§10 Прямое произведение обобщённых функций.

Для классических функций $f(x),\ x\in\mathbb{R}^n$, и $g(y),\ y\in\mathbb{R}^m$, их прямое произведение $f(x)\times g(y)$ задаётся формулой $f(x)\times g(y)(x,y)=f(x)\cdot g(y)$. Если функции $f(x)$ и $g(y)$ локально интегрируемы, то таково и их прямое произведение $f(x)\times g(y)$. Для соответствующих регулярных обобщённых функций верны равенства

$$\left(f(x)\times g(y),\varphi(x,y)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)\cdot g(y)\cdot\varphi(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)\cdot\varphi(x,y)\,dydx=\left(f(x),\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right).$$

Положим эти равенства в основу общего определения.

Определение 10.1. Пусть $f\in D'\left(\mathbb{R}^n\right),\ g\in D'\left(\mathbb{R}^m\right)$ − произвольные обобщенные функции. Их прямым произведением называется обобщённая функция $f\times g\in D'(\mathbb{R}^{n+m})$, заданная правилом:

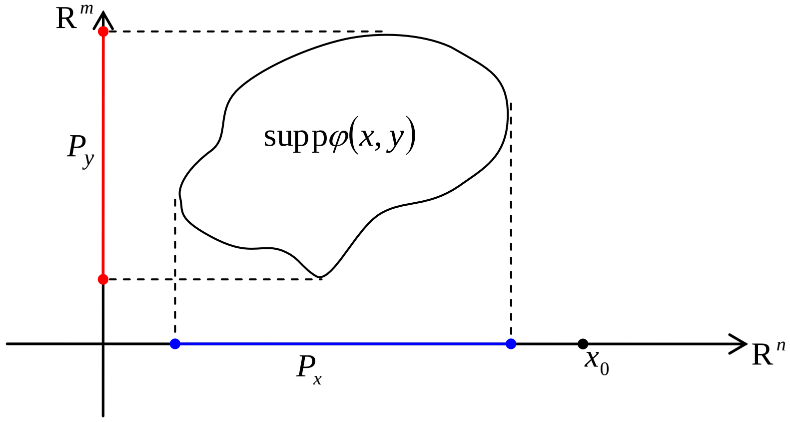
$$\left(f(x)\times g(y),\varphi(x,y)\right)=\left(f(x),\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right),\tag{74}$$

где $\varphi(x,y)\in D\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$.

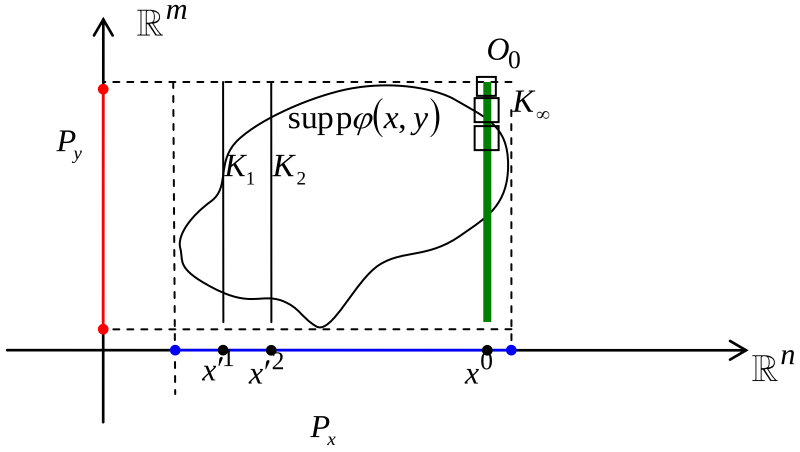
Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы

Теорема 10.2. Функция $\psi(x)=\left(g(y),\varphi(x,y)\right)$ является основной функцией для любой функции $\varphi(x,y)\in D\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$.

Доказательство. Для фиксированной точки x функция $\varphi(x,y)$ является основной, следовательно, число $\psi(x)=\left(g(y),\varphi(x,y)\right)$ определено корректно. Покажем, что функция $\psi(x)$ финитна, т.е. имеет компактный носитель.



Обозначим через P_x, P_y проекции носителя $\mathrm{supp}\,\varphi(x,y)$ на $\mathbb{R}^n$ и на $\mathbb{R}^m$ соответственно (см. рисунок выше). Оператор проектирования является непрерывным отображением, следовательно, P_x, P_y − компакты. Ясно, что $\operatorname{supp}\varphi(x,y)\subset P_x\times P_y$. Рассмотрим точку $x_0\notin P_x$, для неё $\varphi(x_0,y)\equiv 0$ для любого y, так как $(x_0,y)\notin\operatorname{supp}\varphi(x,y)$. Тогда $\psi(x_0)=(g(y),\varphi(x_0,y))=0$, и потому $\operatorname{supp}\psi(x)\subset P_x$. Следовательно, $\psi(x)$ − финитная функция.



Докажем бесконечную дифференцируемость функции $\psi(x)$. Установим, например, существование частной производной ψ_{x_1}. Существование других частных производных первого порядков доказывается аналогично. Рассмотрим вектор $e_1=(1,0,\ldots,0)$ в $\mathbb{R}^n$ и произвольное $h\in[-1,1]$. Нам нужно установить существование предела $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\{\psi(x+h\cdot e_1)-\psi(x)\}$.

Для этого выберем произвольную последовательность $h_k\to 0$ и определим функции $\xi_k(x,y)=\frac{1}{h_k}\cdot(\varphi(x+h_k\cdot e_1,y)-\varphi(x,y))$. Легко понять, что они финитны и бесконечно дифференцируемы. Кроме того, при каждом $(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}$ $\xi_k(x,y)\to\varphi_{x_1}(x,y)$ при $k\to\infty$. Докажем сходимость

$$\xi_k(x,y)\xrightarrow[k\to\infty]{D(\mathbb{R}^m)}\varphi_{x_1}(x,y). \qquad (*)$$

1) носитель $\operatorname{supp}\xi_k(x,y)$ является компактом. Множество $\operatorname{supp}\varphi(x+h\cdot e_1,y)$ – это сдвиг компакта $\operatorname{supp}\varphi(x,y)$ «вдоль» вектора e_1 на h. Так как $h\in[-1,1]$, то все множества $\operatorname{supp}\varphi(x+h_k\cdot e_1,y)$ будут лежать в одном компакте K_0. Поэтому все носители $\operatorname{supp}\xi_k(x,y)$ будут лежать в одном компакте $K=K_0\cup\operatorname{supp}\varphi(x,y)$. Ясно, что проекция этого компакта на $\mathbb{R}^m$ равна P_y.

2) Зафиксируем $x^0\in P_x$ произвольно и обозначим $x^k=x^0+h_k\cdot e_1$. Нужно показать, что $\xi_k^{(\alpha_y)}(x^0,y)\rightrightarrows\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}(x^0,y)$ при $k\to\infty$ равномерно на P_y.

Ясно, что $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^0$ и все точки x^k лежат на отрезке $\left[x^0-e_1, x^0+e_1\right]$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что, по теореме Лагранжа,

$$\xi_k^{(\alpha_y)}\left(x^0, y\right)=\varphi_{x_1}{}^{(\alpha_y)}\left(x'^k, y\right), \text{ где } x'^k \in\left[x^0, x^0+h_k\cdot e_1\right].$$

Рассмотрим (очевидно, компактные) множества $K_k=\left\{x'^k\right\}\times P_y,\ k\in\mathbb{N}$, и $K_\infty=\left\{x^0\right\}\times P_y$ (см. рисунок выше).

Функция $\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}(x,y)$ непрерывна, поэтому можно окружить каждую точку из K_∞ прямоугольной окрестностью $U\times V$, где $U\subset\mathbb{R}^n$ и $V\subset\mathbb{R}^m$ так, чтобы колебание (разность между наибольшим и наименьшим значениями) функции $\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}(x,y)$ в этой окрестности было бы меньше ε. Множество K_∞ компактно, поэтому из полученного открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $U_1\times V_1,\cdots,U_l\times V_l$. Пусть $O_0=U_1\cap\ldots\cap U_l$. Тогда $\left(O_0\times P_y\right)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{l}\left(U_i\times V_i\right)$. Так как $x'^k\to x^0$ в $\mathbb{R}^n$, то существует номер N такой, что $x'^k\in O_0$ при $k>N$. Тогда любая точка вида $\left(x'^k, y\right)$, начиная с номера N, а также точка $\left(x^0, y\right)$ принадлежит множеству $\bigcup\limits_{i=1}^{l}\left(U_i\times V_i\right)$, и поэтому $\left|\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}\left(x'^k, y\right)-\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}\left(x^0, y\right)\right|<\varepsilon$ для любого y. Значит, мы доказали равномерную сходимость $\xi_k^{(\alpha_y)}\left(x^0, y\right)\rightrightarrows\varphi_{x_1}^{(\alpha_y)}\left(x^0, y\right)$ на P_y. Следовательно, $\xi_k(x,y)\xrightarrow[k\to\infty]{D\left(\mathbb{R}^m\right)}\varphi_{x_1}(x,y)$. Так как обобщённая функция g непрерывна, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}\cdot\left\{\psi\left(x+h_k\cdot e_1\right)-\psi(x)\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}\cdot\left\{\left(g(y),\varphi\left(x+h_k\cdot e_1, y\right)\right)-\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right\}=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(g(y),\xi_k(x,y)\right)=\left(g(y),\varphi_{x_1}(x,y)\right) \text{ для произвольного } x\in\mathbb{R}^n.$$

Мы доказали, что производная ψ_{x_1} существует , причём $\psi_{x_1}(x)=\left(g(y),\varphi_{x_1}(x,y)\right)$. По индукции можно аналогичным образом доказать существование производной $\psi^{(\beta)}$ произвольного порядка β. ■

Теорема 10.3. Соответствие $\varphi(x,y)\to T\varphi(x)=\left(g(y),\varphi(x,y)\right)$ − есть линейное и непрерывное отображение $T: D\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)\to D\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Доказательство. По теореме 10.2 отображение T задано корректно. Линейность этого преобразования очевидна. Докажем его непрерывность. Достаточно показать, что из сходимости $\varphi_k \to 0$ в $D\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$ следует сходимость $T\left(\varphi_k\right) = \psi_k \to 0$ в $D\left(\mathbb{R}^n\right)$ при $k \to \infty$. Так как $\varphi_k \to 0$, то:

1) Существует компакт K, содержащий носители всех функций $\varphi_k\left(x, y\right)$,

2) $\left(\left(\varphi_k\right)_y^{(\beta)}\right)_x^{(\alpha)}\left(x, y\right) \rightrightarrows 0$ на K при любых мультииндексах α и β.

Обозначим K_x − проекцию компакта K на первый сомножитель в произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Тогда

3) $\operatorname{supp} \psi_k\left(x\right) \subset \operatorname{supp}\left(g\left(y\right), \varphi_k\left(x, y\right)\right) \subset K_x$ для любого k, и

4) $\left(\psi_k\right)^{(\alpha)}\left(x\right) = \left(g\left(y\right), \varphi_k\left(x, y\right)\right)_x^{(\alpha)} = \left(g\left(y\right), \left(\varphi_k\right)_x^{(\alpha)}\left(x, y\right)\right) \underset{k \to \infty}{\overset{K_x}{\rightrightarrows}} 0$. ■