§7 Основные операции с обобщёнными функциями

Элементарная лемма 6.3 говорит, что обобщённые функции из $D'\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно складывать и умножать на числа. В этом параграфе изучаются некоторые другие операции с обобщёнными функциями.

Определение 7.1. Будем говорить, что в обобщённой функции $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ сделана *линейная невырожденная замена переменных* $x = Ay + b,\ x, y \in \mathbb{R}^n$, если задана новая обобщённая функция $f(Ay+b) \in D'(\mathbb{R}^n)$ правилом

$$\left(f\left(Ay+b\right), \varphi(y)\right) = \left(f(x), \frac{1}{\det A} \cdot \varphi\left(A^{-1}(x-b)\right)\right). \tag{64}$$

Рассмотрим частные случаи.

А) $b = 0$, A – ортогональная матрица, то есть $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\left(f\left(Ay\right), \varphi(y)\right) = \left(f(x), \varphi\left(A^{\mathrm{T}}(x)\right)\right).$$

Б) Отражение: $\left(f\left(-y\right), \varphi(y)\right) = \left(f(x), \varphi(-x)\right)$.

В) Подобие: $\left(f\left(k \cdot y\right), \varphi(y)\right) = \dfrac{1}{|k|^n}\left(f(x), \varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)\right)$.

Г) Сдвиг: $\left(f\left(y+b\right), \varphi(y)\right) = \left(f(x), \varphi(x-b)\right)$.

Упражнение. Докажите с помощью Б), что $\delta(x) = \delta(-x)$, а с помощью Г), что $\left(\delta(x-x_0), \varphi(x)\right) = \varphi(x_0)$.

Далее нам понадобится ещё один важный пример (сингулярной) обобщённой функции. Это связано с тем, что, как известно, функция $1/x$ не локально интегрируема на числовой прямой. Это преодолевается заменой интеграла его главным значением.

Пример 7.2. $\mathrm{P}\frac{1}{x} : D(\mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}$,

$$\left(\mathrm{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right) \tag{65}$$

Покажем, что главное значение – $V.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ – существует. Заметим, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$ для достаточно большого $a > 0$. С учётом этого

$$(65) = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}dx + \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\right) = 0 + \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Последний интеграл от функции с единственным (устранимым) разрывом при $x = 0$ существует.

Далее, линейность отображения $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ очевидна. Докажем его непрерывность в смысле (62). Пусть $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D(\mathbb{R})} 0$. Значит, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-b,b]$ при всех n, и $\max\limits_{\xi\in[-b,b]}\left|\varphi_n'(\xi)\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Поэтому $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi_n(x)\right) = \int\limits_{-b}^{b}\varphi_n'(\xi(x))dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$, что и означает выполнение свойства (62).

Покажем ещё, что функция $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ сингулярна. Предположим противное: найдётся $f \in L^{loc}(\mathbb{R})$ такая, что при всех $\varphi \in D(\mathbb{R})$ выполнено $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}(1/x)\cdot\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\varphi(x)dx$. Следовательно, если $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\left(-1/n, 1/n\right)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}}(1/x)\cdot\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\varphi(x)dx$, или $\int\limits_{\mathbb{R}}\left((1/x) - f(x)\right)\cdot\varphi(x)dx = 0$. То есть, $\left((1/x) - f(x),\varphi(x)\right) = 0$ для любого $\varphi \in D(\mathbb{R}\setminus\left(-1/n, 1/n\right))$. По теореме дю Буа-Реймона, $f(x) = 1/x$ почти везде на множестве $\mathbb{R}\setminus\left(-1/n, 1/n\right)$. Так как n произвольно, то, добавляя ещё точку 0, заключаем, что $f(x) = 1/x$ почти везде на $\mathbb{R}$. Но тогда $f \notin L^{loc}(\mathbb{R})$. Противоречие. ■

Вернёмся к изучению операций с обобщёнными функциями.

Определение 7.3. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$. Функция $a(x)$ называется *мультипликатором* на $S(\mathbb{R}^n)$ (на $D(G)$), если $a(x)\cdot\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. (Соответственно, если $a(x)\cdot\varphi(x) \in D(G)$ для любой функции $\varphi \in D(G)$). Множество всех мультипликаторов на $S(\mathbb{R}^n)$ (на $D(G)$) обозначим $M(S)$ (соответственно, $M(D)$).

Очевидно следующее

Предложение 7.4. (а) $BC^\infty(\mathbb{R}^n) \subset M(S) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$; (б) $M(D) = C^\infty(G)$.

Обобщённые функции тоже можно умножать на мультипликаторы.

Определение 7.5. *Произведение обобщённой функции* f (из $S'(\mathbb{R}^n)$ или из $D'(G)$) *на мультипликатор* a определяется формулой

$$\left(a(x)\cdot f(x),\ \varphi(x)\right) = \left(f(x),\ a(x)\cdot\varphi(x)\right). \tag{66}$$

Пример 7.6. (а) $x\cdot\delta(x)=0$; (б) $x\cdot \mathrm{P}\frac{1}{x}=1$.

Доказательство – упражнение.

Следствие 7.7. На множестве обобщённых функций нельзя ввести операцию умножения, совпадающую с умножением обычных функций.

Доказательство. Обычная операция умножения функций ассоциативна. Следующие равенства показывают, что умножение обобщённых функций не может быть ассоциативным: $0=0\cdot \mathrm{P}\frac{1}{x}=\left(\delta(x)\cdot x\right)\cdot \mathrm{P}\frac{1}{x}=\delta(x)\cdot\left(x\cdot \mathrm{P}\frac{1}{x}\right)=\delta(x)$. ■

Пример 7.8. Покажем, что $M(S)\neq C^{\infty}(\mathbb{R})$. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)=e^{x^2}$. Мы знаем, что $\varphi(x)=e^{-x^2}\in S(\mathbb{R})$. Тогда $a(x)\cdot\varphi(x)\equiv 1$, но $1\notin S(\mathbb{R})$. Следовательно, $a(x)=e^{x^2}$ не является мультипликатором на $S(\mathbb{R})$. Значит, $M(S)\neq C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Предложение 7.9. Пусть функция $a(x)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ и для каждого мультииндекса α существует число $m(\alpha)\in\mathbb{N}$ такое, что $\left|a^{(\alpha)}(x)\right|\le C\cdot\left(1+|x|^{2\cdot m(\alpha)}\right)$ при всех $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда $a(x)\in M(S)$.

Доказательство. Проверим, что $a(x)\cdot\varphi(x)\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, если $\varphi(x)\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Ясно, что функция $a(x)\cdot\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема. Покажем, что она быстро убывает (см. определение 5.13). Заметим, что любая производная $\left(a(x)\cdot\varphi(x)\right)^{(\alpha)}$ равна сумме некоторого числа $k(\alpha)$ слагаемых вида $a^{(\beta)}(x)\cdot\varphi^{(\gamma)}(x)$, причём, по условию, $\left|a^{(\beta)}(x)\right|\le C\cdot\left(1+|x|^{2\cdot m(\beta)}\right)=P_{\beta}(x)$. В итоге, если $P(x)$ – некоторый многочлен, α – мультииндекс, то $\left|P(x)\cdot\left(a(x)\cdot\varphi(x)\right)^{(\alpha)}\right|$ не превышает конечной суммы слагаемых вида $\left|P(x)\cdot P_{\beta}(x)\cdot\varphi^{(\gamma)}(x)\right|$. Но $\varphi^{(\gamma)}(x)\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, поэтому существуют числа $A(\beta,\gamma)>0$ такие, что если $|x|>A(\beta,\gamma)$, то $\left|P(x)\cdot P_{\beta}(x)\cdot\varphi^{(\gamma)}(x)\right|<\varepsilon/k(\alpha)$. Значит, взяв $A=\max\limits_{|\beta|,|\gamma|\le|\alpha|}A(\beta,\gamma)$, получим, что $\left|P(x)\cdot\left(a(x)\cdot\varphi(x)\right)^{(\alpha)}\right|<\varepsilon$ при $|x|>A$. ■

Предложение 7.10. Пусть $a(x)$ – как в предложении 7.9. Тогда отображение $T:S\left(\mathbb{R}^n\right)\to S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $T\varphi(x)=a(x)\cdot\varphi(x)$ – линейно и непрерывно.

Доказательство очевидно. ■

1) Почему $\delta(x) = \delta(-x)$?

2) Чем отличается интеграл от его главного значения?

3) Почему $\varphi'\left(\xi(x)\right)$ – измеримая функция?

4) Почему, всё-таки, $f(x) = 1/x$ почти везде на $\mathbb{R}$?

5) Что такое $BC^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$?

6) Почему $C \cdot \left(1 + |x|^{m(\beta)}\right) \leq P_{\beta}(x)$, где $P_{\beta}(x)$ – многочлен?