

10

अध्याय

सरल रेखाएँ

Straight Lines

प्रश्नावली 10.1

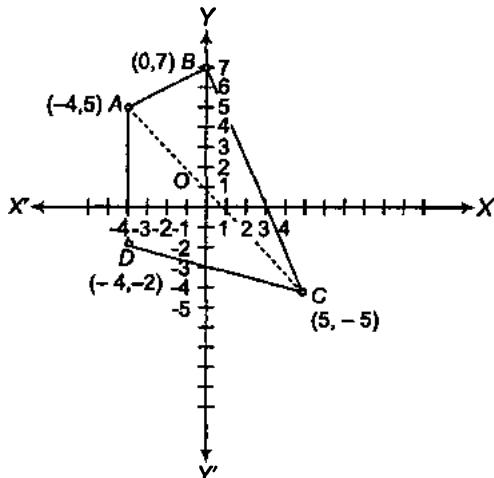
प्रश्न 1. कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष $(-4, 5), (0, 7), (5, -5)$ और $(-4, -2)$ हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

(i) यदि $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ एक त्रिभुज के शीर्ष हैं, तब

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} |[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]|$$

(ii) चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल

हल दिए गए शीर्ष $A(-4, 5), B(0, 7), C(5, -5)$ तथा $D(-4, -2)$ नीचे X-Y तल में दर्शाए गए हैं। सभी शीर्षों को मिलाने पर एक चतुर्भुज $ABCD$ निरूपित होता है।



चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = ΔADC का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल ... (i)

$$\text{अब, } \Delta ADC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} |[-4(-2+5) - 4(-5-5) + 5(5+2)]| \\ \left[\because \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \right]$$

$$\text{यहाँ, } (x_1, y_1) = (-4, 5), (x_2, y_2) = (-4, -2), (x_3, y_3) = (5, -5) \\ = \frac{1}{2} |[-4 \times 3 - 4(-10) + 5 \times 7]| \\ = \frac{1}{2} |-12 + 40 + 35| = \frac{1}{2} |75 - 12| = \frac{63}{2}$$

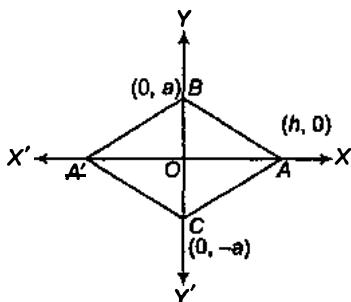
$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} |[-4(7+5) + 0(-5-5) + 5(5-7)]| \\ \text{[यहाँ, } (x_1, y_1) = (-4, 5), (x_2, y_2) = (0, 7) \text{ तथा } (x_3, y_3) = (5, -5)] \\ = \frac{1}{2} |[-4 \times 12 + 0 \times (-10) + 5(-2)]| = \frac{1}{2} |-48 - 10| = \frac{|-58|}{2} = 29$$

$$\therefore \text{सभी (i) से, चतुर्भुज } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{63}{2} + 29 = \frac{63 + 58}{2} = \frac{121}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 2. $2a$ मुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y -अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य-बिंदु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

जैसे कि त्रिभुज की एक भुजा y -अक्ष पर है, अतः तीसरी भुजा y -अक्ष के बाईं या दाईं ओर होगी।

हल माना BC त्रिभुज का आधार है जो y -अक्ष पर स्थित है तथा तीसरा शीर्ष $A(h, 0)$ या $A'(-h, 0)$ हो सकता है।



चूंकि $\triangle ABC$ समबाहु है, तब $AB = BC$

$$AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow (h - 0)^2 + (0 - a)^2 = (2a)^2$$

बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी $= \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

AB दूरी के लिए, $(x_1, y_1) = (a, 0), (x_2, y_2) = (0, a)$

$$\Rightarrow h^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = \pm \sqrt{3}a \quad (\text{वर्गमूल लेने पर})$$

अतः त्रिभुज के शीर्ष $(\sqrt{3}a, 0), (0, a), (0, -a)$

या $(-\sqrt{3}a, 0), (0, a), (0, -a)$ हैं।

प्रश्न 3. $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब

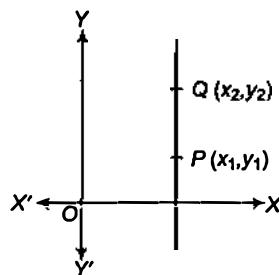
(i) PQ, Y -अक्ष के समांतर है।

(ii) PQ, X -अक्ष के समांतर है।

हल (i) जब PQ, Y -अक्ष के समांतर है इसका अर्थ है, कि P तथा Q बिंदुओं का X -निर्देशांक समान है अर्थात् $x_1 = x_2$

\therefore बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा बिंदु $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\because x_1 = x_2) \\ &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

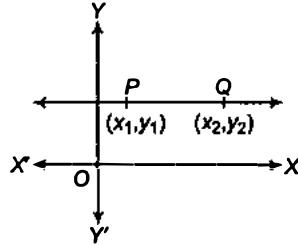


(ii) जब PQ , X -अक्ष के समांतर है, इसका अर्थ है कि P तथा Q बिंदुओं का Y -निर्देशांक समान है

$$\text{अर्थात् } y_1 = y_2$$

\therefore बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा बिंदु $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} \quad (\because y_1 = y_2) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| \end{aligned}$$



प्रश्न 4. X -अक्ष पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जो $(7, 6)$ और $(3, 4)$ बिंदुओं से समान दूरी पर है।

हल माना x -अक्ष पर किसी बिंदु P के निर्देशांक $(x, 0)$ है, तैँकि X -अक्ष पर Y -निर्देशांक शून्य होता है तथा दिए गए बिंदु $A(7, 6)$ तथा $B(3, 4)$ हैं।

दिया है, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$$

$$\text{जहाँ, } x_1 = x, x_2 = 7, y_1 = 0, y_2 = 6, x_3 = 3, y_3 = 4$$

$$\Rightarrow (x - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (x - 3)^2 + (0 - 4)^2$$

$$\text{दो बिंदुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 49 - 14x + 36 = x^2 + 9 - 6x + 16$$

$$\Rightarrow -14x + 6x = 25 - 36 - 49$$

$$\Rightarrow -8x = 25 - 85 \Rightarrow -8x = -60$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{8} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\therefore x\text{-अक्ष पर बिंदु } P = \left(\frac{15}{2}, 0\right)$$

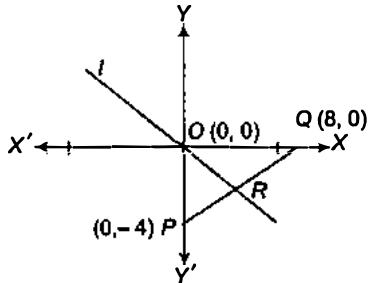
प्रश्न 5. रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए जो मूलबिंदु और $P(0, -4)$ तथा $B(8, 0)$ बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिंदु से जाती है।

यदि दो बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं, तब प्रवणता, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

हल दिए गए बिंदु $P(0, -4)$ तथा $Q(8, 0)$ हैं।

$$\therefore x_1 = 0, y_1 = -4, x_2 = 8, y_2 = 0$$

ये बिंदु X-Y तल में नीचे चित्र में अंकित किए गए हैं



PQ का मध्य-बिंदु है

$$R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ = \left(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2} \right) = (4, -2)$$

$$\therefore OR \text{ की प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{4 - 0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = 4, y_2 = -2 \end{cases}$$

प्रश्न 6. पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिंदु दिखलाइए कि बिंदु (4, 4), (3, 5) और (-1, -1) त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(i) जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(ii) दो रेखाएँ लंबवत् होती हैं, यदि $m_1 \times m_2 = -1$

हल माना दिए गए बिंदु A(4, 4), B(3, 5) तथा C(-1, -1) हैं।

यहाँ $(x_1, y_1) \rightarrow A(4, 4), (x_2, y_2) \rightarrow B(3, 5), (x_3, y_3) \rightarrow C(-1, -1)$

$$\text{अब, } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [4(5+1) - 4(3+1) + 1(-3+5)] \\ = \frac{1}{2} [24 - 16 + 2] = \frac{10}{2} = 5 \neq 0$$

अतः A, B तथा C त्रिभुज के शीर्ष हैं।

$$AB \text{ की प्रवणता, } m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 4}{3 - 4} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \left(\because \text{प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$BC \text{ की प्रवणता, } m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-1 - 5}{-1 - 3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$CA \text{ की प्रवणता, } m_3 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-1 - 4}{-1 - 4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

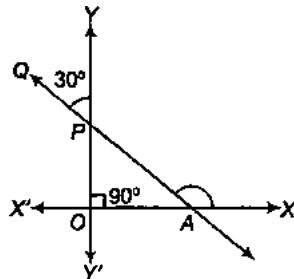
$$\therefore AB \text{ की प्रवणता} \times CA \text{ की प्रवणता} = (-1) \times 1 = (-1)$$

$\therefore \Delta ABC, A$ पर एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त मापा गया 30° का कोण बनाती है।

हल दिया है, $\angle YPQ = 30^\circ$

ज्ञात करना है, $\angle PAX = ?$



$$\begin{aligned}
 &\text{यहाँ,} & \angle YPQ = \angle OPA & \quad (\text{ऊर्ध्वाधर विपरीत कोण}) \\
 &\because & \angle OPA + \angle POA + \angle PAO = 180^\circ & \\
 && (\because \text{त्रिभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है।}) \\
 \Rightarrow & & 30^\circ + 90^\circ + \angle PAO = 180^\circ & \\
 \Rightarrow & & \angle PAO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ & \\
 \Rightarrow & & \angle PAX = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ & \\
 \therefore & \text{रेखा } AQ \text{ की प्रवणता } m = \tan 120^\circ & (\because m = \tan \theta) \\
 && = \tan (180^\circ - 60^\circ) & [\because \tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta] \\
 && = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} &
 \end{aligned}$$

प्रश्न 8. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिंदु $(x, -1)$, $(2, 1)$ और $(4, 5)$ सरेख हैं।

तीन बिंदु A, B तथा C संरेख होते हैं, यदि

AB की प्रवणता $= BC$ की प्रवणता $= CA$ की प्रवणता

हल चूँकि बिंदु $A(x, -1)$, $B(2, 1)$ तथा $C(4, 5)$ संरेख हैं।

यहाँ, $x_1 = x$, $y_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $x_3 = 4$ तथा $y_3 = 5$

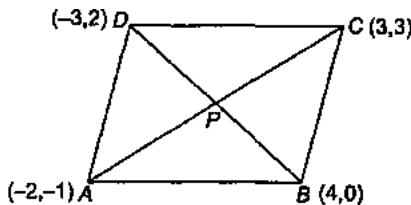
AB की प्रवणता $= BC$ की प्रवणता

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\
 \Rightarrow & \frac{1 + 1}{2 - x} = \frac{5 - 1}{4 - 2} & \left(\because \text{रेखा की प्रवणता } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \\
 \Rightarrow & \frac{2}{2 - x} = \frac{4}{2} \\
 \Rightarrow & 2 - x = 1 \\
 \Rightarrow & x = 2 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

प्रश्न 9. दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिंदु $(-2, -1), (4, 0), (3, 3)$ और $(-3, 2)$ समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

अवधारणा का प्रयोग करेंगे कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हल माना $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है जिसके शीर्ष
 $(x_1, y_1) \rightarrow A (-2, -1), (x_2, y_2) \rightarrow B (4, 0), (x_3, y_3) \rightarrow C (3, 3)$
 तथा $(x_4, y_4) \rightarrow (-3, 2)$ हैं।



$$AC \text{ का मध्य-बिंदु} = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 3}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$\left[\because \text{दो बिंदुओं का मध्य-बिंदु} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \right]$

$$BD \text{ का मध्य-बिंदु} = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2} \right) = \left(\frac{4 - 3}{2}, \frac{0 + 2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\therefore AC \text{ का मध्य-बिंदु} = BD \text{ का मध्य-बिंदु}$$

$\therefore ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 10. X -अक्ष और $(3, -1)$ और $(4, -2)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

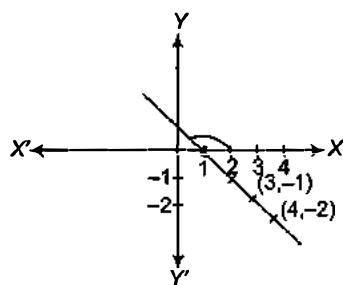
जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब उनको मिलाने वाली रेखा का X -अक्ष से कोण ज्ञात करने

के लिए निम्न सूत्र प्रयोग करते हैं, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$

हल दिया है, $(x_1, y_1) = (3, -1)$ और $(x_2, y_2) = (4, -2)$

$$\text{रेखा की प्रवणता, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 + 1}{4 - 3} = -1$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{-1}{1} \Rightarrow \tan \theta = -1 \\ \Rightarrow \tan \theta &= -\tan 45^\circ \quad (\because 1 = \tan 45^\circ) \\ \Rightarrow \tan \theta &= \tan (180^\circ - 45^\circ) \\ &\quad [\because \tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta] \\ \Rightarrow \tan \theta &= \tan 135^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ \end{aligned}$$



प्रश्न 11. एक रेखा का ढाल, दूसरी रेखा के ढाल का दोगुना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है, तो रेखाओं का ढाल ज्ञात कीजिए।

यदि m_1 तथा m_2 रेखाओं की प्रवणताएँ हैं, तब दोनों रेखाओं के मध्य कोण की स्पर्शज्या

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \text{ होती है।}$$

हल माना पहली रेखा की प्रवणता m है, तब प्रश्नानुसार, दूसरी रेखा की प्रवणता $2m$ होगी। दिया है कि, दोनों रेखाओं के मध्य कोण की स्पर्शज्या $\tan\theta = \frac{1}{3}$ है।

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left| \frac{m - 2m}{1 + m \times 2m} \right| \Rightarrow \frac{1}{3} = \left| \frac{-m}{1 + 2m^2} \right| \\ \Rightarrow \quad & (1 + 2m^2) = 3m \Rightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0 \\ \text{उपरोक्त समीकरण का गुणनखंड विधि द्वारा, मध्य-पद को तोड़ने पर,} \\ \Rightarrow \quad & 2m^2 - 2m - m + 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2m(m - 1) - 1(m - 1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (2m - 1)(m - 1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2m - 1 = 0 \text{ या } m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, m = 1 \end{aligned}$$

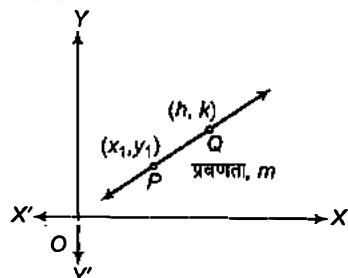
प्रश्न 12. एक रेखा (x_1, y_1) और (h, k) से जाती है। यदि रेखा का ढाल m है, तो दिखाइए कि

$$k - y_1 = m(h - x_1)$$

यदि दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब उन बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ होती है। इस अवधारणा का प्रयोग करके सरल करेंगे।}$$

हल माना दिए गए बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(h, k)$ हैं।



तब,

$$\text{प्रवणता, } m = \frac{k - y_1}{h - x_1} \quad \left(\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

हम जानते हैं कि यदि एक बिंदु तथा प्रवणता ज्ञात हो, तब रेखा की समीकरण निम्न होती है

$$k - y_1 = m(h - x_1)$$

प्रश्न 13. यदि तीन बिंदु $(h, 0), (a, b)$ और $(0, k)$ एक रेखा पर हैं, तो दिखाइए कि

$$\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$$

हल दिए गए बिंदु $A(h, 0), B(a, b)$ तथा $C(0, k)$ हैं। यदि A, B तथा C संरेख हैं, तब

$$AB \text{ की प्रवणता} = BC \text{ की प्रवणता} = CA \text{ की प्रवणता}$$

माना $(x_1, y_1) \rightarrow A(h, 0), (x_2, y_2) \rightarrow B(a, b), (x_3, y_3) \rightarrow C(0, k)$

अब, AB की प्रवणता $= BC$ की प्रवणता $= CA$ की प्रवणता

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}, \quad \frac{b - 0}{a - h} = \frac{k - b}{0 - a} = \frac{0 - k}{h - 0}$$

प्रथम दो पद लेने पर,

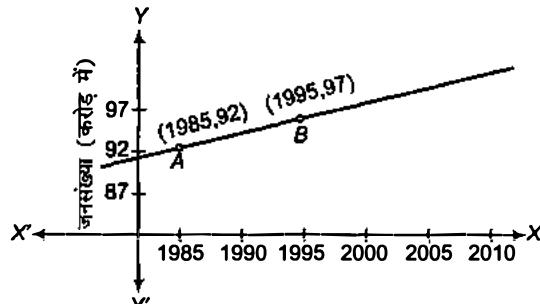
$$\Rightarrow \frac{b}{a - h} = \frac{k - b}{-a} \Rightarrow -ab = (a - h)(k - b)$$

$$\Rightarrow -ab = ak - ab - hk + bh \Rightarrow ak + bh = hk$$

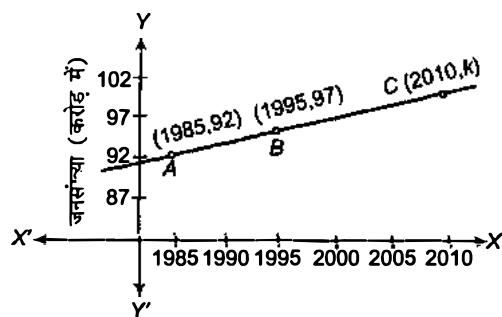
प्रत्येक पद को (hk) द्वारा भाग देने पर,

$$\Rightarrow \frac{ak}{hk} + \frac{bh}{hk} = \frac{hk}{hk} \Rightarrow \frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1 \quad (\text{यही सिद्ध करना था!})$$

प्रश्न 14. जनसंख्या और वर्ष के निम्नलिखित लेखाचित्र पर विचार कीजिए। रेखा AB का ढाल ज्ञात कीजिए और इसके प्रयोग से बताइए कि वर्ष 2010 में जनसंख्या कितनी होगी?



हल माना वर्ष 2010 में जनसंख्या k करोड़ होगी। चूंकि A, B तथा C संरेख हैं।



$$\begin{aligned}
 & \therefore AB \text{ की प्रवणता} = BC \text{ की प्रवणता} \\
 \Rightarrow & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\
 \Rightarrow & \frac{97 - 92}{1995 - 1985} = \frac{k - 97}{2010 - 1995} \\
 & (\because x_1 = 1985, x_2 = 1995, x_3 = 2010, y_1 = 92, y_2 = 97, y_3 = k) \\
 \Rightarrow & \frac{5}{10} = \frac{k - 97}{15} \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2} = \frac{k - 97}{15} \\
 \Rightarrow & k - 97 = \frac{15}{2} \\
 \Rightarrow & k = 97 + \frac{15}{2} = 97 + 7.5 = 104.5
 \end{aligned}$$

अतः AB की प्रवणता $= \frac{1}{2}$
तथा वर्ष 2010 में 'जनसंख्या' $= 104.5$ करोड़

प्रश्नावली 10.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 8) रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है

एक सरल रेखा को अद्वितीय रूप से ज्ञात करते हैं, यदि

(i) ये एक दी हुई प्रवणता के साथ एक दिए हुए बिंदु से होकर गुजरती है अर्थात्

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(ii) ये दो बिंदुओं से होकर गुजरती है अर्थात् $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

प्रश्न 1. X और Y -अक्षों के समीकरण लिखिए।

हल X -अक्ष पर कोई बिंदु $(x, 0)$ है चूंकि X -अक्ष पर Y -निर्देशांक शून्य होता है।

$\therefore X$ -अक्ष पर प्रवणता $m = 0$ है।

\therefore रेखा का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 0 = 0(x - x)$ $(\because x_1 = x, y_1 = 0)$

$\Rightarrow y = 0$

अतः x -अक्ष की समीकरण, $y = 0$

इसी प्रकार, हम y -अक्ष की समीकरण को ज्ञात कर सकते हैं

$$x = 0$$

प्रश्न 2. ढाल $\frac{1}{2}$ और बिंदु $(-4, 3)$ से जाने वाली।

हल एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण है,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\begin{aligned}
 &\text{यहाँ, } (x_1, y_1) = (-4, 3) \text{ तथा } m = \frac{1}{2} \\
 \therefore &y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4) \\
 \Rightarrow &2y - 6 = x + 4 \\
 \Rightarrow &x - 2y + 10 = 0
 \end{aligned}$$

प्रश्न 3. बिंदु $(0, 0)$ से जाने वाली और ढाल m वाली।

हल यहाँ, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, प्रवणता $= m$

एक बिंदु के रूप में रेखा की प्रवणता,

$$\begin{aligned}
 &y - y_1 = m(x - x_1) \\
 \Rightarrow &y - 0 = m(x - 0) \\
 \Rightarrow &y = mx
 \end{aligned}$$

प्रश्न 4. बिंदु $(2, 2\sqrt{3})$ से जाने वाली और x -अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।

हल यहाँ, $(x_1, y_1) = (2, 2\sqrt{3})$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow &m = \tan 75^\circ \\
 &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\
 &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \quad \left[\because \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} \quad [\text{अंश तथा हर में } (\sqrt{3} + 1) \text{ द्वारा गुण करने पर}]$$

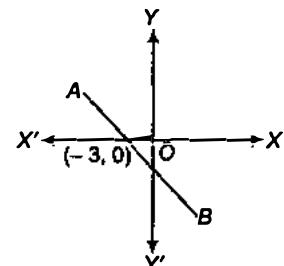
$$\Rightarrow m = \frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned}
 &y - y_1 = m(x - x_1) \\
 \Rightarrow &y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})(x - 2) \\
 \Rightarrow &y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})x - 2(2 + \sqrt{3}) \\
 \Rightarrow &y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})x - 4 - 2\sqrt{3} \\
 \Rightarrow &(2 + \sqrt{3})x - y - 4 = 0
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5. मूलबिंदु के बाईं और x -अक्ष को 3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल 2 वाली।

हल चूंकि रेखा X -अक्ष को मूलबिंदु के बाईं और प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि यह ऋणात्मक x -अक्ष पर प्रतिच्छेदित करती है। स्पष्ट है कि रेखा AB बिंदु $(-3, 0)$ से होकर गुजरती है तथा प्रवणता $m = -2$ रखती है।



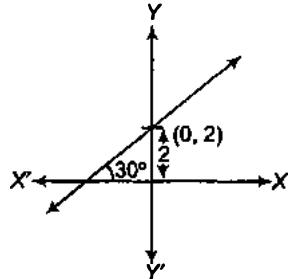
एक बिंदु के रूप में रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ \Rightarrow & y - 0 = -2(x + 3) \\ \Rightarrow & y = -2x - 6 \\ \Rightarrow & 2x + y + 6 = 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 6. मूलबिंदु से ऊपर Y-अक्ष को 2इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और X-अक्ष की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।

हल वृँकि रेखा Y-अक्ष को मूलबिंदु से ऊपर की ओर प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि वह धनात्मक Y-अक्ष पर प्रतिच्छेदित करती है।

$$\begin{aligned} m &= \tan 30^\circ \\ m &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore \text{रेखा का समीकरण, } & y = mx + c \\ & y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2 \\ \Rightarrow & y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \\ \Rightarrow & \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3} \\ \Rightarrow & x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$



प्रश्न 7. बिंदुओं $(-1, 1)$ और $(2, -4)$ से जाते हुए।

हल दिए गए बिंदु $A(-1, 1)$ तथा $B(2, -4)$ हैं, तब रेखा AB का समीकरण,

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ \Rightarrow y - 1 &= \frac{-4 - 1}{2 + 1}(x + 1) \quad (\because x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = -4) \\ \Rightarrow y - 1 &= \frac{-5}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 3 = -5x - 5 \\ \Rightarrow 5x + 3y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

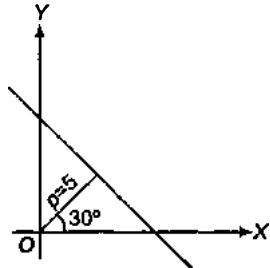
प्रश्न 8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूलबिंदु से लांबिक दूरी 5 इकाई और लंब, धन X-अक्ष से 30° का कोण बनाती है।

लंब रूप में रेखा का समीकरण $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, जहाँ p मूलबिंदु से दी गई रेखा पर लंबवत् दूरी है तथा α , X-अक्ष की धन दिशा से बनाया गया कोण है।

हल यहाँ, $p = 5$ तथा $\alpha = 30^\circ$

अतः लंब रूप में रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \\ \therefore & x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 5 \\ \Rightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ \Rightarrow & \sqrt{3}x + y = 10 \end{aligned}$$



प्रश्न 9. $\triangle PQR$ के शीर्ष $P(2, 1)$, $Q(-2, 3)$ और $R(4, 5)$ हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वग्रथम, हम माध्यिका का दूसरा निर्देशांक, मध्य-बिंदु सूत्र के द्वारा ज्ञात करेंगे, जो शीर्ष R के विपरीत भुजा पर है। तत्पश्चात् निम्न रेखा की समीकरण का प्रयोग करेंगे

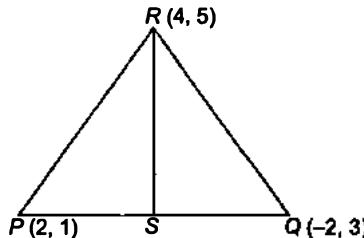
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

हल चूँकि माध्यिका शीर्ष से विपरीत भुजा को समद्विभाजित करती है अर्थात् S , PQ का मध्य-बिंदु होगा।

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = \left(0, \frac{4}{2} \right) = (0, 2) \quad (\because x_1 = 2, y_1 = 1, x_2 = -2, y_2 = 3) \end{aligned}$$

\therefore रेखा RS का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा}$$



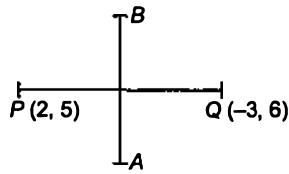
$$\begin{aligned} \Rightarrow y - 5 &= \frac{2 - 5}{0 - 4} (x - 4) \quad (\because x_1 = 4, y_1 = 5, x_2 = 0, y_2 = 2) \\ \Rightarrow y - 5 &= \frac{-3}{-4} (x - 4) \\ \Rightarrow 4y - 20 &= 3x - 12 \\ \Rightarrow 3x - 4y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 10. $(-3, 5)$ से होकर जाने वाली और बिंदु $(2, 5)$ और $(-3, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वग्रथम, हम आवश्यक रेखा की प्रवणता (m) ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् निम्न रेखा की समीकरण का प्रयोग करेंगे,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

हल माना बिंदु P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः $(2, 5)$ तथा $(-3, 6)$ हैं, हमें AB की समीकरण ज्ञात करनी है।



माना AB की प्रवणता m है।

चूँकि

$$AB \perp PQ$$

$$\therefore AB \text{ की प्रवणता} \times PQ \text{ की प्रवणता} = -1 \quad (\because m_1 \times m_2 = -1)$$

$$\Rightarrow m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$\Rightarrow m \times \frac{6 - 5}{-3 - 2} = -1 \quad \left(\because PQ \text{ की प्रवणता} = \frac{6 - 5}{-3 - 2} \right)$$

$$\Rightarrow m \times \frac{1}{-5} = -1$$

$$\Rightarrow m = 5$$

\therefore रेखा AB का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 5(x + 3)$$

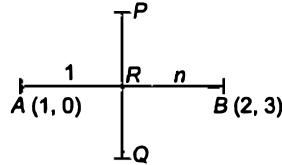
$$(\because x_1 = -3, y_1 = 5)$$

$$\Rightarrow y - 5 = 5x + 15$$

$$\Rightarrow 5x - y + 20 = 0$$

प्रश्न 11. एक रेखा $(1, 0)$ तथा $(2, 3)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड पर लंब है तथा उसको $1:n$ के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल माना दिए हुए बिंदु A तथा B के निर्देशांक क्रमशः $(1, 0)$ तथा $(2, 3)$ हैं। माना रेखा PQ , रेखा AB को अनुपात $1:n$ में बिंदु R पर विभक्त करती है।



अंतः विभाजन सूत्र से,

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{1 \times x_2 + n \times x_1}{1+n}, \frac{1 \times y_2 + n \times y_1}{1+n} \right) \\ &= \left(\frac{1 \times 2 + n \times 1}{1+n}, \frac{1 \times 3 + n \times 0}{1+n} \right) \quad (\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3) \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{1+n} \right) \end{aligned}$$

तथा

$$PQ \perp AB$$

माना रेखा PQ की प्रवणता m है।

$$\begin{aligned}\therefore \quad PQ \text{ रेखा की प्रवणता} \times AB \text{ रेखा की प्रवणता} &= -1 \quad (\because m_1 \times m_2 = -1) \\ \Rightarrow \quad m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= -1 \\ \Rightarrow \quad m \times \frac{3 - 0}{2 - 1} &= -1 \quad (\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3) \\ \Rightarrow \quad m \times 3 &= -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

अब, रेखा PQ का समीकरण,

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा} \\ \Rightarrow \quad y - \frac{3}{1+n} &= -\frac{1}{3} \left(x - \frac{n+2}{n+1} \right) \quad \left[\because R \left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{1+n} \right) = (x_1, y_1) \right] \\ \Rightarrow \quad \frac{3(n+1)y - 9}{1+n} &= -x(n+1) + (n+2) \\ \Rightarrow \quad 3(n+1)y - 9 &= -x(n+1) + (n+2) \\ \Rightarrow \quad x(n+1) + 3(n+1)y &= n+2+9 \\ \Rightarrow \quad x(n+1) + 3(n+1)y &= n+11\end{aligned}$$

प्रश्न 12. एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांकों से समान अंतःखंड काटती है और बिंदु $(2, 3)$ से जाती है।

रेखा का अंतःखंड रूप में समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ होता है।

हल रेखा का अंतःखंड रूप में समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots(i)$$

चूंकि रेखा निर्देशांकों से समान अंतःखंड काटती है अर्थात्

$$\begin{aligned}\therefore \text{समी (i) से,} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} &= 1 \\ \Rightarrow \quad x + y &= a \quad \dots(ii)\end{aligned}$$

रेखा (ii) बिंदु $(2, 3)$ से होकर गुजरती है अर्थात् ये रेखा (ii) को संतुष्ट करेगी।

$$\Rightarrow \quad 2 + 3 = a \Rightarrow a = 5$$

a का मान समी (ii) में रखने पर हम पाते हैं,

$$x + y = 5$$

प्रश्न 13. बिंदु $(2, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग 9 है।

हल अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \quad \dots(i) \\ \text{दिया है,} \quad a + b &= 9 \quad \dots(ii)\end{aligned}$$

चूंकि रेखा (i) बिंदु (2, 2) से होकर गुजरती है अर्थात् ये रेखा (i) को संतुष्ट करेगी अर्थात् सभी (i) में $x = 2$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 \quad \dots \text{(iii)}$$

a तथा b के मान ज्ञात करने के लिए सभी (ii) तथा (iii) को हल करने पर,

सभी (ii) से, $b = 9 - a$ सभी (iii) में रखने पर हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{9-a} = 1 \\ & \Rightarrow 2(9-a) + 2a = a(9-a) \\ & \Rightarrow 18 - 2a + 2a = 9a - a^2 \\ & \Rightarrow a^2 - 9a + 18 = 0 \\ & \text{गुणनखंड विधि से मध्य पद को विभक्त करने पर,} \\ & \Rightarrow a^2 - 6a - 3a + 18 = 0 \\ & \Rightarrow a(a-6) - 3(a-6) = 0 \\ & \Rightarrow (a-6)(a-3) = 0 \\ & \Rightarrow a = 6 \text{ या } 3 \Rightarrow b = 3 \text{ या } 6 \end{aligned}$$

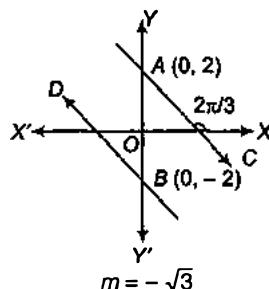
अतः सभी (i) से,

$$\begin{aligned} & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \\ & \Rightarrow 3x + 6y = 18 \\ & \text{या} \quad 6x + 3y = 18 \\ & \Rightarrow x + 2y = 6 \\ & \text{या} \quad 2x + y = 6 \quad (3 \text{ से भाग करने पर}) \end{aligned}$$

प्रश्न 14. बिंदु (0, 2) से जाने वाली और घन x-अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का

समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समांतर और Y-अक्ष को मूलबिंदु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \therefore m &= \tan \theta = \tan \frac{2\pi}{3} \\ &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} \quad [\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta] \end{aligned}$$



अतः बिंदु $A(0, 2)$ से होकर जाने वाली रेखा AC का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

$$\Rightarrow y - 2 = -\sqrt{3}(x - 0) \quad (\because x_1 = 0, y_1 = 2)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 2 = 0$$

तथा रेखा BD , Y -अक्ष के नीचे प्रतिच्छेदित करती है। इसका अर्थ है कि Y का निर्देशांक ऋणात्मक तथा X का निर्देशांक शून्य है अर्थात् बिंदु $(0, -2)$ है।

अतः बिंदु $B(0, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$\Rightarrow y + 2 = -\sqrt{3}(x - 0) \quad [\because y - y_1 = m(x - x_1)]$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + y + 2 = 0$$

प्रश्न 15. मूलबिंदु से किसी रेखा पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु $(-2, 9)$ पर मिलता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हमें रेखा PQ का समीकरण ज्ञात करना है, जिसके लिए हमें PQ की प्रवणता ज्ञात करनी है।

हल चूँकि $PQ \perp OR$

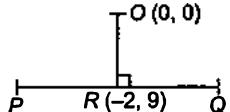
$$\therefore PQ \text{ की प्रवणता } \times OR \text{ की प्रवणता } = -1 \quad (\because m_1 \times m_2 = -1)$$

$$\Rightarrow m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$\Rightarrow m \times \frac{9 - 0}{-2 - 0} = -1 \quad (\because x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = -2, y_2 = 9)$$

$$\Rightarrow m \times \frac{9}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow m = \frac{2}{9}$$



अब, PQ का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$\Rightarrow y - 9 = \frac{2}{9}(x + 2) \quad (\because x_1 = -2, y_1 = 9)$$

$$\Rightarrow 9y - 81 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2x - 9y + 85 = 0$$

प्रश्न 16. ताँबे की छड़ की लंबाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि $L = 124.942$ जब $C = 20$ और $L = 125.134$ जब $C = 110$ हो, तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल दिया है, $L = 124.942$ जब $C = 20$ तथा $L = 125.134$ जब $C = 110$

\therefore निर्देशांक रूप में $(20, 124.942)$ तथा $(110, 125.134)$ दो बिंदु हैं।

रेखीय फलन का समीकरण अर्थात् रेखा को इस प्रकार ले सकते हैं,

$$L - L_1 = \frac{L_2 - L_1}{C_2 - C_1} (C - C_1) \quad \left[\because y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right]$$

$$\Rightarrow L - 124.942 = \frac{125.134 - 124.942}{110 - 20} (C - 20)$$

$$\Rightarrow L - 124.942 = \frac{0.192}{90} (C - 20)$$

$$\Rightarrow L = \frac{0.192}{90} (C - 20) + 124.942$$

प्रश्न 17. किसी दूध घंडार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लीटर दूध ₹ 14 प्रति लीटर के भाव से और 1220 लीटर दूध ₹ 16 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा मांग के मध्य के संबंध को रैखिक मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध ₹ 17 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है?

हल माना विक्रय मूल्य तथा मांग (लीटर) क्रमित युग्म (x, y) में निरूपित है, जहाँ ₹ x प्रति लीटर तथा y दूध की मात्रा (लीटर में) निरूपित करता है। दिया है, $(14, 980)$ तथा $(16, 1220)$ दो बिंदुओं के निर्देशांक हैं।

माना रेखीय संबंध अर्थात् रेखीय समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 980 = \frac{1220 - 980}{16 - 14} (x - 14)$$

$$\Rightarrow y - 980 = \frac{240}{2} (x - 14)$$

$$(\because x_1 = 14, y_1 = 980, x_2 = 16, y_2 = 1220)$$

$$\Rightarrow y - 980 = 120(x - 14)$$

$$\Rightarrow y - 980 = 120x - 120 \times 14$$

$$\Rightarrow 120x - y = 1680 - 980$$

$$\Rightarrow 120x - y = 700$$

जब मूल्य $x = 17$, तब

$$120 \times 17 - y = 700$$

$$\Rightarrow y = 2040 - 700$$

$$\Rightarrow y = 1340$$

अतः वह 1340 लीटर दूध प्रति सप्ताह ₹ 17 लीटर की दर से बेचेगा।

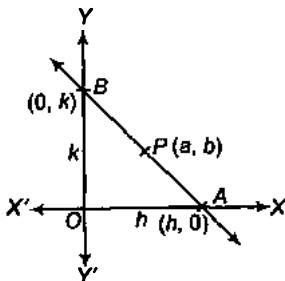
प्रश्न 18. अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य-बिंदु $P(a, b)$ है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है।

रेखा का अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण,

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1 \quad \dots(i)$$

जहाँ, h तथा k रेखा द्वारा क्रमशः X -अक्ष तथा Y -अक्ष पर बनाए अंतःखंड हैं।



$$AB \text{ का मध्य-बिंदु} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{h+0}{2}, \frac{0+k}{2} \right)$$

(∵ $x_1 = h, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = k$)

∴ $P(a, b)$, रेखा AB का मध्य-बिंदु है अर्थात्

$$\frac{h+0}{2} = a \quad \text{तथा} \quad \frac{0+k}{2} = b$$

$\Rightarrow \quad h = 2a \quad \text{तथा} \quad k = 2b$

सभी (i) में h तथा k के मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \quad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 19. अक्षों के बीच रेखाखण्ड को बिंदु $R(h, k), 1:2$ के अनुपात में विभक्त करता है।

रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

रेखा के अंतःखण्ड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करके इसे सरल करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots(i)$$

माना बिंदु $R(h, k)$, रेखा AB को अनुपात $1:2$ में विभक्त करता है।

अतः विभाजन सूत्र द्वारा,

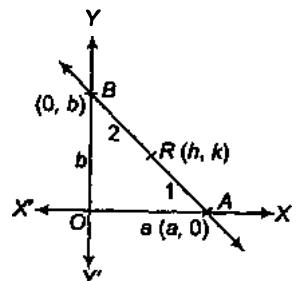
$$R(h, k) = \left(\frac{1x_2 + 2x_1}{1+2}, \frac{1y_2 + 2y_1}{1+2} \right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}, k = \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}$$

[∵ बिंदु $P(x, y)$, रेखा AB जिसके निर्देशांक क्रमशः $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ हैं, को अनुपात $m:n$ में अंतः विभाजित करता है।]

$$\therefore P(x, y) = \left[\left(\frac{nx_2 + mx_1}{n+m}, \frac{ny_2 + my_1}{n+m} \right) \right]$$

$$\Rightarrow h = \frac{2a}{3}, k = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{2}, b = 3k$$



समी (i) में a तथा b के मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} \frac{x}{3h} + \frac{y}{3k} &= 1 \Rightarrow \frac{2x}{3h} + \frac{y}{3k} = 1 \\ \Rightarrow \frac{2kx + hy}{3hk} &= 1 \Rightarrow 2kx + hy = 3hk \end{aligned}$$

प्रश्न 20. रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिंदु $(3, 0)$, $(-2, -2)$ और $(8, 2)$ हैं।

किहीं दो बिंदुओं को लेकर एक रेखा की समीकरण ज्ञात करेंगे। अब, यदि तीसरा बिंदु इस रेखा की समीकरण को संतुष्ट करेगा, तब तीनों बिंदु सरेखीय होंगे।

हल माना दिए गए बिंदु $A(3, 0)$, $B(-2, -2)$ तथा $C(8, 2)$ हैं।
रेखा AB का समीकरण,

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 0 &= \frac{-2 - 0}{-2 - 3}(x - 3) \quad (\because x_1 = 3, y_1 = 0, x_2 = -2, y_2 = -2) \\ \Rightarrow y &= \frac{-2}{-5}(x - 3) \\ \Rightarrow 5y &= 2x - 6 \\ \Rightarrow 2x - 5y - 6 &= 0 \quad \dots(i) \end{aligned}$$

समी (i) में बिंदु $C(8, 2)$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} 2 \times 8 - 5 \times 2 - 6 &= 0 \\ \Rightarrow 16 - 10 - 6 &= 0 \\ \Rightarrow 16 - 16 &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

अतः बिंदु A, B तथा C सरेखीय हैं।

प्रश्नावली 10.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित समीकरणों को ढाल, अंतःखंड रूप में रूपांतरित कीजिए और उनके ढाल तथा y -अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

- (a) $x + 7y = 0$ (b) $6x + 3y - 5 = 0$ (c) $y = 0$

रेखा का प्रवणता रूप में समीकरण का प्रयोग करेंगे तत्पश्चात् m तथा c का मान ज्ञात करेंगे।

हल (a) दिया है, $x + 7y = 0 \Rightarrow 7y = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + 0$

$y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$m = -\frac{1}{7}, \quad c = 0$$

(b) दिया है, $6x + 3y - 5 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3y = -6x + 5 \\ \Rightarrow \quad y = \frac{-6}{3}x + \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -2x + \frac{5}{3}$$

$y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$m = -2, c = \frac{5}{3}$$

(c) दिया है, $y = 0$

$$\Rightarrow \quad y = 0x + 0 \\ y = mx + c \text{ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,} \\ \Rightarrow \quad m = 0, c = 0$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों को अंतःखंड रूप में रूपांतरित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

(a) $3x + 2y - 12 = 0$ (b) $4x - 3y = 6$ (c) $3y + 2 = 0$

दी हुई समीकरण को अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ में बदलेंगे, जहाँ a तथा b अक्षों पर अंतःखंड हैं।

हल (a) दिया है, $3x + 2y = 12$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर, $a = 4, b = 6$

$$\therefore X\text{-अंतःखंड} = 4 \text{ तथा } Y\text{-अंतःखंड} = 6$$

(b) दिया है, $4x - 3y = 6$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x}{6} - \frac{3y}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{6}{4}} - \frac{y}{\frac{6}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{(-2)} = 1$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं

$$X\text{-अंतःखंड} = \frac{3}{2} \text{ तथा } Y\text{-अंतःखंड} = -2$$

(c) दिया है, $3y + 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3} \quad \text{या} \quad 0x + \frac{y}{(-2/3)} = 1$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$Y\text{-अक्ष के साथ अंतःखंड} = -\frac{2}{3} \text{ तथा } x\text{-अक्ष पर कोई अंतःखंड नहीं है}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित समीकरणों को लंब रूप में रूपांतरित कीजिए। उनकी मूलबिंदु से लांबिक दूरियाँ और लंब तथा धनात्मक अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

$$(a) x - \sqrt{3}y + 8 = 0 \quad (b) y - 2 = 0 \quad (c) x - y = 4$$

$ax + by = c$ के रूप की कोई भी समीकरण को लंब रूप ($x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$) में प्रत्येक पद को $\sqrt{a^2 + b^2}$ द्वारा भाग देने से रूपांतरित किया जा सकता है।

$$\text{अर्थात् } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

हल (a) दी गई रेखा का समीकरण है,

$$\begin{aligned} & x - \sqrt{3}y + 8 = 0 \\ \Rightarrow & x - \sqrt{3}y = -8 \\ \Rightarrow & -x + \sqrt{3}y = 8 \end{aligned} \quad \dots(i)$$

अब, $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ द्वारा भाग देने पर हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ & -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{8}{2} \\ \Rightarrow & -\cos 60^\circ x + \sin 60^\circ y = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\because x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \text{ के रूप में रूपांतरित करने पर}) \\ & (\because \cos x \text{ ऋणात्मक तथा } \sin x \text{ धनात्मक है जोकि द्वितीय चतुर्थांश में ही संभव है) \\ \Rightarrow & x\cos(180^\circ - 60^\circ) + y\sin(180^\circ - 60^\circ) = 4 \\ \Rightarrow & x\cos 120^\circ + y\sin 120^\circ = 4 \\ [\because & \cos(180^\circ - \theta) = -\sin\theta \\ \text{तथा} & \sin(180^\circ - \theta) = \cos\theta \end{aligned}$$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$\alpha = 120^\circ \text{ तथा } p = 4$$

(b) दी गई रेखा का समीकरण है,

$$y - 2 = 0 \quad \dots(ii)$$

अब, $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ द्वारा भाग करने पर,

अर्थात् $\sqrt{0+1^2} = 1$ हम पाते हैं,

$$\frac{0x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\text{या } x\cos 90^\circ + y\sin 90^\circ = 2$$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$\alpha = 90^\circ \text{ और } p = 2$$

(c) दी गई रेखा का समीकरण

$$\begin{aligned} & x - y = 4 \\ & \text{उपरोक्त समीकरण को } \sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2} \text{ द्वारा भाग करने पर,} \\ & \text{अर्थात् } \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \text{ हम पाते हैं,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{4}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow & \cos 45^\circ x - \sin 45^\circ y = 2\sqrt{2} \\
 (\because \cos x & \text{धनात्मक तथा } \sin x \text{ऋणात्मक है, जोकि केवल चतुर्थ चतुर्थांश में ही संभव है}) \\
 \Rightarrow & x \cos(360^\circ - 45^\circ) + y \sin(360^\circ - 45^\circ) = 2\sqrt{2} \\
 & [\because \cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ तथा } \sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta] \\
 \Rightarrow & x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ = 2\sqrt{2} \\
 x \cos \alpha + y \sin \alpha & = p \text{ के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,} \\
 \alpha & = 315^\circ \text{ तथा } p = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

नोट विद्यार्थी हमेशा याद रखें कि दी गई समीकरण का दायाँ पक्ष हमेशा धनात्मक होना जरूरी है क्योंकि लबवत् दूरी की लम्बाई ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

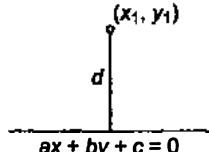
प्रश्न 4. बिंदु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x+6) = 5(y-2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 4 - 5) बिंदु (h, k) की रेखा $ax + by + c = 0$ से दूरी, $d = \frac{|ah + bk + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ है।

हल दी गई रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned}
 & 12(x+6) = 5(y-2) \\
 \Rightarrow & 12x + 72 = 5y - 10 \\
 \Rightarrow & 12x - 5y + 82 = 0 \\
 \text{अतः बिंदु } (-1, 1) \text{ से दूरी, } d &= \frac{|12 \times (-1) - 5 \times 1 + 82|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\because d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; x_1 = -1, y_1 = 1; a = 12, b = -5, c = 82 \right] \\
 & = \frac{|-12 - 5 + 82|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|82 - 17|}{\sqrt{169}} = \frac{65}{13} = 5
 \end{aligned}$$



प्रश्न 5. X -अक्ष पर बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरियाँ 4 इकाई हैं।

हल माना X -अक्ष पर कोई बिंदु $(h, 0)$ है, क्योंकि X -अक्ष पर Y -निर्देशांक शून्य होगा।

दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 12 \quad \dots(i)$$

\therefore बिंदु $(h, 0)$ की रेखा (i) से दूरी है,

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 4 &= \left| \frac{4 \times h + 3 \times 0 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| && (\because a = 4, b = 3, c = 12, x_1 = h, y_1 = 0) \\
 \Rightarrow \left| \frac{4h - 12}{5} \right| &= 4 \\
 \Rightarrow |4h - 12| &= 20 \\
 \Rightarrow 4h - 12 &= \pm 20 \\
 \text{धनात्मक चिन्ह लेने पर,} \\
 4h - 12 &= 20 \\
 \Rightarrow 4h &= 32 \\
 \Rightarrow h &= 8 \\
 \text{ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,} \\
 4h - 12 &= -20 \\
 \Rightarrow 4h &= -8 \\
 \Rightarrow h &= -2 \\
 \text{अतः } x\text{-अक्ष पर बिंदु } (8, 0) \text{ तथा } (-2, 0) \text{ हैं।}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 6. समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

$$(i) 15x + 8y - 34 = 0 \text{ और } 15x + 8y + 31 = 0$$

$$(ii) l(x + y) + p = 0 \text{ और } l(x + y) - r = 0$$

दो समांतर रेखाओं $ax + by + c = 0$ तथा $ax + by + d = 0$ के बीच की दूरी

$$\left| \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \text{ होती है।}$$

हल (i) दी गई रेखाएँ $15x + 8y - 34 = 0$ तथा $15x + 8y + 31 = 0$ समांतर हैं।

∴ दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{-34 - 31}{\sqrt{15^2 + 8^2}} \right| && (\because c = -34, d = 31, a = 15, b = 8) \\
 &= \frac{|-65|}{\sqrt{225 + 64}} = \frac{65}{\sqrt{289}} = \frac{65}{17} \text{ इकाई}
 \end{aligned}$$

(ii) दी गई रेखाएँ $lx + ly + h = 0$ तथा $lx + ly - r = 0$ समांतर हैं।

$$\therefore \text{अभीष्ट दूरी} = \left| \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{h + r}{\sqrt{l^2 + l^2}} \right| = \left| \frac{h + r}{\sqrt{2l}} \right| \quad (\because a = l, b = l, c = h, d = -r)$$

प्रश्न 7. रेखा $3x - 4y + 2 = 0$ के समांतर और बिंदु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

रेखा $ax + by + c = 0$ के समांतर कोई रेखा $ax + by + k = 0$ होती है अर्थात् केवल

अचर पद परिवर्तित होता है या $ax + by = k$

हल दी गई रेखा का समीकरण है,

$$3x - 4y + 2 = 0$$

...(i)

समी (i) के समांतर रेखा का समीकरण है,

$$3x - 4y + k = 0 \quad \dots(ii)$$

∴ रेखा (ii) बिंदु (-2, 3) से होकर गुजरती है अर्थात् समी (ii) में $x = -2$ व $y = 3$ रखने पर,

$$\begin{aligned} \therefore & 3(-2) - 4 \times 3 + k = 0 \\ \Rightarrow & -6 - 12 + k = 0 \\ \Rightarrow & k = 18 \end{aligned}$$

समी (i) में $k = 18$ रखने पर हम पाते हैं,

$$3x - 4y + 18 = 0$$

प्रश्न 8. रेखा $x - 7y + 5 = 0$ पर लंब और x -अंतःखंड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

रेखा $ax + by + c = 0$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण $bx - ay + k = 0$ या $bx - ay = k$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी गई रेखा का समीकरण है,

$$x - 7y + 5 = 0 \quad \dots(i)$$

समी (i) के लम्बवत् रेखा का समीकरण है,

$$7x + y + k = 0 \quad \dots(ii)$$

∴ रेखा (ii) बिंदु (3, 0) से होकर गुजरती है।

अर्थात् समी (ii) में $x = 3, y = 0$ रखने पर,

$$\begin{aligned} \therefore & 7 \times 3 + 0 + k = 0 \\ \Rightarrow & k = -21 \end{aligned}$$

समी (ii) में $k = -21$ रखने पर हम पाते हैं, $7x + y - 21 = 0$

प्रश्न 9. रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

दो रेखाओं $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए सूत्र

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

हल दी गई रेखाओं के समीकरण हैं,

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}x + y = 1 \\ \Rightarrow & y = -\sqrt{3}x + 1 \quad \text{तथा} \quad x + \sqrt{3}y = 1 \\ \Rightarrow & \sqrt{3}y = -x + 1 \\ \Rightarrow & y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के साथ तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} & m_1 = -\sqrt{3} \quad \text{तथा} \quad m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore & \tan \theta = \left| \frac{-\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)} \right| \quad \left[\because \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \left| \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1} \right| = \left| \frac{-3+1}{\sqrt{3}} \right|$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

प्रश्न 10. बिंदुओं $(h, 3)$ और $(4, 1)$ से जाने वाली रेखा, $7x - 9y - 19 = 0$ को समकोण पर प्रतिच्छेदित करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।

हल दो बिंदुओं $(h, 3)$ तथा $(4, 1)$ से जाने वाली रेखा के समीकरणों के लिए

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ का प्रयोग करने पर,}$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{1-3}{4-h} (x - h) \quad (\because x_1 = h, y_1 = 3, x_2 = 4, y_2 = 1)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{4-h} (x - h) \Rightarrow y - 3 = -\frac{2x}{4-h} + \frac{2h}{4-h}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2x}{4-h} + \left(3 + \frac{2h}{4-h} \right) \dots(i)$$

दी गई रेखा का समीकरण है,

$$7x - 9y - 19 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{9}x - \frac{19}{9} \dots(ii)$$

रेखाओं के समी (i) तथा (ii) की $y = mx + c$ के साथ तुलना करने पर,

$$\therefore m_1 = -\frac{2}{4-h} \text{ तथा } m_2 = \frac{7}{9}$$

\therefore रेखाएँ (i) तथा (ii) एक-दूसरे पर लंबवत् हैं अर्थात्

रेखा (i) की प्रवणता \times रेखा (ii) की प्रवणता $= -1$

$$\therefore m_1 m_2 = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{4-h} \times \frac{7}{9} = -1$$

$$\Rightarrow 14 = 9(4-h)$$

$$\Rightarrow 14 = 36 - 9h$$

$$\Rightarrow 9h = 22$$

$$\Rightarrow h = \frac{22}{9}$$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (x_1, y_1) से जाने वाली और रेखा $Ax + By + C = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

रेखा $Ax + By + C = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण $Ax + By + K = 0$ होता है।

हल दी गई रेखा की समीकरण है,

$$Ax + By + C = 0 \quad \dots(i)$$

सभी (i) के समांतर रेखा का समीकरण,

$$Ax + By + K = 0 \quad \dots(ii)$$

रेखा (ii) बिंदु (x_1, y_1) से होकर जाती है अर्थात् ये रेखा (ii) को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore Ax_1 + By_1 + K = 0 \Rightarrow K = -(Ax_1 + By_1)$$

K का मान सभी (ii) में रखने पर,

$$\Rightarrow Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$

$$\Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

प्रश्न 12. बिंदु $(2, 3)$ से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60° का कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।

यदि एक रेखा की ढाल 2 है, तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा रेखा l_1 का समीकरण, जहाँ $(x_1, y_1) = (2, 3)$ तथा $m = 2$ है।

$$\begin{aligned} & y - 3 = 2(x - 2) \\ \Rightarrow & y - 3 = 2x - 4 \\ \Rightarrow & 2x - y - 1 = 0 \\ \Rightarrow & y = 2x - 1 \end{aligned} \quad \dots(i)$$

यहाँ रेखा l_1 की प्रवणता है। $m_1 = 2$

माना रेखा l_2 की प्रवणता m है।

दिया है, $\theta = 60^\circ$

दो रेखाओं के मध्य कोण,

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \left| \frac{2 - m}{1 + 2m} \right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{2 - m}{1 + 2m} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{2 - m}{1 + 2m} = \pm \sqrt{3}$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर हम पाते हैं,

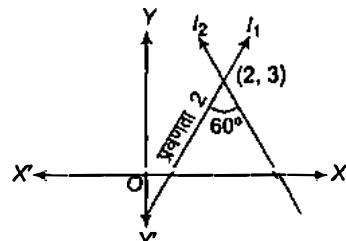
$$\frac{2 - m}{1 + 2m} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow 2 - m = \sqrt{3}(1 + 2m)$$

$$\Rightarrow 2 - m = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} = m(1 + 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}$$



पुनः ऋणात्मक चिन्ह लेने पर हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} \frac{2-m}{1+2m} &= -\sqrt{3} \\ \Rightarrow 2-m &= -\sqrt{3}(1+2m) \\ \Rightarrow 2-m &= -\sqrt{3}-2\sqrt{3}m \\ \Rightarrow m-2\sqrt{3}m &= \sqrt{3}+2 \\ \Rightarrow -m(2\sqrt{3}-1) &= (\sqrt{3}+2) \\ \Rightarrow m &= -\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right) \end{aligned}$$

अब, रेखा l_2 का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

$$\begin{aligned} y-3 &= \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}(x-2) && \left[\begin{array}{l} \text{जब } m = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \\ \text{तथा } x_1 = 2, y_1 = 3 \end{array} \right] \\ \Rightarrow y(1+2\sqrt{3})-3-6\sqrt{3} &= x(2-\sqrt{3})-4+2\sqrt{3} \\ \Rightarrow x(2-\sqrt{3})-y(1+2\sqrt{3})+8\sqrt{3}-1 &= 0 \\ \text{पुनः } y-3 &= -\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right)(x-2) && \left[\begin{array}{l} \text{जब } m = -\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right) \\ \text{तथा } x_1 = 2, y_1 = 3 \end{array} \right] \\ \Rightarrow y(2\sqrt{3}-1)-6\sqrt{3}+3 &= -(\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}+4 \\ \Rightarrow (2+\sqrt{3})x+(2\sqrt{3}-1)y-8\sqrt{3}-1 &= 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 13. बिंदुओं $(3, 4)$ और $(-1, 2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

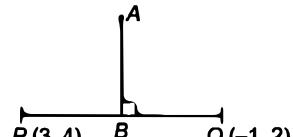
हल माना दिए गए बिंदु $P(3, 4)$ तथा $Q(-1, 2)$ हैं, तब B, PQ का मध्य-बिंदु है अर्थात्

$$B = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (1, 3)$$

($\because x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = -1, y_2 = 2$)

अब, $AB \perp PQ$, अर्थात् AB प्रवणता $\times PQ$ की प्रवणता $= -1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= -1 \\ \Rightarrow m \times \frac{2-4}{-1-3} &= -1 \\ \Rightarrow m \times \frac{-2}{-4} &= -1 \\ \Rightarrow m \times \frac{1}{2} &= -1 \\ \Rightarrow m &= -2 \end{aligned}$$



अब, AB रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा, जहाँ $(x_1, y_1) = (1, 3)$ तथा $m = -2$ हैं।

$$\begin{aligned} & y - 3 = -2(x - 1) \\ \Rightarrow & y - 3 = -2x + 2 \\ \Rightarrow & 2x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 14. बिंदु $(-1, 3)$ से रेखा $3x - 4y - 16 = 0$ पर डाले गए लंबपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

लंबपाद, दी गई रेखा तथा इस रेखा पर लंबवत् रेखा का प्रतिच्छेद बिंदु होता है।

हल दी गई रेखा AB का समीकरण है,

$$\begin{aligned} & 3x - 4y - 16 = 0 \\ \Rightarrow & y = \frac{3}{4}x - 4 \quad \dots(i) \end{aligned}$$

रेखा (i) की प्रवणता, $m_1 = \frac{3}{4}$

माना रेखा PQ की प्रवणता m है।

चूंकि $PQ \perp AB$

$\therefore PQ$ की प्रवणता $\times AB$ की प्रवणता $= -1$

$$\Rightarrow m \times \left(\frac{3}{4}\right) = -1 \quad (\because m_1 m_2 = -1)$$

$$\Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

अतः PQ रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा,}$$

जहाँ, $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ तथा $m = -\frac{4}{3}$ हैं।

$$\Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$$\Rightarrow 3y - 9 = -4x - 4$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \quad \dots(ii)$$

अब, Q के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए सभी (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$\text{सभी (i) से, } y = \frac{3}{4}x - 4$$

y का मान सभी (ii) में रखने पर हम पाते हैं,

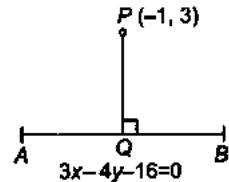
$$\Rightarrow 4x + 3\left(\frac{3}{4}x - 4\right) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + \frac{9x}{4} - 12 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25x}{4} = 17 \Rightarrow x = \frac{68}{25}$$

$$\therefore \text{सभी (i) से, } y = \frac{3}{4} \times \frac{68}{25} - 4 = \frac{3 \times 17}{25} - \frac{4}{1} = \frac{51}{25} - \frac{4}{1} = \frac{51 - 100}{25} = -\frac{49}{25}$$

अतः अभीष्ट प्रतिच्छेद बिंदु $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ हैं।



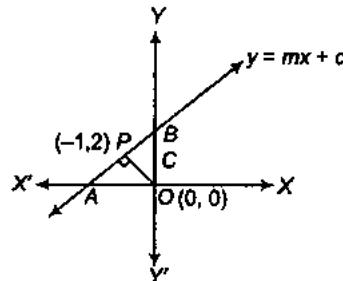
प्रश्न 15. मूलबिंदु से रेखा $y = mx + c$ पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु $(-2, 2)$ पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा $OP \perp$ रेखा AB

$$\begin{aligned} \therefore \quad OP \text{ की प्रवणता } \times AB \text{ की प्रवणता} &= -1 \\ \Rightarrow \quad \frac{2-0}{-1-0} \times m &= -1 \\ \Rightarrow \quad -2m &= -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

बिंदु $(-1, 2)$ भी रेखा को संतुष्ट करता है।

$$y = mx + c \quad \text{अर्थात् } 2 = m(-1) + c \quad (x = -1, y = 2 \text{ रखने पर})$$

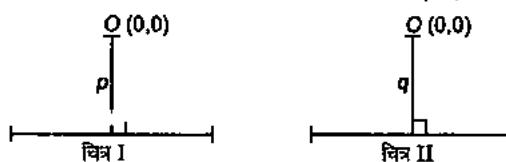


$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2 &= -\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ \text{अतः} \quad m &= \frac{1}{2}, \quad c = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

प्रश्न 16. यदि p और q क्रमशः मूलबिंदु से रेखाओं $x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta$ और $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = k$ पर लंब की संबाइयाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + 4q^2 = k^2$

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ पर लंबवत् दूरी $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ है।

हल



चित्र I के लिए,

$$x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta \quad \dots(i)$$

चित्र II के लिए,

$$x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = k \quad \dots(ii)$$

\therefore बिंदु $(0, 0)$ से सभी (i) पर लंबवत् दूरी हैं।

$$p = \frac{|0-0-k \cos 2\theta|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = k \cos 2\theta \quad \left[\because d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \dots(iii)$$

पुनः समी (ii) को इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = k \\
 \Rightarrow & x \sin\theta + y \cos\theta = k \cos\theta \sin\theta \\
 \Rightarrow & x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{k}{2} (2 \cos\theta \sin\theta) \\
 \Rightarrow & x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{k}{2} \sin 2\theta \\
 \Rightarrow & x \sin\theta + y \cos\theta - \frac{k}{2} \sin 2\theta = 0 \quad \dots(iv)
 \end{aligned}$$

अब, बिंदु (0, 0) से समी (iv) पर लंबवत् दूरी है,

$$\begin{aligned}
 q &= \left| \frac{0 + 0 - \frac{k}{2} \sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} \right| \\
 &(\because a = \sin\theta, b = \cos\theta, c = -\frac{k}{2} \sin 2\theta, x_1 = 0, y_1 = 0) \\
 \Rightarrow & q = \frac{k}{2} \sin 2\theta \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \quad \dots(v) \\
 \Rightarrow & 2q = k \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

समी (iii) तथा (v) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\begin{aligned}
 p^2 + 4q^2 &= k^2 \cos^2 2\theta + k^2 \sin^2 2\theta \\
 &= k^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) \\
 \therefore p^2 + 4q^2 &= k^2 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
 &\text{इति सिद्धम्}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 17. शीर्ष A(2, 3), B(4, -1) और C(1, 2) वाले $\triangle ABC$ के शीर्ष A से उसकी संमुख भुजा पर लंब डाला गया है। लंब की लंबाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम $m_1 m_2 = -1$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा रेखा की समीकरण को ज्ञात करेंगे।

हल दिया है कि $\triangle ABC$ के शीर्ष A(2, 3), B(4, -1) तथा C(1, 2) हैं।

\therefore रेखा $AD \perp$ रेखा BC

$\therefore AD$ की प्रवणता $\times BC$ की प्रवणता $= -1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= -1 \\
 \Rightarrow m \times \frac{2 + 1}{1 - 4} &= -1 \quad (\because x_1 = 4, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 2)
 \end{aligned}$$

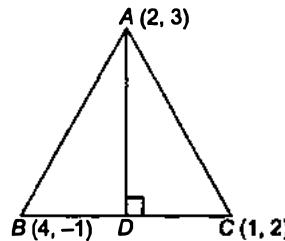
$$\Rightarrow m \times \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow m = 1$$

अतः $(y - y_1) = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा AD की समीकरण ज्ञात करते हैं, जहाँ $(x_1, y_1) = (2, 3)$ तथा $m = +1$ है।

$$\begin{aligned} & \Rightarrow y - 3 = 1(x - 2) \\ & \Rightarrow x - y - 2 + 3 = 0 \\ & \Rightarrow x - y + 1 = 0 \end{aligned}$$

अब, रेखा BC का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ है।}$$



$$y + 1 = \frac{2 + 1}{1 - 4} (x - 4) \quad (\because x_1 = 4, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 2)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{3}{-3} (x - 4)$$

$$\Rightarrow y + 1 = -x + 4 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$\therefore AD$ की लंबाई = बिंदु $(2, 3)$ से रेखा BC पर लंबवत् दूरी

अर्थात्

$$x + y - 3 = 0$$

$$= \sqrt{\frac{2+3-3}{\sqrt{1^2+1^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad \left[\because p = \sqrt{\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}} \right]$$

प्रश्न 18. यदि p मूलबिंदु से उस रेखा पर डाले लंब की लंबाई हो जिस पर अक्षों पर कटे

अंतःखंड a और b हों, तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा रेखा $ax + by + c = 0$ से बिंदु

(x_1, y_1) की लंबवत् दूरी $p = \sqrt{\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ का प्रयोग करेंगे।

हल अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned} & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ & \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \end{aligned}$$

इसकी मूलविंदु से दूरी,

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \Rightarrow \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हम पाते हैं।

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

इति सिद्धम्

इति सिद्धम्

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. k के मान ज्ञात कीजिए, जबकि रेखा $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$

- (a) X-अक्ष के समांतर है।
(b) Y-अक्ष के समांतर है।
(c) मूलबिंदु से जाती है।

हल दी गई रेखा का समीकरण $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$... (i)

- (a) जब रेखा (i) X -अक्ष के समांतर है, तब प्रवणता = 0

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{(k-3)}{(4-k^2)} = 0 \quad \left(\because \text{रेखा (i) की प्रवणता } = \frac{k-3}{4-k^2} \right)$$

$$\Rightarrow k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3$$

- (b) जब रेखा (i) Y-अक्ष के समांतर है, तब प्रणवता = $\infty = \frac{1}{0}$

अर्थात् $\frac{k-3}{4-k^2} = \frac{1}{0}$ $\left(\because \text{रेखा (i) की प्रवणता } = \frac{k-3}{4-k^2} \right)$

$$\Rightarrow 4 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

- (c) जब रेखा (i) मूलबिंदु $(0, 0)$, से होकर गुजरती है, तब ये इसे संतुष्ट करेगा।

$$0 - 0 + k^2 - 7k + 6 = 0 \quad [\text{सभी (i) में } x = 0, y = 0 \text{ रखने पर}]$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k - k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow k(k - 6) - 1(k - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (k - 6)(k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow k = 1, 6$$

प्रश्न 2. θ और p के मान ज्ञात कीजिए, यदि समीकरण $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ रेखा

$\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ का लंब रूप है।

हल दी गई रेखा का समीकरण, $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = -2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}x - y}{\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}} = 2 \quad \text{अर्थात् } \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \\
&\text{द्वारा उपरोक्त समीकरण को भाग करने पर,} \\
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{2}{2} \\
&\Rightarrow -\cos 30^\circ \cdot x - \sin 30^\circ \cdot y = 1 \quad (\because x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \text{ रूप में परिवर्तन के लिए}) \\
&\Rightarrow \cos(180^\circ + 30^\circ)x + \sin(180^\circ + 30^\circ)y = 1 \quad (\because \cos \theta \text{ तथा } \sin \theta \text{ दोनों तृतीय चतुर्थांश में ऋणात्मक होते हैं।) \\
&\Rightarrow (\cos 210^\circ)x + (\sin 210^\circ)y = 1 \\
&x \cos \theta + y \sin \theta = p \text{ के साथ तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है।} \\
&\theta = 210^\circ \text{ तथा } p = 1
\end{aligned}$$

प्रश्न 3. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और - 6 हैं।

$$\begin{aligned}
&\text{रेखा के अंतःखंड रूप } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।} \\
&\text{हल माना एक रेखा का अंतःखंड रूप } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ है।} \quad \dots(i) \\
&\text{दिया है,} \quad a + b = 1 \quad \dots(ii) \\
&\text{तथा} \quad ab = -6 \quad \dots(iii) \\
&a \text{ तथा } b \text{ के मान ज्ञात करने हेतु सभी (ii) तथा (iii) को हल करने पर,} \\
&\text{सभी (iii) से } b = \frac{-6}{a} \text{ का मान सभी (ii) में रखने पर,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a - \frac{6}{a} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{6}{a} = 1 \\
&\Rightarrow a^2 - 6 = a \\
&\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \\
&\Rightarrow a^2 - (3-2)a - 6 = 0 \\
&\Rightarrow a^2 - 3a + 2a - 6 = 0 \\
&\Rightarrow a(a-3) + 2(a-3) = 0 \\
&\Rightarrow (a+2)(a-3) = 0 \\
&\Rightarrow a = 3, -2; \quad b = -2, 3
\end{aligned}$$

सभी (i) में क्रमशः $a = 3, -2$ रखने पर हम अभीष्ट रेखाओं की समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \\
&\Rightarrow 2x - 3y = 6 \quad \text{या} \quad -3x + 2y = 6 \\
&\Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0 \quad \text{या} \quad 3x - 2y + 6 = 0
\end{aligned}$$

प्रश्न 4. y -अक्ष पर कौन-से बिंदु ऐसे हैं जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है।

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c$ की दूरी $\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ होती है।

हल हम जानते हैं कि y -अक्ष पर x -निर्देशांक शून्य होता है। माना y -अक्ष पर कोई बिंदु $(0, h)$ है।

दी हुई रेखा का समीकरण, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ या $4x + 3y = 12$

\Rightarrow बिंदु $(0, h)$ से रेखा $4x + 3y - 12 = 0$ की दूरी 4 इकाई है।

$$\text{अर्थात्} \quad \left| \frac{0 + 3h - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = 4$$

$$\left[\because \text{लंबवत् दूरी } d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ तथा } a = 4, b = 3, c = -12, x_1 = 0, y_1 = h \right]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3h - 12}{5} \right| = 4$$

$$\Rightarrow |3h - 12| = 20$$

$$\Rightarrow 3h - 12 = \pm 20$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$3h = 20 + 12$$

$$\Rightarrow 3h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{3}$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$3h = -20 + 12$$

$$\Rightarrow 3h = -8 \Rightarrow h = -\frac{8}{3}$$

अतः y -अक्ष पर बिंदु $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ या $\left(0, \frac{32}{3}\right)$ हैं।

प्रश्न 5. मूलबिंदु से बिंदुओं $(\cos \theta, \sin \theta)$ और $(\cos \phi, \sin \phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लांबिक दूरी ज्ञात कीजिए।

यह एक बहुअवधारणा समस्या है। सर्वप्रथम, हम रेखा के समीकरण को दो बिंदुओं के सूत्र $\left((y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right)$ के प्रयोग द्वारा ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् मूलबिंदु से रेखा की दूरी को ज्ञात करेंगे।

हल बिंदुओं $(\cos \theta, \sin \theta)$ तथा $(\cos \phi, \sin \phi)$ को मिलाने वाली रेखा की समीकरण,

$$y - \sin \theta = \frac{\sin \phi - \sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} (x - \cos \theta) \quad \left. \begin{aligned} & \because y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\ & \text{यहाँ } x_1 = \cos \theta, y_1 = \sin \theta \\ & x_2 = \cos \phi, y_2 = \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y - \sin\theta &= \frac{\frac{2 \cos \frac{\phi + \theta}{2} \sin \frac{\phi - \theta}{2}}{2}}{-2 \sin \frac{\phi + \theta}{2} \sin \frac{\phi - \theta}{2}} (x - \cos\theta) \\
&\quad \left[\because \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right. \\
&\quad \left. \text{तथा } \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right] \\
\Rightarrow y - \sin\theta &= \frac{\cos \frac{\phi + \theta}{2}}{-\sin \frac{\phi + \theta}{2}} (x - \cos\theta) \\
\Rightarrow -y \sin \frac{\phi + \theta}{2} + \sin\theta \sin \frac{\phi + \theta}{2} &= x \cos \frac{\phi + \theta}{2} - \cos\theta \cos \frac{\phi + \theta}{2} \\
\Rightarrow x \cos \frac{\phi + \theta}{2} + y \sin \frac{\phi + \theta}{2} &= \sin\theta \sin \frac{\phi + \theta}{2} + \cos\theta \cos \frac{\phi + \theta}{2} \\
\Rightarrow x \cos \frac{\phi + \theta}{2} + y \sin \frac{\phi + \theta}{2} &= \cos \left(\theta - \frac{\phi + \theta}{2} \right) \\
&\quad [\because \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B] \\
\Rightarrow x \cos \frac{\phi + \theta}{2} + y \sin \frac{\phi + \theta}{2} - \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) &= 0
\end{aligned}$$

इसकी मूलबिंदु $(0, 0)$ से दूरी,

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{\frac{0 + 0 - \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right)}} \\
\Rightarrow p &= \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)
\end{aligned}$$

प्रश्न 6. रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से खींची गई और y -रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$\begin{array}{ll}
x - 7y + 5 = 0 & \dots(i) \\
\text{तथा} & \\
3x + y = 0 & \dots(ii)
\end{array}$$

प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करने के लिए सभी (i) तथा (ii), को हल करेंगे

[सभी (i) से]

सभी (ii) में x का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned}
&3(7y - 5) + y = 0 \\
\Rightarrow &21y - 15 + y = 0 \\
\Rightarrow &22y = 15 \\
\Rightarrow &y = \frac{15}{22}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{समी (i) से, } x = \frac{7 \times 15 - 5 - 105 - 110}{22} \\ \Rightarrow x = -\frac{5}{22}$$

अतः बिंदु $\left(-\frac{5}{22}, \frac{15}{22}\right)$ है।

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा,} \\ \text{जहाँ, } (x_1, y_1) = \left(\frac{-5}{22}, \frac{15}{22}\right) \text{ तथा } m = \frac{1}{0} \text{ } y\text{-अक्ष के समांतर रेखा के लिए,}$$

$$y - \frac{15}{22} = \frac{1}{0} \left(x + \frac{5}{22}\right) \\ \Rightarrow 0 = x + \frac{5}{22} \\ \Rightarrow 22x + 5 = 0$$

प्रश्न 7. रेखा $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ पर लंबविंदु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ यह रेखा y -अक्ष से मिलती है।

रेखा $ax + by + c = 0$ के लंबवत् रेखा का समीकरण $bx - ay + k = 0$ होता है।

हल दी गई रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \\ \Rightarrow \frac{3x + 2y}{12} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12 \quad \dots(i)$$

यदि रेखा (i) y -अक्ष को मिलती है, तब $x = 0$ समी (i) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$0 + 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

\therefore बिंदु $(0, 6)$ है।

अब समी (i) के लंबवत् रेखा का समीकरण,

$$2x - 3y + k = 0 \quad \dots(ii) \\ \text{रेखा (ii) बिंदु } (0, 6) \text{ से होकर गुजरती है अतः ये इसे संतुष्ट करेगा।} \\ \text{अर्थात्} \quad 2 \times 0 - 3 \times 6 + k = 0 \Rightarrow k = 18 \quad (\because x = 0, y = 6 \text{ रखने पर})$$

अतः समी (ii) से,

$$2x - 3y + 18 = 0$$

प्रश्न 8. रेखाओं $y - x = 0$, $x + y = 0$ और $x - k = 0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

दी हुई रेखाओं की समीकरणों को साथ-साथ हल करने के द्वारा सर्वप्रथम हम त्रिभुज के शीर्षों को ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

हल माना दी गई रेखाएँ त्रिभुज की भुजाओं को प्रदर्शित करती हैं

$$AB : y - x = 0 \quad \dots(i)$$

$$BC : x + y = 0 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा} \quad CA : x - k = 0 \quad \dots(iii)$$

बिंदु A के लिए, सभी (i) तथा (iii) को हल करने पर हम $A(k, k)$ प्राप्त करते हैं।

बिंदु B के लिए, सभी (i) तथा (ii) को हल करने पर हम $B(0, 0)$ प्राप्त करते हैं।

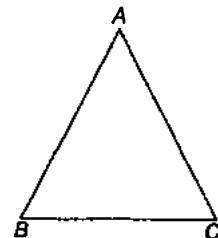
बिंदु C के लिए, सभी (ii) तथा (iii) को हल करने पर हम $C(k, -k)$ प्राप्त करते हैं।

अतः अभीष्ट बिंदु निम्न हैं $A(k, k), B(0, 0), C(k, -k)$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} [k(0+k) + 0(-k-k) + k(k-0)]$

$$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [k^2 + k^2] = \frac{2k^2}{2} = k^2 \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 9. p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ और $2x - y - 3 = 0$ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करें।

यदि रेखाएँ एक ही बिंदु पर मिलती हैं, तब उन्हें संगामी रेखाएँ कहते हैं।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x + y - 2 = 0 \quad \dots(i)$$

$$px + 2y - 3 = 0 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा} \quad 2x - y - 3 = 0 \quad \dots(iii)$$

सभी (i) तथा (iii) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं

$$5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad \qquad x = 1$$

$$\therefore \text{सभी (i) से,} \quad 3 \times 1 + y - 2 = 0 \quad (\because x = 1 \text{ रखने पर})$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad \qquad y = -1$$

अतः बिंदु $(1, -1)$ है।

यह बिंदु रेखा (ii) को संतुष्ट करेगा अर्थात्

$$p \times 1 + 2(-1) - 3 = 0 \Rightarrow p - 2 - 3 = 0 \quad (x = 1, y = -1 \text{ रखने पर})$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad \qquad p = 5$$

प्रश्न 10. यदि तीन रेखाएँ, जिनके समीकरण $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ और

$y = m_3x + c_3$ हैं, संगामी हैं, तो दिखाइए कि

$$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

हल दी गई रेखाओं की समीकरण,

$$y = m_1x + c_1 \quad \dots(i)$$

$$y = m_2x + c_2 \quad \dots(ii)$$

$$y = m_3x + c_3 \quad \dots(iii)$$

समी (i) तथा (ii) को हम करने पर,

$$\Rightarrow m_1x + c_1 = m_2x + c_2$$

$$\Rightarrow m_1x - m_2x = c_2 - c_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{समी (i) से, } y = m_1 \left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} \right) + \frac{c_1}{1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m_1c_2 - m_1c_1 + m_1c_1 - m_2c_1}{m_1 - m_2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}$$

समी (iii) में, x तथा y के मानों को रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} = m_3 \left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} \right) + \frac{c_3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} - \frac{m_3c_2 - m_3c_1 + m_1c_3 - m_2c_3}{m_1 - m_2}$$

$$\Rightarrow m_1c_2 - m_2c_1 = m_3c_2 - m_3c_1 + m_1c_3 - m_2c_3$$

$$\Rightarrow m_1c_2 - m_2c_1 - m_3c_2 + m_3c_1 + m_1c_3 - m_2c_3 = 0$$

$$\Rightarrow m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0 \quad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 11. बिंदु $(3, 2)$ से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - 2y = 3$ से 45° का कोण बनाती है।

दो रेखाओं के बीच का कोण $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ होता है जहाँ m_1 तथा m_2 रेखाओं की प्रवणताएँ हैं।

हल रेखा l_1 की समीकरण

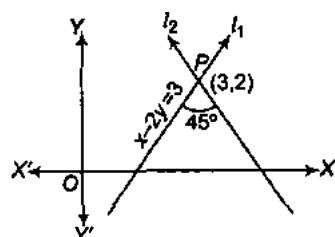
$$x - 2y = 3 \quad \dots(i)$$

समी (i) की प्रवणता,

$$m_1 = -\left(\frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$$

दो रेखाओं के बीच का कोण,

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$



दिया है, $\theta = 45^\circ$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = m$

(साना)

$$\therefore \tan 45^\circ = \left| \frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2}m} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{1-2m}{2+m} \right| \Rightarrow \frac{1-2m}{2+m} = \pm 1$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\begin{aligned} & \frac{1-2m}{2+m} = 1 \\ \Rightarrow & 1-2m = 2+m \\ \Rightarrow & 1-2 = 3m \\ \Rightarrow & m = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\begin{aligned} & \frac{1-2m}{2+m} = -1 \\ \Rightarrow & 1-2m = -2-m \\ \Rightarrow & 1+2 = 2m-m \\ \Rightarrow & m = 3 \end{aligned}$$

अब, रेखा l_2 का समीकरण,

$$\begin{aligned} & y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा,} \\ \Rightarrow & y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \quad \left(\begin{array}{l} \text{जब } m = -\frac{1}{3}, \\ x_1 = 3, y_1 = 2 \end{array} \right) \\ \Rightarrow & 3y - 6 = -x + 3 \\ \Rightarrow & x + 3y - 9 = 0 \\ \text{पुनः:} & y - 2 = 3(x - 3) \quad \left(\begin{array}{l} \text{जब } m = 3, \\ x_1 = 3, y_1 = 2 \end{array} \right) \\ \Rightarrow & y - 2 = 3x - 9 \\ \Rightarrow & 3x - y - 9 + 2 = 0 \\ \Rightarrow & 3x - y - 7 = 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 12. रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अंतःखंड बनाती है।

सर्वप्रथम, दी गई रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् रेखा के अंतःखंड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण, $4x + 7y - 3 = 0$... (i)

तथा $2x - 3y + 1 = 0$... (ii)

समी (ii) से,

$$\begin{aligned} & 3y = 2x + 1 \\ \Rightarrow & y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

समी (i) में रखने पर हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
 & 4x + 7\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 3 = 0 \\
 \Rightarrow & 4x + \frac{14}{3}x + \frac{7}{3} - 3 = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{12x + 14x}{3} + \frac{7 - 9}{3} = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{26x - 2}{3} = 0 \\
 \Rightarrow & x = \frac{2}{26} \Rightarrow x = \frac{1}{13}
 \end{aligned}$$

x का मान समी (i) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{13} + 7y - 3 = 0 \\
 \Rightarrow & 7y = 3 - \frac{4}{13} \\
 \Rightarrow & 7y = \frac{39 - 4}{13} \\
 \Rightarrow & 7y = \frac{35}{13} \Rightarrow y = \frac{5}{13}
 \end{aligned}$$

अतः बिंदु $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ है।

अब, अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots(iii)$$

चूंकि रेखा (iii) अक्षों पर बराबर अंतःखंड रखती है अर्थात् $a = b$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \\
 \Rightarrow & x + y = a \quad \dots(iv)
 \end{aligned}$$

उपरोक्त रेखा बिंदु $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ से होकर गुजरती है अर्थात् बिंदु इसे संतुष्ट करेगा।

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13} = a \Rightarrow a = \frac{6}{13}$$

अतः रेखा (iv) की अभीष्ट समीकरण निम्न होगी,

$$x + y = \frac{6}{13}$$

$$\Rightarrow 13x + 13y = 6$$

प्रश्न 13. दर्शाइए कि मूलबिंदु से जाने वाली और रेखा $y = mx + c$ से θ कोण बनाने वाली

उस रेखा का समीकरण $\frac{y}{x} = \pm \frac{m \pm \tan \theta}{1 \mp m \tan \theta}$ है।

दो रेखाओं के बीच का कोण $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ है।

हल दी गई रेखा की प्रवणता m तथा अन्य रेखा की प्रवणता माना m_2 है, तब दो रेखाओं के बीच का कोण है।

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \\ \Rightarrow \quad \tan\theta &= \left| \frac{m - m_2}{1 + mm_2} \right| \quad (\because m_1 = m) \\ \Rightarrow \quad \frac{m - m_2}{1 + mm_2} &= \pm \tan\theta\end{aligned}$$

घनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\begin{aligned}\frac{m - m_2}{1 + mm_2} &= \frac{\tan\theta}{1} \\ \Rightarrow \quad m - m_2 &= \tan\theta + mm_2 \tan\theta \\ \Rightarrow \quad m - \tan\theta &= m_2 + mm_2 \tan\theta \\ \Rightarrow \quad m_2 (1 + m \tan\theta) &= m - \tan\theta \\ \Rightarrow \quad m_2 &= \frac{m - \tan\theta}{1 + m \tan\theta} \quad \dots(i)\end{aligned}$$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\begin{aligned}\frac{m - m_2}{1 + mm_2} &= \frac{-\tan\theta}{1} \\ \Rightarrow \quad m - m_2 &= -\tan\theta - mm_2 \tan\theta \\ \Rightarrow \quad m + \tan\theta &= m_2 - mm_2 \tan\theta \\ \Rightarrow \quad m + \tan\theta &= m_2 (1 - m \tan\theta) \\ \Rightarrow \quad m_2 &= \frac{m + \tan\theta}{1 - m \tan\theta} \quad \dots(ii) \\ \therefore \text{समी (i) तथा (ii) से,} \quad m_2 &= \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}\end{aligned}$$

बिंदु $(0, 0)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग से,}$$

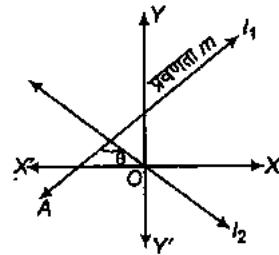
जहाँ, $m = m_2$

$$\begin{aligned}\therefore \quad y - 0 &= \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta} (x - 0) \\ \Rightarrow \quad \frac{y}{x} &= \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}\end{aligned}$$

प्रश्न 14. $(-1, 1)$ और $(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखाखंड $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?

अंतःखंड रूप में विभाजन सूत्र $P(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$ का प्रयोग करेंगे

तत्परचाल् इसे सरल करेंगे।



हल माना बिंदु P , बिंदुओं $A(-1, 1)$ तथा $B(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखाओं को अनुपात $K:1$ विभक्त करता है।

$$\text{तब, } P = \left(\frac{K \times x_2 + 1 \times x_1}{K+1}, \frac{K \times y_2 + 1 \times y_1}{K+1} \right)$$

$$= \left(\frac{K \times 5 + 1 \times (-1)}{K+1}, \frac{K \times 7 + 1 \times 1}{K+1} \right) = \left(\frac{5K - 1}{K+1}, \frac{7K + 1}{K+1} \right)$$

बिंदु P , रेखा $x + y = 4$ को संतुष्ट करेगा।

$$\begin{aligned} \text{अर्थात्} \quad & \frac{5K - 1}{K+1} + \frac{7K + 1}{K+1} = 4 \\ \Rightarrow \quad & \frac{5K - 1 + 7K + 1}{K+1} = 4 \\ \Rightarrow \quad & 12K = 4K + 4 \\ \Rightarrow \quad & 8K = 4 \Rightarrow K = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट अनुपात $= K:1 = 1:2$ (अंतः विभाजित) है।

प्रश्न 15. बिंदु $(1, 2)$ से रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ की $2x - y = 0$ के अनुदिशा दूरी ज्ञात कीजिए।

हल रेखा AB का समीकरण है,

$$\begin{aligned} 4x + 7y + 5 = 0 & \dots(i) \\ 2x - y = 0 & \dots(ii) \end{aligned}$$

तथा PQ का समीकरण है,

Q के निर्देशांक ज्ञात करने हेतु,
समी (ii) से $y = 2x$ समी (i) में रखने पर,

$$\begin{aligned} 4x + 7(2x) + 5 &= 0 \\ 18x + 5 &= 0 \\ x &= -\frac{5}{18} \end{aligned}$$

$x = -\frac{5}{18}$ समी (ii) में रखने पर,

$$2\left(-\frac{5}{18}\right) - y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore Q \text{ के निर्देशांक} = \left(-\frac{5}{18}, -\frac{5}{9}\right)$$

$$QP \text{ की लम्बाई} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\left(1 + \frac{5}{18}\right)^2 + \left(2 + \frac{5}{9}\right)^2} \quad \left(\because x_1 = -\frac{5}{18}, y_1 = -\frac{5}{9}, \right. \\
 &\quad \left. x_2 = 1, y_2 = 2 \right) \\
 &= \sqrt{\left(\frac{23}{18}\right)^2 + \left(\frac{23}{9}\right)^2} = \frac{23}{9} \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{23}{9} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{23}{18} \sqrt{5} \text{ वर्ग इकाई}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 16. बिंदु $(-1, 2)$ से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेद बिंदु से 3 इकाई की दूरी पर है।

हल एक रेखा की समीकरण, जो बिंदु $P(-1, 2)$ से होकर जाती है तथा प्रवणता m रखती है, हैं

$$y - 2 = m(x + 1) \quad \left(\because y - y_1 = m(x - x_1) \right)$$

जहाँ, $x_1 = -1, y_1 = 2$

$$y = mx + m + 2 \quad \dots(i)$$

अब, रेखा AB तथा PQ के प्रतिच्छेद बिंदु को ज्ञात करते हैं।

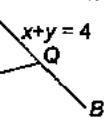
समी (i) से y का मान समीकरण $x + y = 4$ में रखने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned}
 &x + mx + m + 2 = 4 \\
 \Rightarrow &x(1 + m) = 2 - m \Rightarrow x = \frac{2 - m}{1 + m}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{समी (i) से, } y = m\left(\frac{2 - m}{1 + m}\right) + m + 2 = \frac{2m - m^2 + m + m^2 + 2 + 2m}{1 + m} = \frac{2 + 5m}{1 + m}$$

$$\therefore Q \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{2 - m}{1 + m}, \frac{2 + 5m}{1 + m}\right)$$

$\therefore PQ$ के बीच की दूरी = 3



(दिया है)

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (PQ)^2 = 9 \\
 &\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 9 \\
 &\Rightarrow \left(\frac{2 - m}{1 + m} + 1\right)^2 + \left(\frac{2 + 5m}{1 + m} - 2\right)^2 = 9 \quad \left[\because x_1 = -1, y_1 = 2, \right. \\
 &\quad \left. x_2 = \frac{2 - m}{1 + m}, y_2 = \frac{2 + 5m}{1 + m} \right] \\
 &\Rightarrow \left(\frac{3}{1 + m}\right)^2 + \left(\frac{3m}{1 + m}\right)^2 = 9 \\
 &\Rightarrow 9 + 9m^2 = 9(1 + m)^2 \\
 &\Rightarrow 1 + m^2 = 1 + 2m + m^2 \\
 &\Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0
 \end{aligned}$$

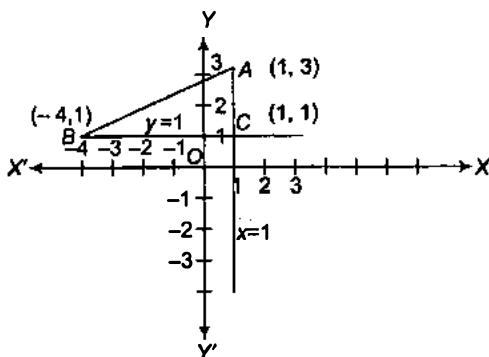
$\therefore PQ$ की प्रवणता शून्य है अर्थात् ये x -अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 17. समकोण त्रिभुज के कर्ण के सीमांत बिंदु $(1, 3)$ और $(-4, 1)$ हैं। त्रिभुज के पाद (समकोणीय शुंजाओं) के समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के समांतर हैं।

हल सर्वप्रथम, हम बिंदुओं $A(1, 3)$ तथा $B(-4, 1)$ को XY -तल में अंकित करते हैं। बिंदु $A(1, 3)$, से हम Y -अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं तथा बिंदु $B(-4, 1)$, से हम X -अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं। इन दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदित बिंदु C पर है जोकि C पर समकोण है।

$\therefore C$ के निर्दशांक $(1, 1)$ होंगे।
 \therefore रेखा AC का समीकरण, जो बिंदु $A(1, 3)$ तथा $C(1, 1)$ से होकर जाती है।

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\ \therefore y - 3 &= \frac{1-3}{1-1}(x-1) \Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{0}(x-1) \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$



रेखा BC का समीकरण है,

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1-1}{1+4}(x-1) \Rightarrow y - 1 = \frac{0}{1+4}(x-1) \\ \Rightarrow y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

अतः त्रिमुज के पाद $x = 1$ तथा $y = 1$ हैं।

प्रश्न 18. किसी बिंदु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिंदु $(3, 8)$ का रेखा $x + 3y = 7$ में प्रतिविवरण ज्ञात कीजिए।

यह एक बहु अवधारणा प्रश्न है। अतः सर्वप्रथम दी हुई रेखा के लंबवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् इन दोनों का प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात करेंगे और अंत में मध्य-बिंदु अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखा AB का समीकरण, $x + 3y = 7$... (i)

यहाँ रेखा की प्रवणता, $m_1 = -\frac{1}{3}$ है।

माना $P(3, 8)$ दिया गया बिंदु है जिसके लिए प्रतिविवरण ज्ञात करना है।

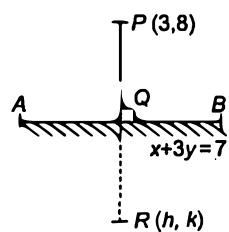
यहाँ, $PQ \perp AB$

PQ की प्रवणता $\times AB$ की प्रवणता $= -1$

माना PQ की प्रवणता m है।

$$\therefore m \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad (\because m_1 m_2 = -1)$$

$$\Rightarrow m = 3$$



अब, PQ रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग द्वारा,

जहाँ, $(x_1, y_1) = (3, 8)$ तथा $m = 3$ है।

$$\begin{aligned} & y - 8 = 3(x - 3) \\ \Rightarrow & y - 8 = 3x - 9 \\ \Rightarrow & 3x - y - 1 = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(ii)}$$

बिंदु Q को ज्ञात करने के लिए समी (i) से $x = 7 - 3y$ समी (ii) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 3(7 - 3y) - y - 1 = 0 \\ \Rightarrow & 21 - 9y - y - 1 = 0 \\ \Rightarrow & 20 - 10y = 0 \\ \Rightarrow & y = \frac{20}{10} \\ \Rightarrow & y = 2 \end{aligned}$$

\therefore समी (i) से, $x = 7 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$

$\therefore Q$ के निर्देशांक $(1, 2)$

माना प्रतिबिंब $R(h, k)$, है, चूंकि रेखा एक समतल दर्पण है, अतः बिंदु Q मध्य-बिंदु होगा अर्थात् $Q(1, 2)$ होगा।

अब, $P(3, 8)$ तथा $R(h, k)$ का मध्य-बिंदु $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3+h}{2}, \frac{8+k}{2}\right)$ है।

निर्देशांक $Q(1, 2)$ के साथ तुलना करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{3+h-1}{2} & \text{ और } \frac{8+k-2}{2} \\ \Rightarrow 3+h=2 & \text{ तथा } 8+k=4 \\ \Rightarrow h=2-3 & \text{ तथा } k=4-8 \\ \Rightarrow h=-1 & \text{ तथा } k=-4 \end{aligned}$$

अतः बिंदु P का प्रतिबिंब $R(-1, -4)$ है।

प्रश्न 19. यदि रेखाएँ $y = 3x + 1$ और $2y = x + 3$ पर समान रूप से आनत हों, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ का प्रयोग करेंगे।

हल माना रेखाओं $y = 3x + 1$ तथा $y = mx + 4$ के बीच का कोण θ है।

यहाँ, रेखाओं की प्रवणताएँ $m_1 = 3$ व $m_2 = m$ हैं।

$$\tan \theta = \left| \frac{3-m}{1+3m} \right| \quad \left(\because \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \right) \dots \text{(i)}$$

पुनः दिया है कि रेखाओं $2y = x + 3$ तथा $y = mx + 4$ के बीच का कोण θ है।

यहाँ, प्रवणताएँ $m_1 = \frac{1}{2}$ तथा $m_2 = m$ हैं।

$$\therefore \tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2} \times m} \right| \quad \dots \text{(ii)}$$

सभी (i) तथा (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$\left| \frac{3-m}{1+3m} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}-m}{1+\frac{1}{2}m} \right| \Rightarrow \frac{3-m}{1+3m} = \pm \left(\frac{1-2m}{2+m} \right)$$

घनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\Rightarrow (3-m)(2+m) = (1-2m)(1+3m)$$

$$\Rightarrow 6 + 3m - 2m - m^2 = 1 + 3m - 2m - 6m^2$$

$$\Rightarrow 6 = 1 - 5m^2$$

$$\Rightarrow 5m^2 = 1 - 6 \\ \Rightarrow m^2 = \frac{-5}{5} \text{ जोकि असंभव है।}$$

($\because m^2 \geq 0$)

पुनः घनात्मक चिन्ह लेने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned} & \frac{3-m}{1+3m} = -\frac{1-2m}{2+m} \\ \Rightarrow & (3-m)(2+m) = (2m-1)(1+3m) \\ \Rightarrow & 6 + 3m - 2m - m^2 = 2m + 6m^2 - 1 - 3m \\ \Rightarrow & 6 + m - m^2 = 6m^2 - m - 1 \\ \Rightarrow & 6m^2 - m - 1 - 6 - m + m^2 = 0 \\ \Rightarrow & 7m^2 - 2m - 7 = 0 \\ \Rightarrow & m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 7 \times 7}}{2 \times 7} \quad \left[\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \\ \Rightarrow & = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+49}}{2 \times 7} = \frac{1 \pm \sqrt{50}}{7} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

नोट जब हम मापांक का चिन्ह हटाते हैं, तब हम \pm चिन्ह का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 20. यदि एक चर बिंदु $P(x, y)$, की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 रहें, तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ की दूरी के सूत्र, $\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ का प्रयोग करेंगे।

तत्पश्चात् हल करेंगे।

हल दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$x + y - 5 = 0 \quad \dots(i)$$

तथा $3x - 2y + 7 = 0 \quad \dots(ii)$

दिया है कि, एक चर बिंदु $P(x, y)$ की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 है।

$$\therefore \frac{|x+y-5|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} + \frac{|3x-2y+7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = 10 \quad \left(\because \text{लांबिक दूरी } d = \sqrt{a^2+b^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-5}{\sqrt{2}} + \frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}(x+y-5) + \sqrt{2}(3x-2y+7) = 10\sqrt{2}\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{13}+3\sqrt{2}) + y(\sqrt{13}-2\sqrt{2}) - 5\sqrt{13} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{13}+3\sqrt{2}) + y(\sqrt{13}-2\sqrt{2}) + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{13} - 10\sqrt{26} = 0$$

जोकि $ax + by + c = 0$ के रूप का है।

अतः यह एक रेखा को प्रदर्शित करती है।

नोट यहाँ पर बिंदु (x_1, y_1) , बिंदु (x, y) के रूप में दिए दुए हैं, अतः विद्यार्थियों को किसी भी तरह की समस्या नहीं होनी चाहिए।

प्रश्न 21. समांतर रेखाओं $9x + 6y - 7 = 0$ और $3x + 2y + 6 = 0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

किसी भी रेखा $ax + by + c = 0$ के समांतर रेखा $ax + by + k = 0$ का प्रयोग करेंगे तथा

इस दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी $\left| \frac{c-k}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$ होगी।

हल दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$9x + 6y - 7 = 0$$

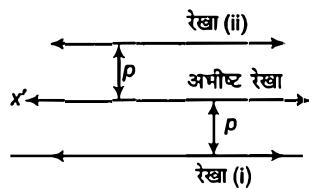
या $3x + 2y - \frac{7}{3} = 0 \quad \dots(i)$

तथा $3x + 2y + 6 = 0 \quad \dots(ii)$

रेखा की समीकरण जो सभी (i) या (ii) के समांतर है,

$$3x + 2y + k = 0 \quad \dots(iii)$$

अब दिया है कि रेखा (iii) रेखाओं (i) तथा (ii) से समदूरस्थ है।



अर्थात् रेखाओं (i) तथा (ii) के बीच दूरी = रेखाओं (ii) तथा (iii) के बीच की दूरी

$$\therefore \left| \frac{k + \frac{7}{3}}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{k - 6}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \right|$$

$\left(\because \text{समांतर रेखाओं के बीच की दूरी } \left| \frac{c-d}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \text{ है} \right)$

$$\Rightarrow \left| k + \frac{7}{3} \right| = |k - 6|$$

$$\Rightarrow k + \frac{7}{3} = \pm (k - 6)$$

ऋणात्मक विन्ह लेने पर,

$$\begin{aligned} \Rightarrow k + \frac{7}{3} &= -k + 6 \\ \Rightarrow 2k &= 6 - \frac{7}{3} \\ \Rightarrow 2k &= \frac{11}{3} \\ \Rightarrow k &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

अतः समी (iii) से, $3x + 2y + \frac{11}{6} = 0$ $\left(k = \frac{11}{6} \text{ रखने पर} \right)$
 $\therefore 18x + 12y + 11 = 0$ अभीष्ट रेखा की समीकरण है।

प्रश्न 22. बिंदु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण X-अक्ष के बिंदु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिंदु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल चित्र में PA आपतित किरण तथा AR परावर्तित किरण है, जो X-अक्ष से θ कोण बनाती है।

चित्र से यह स्पष्ट है कि,

$$AS \perp OX$$

इसका अर्थ है कि AS, $\angle PAR$ को समद्विभाजित करती है।
तब, $\angle PAS = \angle RAS$

$$\Rightarrow \angle RAX = \angle PAO = \theta \quad (\text{माना})$$

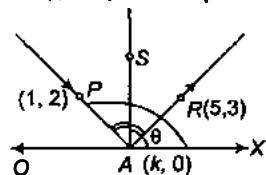
$$\Rightarrow \angle XAP = 180^\circ - \theta$$

$$AR \text{ की प्रवणता} = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{5 - k} \quad [\text{जहाँ बिंदु } A(k, 0) \text{ है}] \quad \dots(i)$$

$$AP \text{ की प्रवणता} = \tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - k} \quad \dots(ii)$$

\therefore समी (i) तथा (ii) से,

$$\frac{3}{5 - k} = -\frac{2}{1 - k} \Rightarrow 3 - 3k = -10 + 2k$$



$$\Rightarrow 5k = 13 \Rightarrow k = \frac{13}{5}$$

अतः A के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ हैं।

प्रश्न 23. दिखाइए कि $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ और $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ बिंदुओं से रेखा $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$ पर खींचे गए लंबों की लंबाइयाँ का गुणनफल b^2 है।

हल दी गई रेखा की समीकरण है।

$$\begin{aligned} & \frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \\ \Rightarrow & \frac{bx \cos \theta + ay \sin \theta}{ab} = 1 \\ \Rightarrow & bx \cos \theta + ay \sin \theta = ab \\ \Rightarrow & bx \cos \theta + ay \sin \theta - ab = 0 \quad \dots(i) \end{aligned}$$

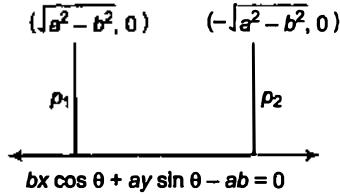
रेखा (i) से बिंदु $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ पर लंबवत् दूरी है,

$$P_1 = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{b \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta - 0 - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right|$$

[$\because A = b \cos \theta, B = a \sin \theta, C = -ab; x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}, y_1 = 0$]

तथा रेखा (ii) से बिंदु $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ पर लंबवत् दूरी है।

$$P_2 = \left| \frac{-b \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right| \quad \left(\begin{array}{l} \because A = b \cos \theta, B = a \sin \theta, \\ C = -ab, x_1 = -\sqrt{a^2 - b^2}, y_1 = 0 \end{array} \right)$$



$$\begin{aligned} \therefore P_1 P_2 &= \left| \frac{b \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right| \times \left| \frac{-b \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right| \\ &= \frac{b |\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta - a| \times b |\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta + a|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{b^2 |(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \quad [\because (A + B)(A - B) = A^2 - B^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2 |a^2 \cos^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta - a^2|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \\
&= \frac{b^2 |a^2 (\cos^2 \theta - 1) - b^2 \cos^2 \theta|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \\
\Rightarrow p_1 p_2 &= \frac{b^2 |-a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
&= \frac{b^2 |a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta|}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \quad (\because |-A| = |A|) \\
\therefore p_1 p_2 &= b^2 \quad \text{इति सिद्धम्}
\end{aligned}$$

प्रश्न 24. एक व्यक्ति 'समीकरणों $2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 5 = 0$ से निरूपित सरल रेखीय पथों के संधि बिंदु (junction/crossing) पर खड़ा है और समीकरण $6x - 7y + 8 = 0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

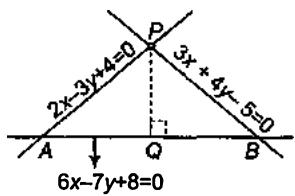
हल दिए गए सरल रेखीय पथों की समीकरण,

$$\begin{aligned}
2x - 3y + 4 &= 0 & \dots(i) \\
\text{तथा} \quad 3x + 4y - 5 &= 0 & \dots(ii) \\
\text{संधि बिंदु के लिए, समी (i) से,} \quad 2x &= -4 + 3y \\
\Rightarrow x &= \frac{-4 + 3y}{2} \\
x \text{ का मान समी (ii) में रखने पर, } 3\left(\frac{-4 + 3y}{2}\right) + 4y - 5 &= 0 \\
\Rightarrow -12 + 9y + 8y - 10 &= 0 \\
\Rightarrow 17y - 22 &= 0 \\
\Rightarrow y &= \frac{22}{17}
\end{aligned}$$

समी (i) में $y = \frac{22}{17}$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\begin{aligned}
2x - 3\left(\frac{22}{17}\right) + 4 &= 0 \Rightarrow 2x = -4 + \frac{66}{17} \\
\Rightarrow 2x &= \frac{-68 + 66}{17} \\
\Rightarrow x &= -\frac{1}{17} \\
\therefore x &= -\frac{1}{17} \text{ तथा } y = \frac{22}{17}
\end{aligned}$$

माना व्यक्ति बिंदु P पर खड़ा है, तब वह न्यूनतम समय में पथ AB पर पहुँच सकता है। यदि वह इसकी ओर सीधे जाए अर्थात् इसके लंबवत्। इसका अर्थ कि हमें PQ की समीकरण को ज्ञात करना है।



\therefore रेखा $PQ \perp$ रेखा AB

\therefore PQ की प्रवणता $\times AB$ की प्रवणता $= -1$

$$\Rightarrow m \times -\left(\frac{6}{-7}\right) = -1 \quad \left[\because \text{रेखा } 6x - 7y + 8 = 0 \text{ की प्रवणता } -\left(\frac{6}{-7}\right) \text{ है} \right]$$

$$\Rightarrow m \times \frac{6}{7} = -1 \Rightarrow m = -\frac{7}{6}$$

PQ का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ के प्रयोग से,

$$\text{जहाँ, } (x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17}\right) \text{ तथा } m = -\frac{7}{6}$$

$$y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6}\left(x + \frac{1}{17}\right) \Rightarrow \frac{17y - 22}{17} = -\frac{7}{6}\left(\frac{17x + 1}{17}\right)$$

$$\Rightarrow 6 \times 17y - 22 \times 6 = -7 \times 17x - 7$$

$$\Rightarrow 102y - 132 = -119x - 7$$

$$\Rightarrow 119x + 102y - 132 + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 119x + 102y - 125 = 0$$