \|Ty_n - Ty_m\|^2$$

следует оценка $\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \sqrt{2}/\|T^{-1}\|$, что противоречит относительной компактности множества $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Теорема 4.23. *Пусть $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор и $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$. Тогда подпространство E_λ конечномерно.*

Доказательство. Предположим, что E_λ бесконечномерно. Тогда в E_λ найдётся бесконечная ортонормированная система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda x_n - \lambda x_m\| = |\lambda|\sqrt{2},$$

что противоречит относительной компактности множества $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Теорема 4.24. *Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор и $\lambda \neq 0$, то $(\lambda I - T)H$ — замкнутое подпространство в H.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{(\lambda I - T)H}$ и $x_n = (\lambda I - T)y_n \to x_0$. Пусть N — ядро оператора $\lambda I - T$. По теореме о проекции $y_n = v_n + w_n$, где $v_n \in N$, а $w_n \in N^{\perp}$. Таким образом,

$$x_n = (\lambda I - T)(v_n + w_n) = (\lambda I - T)w_n. \tag{$*$}$$

Докажем, что множество $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено. Предположим, что это не так. Тогда найдётся такая подпоследовательность $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\|w_{n_k}\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $z_k = w_{n_k}/\|w_{n_k}\| \in N^{\perp}$. Так как множество $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено, то множество $\{Tz_k\}_{k=1}^{\infty}$ относительно компактно, то есть существует сходящаяся подпоследовательность $\{Tz_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

$$(\lambda I - T)z_{k_i} = (\lambda I - T)(w_{n_{k_i}}/\|w_{n_{k_i}}\|) \overset{(*)}{=} x_{n_{k_i}}/\|w_{n_{k_i}}\| \to 0. \tag{$**$}$$

Таким образом доказали, что $\lambda z_{k_i} - Tz_{k_i} \to 0$, что в силу сходимости последовательности $\{Tz_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ дает нам сходимость последовательности $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Итак, $z_{k_i} \to z_0 \in N^{\perp}$. Так как $\|z_{k_i}\| = 1$, то и $\|z_0\| = 1$. Далее, так как $(\lambda I - T)z_{k_i} \to (\lambda I - T)z_0$, то в силу $(**)$ получаем $(\lambda I - T)z_0 = 0$, то есть $z_0 \in N$. Получили противоречие.

Итак, множество $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено. Тогда $\{Tw_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно. Пусть $\{Tw_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся подпоследовательность. В силу $(*)$

$$x_{n_k} = (\lambda I - T)w_{n_k} = \lambda w_{n_k} - Tw_{n_k},$$

откуда видно, что $\{\lambda w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, а следовательно, так как $\lambda \neq 0$, то и $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ тоже сходится. Пусть $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w_0$. Тогда $x_0 = (\lambda I - T)w_0$. □

Теорема 4.25. *Если* $T\colon H \to H$ *— вполне непрерывный оператор и* $0 \neq \lambda \notin \sigma_p(T)$, *то* $\lambda \in \rho(T)$.

Доказательство. Предположим, что $X_1 = (\lambda I - T)H \subsetneqq H$. Так как $\lambda \notin \sigma_p(T)$, то $X_2 = (\lambda I - T)X_1 \subsetneqq X_1$, $X_3 = (\lambda I - T)X_2 \subsetneqq X_2$ и т.д.

Получили цепочку строго убывающих подпространств $X_0 = H \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq X_n \supsetneqq \ldots$, таких, что $(\lambda I - T)X_{n-1} = X_n$ причём, в силу предыдущей теоремы, X_n замкнуто в X_{n-1} для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такой $x_n \in X_{n-1}$, что $\|x_n\| = 1$ и $x_n \perp X_n$.

Получили ограниченное множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда множество $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно, то есть в нем должна существовать сходящаяся подпоследовательность. Пусть $n > m$. Рассмотрим

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\underbrace{(\lambda I - T)x_m - (\lambda I - T)x_n + \lambda x_n}_{\in X_m} - \lambda x_m\| = \|z - \lambda x_m\| =$$

$$= \sqrt{\|z\|^2 + \|\lambda x_m\|^2} \geqslant \|\lambda x_m\| = |\lambda| > 0.$$

Получили, что последовательность $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ не фундаментальна, что противоречит существованию в ней сходящейся подпоследовательности. □

Следствие. *Если* $T\colon H \to H$ *— вполне непрерывный оператор, то* $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 4.22 и 4.25.

Теорема 4.26. *Пусть пространство* H *бесконечномерно и* $T\colon H \to H$ *— вполне непрерывный оператор. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует лишь конечное число чисел* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *таких, что* $|\lambda| \geqslant \varepsilon$.

Доказательство. От противного. Пусть имеется бесконечная последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma_p(T)$, причём $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $0 \neq x_n \in H$, такой что $Tx_n = \lambda_n x_n$. Покажем, что множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимо. Предположим противное: пусть система линейно зависима и n_0 — наименьшее натуральное число со свойством, что система $\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ линейно зависима. Тогда система $\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$ линейно независима, откуда следует, что существует единственный набор коэффициентов α_k, таких что

$$x_{n_0} = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n_0-1} x_{n_0-1}.$$

Рассмотрим равенство

$$(\lambda_{n_0} - \lambda_1)\alpha_1 x_1 + \ldots + (\lambda_{n_0} - \lambda_{n_0-1})\alpha_{n_0-1} x_{n_0-1} = 0.$$

В силу линейной независимости системы $\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$ все коэффициенты должны равняться нулю, но так как $\lambda_{n_0} - \lambda_k \neq 0$, то все $\alpha_k = 0$, откуда $x_{n_0} = 0$. Противоречие.

Итак, система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима. Тогда по теореме Шмидта в H найдётся такая ортонормированная система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_n\} = \operatorname{sp}\{y_1,\ldots,y_n\} \overset{\text{об.}}{=} L_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как оператор T вполне непрерывен, то из последовательности $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{Ty_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. С другой стороны, при $n > m$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n \underbrace{-(\lambda_n I - T)y_n - Ty_m}_{\text{об. } h}\| = \|\lambda_n y_n + h\| =$$
$$= \sqrt{\|\lambda_n y_n\|^2 + \|h\|^2} \geqslant |\lambda_n| \geqslant \varepsilon.$$

Равенство $\|\lambda_n y_n + h\| = \sqrt{\|\lambda_n y_n\|^2 + \|h\|^2}$ выполняется, так как $h \in L_{n-1}$. В самом деле,

$$h = -(\lambda_n I - T)y_n - Ty_m =$$
$$= (T - \lambda_n I)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) - T\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \beta_k x_k =$$
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_n)\alpha_k x_k}_{\in L_{n-1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \beta_k x_k}_{\in L_m \subset L_{n-1}}. \quad \square$$

Следствие. *Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, то либо $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, где все $\lambda_k \in \sigma_p(T)$, либо $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, причём $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Напомним, что ранее мы вводили обозначения: $\sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = M_T$ и $\inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = m_T$.

Теорема 4.27. *Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный самосопряжённый оператор, то $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$. Если $M_T \neq 0$, то M_T является наибольшим собственным числом оператора T. Если $m_T \neq 0$, то m_T является наименьшим собственным числом оператора T.*

Доказательство. Первая часть была доказана в разделе 4.5. Доказательство второй части можно посмотреть в книге Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. (стр. 252) $\square$

4.7 Уравнения Риса–Шаудера и уравнения Фредгольма

Пусть H — гильбертово пространство, $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ и $f \in H$. Рассмотрим уравнения

$x - \mu Tx = f$ — уравнение Риса–Шаудера; (1)

$x - \mu Tx = 0$ — однородное уравнение Риса–Шаудера; (2)

$x - \bar{\mu} T^* x = g$ — сопряжённое уравнение Риса–Шаудера; (1*)

$x - \bar{\mu} T^* x = 0$ — сопряжённое однородное уравнение Риса–Шаудера. (2*)

В этих уравнениях $x \in H$ — неизвестный элемент, $f, g \in H$ — известные элементы и $\mu \in \mathbb{C}$ — параметр уравнения.

Пример. Пусть $H = \mathcal{L}_2(a;b)$ и $\iint\limits_{aa}^{bb} |K(t,s)|^2\,dt\,ds < +\infty$. Уравнение

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds + f(t)$$

называется *уравнением Фредгольма второго рода.* В дальнейшем увидим, что существование и единственность решения этого уравнения зависит от того, принадлежит ли число $\lambda = 1/\mu$ спектру оператора $Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$.

Лемма 4.28. *Пусть $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор и $\lambda \neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\lambda I - T$ сюръекция;

(b) $\lambda I - T$ инъекция;

(c) $\lambda I - T$ биекция.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Предположим, что $\lambda I - T$ — не инъекция. Тогда $\lambda \in \sigma_p(T)$, откуда $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, то есть найдётся такой $y_0 \neq 0$, что $\bar{\lambda} y_0 = T^* y_0$. Тогда для каждого $x \in H$ будем иметь $\langle (\lambda I - T)x, y_0 \rangle = \left\langle x, (\bar{\lambda} I - T^*)y_0 \right\rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$, откуда, в силу сюрьективности оператора $\lambda I - T$, получаем $y_0 = 0$. Противоречие.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если $\lambda I - T$ — инъекция, то $\lambda \notin \sigma_p(T)$ и тогда $\lambda \in \rho(T)$ по теореме 4.25.

(c) $\Rightarrow$ (a) — очевидно. □

Теорема 4.29 (Первая теорема Фредгольма)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

(a) уравнение (1) *имеет решение для любого $f \in H$;*

(b) уравнение (2) *имеет только нулевое решение;*

(c) уравнение (1^*) *имеет решение для любого* $g \in H$*;*

(d) уравнение (2^*) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Так как уравнение $x - \mu Tx = f$ имеет решение для каждого $f \in H$, то для каждого $f \in H$ найдётся такой $x \in H$, что $(I - \mu T)x = f$. Это означает, что оператор $I - \mu T$ сюрьективен, следовательно сюрьективным будет и оператор $\frac{1}{\mu}I - T$, а тогда, по лемме 4.28, оператор $\frac{1}{\mu}I - T$ инъективен, откуда уравнение $\frac{1}{\mu}x - Tx = 0$ имеет только нулевое решение. Но тогда и уравнение (2) имеет только нулевое решение.

(b) $\Rightarrow$ (a). Если уравнение (2) имеет только нулевое решение, то оператор $I - \mu T$ инъективен. Тогда оператор $\frac{1}{\mu}I - T$ тоже инъективен, откуда, по лемме 4.28 оператор $\frac{1}{\mu}I - T$ сюрьективен, то есть уравнение (1) имеет решение для любого $f \in H$.

Эквивалентность пунктов (c) и (d) доказывается аналогично.

(b) $\Leftrightarrow$ (d). Уравнение (2) имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда уравнение $\frac{1}{\mu}x - Tx = 0$ имеет только нулевое решение. Последнее эквивалентно тому, что $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(T)$, а это условие, в силу равенства $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$, равносильно условию $\frac{1}{\bar{\mu}} \notin \sigma(T^*)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда уравнение (2^*) имеет только нулевое решение. □

Следствие. *Если уравнение* (1) *имеет решение для каждого* $f \in H$*, то это решение единственно.*

Доказательство. Пусть $x_1 - \mu Tx_1 = f$ и $x_2 - \mu Tx_2 = f$. Тогда $(x_1 - x_2) - \mu T(x_1 - x_2) = 0$. Так как по теореме 4.29 уравнение (2) имеет только нулевое решение, то $x_1 - x_2 = 0$, откуда $x_1 = x_2$. □

Теорема 4.30 (Вторая теорема Фредгольма)**.** *Уравнения* (2) *и* (2^*) *имеют одинаковое число линейно независимых решений.*

Доказательство. Если уравнение (2) имеет только нулевое решение, то по теореме 4.29 уравнение (2^*) тоже имеет только нулевое решение.

Пусть теперь уравнение $\frac{1}{\mu}x - Tx = 0$, равносильное уравнению (2), имеет ненулевое решение. Рассмотрим соответствующее собственное подпространство $E_{1/\mu}(T) = \left\{x \in H \mid \frac{1}{\mu}x = Tx\right\}$. По теореме 4.23 оно конечномерно. Пусть $\dim E_{1/\mu}(T) = n$. Нам надо доказать, что $\dim E_{1/\bar{\mu}}(T^*) = n$.

Предположим, что $\dim E_{1/\bar{\mu}}(T^*) = m > n$. Зафиксируем ортонормированные базисы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{z_1, \ldots, z_m\}$ в подпространствах $E_{1/\mu}(T)$ и $E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$ соответственно и рассмотрим линейный оператор $K\colon H \to H$, заданный формулой $K(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle z_i$. Так как оператор K конечномерный, то он вполне непрерывен. Тогда будет вполне непрерывным и оператор $A = T + K$. Заметим, что $K(H) \subset E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$.

Рассмотрим уравнение $(I-\mu A)x = 0$. Пусть x_0 — решение этого уравнения. Тогда

$$x_0 - \mu T x_0 = \mu K x_0 = \mu \sum_{i=1}^{n} \langle x_0, e_i \rangle z_i. \qquad (*)$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на z_j:

$$\mu \langle x_0, e_j \rangle = \langle x_0 - \mu T x_0, z_j \rangle = \langle x_0, (I - \bar{\mu} T^*) z_j \rangle = 0, \qquad (**)$$

так как $z_j \in E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$. Таким образом, $x_0 \perp e_j$ для всех $j = 1, \dots, n$, откуда $x_0 \perp E_{1/\mu}(T)$. Но из того, что $x_0 \perp e_j$ для всех $j = 1, \dots, n$ и из $(*)$ следует, что $x_0 - \mu T x_0 = 0$, то есть что $x_0 \in E_{1/\mu}(T)$. Получили, что

$$x_0 \in E_{1/\mu}(T) \bigcap E_{1/\mu}(T)^{\perp}.$$

Это возможно лишь тогда, когда $x_0 = 0$.

Итак, доказано, что уравнение $(I - \mu A)x = 0$ имеет только нулевое решение. Тогда по теореме 4.29 уравнение $(I - \bar{\mu} A^*)x = 0$ тоже имеет только нулевое решение.

найдём оператор K^*:

$$\langle Kx, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle z_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot \langle z_i, y \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle x, \overline{\langle z_i, y \rangle} e_i \right\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle z_i, y \rangle} e_i \right\rangle.$$

Таким образом, $K^* x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle e_i$.

Рассмотрим значение оператора $I - \bar{\mu} A^*$ в точке $z_{n+1} \neq 0$:

$$(I - \bar{\mu} A^*) z_{n+1} = (z_{n+1} - \bar{\mu} T^* z_{n+1}) - \bar{\mu} K^* z_{n+1} = 0.$$

Получили противоречие, так как ранее было показано, что уравнение $(I - \bar{\mu} A^*)x = 0$ имеет только нулевое решение. Значит, $m \leqslant n$. Неравенство $n \leqslant m$ доказывается аналогично. □

Теорема 4.31 (Третья теорема Фредгольма). *Уравнение* (1) *имеет решение тогда и только тогда, когда $f \perp z$ для любого решения z уравнения* (2^*).

Доказательство. Пусть сначала $1/\mu \notin \sigma(T)$. Это эквивалентно тому, что уравнение (2) имеет только нулевое решение, что, по первой теореме Фредгольма равносильно тому, что уравнение (2^*) тоже имеет только нулевое решение. Значит, условие $f \perp z$ для любого решения z уравнения (2^*) необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1) имело решение.

Пусть теперь $1/\mu \in \sigma(T)$ и x_0 — решение уравнения (1). Если z — произвольное решение уравнения (2^*), то

$$\langle f, z\rangle = \langle x_0 - \mu T x_0, z\rangle = \langle x_0, (I - \bar{\mu} T^*)z\rangle = \langle x_0, 0\rangle = 0.$$

Для доказательства обратного утверждения предположим, что для некоторого $f \in H$ уравнение (1) не имеет решения, то есть $(I - \mu T)x \neq f$ ни для какого $x \in H$. Это означает, что оператор $I - \mu T$ не сюръективен. По теореме 4.24 подпространство $(I - \mu T)H = \mu(\frac{1}{\mu} I - T)H$ замкнуто в H. Из теоремы о проекции следует, что f можно представить в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in (I - \mu T)H$ и $f_2 \perp (I - \mu T)H$, причём $f_2 \neq 0$.

Так как $\langle x - \mu T x, f_2\rangle = 0$ для всех $x \in H$, то и $\langle x, (I - \bar{\mu} T^*) f_2\rangle = 0$ для всех $x \in H$, откуда следует равенство $(I - \bar{\mu} T^*) f_2 = 0$. Таким образом, f_2 — решение уравнения (2^*). Но,

$$\langle f, f_2\rangle = \langle f_1 + f_2, f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle + \|f_2\|^2 = \|f_2\|^2 \neq 0.$$

Получили противоречие с условием. □

Резюме

Пусть H — гильбертово пространство, $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ и $f \in H$. Рассмотрим уравнения

$$x - \mu T x = f \quad \text{— уравнение Риса–Шаудера;} \tag{1}$$

$$x - \mu T x = 0 \quad \text{— однородное уравнение Риса–Шаудера;} \tag{2}$$

1) Если $1/\mu \notin \sigma(T)$ (то есть $1/\mu$ не является собственным числом оператора T), то уравнение (1) имеет решение (теорема 4.29), причём это решение единственное по следствию из теоремы 4.29.

2) Если $1/\mu \in \sigma(T)$, то

   (a) если $f \not\perp E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$, то из теоремы 4.31 следует, что уравнение (1) решений не имеет;

   (b) если $f \perp E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$, то снова по теореме 4.31 данное уравнение имеет решение, которое обозначим x_1. Покажем, что в этом случае наше уравнение имеет бесконечно много решений и найдём их вид. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в пространстве $E_{1/\mu}(T)$ (оно конечномерно по теореме 4.23). Тогда общее решение x_2 однородного уравнения (2) имеет вид $x_2 = C_1e_1 + \ldots + C_ke_k$, где $C_1, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные. Убедимся, что $x = x_1 + x_2$ — тоже решение исходного уравнения. Действительно,

$$(x_1 + x_2) - \mu T(x_1 + x_2) = \underbrace{x_1 - \mu T x_1}_{=f} + \underbrace{x_2 - \mu T x_2}_{=0} = f.$$

Осталось показать, что любое решение x уравнения (1) имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — какое-либо решение уравнения (1). Для этого достаточно положить $x_1 = x - x_2$.

Таким образом, если $f \perp E_{1/\bar{\mu}}(T^*)$, то уравнение (1) имеет бесконечно много решений и его общее решение имеет вид $x_1 + x_2$, где x_1 — какое либо (частное) решение уравнения (1), а x_2 — общее решение однородного уравнения (2).

4.8 Теорема Гильберта–Шмидта

Теорема 4.32. *Если $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный самосопряжённый оператор, то хотя бы одно из чисел $\|T\|$, $-\|T\|$ является собственным числом оператора T.*

Доказательство. Если $T = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Если $T \neq 0$, то $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$ по теореме 2.14. Это значит, что существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов единичной сферы пространства H, что $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|T\|$. Отсюда следует, что найдётся бесконечная подпоследовательность $\{\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к $\|T\|$ или к $-\|T\|$. Пусть, для определенности, $\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \|T\|$. Тогда

$$\Big\|Tx_{n_k} - \|T\|x_{n_k}\Big\|^2 = \Big\langle Tx_{n_k} - \|T\|x_{n_k}, Tx_{n_k} - \|T\|x_{n_k}\Big\rangle = \\ = \|Tx_{n_k}\|^2 - 2\|T\| \cdot \langle x_{n_k}, Tx_{n_k}\rangle + \|T\|^2 \cdot \|x_{n_k}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|T\|^2 - 2\|T\| \cdot \underbrace{\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle}_{\to\|T\|} + \|T\|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Таким образом мы показали, что

$$Tx_{n_k} - \|T\|x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \qquad (*)$$

Далее, в силу вполне непрерывности оператора T, множество $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ относительно компактно. Извлечем из него сходящуюся подпоследовательность $\{Tx_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть x_0 — предел этой подпоследовательности. Теперь из $(*)$ следует, что последовательность $\{x_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $x_0/\|T\|$. Снова из $(*)$ получаем равенство

$$T\left(\frac{x_0}{\|T\|}\right) = x_0,$$

откуда $Tx_0 = \|T\| \cdot x_0$, что с учетом $x_0 \neq 0$ означает, что $\|T\|$ — собственное число оператора T. □

Теорема 4.33 (Теорема Гильберта–Шмидта)**.** *Пусть $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный самосопряжённый оператор. Тогда существует такая ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных векторов оператора T, что любой элемент $x \in H$ можно представить в виде*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n + z,$$

где $Tz = 0$ и

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\, e_n,$$

где λ_n — собственное число, соответствующее собственному вектору e_n.

Доказательство. Пусть λ_1 — ненулевое собственное число оператора T и E_{λ_1} — соответствующее ему собственное подпространство. Это подпространство конечномерно и тогда по теореме Шмидта в нем есть конечный ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{n_1}$. Аналогично, для каждого собственного числа λ_k рассмотрим соответствующее ему собственное подпространство E_{λ_k} и ортонормированный базис $e_{n_{k-1}+1}, \ldots, e_{n_k}$ в нем. Так как оператор T — самосопряжённый, то $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$ при $i \neq j$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}$ для всех k.

Таким образом, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной. Пусть $L = \overline{\operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}}$. Так как L — замкнутое подпространство в H, то по теореме о проекции любой $x \in H$ можно единственным образом представить в виде $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$. Далее, в силу полноты системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве L любой элемент $y \in L$ разлагается в ряд Фурье по этой системе. Тогда

$$x = y + z = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, e_k\rangle e_k + z = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y + z, e_k\rangle e_k + z = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k + z.$$

Переобозначим числа λ_k по следующей схеме:

	e_1,	e_2,	$\ldots$,	e_{n_1},	e_{n_1+1},	e_{n_1+2},	$\ldots$,	e_{n_2},	$\ldots$
старое обозначение:	λ_1,	λ_1,	$\ldots$,	λ_1,	λ_2,	λ_2,	$\ldots$,	λ_2,	$\ldots$
новое обозначение:	λ_1,	λ_2,	$\ldots$,	λ_{n_1},	λ_{n_1+1},	λ_{n_1+2},	$\ldots$,	λ_{n_2},	$\ldots$

С учетом новых обозначений получим равенство

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k + z\right) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k\right) + Tz =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle Te_k + Tz = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \lambda_k e_k + Tz.$$

Осталось показать, что $Tz = 0$. Пусть $z \in L^{\perp}$ и $l \in L$. Так как

$$\langle Tz, l\rangle = \langle z, Tl\rangle = \left\langle z, T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle l, e_k\rangle e_k\right)\right\rangle = \left\langle z, \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \langle l, e_k\rangle \lambda_k e_k}_{\in L}\right\rangle = 0,$$

то $Tz \in L^{\perp}$ и, следовательно, $T\left(L^{\perp}\right) \subset L^{\perp}$. Рассмотрим оператор $S = T|_{L^{\perp}} : L^{\perp} \to L^{\perp}$. Так как $L^{\perp}$ — замкнутое подпространство в H, то $L^{\perp}$ — гильбертово. Значит, S — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. По предыдущей теореме хотя бы одно из чисел $\pm\|S\|$ является собственным числом оператора S, то есть найдётся такой ненулевой элемент $l' \in L^{\perp}$, что $Sl' = \pm\|S\| \cdot l'$. Но тогда l' являлся бы и собственным вектором оператора T, что невозможно, так как все такие векторы лежат в L. Значит, равенство $Sl' = \pm\|S\| \cdot l'$ возможно лишь тогда, когда $S = 0$. Значит $T|_{L^{\perp}}$ — нулевой оператор и тогда $Tz = 0$. $\square$

4.8.1 Применение к решению уравнений Риса–Шаудера

Пусть $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный самосопряжённый оператор. Рассмотрим уравнение Риса–Шаудера

$$x - \mu T x = f. \tag{1}$$

Из теоремы Гильберта–Шмидта следует, что это уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k + z - \mu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k + z_f.$$

Поочередно умножим скалярно это равенство на e_n. Получим

$$\langle x, e_n\rangle - \mu\lambda_n \langle x, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle$$

или

$$\langle x, e_n\rangle (1 - \mu\lambda_n) = \langle f, e_n\rangle . \tag{$*$}$$

Из этого равенства следует, что $z = z_f$.

Пусть сначала $1/\mu \notin \sigma(T)$ и x — решение этого уравнения (оно единственное по следствию из первой теоремы Фредгольма). В этом случае $1-\mu\lambda_n \neq 0$ ни для какого n и тогда из $(*)$ следует, что $\langle x, e_n\rangle = \frac{\langle f, e_n\rangle}{1-\mu\lambda_n}$. Тогда

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n + z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_n\rangle e_n}{1-\mu\lambda_n} + z_f =$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_n\rangle (1-\mu\lambda_n) e_n}{1-\mu\lambda_n} + z_f}_{=f} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \langle f, e_n\rangle e_n}{1-\mu\lambda_n}.$$

Таким образом, мы получили ***первую формулу Гильберта–Шмидта***:

$$\boxed{x = f + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \langle f, e_n\rangle e_n}{1-\mu\lambda_n}}$$

Эта формула дает нам единственное решение уравнения (1) в том случае, когда $1/\mu \notin \sigma(T)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $1/\mu \in \sigma(T)$. Тогда

$$\frac{1}{\mu} = \lambda_{n_{k-1}+1} = \lambda_{n_{k-1}+2} = \ldots = \lambda_{n_k}$$

для некоторого k.

Если $i \notin \{n_{k-1}+1, n_{k-1}+2, \dots, n_k\} \overset{\text{об.}}{=} A$, то из $(*)$ находим, что $\langle x, e_i\rangle = \frac{\langle f, e_i\rangle}{1-\mu\lambda_i}$. Если же $i \in A$, то из $(*)$ получаем равенство $\langle x, e_i\rangle \cdot 0 = \langle f, e_i\rangle$. В этом случае, если $\langle f, e_i\rangle \neq 0$ хотя бы для одного $i \in A$, то уравнение (1) решений не имеет, а если для всех $i \in A$ будет $\langle f, e_i\rangle = 0$, то числа $\langle x, e_i\rangle$ могут быть любыми. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle\, e_i + z =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\notin A}}^{\infty} \frac{\langle f, e_i\rangle\, e_i}{1-\mu\lambda_i} + C_{n_{k-1}+1}e_{n_{k-1}+1} + \ldots + C_{n_k}e_{n_k} + z_f =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\notin A}}^{\infty} \langle f, e_i\rangle\, e_i + \underbrace{\sum_{i\in A} \langle f, e_i\rangle\, e_i}_{=0}}_{=f} + z_f + \mu \sum_{\substack{i=1\\ i\notin A}}^{\infty} \frac{\lambda_i \langle f, e_i\rangle\, e_i}{1-\mu\lambda_n} + \sum_{i\in A} C_i e_i =$$

$$= f + \mu \sum_{\substack{i=1\\ i\notin A}}^{\infty} \frac{\lambda_i \langle f, e_i\rangle\, e_i}{1-\mu\lambda_n} + \sum_{i\in A} C_i e_i.$$

Итак, мы получили ***вторую формулу Гильберта–Шмидта***:

$$\boxed{x = f + \mu \cdot \sum_{\substack{i=1\\ i\notin\{n_{k-1}+1,\dots,n_k\}}}^{\infty} \frac{\lambda_i \langle f, e_i\rangle\, e_i}{1-\mu\lambda_i} + C_{n_{k-1}+1}e_{n_{k-1}+1} + \ldots + C_{n_k}e_{n_k}}$$

Пример. Рассмотрим уравнение Фредгольма

$$x(t) = \mu \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + \sin \pi t \quad \text{с ядром} \quad K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{если } t \leqslant s;\\ s(t-1), & \text{если } t \geqslant s.\end{cases}$$

Так как ядро $K(t,s)$ — вещественное и симметричное, то оператор $Tx(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$ самосопряжён. Кроме того, он вполне непрерывен. Надо решить это уравнение при $\mu \in \{1, -\pi^2, -4\pi^2\}$.

Найдём точечный спектр оператора T (те числа λ, для которых существует ненулевое решение уравнения $\lambda x = Tx$):

$$\lambda x(t) = Tx(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds =$$
$$= \int\limits_0^t s(t-1)x(s)\,ds + \int\limits_t^1 t(s-1)x(s)\,ds =$$
$$= (t-1)\int\limits_0^t sx(s)\,ds + t\int\limits_t^1 (s-1)x(s)\,ds.$$

Тогда

$$\lambda x'(t) = \int\limits_0^t sx(s)\,ds + (t-1)tx(t) + \int\limits_t^1 (s-1)x(s)\,ds - (t-1)tx(t) =$$
$$= \int\limits_0^t sx(s)\,ds + \int\limits_t^1 (s-1)x(s)\,ds,$$

откуда получаем $\lambda x''(t) = tx(t) - (t-1)x(t) = x(t)$.

Итак, мы пришли к линейному однородному дифференциальному уравнению

$$\lambda x''(t) - x(t) = 0 \qquad (*)$$

с постоянными коэффициентами и начальными условиями $x(0) = x(1) = 0$. Корнями его характеристического уравнения $\lambda\alpha^2 - 1 = 0$ являются числа $\pm\sqrt{1/\lambda}$. Возможны два случая:

- если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения $(*)$ имеет вид

  $$x(t) = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t},$$

  где $\beta = \sqrt{1/\lambda}$.

  Для нахождения констант C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями:

  $$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0; \\ x(1) = C_1 e^{\beta} + C_2 e^{-\beta} = 0. \end{cases}$$

  Мы получили однородную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Как известно, такая система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель Δ равен нулю. Но так как

  $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\beta} & e^{-\beta} \end{vmatrix} = e^{-\beta} - e^{\beta} \neq 0,$$

то $C_1 = C_2 = 0$ и, следовательно, $x \equiv 0$, то есть уравнение $\lambda x = Tx$ при положительных λ ненулевых решений не имеет.

- если $\lambda < 0$, то общее решение уравнения $(*)$ имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t,$$

где $\gamma = \sqrt{-1/\lambda}$. Для нахождения констант C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 0; \\ x(1) = C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma = 0. \end{cases}$$

Пришли к уравнению $\sin \gamma = \sin \sqrt{-1/\lambda} = 0$. Тогда $\sqrt{-1/\lambda} = \pi n$, где $n = 1, 2, \ldots$, откуда $\lambda = -\frac{1}{\pi^2 n^2}$. Итак, $\lambda_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2}$ — собственные числа оператора T, а функции $x_n(t) = C \sin \pi n t$ — соответствующие им собственные функции. Так как $\int\limits_0^1 \sin^2 \pi n t \, dt = 1/2$, то после нормировки получаем функции $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$.

Далее,

$$\langle f, e_n \rangle = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Если $1/\mu \notin \sigma_p(T)$ (например, $\mu = 1$), то надо воспользоваться первой формулой Гильберта–Шмидта:

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n(t)}{1 - \mu \lambda_n} = f(t) + \mu \frac{\lambda_1 \langle f, e_1 \rangle e_1(t)}{1 - \mu \lambda_1} =$$

$$= \sin \pi t + \mu \frac{-\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin \pi t}{1 - \mu \left(-\frac{1}{\pi^2}\right)} = \sin \pi t - \mu \frac{\sin \pi t}{\pi^2 + \mu} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \mu} \sin \pi t.$$

Если $\mu = -\pi^2$, то решений нет, так как $\langle f, e_1 \rangle \neq 0$.

Если же $\mu = -\pi^2 n_0^2$ при $n_0 > 1$ (например, $\mu = -4\pi^2$), то $\langle f, e_{n_0} \rangle = 0$ и тогда надо применять вторую формулу Гильберта–Шмидта:

$$x(t) = f(t) + \mu \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{\lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n(t)}{1 - \mu \lambda_n} + C_{n_0} e_{n_0}(t) =$$

$$= f(t) + \mu \frac{\lambda_1 \langle f, e_1 \rangle e_1(t)}{1 - \mu \lambda_1} + C e_{n_0}(t) = f(t) - \pi^2 n_0^2 \cdot \frac{-\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin \pi t}{1 - (-\pi^2 n_0^2)\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)} + C e_{n_0}(t) =$$

$$= \sin \pi t + \frac{n_0^2}{1 - n_0^2} \sin \pi t + C \sin \pi n_0 t = \frac{\sin \pi t}{1 - n_0^2} + C \sin \pi n_0 t.$$

4.9 Теорема о неподвижной точке и ее применения

Определение. Пусть X — произвольное множество и $f\colon X \to X$ — произвольное отображение. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(x) = x$.

Пример. Отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$ имеет бесконечно много неподвижных точек.

Замечание. Любое уравнение $f(x) = 0$ можно переписать в виде $f(x) + x = x$ и тогда каждый корень уравнения $f(x) = 0$ будет неподвижной точкой отображения $Ax = f(x) + x$ и наоборот.

Определение. Пусть E — линейное нормированное пространство. Отображение $A\colon E \to E$ называется *сжимающим*, если существует такое неотрицательное число $\alpha < 1$, что $\|Ax - Ay\| \leqslant \alpha \cdot \|x - y\|$ для любых $x, y \in E$.

Задача. Убедитесь, что любое сжимающее отображение непрерывно.

Теорема 4.34 (Теорема Банаха о неподвижной точке)**.** *Пусть E — банахово пространство и $A\colon E \to E$ — сжимающее отображение. Тогда у отображения A существует единственная неподвижная точка x_0, причём для каждого $x \in E$ последовательность $x, Ax, A^2x, \ldots, A^nx, \ldots$ сходится к x_0.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный $x \in E$ и докажем, что последовательность $\{A^nx\}_{n=0}^{\infty}$ сходится. Достаточно доказать, что эта последовательность фундаментальна.

$$\begin{gathered}
\left\|A^{n+p}x - A^nx\right\| = \left\|A\left(A^{n+p-1}x\right) - A\left(A^{n-1}x\right)\right\| \leqslant \\
\leqslant \alpha \cdot \left\|A^{n+p-1}x - A^{n-1}x\right\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n \cdot \|A^px - x\| \leqslant \\
\leqslant \alpha^n \left(\left\|A^px - A^{p-1}x\right\| + \left\|A^{p-1}x - A^{p-2}x\right\| + \ldots + \|Ax - x\|\right) \leqslant \\
\leqslant \alpha^n(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \ldots + 1) \cdot \|Ax - x\| \leqslant \\
\leqslant \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) \cdot \|Ax - x\| = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Ax - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\left\|A^{n+p}x - A^nx\right\| &= \left\|A\left(A^{n+p-1}x\right) - A\left(A^{n-1}x\right)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \alpha \cdot \left\|A^{n+p-1}x - A^{n-1}x\right\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n \cdot \|A^px - x\| \leqslant \\
&\leqslant \alpha^n \left(\left\|A^px - A^{p-1}x\right\| + \left\|A^{p-1}x - A^{p-2}x\right\| + \ldots + \|Ax - x\|\right) \leqslant \\
&\leqslant \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) \cdot \|Ax - x\| = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Ax - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} A^nx = x_0$. Тогда $\underbrace{A^{n+1}x}_{\to x_0} = A(\underbrace{A^nx}_{\to x_0})$, откуда $Ax_0 = x_0$.

Докажем единственность неподвижной точки. Пусть x_0 и x_1 — две неподвижные точки отображения A. Тогда

$$\|x_0 - x_1\| = \|Ax_0 - Ax_1\| \leqslant \alpha \cdot \|x_0 - x_1\|$$

что, в силу неравенства $\alpha < 1$, возможно лишь тогда, когда $x_0 = x_1$. $\square$

Замечание. Если в неравенстве $\|A^{n+p}x - A^n x\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Ax - x\|$ перейти к пределу при $p \to \infty$, то получим неравенство

$$\|x_0 - A^n x\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Ax - x\|,$$

которое позволяет оценить погрешность.

Замечание. Условие $\|Ax - Ay\| \leqslant \alpha \cdot \|x - y\|$ в теореме о неподвижной точке нельзя заменить на условие $\|Ax - Ay\| < \|x - y\|$. Действительно, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет этому более слабому условию, так как

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(x - y) - (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y)| = \\ &= \left|(x - y) - \frac{1}{1+\xi^2}(x - y)\right| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} \cdot |x - y| < |x - y|, \end{aligned}$$

но, очевидно, неподвижных точек не имеет.

Замечание. На самом деле Банах доказал теорему о неподвижной точке в более общей ситуации — для сжимающего отображения, действующего в произвольном полном метрическом пространстве.

4.9.1 Применение к решению уравнений Риса–Шаудера

Рассмотрим уравнение $x - \mu Tx = f$ в банаховом пространстве E. Это уравнение можно переписать в виде $x = Ax$, где $Ax = \mu Tx + f$. Значит, если отображение $A\colon E \to E$ — сжимающее, то уравнение будет иметь единственное решение.

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| = \|(\mu Tx + f) - (\mu Ty + f)\| = |\mu| \cdot \|Tx - Ty\| \leqslant \\ \leqslant |\mu| \cdot \|T\| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Таким образом, если $|\mu| < 1/\|T\|$, то данное уравнение имеет единственное решение, являющее пределом последовательности $\{A^n x\}_{n=0}^{\infty}$ для произвольного $x \in E$. Пусть, например, $x = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} Ax &= f; \\ A^2x &= \mu Tf + f; \\ A^3x &= \mu^2T^2f + \mu Tf + f; \\ &\vdots \\ A^{n+1}x &= \mu^nT^nf + \mu^{n-1}T^{n-1}f + \ldots + \mu Tf + f; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Итак, если $|\mu| < 1/\|T\|$, то (единственное) решение уравнения $x - \mu Tx = f$ может быть получено по формуле

$$\boxed{x_0 = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^nT^nf = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^nT^nf}$$

4.9.2 Применение к решению уравнений Вольтерры

Теорема 4.35. *Пусть E — банахово пространство и $A\colon E \to E$ — непрерывное отображение. Если существует такое натуральное число n_0, что отображение A^{n_0} сжимающее, то у отображения A существует единственная неподвижная точка x_0, причём для любого $x \in E$ последовательность $\{A^nx\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0.*

Доказательство. По теореме 4.34 отображение A^{n_0} имеет единственную неподвижную точку, которую обозначим x_0. Покажем, что эта же точка будет неподвижной для A. Введем обозначение $Ax_0 = x_1$. Тогда

$$A^{n_0}(x_1) = A^{n_0}(Ax_0) = A^{n_0+1}(x_0) = A(A^{n_0}x_0) = Ax_0 = x_1.$$

Таким образом, точка x_1 является неподвижной для отображения A^{n_0}, а следовательно, $x_1 = x_0$ и тогда $Ax_0 = x_1 = x_0$.

Единственность. Предположим, что $Ax' = x'$. Тогда $A^2x' = A(Ax') = x'$, $A^3x' = A(A^2x') = Ax' = x', \ldots, A^{n_0}x' = x'$.

Осталось доказать, что для любого $x \in E$ последовательность $\{A^nx\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0. Действительно,

последовательность $A^{n_0}x, A^{2n_0}x, \ldots, A^{kn_0}x, \ldots$ сходится к x_0;

последовательность $A^{n_0+1}x, A^{2n_0+1}x, \ldots, A^{kn_0+1}x, \ldots$ сходится к $Ax_0 = x_0$;

последовательность $A^{n_0+2}x, A^{2n_0+2}x, \ldots, A^{kn_0+2}x, \ldots$ сходится к $Ax_0 = x_0$;

$\vdots$

последовательность $A^{2n_0-1}x, A^{3n_0-1}x, \ldots, A^{(k+1)n_0-1}x, \ldots$ сходится к $Ax_0 = x_0$.

Значит, и $\{A^nx\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0. □

Рассмотрим уравнение Вольтерры $x(t) - \mu \int_a^t K(t,s)x(s)ds = f(t)$ с непрерывными ядром и правой частью. Пусть $|K(t,s)| \leqslant L$ для всех $t, s \in [a;b]$. Введем обозначение $Ax(t) = \mu \int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t)$. Тогда

$$|Ax(t) - Ay(t)| = \left|\mu \int_a^t K(t,s)(x(s) - y(s))ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu| \cdot L \cdot \|x - y\| \int_a^t ds = |\mu| \cdot L \cdot \|x - y\|(t - a).$$

$$\left|A^2x(t) - A^2y(t)\right| = \left|\mu \int_a^t K(t,s)(Ax(s) - Ay(s))ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu| \cdot L \cdot \int_a^t |Ax(s) - Ay(s)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant |\mu|^2 \cdot L^2 \cdot \|x - y\| \cdot \int_a^t (s - a)\, ds = |\mu|^2 \cdot L^2 \cdot \|x - y\| \cdot \frac{(t-a)^2}{2!}.$$

По индукции доказываем, что

$$|A^n x(x) - A^n y(t)| \leqslant |\mu|^n \cdot L^n \cdot \|x - y\| \cdot \frac{(t-a)^n}{n!} \leqslant |\mu|^n \cdot L^n \cdot \|x - y\| \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Так как $|\mu|^n \cdot L^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$, то найдётся такое число n_0, что $|\mu|^{n_0} \cdot L^{n_0} \cdot \frac{(b-a)^{n_0}}{n_0!} < 1$. Тогда отображение A^{n_0} будет сжимающим и по предыдущей теореме у отображения A будет существовать единственная неподвижная точка x_0. Рассуждая также, как и в предыдущем разделе, получаем формулу

$$\boxed{x_0 = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n T^n f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n T^n f}$$

Пример. Решите уравнение Вольтерры $x(t) = \int_0^t (t - s)x(s)\, ds + t + 1$.

$$Tf(t) = \int_0^t (t - s)(s + 1)\, ds = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}, \qquad (*)$$
$$T^2 f(t) = \int_0^t (t - s) \cdot \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\right) ds = \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24},$$
$$T^3 f(t) = \int_0^t (t - s) \cdot \left(\frac{s^5}{120} + \frac{s^4}{24}\right) ds = \frac{t^7}{5040} + \frac{t^6}{720},$$
$$\vdots$$

Возникает гипотеза, что $T^n f(t) = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n}}{(2n)!}$. Докажем это методом математической индукции. При $k = 1$ утверждение верно в силу $(*)$. Пусть

$k = n + 1$. Тогда

$$T^{n+1} f(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \left(\frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{s^{2n}}{(2n)!} \right) ds =$$
$$= \left(\frac{ts^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{ts^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{s^{2n+3}}{(2n+1)! \cdot (2n+3)} - \frac{s^{2n+2}}{(2n)! \cdot (2n+2)} \right) \Bigg|_0^t =$$
$$= \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Тогда решение уравнения Вольтерры выглядит так:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n T^n f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot \left(\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) =$$
$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots = e^t.$$

Пример. Решите уравнение Вольтерры $x(t) = -\int_0^t (t-s) x(s)\, ds + 1$.

$$Tf(t) = \int_0^t (t-s)\, ds = \frac{t^2}{2}, \qquad (*)$$
$$T^2 f(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \frac{s^2}{2}\, ds = \frac{t^4}{24},$$
$$T^3 f(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \frac{s^4}{24}\, ds = \frac{t^6}{720},$$
$$\vdots$$

Возникает гипотеза, что $T^n f(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!}$. Докажем это методом математической индукции. При $k = 1$ утверждение верно в силу $(*)$. Пусть $k = n + 1$. Тогда

$$T^{n+1} f(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \frac{s^{2n}}{(2n)!} ds =$$
$$= \left(\frac{ts^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{s^{2n+2}}{(2n)! \cdot (2n+2)} \right) \Bigg|_0^t = \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Тогда решение уравнения Вольтерры выглядит так:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n T^n f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \cos t.$$

Глава 5

Введение в общую теорию меры

5.1 Основные определения

Определение. Пусть X — произвольное множество и 2^X — множество всех его подмножеств.

1. Семейство $\mathscr{E} \subset 2^X$ называется *полукольцом*, если
   - $\varnothing \in \mathscr{E}$;
   - $A \cap B \in \mathscr{E}$ для любых $A, B \in \mathscr{E}$;
   - для любых $A, B \in \mathscr{E}$ разность $A \setminus B$ можно представить в виде $A \setminus B = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_k$, где $C_i \in \mathscr{E}$.
2. Семейство $\mathscr{R} \subset 2^X$ называется *кольцом*, если
   - $A \cap B \in \mathscr{R}$ для любых $A, B \in \mathscr{E}$;
   - $A \cup B \in \mathscr{R}$ для любых $A, B \in \mathscr{E}$;
   - $A \setminus B \in \mathscr{R}$ для любых $A, B \in \mathscr{E}$.
3. Семейство $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй*, если
   - $\mathscr{A}$ — кольцо;
   - $X \in \mathscr{A}$.
4. Семейство $\mathscr{R} \subset 2^X$ называется *σ-кольцом*, если
   - $\mathscr{R}$ — кольцо;
   - если $A_n \in \mathscr{R}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$.
5. Семейство $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *σ-алгеброй*, если
   - $\mathscr{A}$ — алгебра;
   - если $A_n \in \mathscr{A}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — полукольцо. Отображение $\mu\colon \mathscr{E} \to [0;+\infty)$ называется *мерой*, если

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, если $A, B, A \sqcup B \in \mathscr{E}$.

Мера μ называется *счётно-аддитивной*, если

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для всех таких попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{E}$, что $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$.

Определение. Счетно-аддитивная мера μ на σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$.

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{E} = \{[a;b) : a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\varnothing\}$ — полукольцо. Пусть $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Тогда отображение $\mathscr{E} \mapsto [0;+\infty)$, заданное формулой $\mu\left([a;b)\right) = g(b) - g(a)$ является мерой.

Теорема 5.1. *Мера из предыдущего примера счётно-аддитивна тогда и только тогда, когда функция g непрерывна слева.*

Пример. X — произвольное множество, $\mathscr{A} = 2^X$ — σ-алгебра. Пусть $x_0 \in X$. Определим меру следующим образом: $\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A; \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$ Такие меры называются *атомарными*. Эта мера счётно-аддитивна.

Пример. $X = [0;1]$, $\mathscr{A} = \{\varnothing,\ [0;1],\ [0;1/2],\ (1/2;1]\}$ — σ-алгебра. Тогда мера μ, определённая равенствами $\mu([0;1]) = 1$, $\mu([0;1/2]) = 1/2$, $\mu((1/2;1]) = 1/2$ будет счётно-аддитивной.

Пример. $X = \mathbb{N}$. Рассмотрим полукольцо

$$\mathscr{E} = \big\{[n;+\infty) \mid n \in \mathbb{N}\big\} \bigcup \big\{\{n_1,\dots,n_k\} \mid n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\big\}$$

и определим на нем функцию μ следующим образом: $\mu(\{n\}) = 0$ и $\mu([n,+\infty)) = 1$. Тогда μ — это мера, не являющаяся счётно-аддитивной.

5.2 Продолжение мер

Рассмотрим вопрос, всегда ли меру, определённую на полукольце, можно продолжить на более широкое семейство множеств.

Если $\mathscr{E} \subset 2^X$ — полукольцо, то символом $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ будем обозначать наименьшее по включению кольцо в 2^X, содержащее $\mathscr{E}$.

Предложение 5.2. *Если μ — мера на полукольце $\mathscr{E}$, то она единственным образом продолжается до меры $\tilde{\mu}$ на $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, причем если мера μ была счетно-аддитивной на $\mathscr{E}$, то мера $\tilde{\mu}$ будет счетно-аддитивной на $\mathscr{R}(\mathscr{E})$.*

Из этого предложения следует, что каждую меру, заданную на полукольце $\mathscr{E}$, мы можем считать заданной на кольце $\mathscr{R}(\mathscr{E})$.

Свойства меры μ, заданной на кольце $\mathscr{R}$:

1) если $A, B \in \mathscr{R}$ и $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

2) если $A, B \in \mathscr{R}$, то $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$;

3) если $A \in \mathscr{R}$, $A_n \in \mathscr{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$;

4) пусть мера μ счётно-аддитивна. Если $A \in \mathscr{R}$, $A_n \in \mathscr{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$; в частности, если $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Предложение 5.3. *Пусть μ — мера на кольце $\mathscr{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) мера μ счетно-аддитивна;

(ii) если $A_n \in \mathscr{R}$, $A_{n+1} \subset A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$;

(iii) если $A_n \in \mathscr{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Теперь изучим вопрос продолжения меры, определённой на полукольце $\mathscr{E} \subset 2^X$, на некоторую σ-алгебру $(A) \subset 2^X$, содержащую $\mathscr{E}$.

Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $\mathscr{E}$. Для произвольного множества $A \subset X$ положим

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A, A_n \in \mathscr{E}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Свойства функции μ^*:

1*) если $A \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$;

2*) если $A, B \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$ и $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

3*) если $A, B \in \mathscr{R}$, то $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$;

4*) если $A \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, $A_n \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Напомним, что если $A, B \subset X$, то их симметрическая разность $A \triangle B$ — это множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение. Пусть $\mathscr{E} \subset 2^X$ — полукольцо и μ — счетно-аддитивная мера на $\mathscr{E}$. Подмножество $A \subset X$ называется *μ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Символом $\mathscr{L}(\mu)$ обозначим совокупность всех μ-измеримых множеств.

Теорема 5.4 (Лебег). *Если μ — счетно-аддитивная мера на на полукольце $\mathscr{E} \subset 2^X$ и $X \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, то $\mathscr{L}(\mu)$ — это σ-алгебра, на которой функция μ^* является счетно-аддитивной мерой.*

Замечание 1. Алгебра $\mathscr{L}(\mu)$ является полной. Это означает, что для любого $A \in \mathscr{L}(\mu)$ со свойством $\mu^*(A) = 0$ все подмножества $B \subset A$ также являются μ-измеримыми (то есть $B \in \mathscr{L}(\mu)$) и $\mu^*(B) = 0$.

Замечание 2. Если $X \notin \mathscr{R}(\mathscr{E})$, но $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где каждое $X_n \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, то теорема Лебега останется верной, но мера μ^* на $\mathscr{L}(\mu)$ может принимать значение $+\infty$.

Замечание 3. Рассмотрим полукольцо $\mathscr{E} = \big\{[a;b) \mid a,\, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\big\} \subset 2^{\mathbb{R}}$ и определим на нем функцию μ формулой $\mu\big([a;b)\big) = b - a$. Можно доказать, что σ-алгебра $\mathscr{L}(\mu)$ содержит все открытые и замкнутые в $\mathbb{R}$ множества, а также их счетные пересечения и объединения. Наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые в $\mathbb{R}$ множества, называется *борелевской* σ-алгеброй и обозначается $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ясно, что $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}(\mu)$. Известно, что борелевская σ-алгебра имеет мощность $\mathfrak{c}$, а поскольку канторово множество имеет меру 0 и все его подмножества принадлежат $\mathscr{L}(\mu)$, то мощность σ-алгебры $\mathscr{L}(\mu)$ равна $2^{\mathfrak{c}}$ и, следовательно, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{L}(\mu)$.

5.3 Различные виды сходимости, связанные с понятием меры

Пусть T — произвольное непустое множество. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \colon T \to \mathbb{R}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Если на некоторой σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^T$ задана мера μ, то мы, кроме поточечной и равномерной сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можем говорить о сходимости по мере, сходимости почти всюду и о почти равномерной сходимости.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x \colon T \to \mathbb{R}$ *почти всюду* (*п.в.*), если существует такое множество $A \in \mathscr{A}$, что $\mu(A) = 0$ и на множестве $T \setminus A$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x поточечно.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x\colon X \to \mathbb{R}$ *почти равномерно* (*по Егорову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A \in \mathscr{A}$, что $\mu(A) < \varepsilon$ и на множестве $T \setminus A$ последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x равномерно.

Пусть T — топологическое пространство, $\mathscr{A} \subset 2^T$ — некоторая σ-алгебра и μ — мера на $\mathscr{A}$. Напомним, что функция $x\colon T \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если $\{t \in T : x(t) > a\} \in \mathscr{A}$ для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Говорят, что последовательность измеримых функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к измеримой функции $x\colon T \to \mathbb{R}$ *по мере*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{t \in T : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 5.5. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций.*

(i) Если $x_n \to x$ почти равномерно, то $x_n \to x$ почти всюду;

(ii) Если $x_n \to x$ почти равномерно, то $x_n \to x$ по мере.

Теорема 5.6. *Если $x_n \to x$ по мере, то найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к x п.в.*

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ по условию

$$\mu\{t : |x_n(t) - x(t)| \geqslant 1/k\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер n_k, что

$$\mu\{t : |x_n(t) - x(t)| \geqslant 1/k\} < \frac{1}{2^k} \text{ при } n \geqslant n_k.$$

В частности, $\mu A_k < \frac{1}{2^k}$, где $A_k = \{t : |x_{n_k}(t) - x(t)| \geqslant 1/k\}$. Рассмотрим множества $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Эти множества образуют убывающую последовательность, причём $\mu B_n \leqslant 1/2^{n-1} \to 0$. В силу этого множество $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ имеет меру ноль. Пусть $t \in T \setminus B$. Тогда найдётся такой k_0, что $t \notin B_{k_0}$, откуда $t \notin A_k = \{t : |x_{n_k}(t) - x(t)| \geqslant 1/k\}$ при $k \geqslant k_0$. Последнее означает, что $|x_{n_k}(t) - x(t)| < 1/k$ при $k \geqslant k_0$, то есть $x_{n_k}(t) \to x(t)$. □

Теорема 5.7 (Егоров). *Пусть μ — счётно-аддитивная мера, $\mu(T) < +\infty$ и $x_n\colon T \to \mathbb{R}$ — последовательность измеримых функций. Если $x_n \to x$ почти всюду, то $x_n \to x$ почти равномерно.*

Доказательство. Т.к. $x_n \to x$ п.в., то найдётся $Y \subset T$ такое, что $\mu(Y) = 0$ и на множестве $T_0 = T \setminus Y$ $x_n \to x$ поточечно. Достаточно доказать, что для любого $\delta > 0$ найдётся множество $A \subset T_0$ такое, что $\mu(A) < \delta$ и на множестве $T_0 \setminus A$ будет $x_n \rightrightarrows x$. Рассмотрим множества

$$B_{nm} = \bigcap_{k \geqslant n} \{t \in T_0 : |x_k(t) - x(t)| < 1/m\}.$$

Ясно, что для любого фиксированного m будет $B_{1m} \subset B_{2m} \subset B_{3m} \subset \ldots$ и что $T_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{nm}$.

Введём обозначение $B_{0m} = \varnothing$. Тогда $T_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_{nm} \setminus B_{n-1,m}$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{nm} \setminus B_{n-1,m}) = \mu T_0 < +\infty.$$

Таким образом, для каждого m найдётся n_m такой, что $\mu(T_0 \setminus B_{n_m m}) < \delta/2^m$ (это следует из равенства $\sqcup_{n=1}^{p}(B_{nm} \setminus B_{n-1,m}) = B_{pm}$).

Определим множество $A = \bigcup_{m=1}^{\infty}(T_0 \setminus B_{n_m m})$. Ясно, что $\mu(A) < \delta$ и что $T_0 \setminus A = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n_m m}$.

Осталось доказать, что на множестве $T_0 \setminus A$ сходимость равномерная. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такой номер m, что $1/m < \varepsilon$. Тогда для любого $t \in B_{n_m m}$ по определению множеств $B_{n_m m}$ будет выполняться неравенство $|x_n(t) - x(t)| < 1/m < \varepsilon$ при $n \geqslant n_m$, а это означает, что на множестве $B_{n_m m}$ (тем более и на множестве $T_0 \setminus A$) последовательность $\{x_n\}$ сходится к x равномерно. $\square$

Пусть T — топологическое пространство. Напомним, что наименьшая σ-алгебра $\mathscr{B}(T) \subset 2^T$, содержащая все открытые подмножества пространства T, называется *борелевской* σ-алгеброй.

$\mathscr{B}(T)$ можно определить и как наименьшую σ-алгебру, содержащую все замкнутые подмножества пространства T.

Определение. Пусть T — топологическое пространство и Σ — σ-алгебра в T, содержащая все открытые подмножества пространства T (то есть $\Sigma \supset \mathscr{B}(T)$). Конечная мера μ на Σ называется *регулярной*, если для любого $S \in \Sigma$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое $F \subset S$ и открытое $U \supset S$ такие, что $\mu(S \setminus F) < \varepsilon$ и $\mu(U \setminus S) < \varepsilon$.

Эквивалентное определение: $\mu(S) = \sup\limits_{F \subset S} \mu(F) = \inf\limits_{U \supset S} \mu(U)$.

Теорема 5.8 (Лузин). *Пусть T — нормальное пространство и Σ — σ-алгебра в T, содержащая все открытые подмножества пространства X; μ — счётно-аддитивная регулярная мера на Σ такая, что $\mu(T) < +\infty$; пусть $x\colon T \to \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое замкнутое множество $F \subset T$, что $\mu(T \setminus F) < \varepsilon$ и $x|_F$ непрерывна.*

Доказательство. Так как x ограничена, то найдётся такое число M, что множество значений функции x содержится в отрезке $[-M; M]$. Зафиксируем n и разделим $[-M; M]$ на n равных частей точками $y_0, \ldots, y_n$. Длина каждого отрезка будет равна $2M/n$. Определим множества

$$A_{nk} = \{t \in T : y_{k-1} \leqslant x(t) < y_k\}, \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

$$A_{nn} = \{t \in T : y_{n-1} \leqslant x(t) \leqslant y_n\}.$$

Все множества A_{nk} измеримы и попарно не пересекаются. Так как мера μ регулярна, то для каждого $k = 1, \ldots, n$ найдётся такое замкнутое множество $F_{nk} \subset A_{nk}$, что $\mu(A_{nk} \setminus F_{nk}) < \frac{1}{n2^n}$. Пусть $H_n = \bigcup_{k=1}^n F_{nk}$. Определим непрерывную функцию $\varphi_n \colon H_n \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_n(t) = y_{k-1}, \text{ если } t \in F_{nk}.$$

По теореме Титце–Урысона непрерывно продолжим φ_n на все пространство T. Продолжение обозначим Φ_n.

Докажем, что последовательность $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x по мере. Пусть $\varepsilon > 0$. найдём n_0 так, чтобы $2M/n_0 < \varepsilon$ и рассмотрим множества

$$B_n = \{t \in T : |\Phi_n(t) - x(t)| \geqslant 2M/n_0\}.$$

найдём их меру. Если $t \in H_n$, то $t \in F_{nk}$ и тогда

$$|\Phi_n(t) - x(t)| = |\varphi_n(t) - x(t)| = |y_{k-1} - x(t)| < 2M/n_0 < \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant n_0.$$

Доказанное неравенство означает, что $B_n \subset T \setminus H_n$. Тогда

$$\mu(B_n) \leqslant \mu(T \setminus H_n) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} (A_{nk} \setminus F_{nk})\right) < n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Наконец,

$$\mu\{t \in T : |\Phi_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu(B_n) < \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Итак, $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x по мере. Тогда по теореме 5.6 найдётся подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к x почти всюду, а значит, в силу теоремы Егорова, $\Phi_{n_k} \to x$ почти равномерно. Это значит, что для $\varepsilon/2$ найдётся множество A, $\mu(A) < \varepsilon/2$ и на множестве $T \setminus A$ $\Phi_{nk} \rightrightarrows x$. Значит, функция x непрерывна на $T \setminus A$. Наконец, в силу регулярности меры μ найдётся такое замкнутое множество $F \subset T \setminus A$, что $\mu((T \setminus A) \setminus F) < \varepsilon/2$. Отсюда $\mu(T \setminus F) < \varepsilon$ и $x|_F$ непрерывна (так как $F \subset T \setminus A$, а на $T \setminus A$ функция x была непрерывна). $\square$

Основная литература

[1] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. 2-е изд. - М.: Наука, 1965. 520 с.

[2] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. - 271 с.

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. - М.: Наука, 1989. - 624 с.

[4] Кириллов А. А. Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. 2-е изд. - М.: Наука, 1988. - 400 с.

[5] Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.

[6] Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.

[7] Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теории операторов. - М.: Мир, 1983. - 432 с.

[8] Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск: Изд-во «Университетское», 1984. - 351 с.

[9] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. - 302 с.

Дополнительная литература

[10] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1977. - 360 с.

[11] Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.

[12] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

[13] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970. - 352 с.

[14] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.

[15] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. - К.: Вища школа, 1990. - 600 с.

Задачники

[16] Антоневич А.Б., Князев П.Н, Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Минск: Вышэйшая школа, 1978. - 205 с.

[17] Краснов М.Л. Киселев А.И. Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 192 с.

[18] Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Наука, 1984. - 256 с.