◉ 10-D Prime Factor Algorithm

[Ref] A. V. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing*, London: Prentice-Hall, 3rd ed., 2010.

<u>N 可以是任意整數</u>

If $N = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots\cdots P_M^{k_M}$

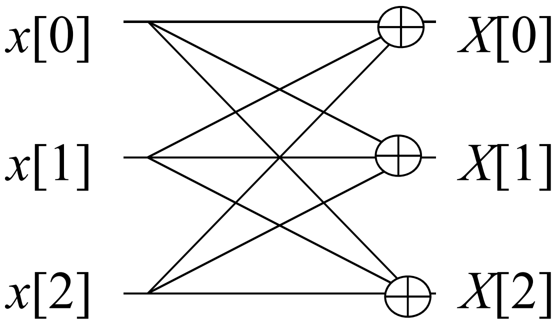
$P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_M$ 不一定是 prime number,
但彼此互質

$P_1, P_2, \ldots, P_M$ are small integers and prime to each other

the powers $k_1, k_2, \ldots, k_M$ are small

then using the prime factor FFT to implement the N-point DFT may require fewer real multiplications.

3-point DFT butterfly:



Needs 4 complex multiplications (12 real multiplications)

N–point DFT butterfly: needs $3(N-1)(N-1)$ real multiplications

然而，可以使用特殊的方法，讓 N–point DFT 的乘法量大幅減少

(即使 $N \neq 2^k$)

例如 pages 352, 353, 359, 360

• Detail of the implementation method of the prime factor algorithm

$$F[m]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \qquad n=0,\ 1,\ \ldots.,\ N-1, \quad m=0,\ 1,\ \ldots.,\ N-1$$

Case 1: Suppose that $N = P_1 \times P_2$， P_1 is prime to P_2

拆成 P_2 個 P_1-point DFTs，和 P_1 個 P_2-point DFTs

當 P_1, P_2 互質時，必可找到 n_1, n_2 使得

$$n = ((n_1P_1 + n_2P_2))_N \qquad m = ((m_1P_1 + m_2P_2))_N$$

$((\ ))_N$: 除以 N 的餘數

$$n_1, m_1 = 0,\ 1,\ \ldots.,\ P_2-1, \qquad n_2, m_2 = 0,\ 1,\ \ldots.,\ P_1-1$$

且每一個 n_1, n_2 對應到唯一一個 n

(Proof):

First, if P_1 is prime to P_2, we can always find two integers d_1 and d_2 such that

$$d_1P_1 + d_2P_2 = 1$$

Therefore, for any n,

$$d_1nP_1 + d_2nP_2 = n$$

Suppose that

$$((d_1n))_{P_2} = n_1, \quad ((d_2n))_{P_1} = n_2$$

then

$$d_1n = n_1 + k_1P_2, \quad d_2n = n_2 + k_2P_1$$

$$d_1nP_1 + d_2nP_2 = n_1P_1 + n_2P_2 + (k_1 + k_2)P_1P_2 = n$$

$$n_1P_1 + n_2P_2 = n - (k_1 + k_2)N$$

If $0 \le n \le N$–1, then

$$((n_1P_1 + n_2P_2))_N = n$$

例子：當 $N = 15, P_1 = 3, P_2 = 5,$

$0 = ((0\cdot P_1 + 0\cdot P_2))_{15}$

$1 = ((2\cdot P_1 + 2\cdot P_2))_{15}$

$2 = ((4\cdot P_1 + 1\cdot P_2))_{15}$

$3 = ((1\cdot P_1 + 0\cdot P_2))_{15}$

$4 = ((3\cdot P_1 + 2\cdot P_2))_{15}$

$5 = ((0\cdot P_1 + 1\cdot P_2))_{15}$

$6 = ((2\cdot P_1 + 0\cdot P_2))_{15}$

$7 = ((4\cdot P_1 + 2\cdot P_2))_{15}$

$8 = ((1\cdot P_1 + 1\cdot P_2))_{15}$

$9 = ((3\cdot P_1 + 0\cdot P_2))_{15}$

$10 = ((0\cdot P_1 + 2\cdot P_2))_{15}$

$11 = ((2\cdot P_1 + 1\cdot P_2))_{15}$

$12 = ((4\cdot P_1 + 0\cdot P_2))_{15}$

$13 = ((1\cdot P_1 + 2\cdot P_2))_{15}$

$14 = ((3\cdot P_1 + 1\cdot P_2))_{15}$

$$F[m]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \qquad N=P_1\times P_2$$

$$m=((m_1P_1+m_2P_2))_N=m_1P_1+m_2P_2+c_1N$$

$$n=((n_1P_1+n_2P_2))_N=n_1P_1+n_2P_2+c_2N$$

$$\begin{aligned}
e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}(m_1P_1+m_2P_2+c_1N)(n_1P_1+n_2P_2+c_2N)} \\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}[(m_1P_1+m_2P_2)(n_1P_1+n_2P_2)]}e^{-j\frac{2\pi}{N}[c_1N(n_1P_1+n_2P_2)]}e^{-j\frac{2\pi}{N}[c_2N(m_1P_1+m_2P_2)]}e^{-j\frac{2\pi}{N}[c_1c_2N^2]} \\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}[(m_1P_1+m_2P_2)(n_1P_1+n_2P_2)]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F\left[((m_1P_1+m_2P_2))_N\right] &= \sum_{n=0}^{N-1} f[((n_1P_1+n_2P_2))_N]\,e^{-j\frac{2\pi}{P_1P_2}(m_1P_1+m_2P_2)(n_1P_1+n_2P_2)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f[((n_1P_1+n_2P_2))_N]\,e^{-j\frac{2\pi}{P_1P_2}(m_1n_1P_1P_1+m_2n_2P_2P_2+m_1n_2P_1P_2+m_2n_1P_2P_1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f[((n_1P_1+n_2P_2))_N]\,e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_1P_1n_1}\,e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_2P_2n_2} \\
&= \underbrace{\sum_{n_2=0}^{P_1-1} \underbrace{\left\{\sum_{n_1=0}^{P_2-1} f[((n_1P_1+n_2P_2))_N]\,e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_1P_1n_1}\right\}}_{\text{Step 2}} e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_2P_2n_2}}_{\text{Step 3}}
\end{aligned}
$$

$$
n_1, m_1 = 0,\ 1,\ \ldots.,\ P_2-1, \qquad n_2, m_2 = 0,\ 1,\ \ldots.,\ P_1-1
$$

Step 1 令 $g[n_1,n_2] = f[((n_1P_1 + n_2P_2))_N]$

Step 2 固定 n_2，對 n_1 做 P_2-point DFT

$$\hat{G}_1[m_3,n_2] = \sum_{n_1=0}^{P_2-1} g[n_1,n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_3n_1}$$

$$G_1[m_1,n_2] = \hat{G}_1\left[((P_1m_1))_{P_2},n_2\right]$$

n_2 有 P_1 個值，所以有 P_1 個 P_2-point DFTs

Step 3 固定 m_3，對 n_2 做 P_1-point DFT

$$\hat{G}_2[m_1,m_4] = \sum_{n_2=0}^{P_1-1} G_1[m_1,n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_4n_2}$$

$$G_2[m_1,m_2] = \hat{G}_2\left[m_1,((P_2m_2))_{P_1}\right]$$

m_3 有 P_2 個值，所以有 P_2 個 P_1-point DFTs

Step 4 $F[((m_1P_1+m_2P_2))_N]=G_2[m_1, m_2]$

$$F[m]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \qquad n=0,\,1,\,\ldots,\,N-1,\quad m=0,\,1,\,\ldots,\,N-1$$

Case 2: Suppose that $N=P_1\times P_2$， P_1 is not prime to P_2

$\Downarrow$

拆成 P_2 個 P_1-point DFTs， P_1 個 P_2-point DFTs ，和 twiddle factors

令 $n=n_1P_1+n_2 \qquad m=m_1+m_2P_2$

$$n_1,m_1=0,\,1,\,\ldots,\,P_2-1,\qquad n_2,m_2=0,\,1,\,\ldots,\,P_1-1$$

$$F[m_1+m_2P_2]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n_1P_1+n_2]e^{-j\frac{2\pi}{N}(m_1+m_2P_2)(n_1P_1+n_2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f[n_1P_1+n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_1P_2}(m_1n_1P_1+m_1n_2+m_2n_1P_1P_2+m_2n_2P_2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f[n_1P_1+n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_1n_1}e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_2n_2}e^{-j\frac{2\pi}{P_1P_2}m_1n_2}$$

$$=\sum_{n_2=0}^{P_1-1}\left\{\sum_{n_1=0}^{P_2-1} f[n_1P_1+n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_1n_1}\right\}e^{-j\frac{2\pi}{N}m_1n_2}e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_2n_2}$$

$$F[m_1 + m_2 P_2] = \underbrace{\sum_{n_2=0}^{P_1-1} \underbrace{\underbrace{\left\{ \sum_{n_1=0}^{P_2-1} f[n_1 P_1 + n_2] e^{-j\frac{2\pi}{P_2} m_1 n_1} \right\}}_{\text{Step 2}} e^{-j\frac{2\pi}{N} m_1 n_2}}_{\text{Step 3}} e^{-j\frac{2\pi}{P_1} m_2 n_2}}_{\text{Step 4}}$$

$e^{-j\frac{2\pi}{N} m_1 n_2}$ 被稱為 twiddle factor，需要額外的乘法

$n_1, m_1 = 0, 1, \ldots, P_2 - 1, \quad n_2, m_2 = 0, 1, \ldots, P_1 - 1$

Number of twiddle factors: $P_1 \times P_2 = N$

excluding the case where $m_1 = 0$ or $n_2 = 0$

Number of twiddle factors: $(P_1 - 1) \times (P_2 - 1)$

Step 1 令 $g[n_1,n_2]=f[n_1P_1+n_2]$

Step 2 固定 n_2，對 n_1 作 P_2-point DFT

$$G_1[m_1,n_2]=\sum_{n_1=0}^{P_2-1}g[n_1,n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_2}m_1n_1}$$

n_2 有 P_1 個值，所以有 P_1 個 P_2-point DFTs

Step 3 $G_2[m_1,n_2]=G_1[m_1,n_2]e^{-j\frac{2\pi}{N}m_1n_2}$ twiddle factors

Step 4 固定 m_1，對 n_2 做 P_2 個 P_1-point DFT

$$G_3[m_1,m_2]=\sum_{n_1=0}^{P_1-1}G_2[m_1,n_2]e^{-j\frac{2\pi}{P_1}m_2n_2}$$

m_1 有 P_2 個值，所以有 P_2 個 P_1-point DFTs

Step 5 $F[m_1+m_2P_2]=G_3[m_1,m_2]$

◎ 10-E FFT 的乘法量的計算

假設 $N = P_1 \times P_2$， P_1 is **prime** to P_2

P_1-point DFT 的乘法量為 B_1， P_2-point DFT 的乘法量為 B_2

則 N-point DFT 的乘法量為

$$\boldsymbol{P_2 B_1 + P_1 B_2}$$

假設 $N = P_1 \times P_2 \times \cdots\cdots \times P_K$ $P_1, P_2, \ldots., P_K$ 彼此互質

P_k-point DFT 的乘法量為 B_k

則 N-point DFT 可分解成 (N/P_1) 個 P_1-point DFTs

(N/P_2) 個 P_2-point DFTs

:

(N/P_K) 個 P_K-point DFTs

總乘法量為

$$\frac{N}{P_1} B_1 + \frac{N}{P_2} B_2 + \cdots\cdots + \frac{N}{P_k} B_k$$

假設 $N = P_1 \times P_2$ ，　P_1 is **not prime** to P_2

P_1-point DFT 的乘法量為 B_1， P_2-point DFT 的乘法量為 B_2

則 N-point DFT 的乘法量為

且 $m_1 n_2$ 當中 $(m_1 = 0, 1, \ldots., P_2 - 1,\ \ n_2 = 0, 1, \ldots., P_1 - 1)$
有 D_1 個值不為 $N/12$ 及 $N/8$ 的倍數
有 D_2 個值為 $N/12$ 或 $N/8$ 的倍數，但不為 $N/4$ 的倍數

則 N-point DFT 的乘法量為

$$\boldsymbol{P_2 B_1 + P_1 B_2 + 3D_1 + 2D_2}$$

Note: $a \times \exp(j\,\theta)$，當 a 為 complex，需要 3 個乘法

然而，當 $\theta = \pi/4$，只需 2個乘法

當 $\theta = \pi/3$，只需 2 個乘法

例子： 16-point DFT, $16 = 8 \times 2$,

乘法量 $= 2 \times 4 + 8 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times 2 = 24$

$16 = 4 \times 4$

乘法量 $= 4 \times 0 + 4 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times 4 = 20$

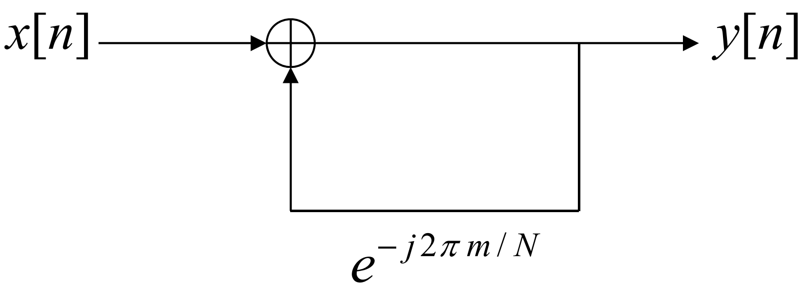
◎ 10-F Goertzel Algorithm

DFT: $$F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$x[n] = f[N-n]$, $n = 1, 2, \ldots, N$

$$F[m] = x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}m(N-1)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}m(N-2)} + \cdots + x[N]e^{-j\frac{2\pi}{N}m(0)}$$

$f[N-1]$ $\quad$ $f[N-2]$ $\quad$ $f[0]$



$F[m] = y[N]$

優點： Hardware 最為精簡

缺點： 運算時間較長 (N-1 times of feedback)

◉ 10-G Chirp Z Transform

當$\Delta_t \Delta_f = 1/N$ 時， Continuous Fourier transform可以用DFT和FFT來做 implementation。

問題: 當$\Delta_t \Delta_f \neq 1/N$ 時怎麼辦?

$$G(f)=\int e^{-j2\pi f t} g(t)\,dt \xrightarrow[f=m\,\Delta_f]{\text{取 } t=n\,\Delta_t} G\left(m\Delta_f\right)=\Delta_t\sum_n e^{-j2\pi mn\Delta_t\Delta_f} g\left(n\Delta_t\right)$$

$$\boxed{G\left(m\Delta_f\right)=\Delta_t e^{-j\pi m^2\Delta_t\Delta_f}\sum_n e^{j\pi(m-n)^2\Delta_t\Delta_f} e^{-j\pi n^2\Delta_t\Delta_f} g\left(n\Delta_t\right)}$$

$$G\left(m\Delta_f\right)=\Delta_t e^{-j\pi m^2\Delta_t\Delta_f}\left(e^{j\pi n^2\Delta_t\Delta_f} * e^{-j\pi n^2\Delta_t\Delta_f} g\left(n\Delta_t\right)\right)$$

convolution

Z-transform: $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n} \longrightarrow X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$

CZT algorithm:

Define $Z_k = AW^{-k}$, k=0, 1, …, M-1, 其中M為任意output points
A和W為任意complex number。

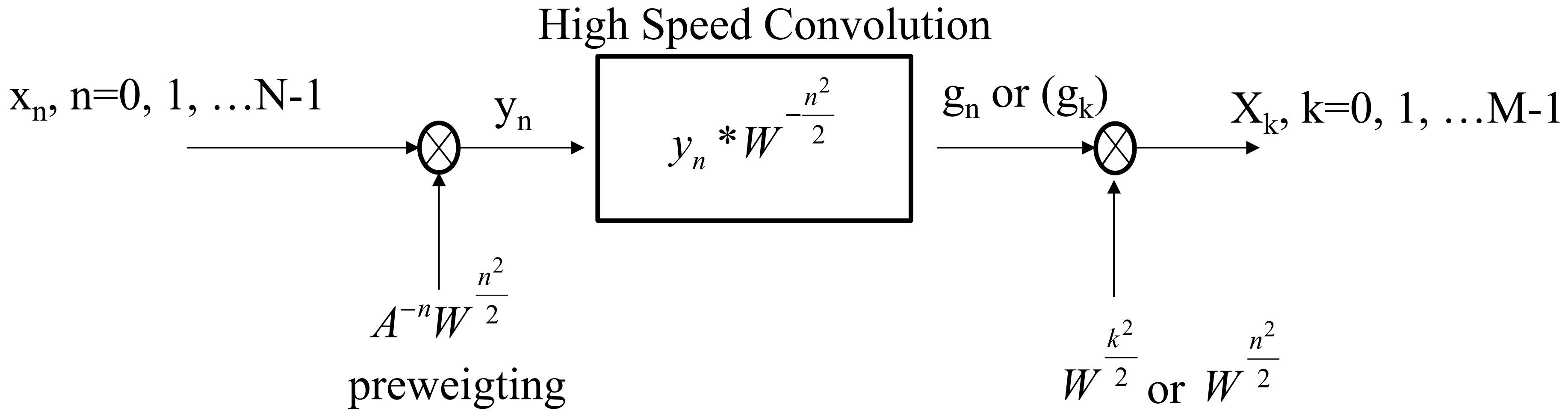
$$X_k=\sum_{n=0}^{N-1} x[n](\mathrm{A}\mathrm{W}^{-k})^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{A}^{-n}\mathrm{W}^{kn},\ k=0,1,\ldots,M-1$$

令 $nk=\dfrac{n^2+k^2-(\mathrm{k}-\mathrm{n})^2}{2}$ 代入並整理得:

$$X_k=\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{(x[n]\mathrm{A}^{-n}\mathrm{W}^{\frac{n^2}{2}})}_{=\mathrm{y_n}}\mathrm{W}^{\frac{k^2}{2}}\underbrace{\mathrm{W}^{\frac{-(\mathrm{k}-n)^2}{2}}}_{=\mathrm{v_{k-n}}},\ k=0,1,\ldots,M-1$$

$$\Rightarrow X_k=\mathrm{W}^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{y}[n]v[k-n]=\mathrm{W}^{\frac{k^2}{2}}\left(y[\mathrm{k}]*\mathrm{v}[\mathrm{k}]\right),\ k=0,1,\ldots,M-1$$

Block diagram:



優點:

(1)input/output point 可以不相同($N \neq M$)，N和M為任意整數

(2)contour 不需要在單位圓上(arc即可)

(3)初始點任意(arbitrary initial frequency)，而DFT必須要DC點開始

缺點: 運算量較大 (3 times)

⦿ 10-H Winograd Algorithm for DFT Implementation

Basic idea:

Except for the 1st row and the 1st column, the N-point DFT is equivalent to the $(N-1)$-point circular convolution when N is a prime number.

Example: 5-point DFT

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \qquad \omega = \exp[-j\angle 72°],$$

移除第一個 row和第一個 column

$$\begin{bmatrix} V_1 - v_0 \\ V_2 - v_0 \\ V_3 - v_0 \\ V_4 - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

先將 3rd and 4th rows, 再2nd, 3rd and 4th columns 作交換

$$\begin{bmatrix} V_1 - v_0 \\ V_2 - v_0 \\ V_4 - v_0 \\ V_3 - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^4 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega & \omega^2 & \omega^4 \\ \omega^4 & \omega^3 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^4 & \omega^3 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

變成 circular convolution 的型態

Circular Convolution

$$z[n] = y[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} y[k] h[((n-k))_N]$$

$$\longrightarrow \quad z[n] = IFFT\{FFT(y[n])\, FFT(h[n])\}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 - v_0 \\ V_2 - v_0 \\ V_4 - v_0 \\ V_3 - v_0 \end{bmatrix} = IFFT\left(FFT_4\left\{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\} \cdot FFT_4\left\{\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_4 \\ \omega_3 \end{bmatrix}\right\} \right)$$

$$FFT_4\left\{\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_4 \\ \omega_3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.7156 - 1.9021j \\ 2.2361 \\ 1.7156 - 1.9021j \end{bmatrix}$$

當 N 為其他的 prime numbers 時，也可以運用 permutation 和 circular convolution來計算 prime-number DFTs

(Step 1) Delete the 1st row and the 1st column.

(Step 2) Perform the row and column permutations.

Rows 和 columns 的順序相同

(a) 找出一個 primitive root a, 使得 $a^k \bmod N \neq 1$ when $k = 1, 2, \ldots., N-2$, $a^{N-1} \bmod N \neq 1$ （Primitive root 的概念，會在後面講到數論時複習）

(b) Rows 和 columns 的順序，以 $p[n]$ 來表示，

$$p[n] = a^n \bmod N, \qquad n = 0, 1, \ldots., N-2$$

(Step 3) 變成 circular convolution 的型態

則 N-point DFT 可以用 $(N-1)$-point DFTs 來 implementation

$$\begin{bmatrix} V_{p[0]} - v_0 \\ V_{p[1]} - v_0 \\ \vdots \\ V_{p[N-2]} - v_0 \end{bmatrix} = IDFT_{N-1}\left(DFT_{N-1}\left\{ \begin{bmatrix} v_{p[0]} \\ v_{p[N-2]} \\ \vdots \\ v_{p[1]} \end{bmatrix} \right\} DFT_{N-1}\left\{ \begin{bmatrix} w^{p[0]} \\ w^{p[1]} \\ \vdots \\ w^{p[N-2]} \end{bmatrix} \right\} \right)$$

重要理論：

Any N-point DFT can be implemented by the 2^k-point DFTs whatever the value of N is.

7-point DFT

123-point DFT

XI. Discrete Fourier Transform 的替代方案

◎ 11-A Why Should We Use Other Operations?

Discrete Fourier Transform (DFT):

$$X_F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi mn}{N}}$$

優點： 有 fast algorithm (complexity 為 $O(N\log_2 N)$).

適合做頻譜分析和 convolution implementation

問題： (1) complex output

(2) The exponential function is irrational.

Applications of the DFT: ① Spectrum analysis ② Performing the convolution

For **spectrum analysis**, the DFT can be replaced by:

☆ (1) DCT, (2) DST, (3) DHT,

(4) Walsh (Hadamard) transform,

(5) Haar transform,

(6) orthogonal basis expansion,

(including orthogonal polynomials and CDMA),

(7) wavelet transform,

☆ (8) time-frequency distribution

When **performing the convolution**, the DFT can be replaced by:

(1) DCT, (2) DST, (3) DHT,

(4) Directly Computing,

☆ (5) Sectioned DFT convolution,

(6) Winograd algorithm,

(7) number theoretic transform (NTT)

☆ (8) Z-transform based recursive method

◉ 11-B Discrete Sinusoid Transforms

DCT (discrete cosine transform) has 8 types

DST (discrete sine transform) has 8 types

DHT (discrete Hartley transform) has 4 types

共通的特性：皆為 real, 且和 DFT 密切相關

Reference

- N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao, "Discrete cosine transform," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-23, pp. 90-93, Jan 1974.
- Z. Cvetkovic and M. V. Popovic, "New fast recursive algorithms for the computation of discrete cosine and sine transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 2083-2086, Aug. 1992.
- R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*, New York, Oxford University Press, 1986.
- S. C. Chan and K. L. Ho, "Prime factor real-valued Fourier, cosine and Hartley transform," *Proc. Signal Processing VI*, pp. 1045-1048, 1992.

- **Case 1: 當 $x[n]$ 為 even function**，$x[n] = x[N-n]$

在做頻譜分析時，

N-point DFT 可以被 (floor(N/2) +1)-point DCT (type 1) 取代

$$X_C[m] = \sum_{n=0}^{Q} k_n x[n] \cos\left(\frac{\pi m n}{Q}\right), \qquad Q = floor(N/2),$$

$$\begin{cases} k_n = 1 & ,\text{when } n = 0 \text{ or } N/2 \\ k_n = 2 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

可以證明，當 $x[n]$ 為 even，$X_C[m] = X_F[m]$

（運算量減少將近一半）

Recover: $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{Q} k_m X_C[m] \cos\left(\frac{\pi m n}{Q}\right)$$

注意：和 JPEG 所用的 DCT (type 2) 並不相同

$$F[m] = \sqrt{\frac{2}{N}} C_m \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cos\frac{(n+1/2)m\pi}{N} \qquad \begin{array}{ll} C_0 = 1/\sqrt{2} & \\ C_m = 1 & \text{otherwise} \end{array}$$

(Proof) $$X_F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi m n}{N}}$$

When $x[n] = x[N-n]$, N is even

(The case where N is odd can be proved in the similar way)

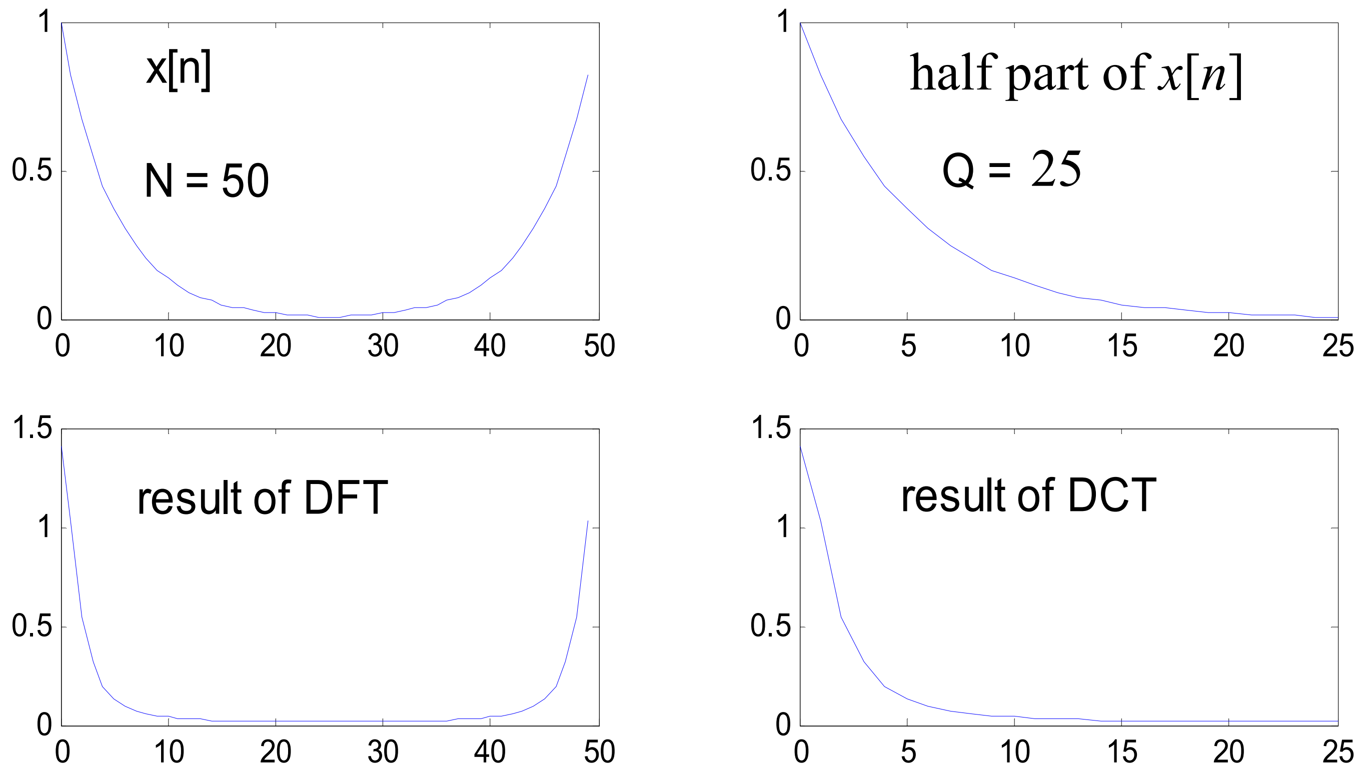
$$X_F[m] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi m n}{N}} + x\left[\frac{N}{2}\right] e^{-j\pi m} + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[N-n]\, e^{-j\frac{2\pi m (N-n)}{N}}$$

$$= x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi m n}{N}} + x\left[\frac{N}{2}\right](-1)^m + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]\, e^{j\frac{2\pi m (n)}{N}}$$

$$= x[0] + 2\sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi m n}{N}\right) + x\left[\frac{N}{2}\right](-1)^m$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} k_n x[n]\cos\left(\frac{2\pi m n}{N}\right) \qquad \begin{cases} k_n = 1 & \text{,when } n = 0 \text{ or } N/2 \\ k_n = 2 & \text{,otherwise} \end{cases}$$

$$= X_C[m]$$


x[n]
N = 50
half part of x[n]
Q = 25
result of DFT
result of DCT

- **Case 2: 當 $x[n]$ 為 odd function，** $x[n] = -x[N-n]$

在做頻譜分析時，

N-point DFT 可以被 $(N/2 -1)$-point DST (type 1) 取代

$$X_S[m] = 2\sum_{n=1}^{Q-1} x[n]\sin\left(\frac{\pi m n}{Q}\right), \quad Q = N/2.$$

可以證明，當 $x[n]$ 為 odd， $X_S[m] = jX_F[m]$

(運算量減少將近一半)

Recover: $$x[n] = \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{Q-1} X_S[m]\sin\left(\frac{\pi m n}{Q}\right)$$

- **Case 3: 當 *x*[*n*] 為 real function**，在做頻譜分析時，

N-point DFT 可以被 *N*-point DHT (type 1) 取代

$$X_H[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]cas\left(\frac{2\pi mn}{N}\right),\qquad \text{where } \mathrm{cas}(k) = \cos(k) + \sin(k)$$

比較： exp(-*jk*) = cos(*k*) – *j*sin(*k*)

可以證明，若 *x*[*n*] 為 real，
$$X_H[m] = real\{X_F[m]\} - imag\{X_F[m]\}$$

(運算量減少將近一半)

Recover: $$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X_H[m]cas\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)$$

- 大部分的 convolution 仍然使用 DFT。

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \mathrm{IDFT}\{\ \mathrm{DFT}(x[n]) \times \{\mathrm{DFT}(h[n])\ \}$$

思考：何時適合用 DCT 做 convolution ？

何時適合用 DST 做 convolution ？

何時適合用 DHT 做 convolution ？

附錄十三：論文的標準格式與編輯論文技巧

註：這裡指的是一般 journal papers 和 conference papers 的格式。

然而，不同的 journals 和 conferences，對於格式的規定，也會稍有不同。投稿前，還是要細讀相關的規定。

(1) 變數使用斜體，矩陣或向量使用粗體

$f(x) = x^2 + 3x + 2.$ (f, x 皆用斜體)

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (**y**, **A** 皆用粗體)

(2) 段落的經常用「左右對齊」的格式

如果使用 Word，可以按 常用 → 段落 → 對齊方式→ 左右對齊

或是按工具列中的

(3) Equation 的標號，經常用「定位點」的功能，讓標號的位置固定

如果使用 Word ，可以按 常用 → 段落 → 定位點 (在對話框左下角)，再設定定位點的位置

(4) 至於 equations 本身，通常置於這一行的中間，例如

$$F = ma. \tag{1}$$

Equations 和前一行以及後一行，皆要有足夠的距離。而且，equations 的後方常常要加逗號或句號 (以下一行是否為新的句子而定)。

(5) 標題(包括 papers 的標題以及每個 chapters 和 sections的標題) 當中，

每個單字的開頭一定要大寫，除了 (a) 介係詞 (b) 連詞 (c) 冠詞 以外。

若為第一個單字，即使是介係詞 ， 連詞，或冠詞，也要大寫

The Applications of the Fourier Transform in Daily Life

Fast Algorithms of the Wavelet Transform and JPEG2000

(6) 文章一定要包括

(a) Abstract,

(b) Introduction (通常是第一個 section)

(c) 內文

(d) Conclusions 或 Conclusions and Future Works (通常是最後一個 section)

(e) References

(7) 每一張圖 (figures)，每一張表 (tables) 都要編號，而且要附加文字說明。

如 Fig. 3 The result of the Fourier transform for a chirp signal.

若一張圖當中有很多個小圖，每個小圖也要編號 (a), (b), (c), (d) …..

(8) 同一個 equation，同一張圖，要放在同一頁，不分散於兩頁。

(9) 一般而言，Journal papers 的初稿，是 <u>one column, double space</u> 的格式。

在 Word 當中， double space 可以用後下的方法設定

常用 → 段落 → 行距 → 2倍行高

但有時， 2倍行高會讓初稿過於稀疏，在 Word 2007 當中可以用

版面配置→ 版面設定 → 文件格線 → 沒有格線

來讓文件看起來不會那麼稀疏，且不易超過規定的頁數。

(10) Conference papers 是 <u>two columns, one space</u> 的格式。有時 Journal papers 被接受後，也會要求改成 two columns, one space 的格式。

在Word 2007 ， two columns 可以用

版面配置 → 欄 → 二 (W)

來設定

(11) References 的編號，通常是按照在文章中出現的順序來排序

或者也可按照第一作者的 last name 的英文字母順序排序

(12) Reference 的寫法

(以 IEEE Transactions on Signal Processing 為例)

(A) Journal papers and conference papers

Authors (first name 或 middle name 只用一個字母代表), "title ," name of the journal (縮寫為佳), vol. *, no. *, pp. **~**, month, year.

使用縮寫

逗號在引號之前

加句號

只有第一個字母、專有名詞開頭、和縮為用大寫

範例：

S. Abe and J. T. Sheridan, "Optical operations on wave functions as the Abelian subgroups of the special affine Fourier transformation," *Opt. Lett.*, vol. 19, no. 22, pp. 1801-1803, 1994.

(B) Books

Authors (first name 或 middle name 只用一個字母代表), *title* (斜體, 字開頭大寫，不加引號), 第幾版 (非必需), 出版社, 出版地, year.

範例

H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, 1st Ed., John Wiley & Sons, New York, 2000.

(C) Websites

Authors, “title,” available in http://網址.

範例

張智星, “Utility toolbox,” available in http://neural.cs.nthu.edu.tw/jang/matlab/toolbox/utility/.