

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3, x = 0, x = -3$ तथा $x = 5$ पर संतत है।

उत्तर 1:

दिया गया फलन $f(x) = 5x - 3$

$x = 0$ पर, $f(0) = 5(0) - 3 = -3$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x - 3) = -3$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (5x - 3) = -3$

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0) = -3$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

$x = -3$ पर, $f(-3) = 5(-3) - 3 = -18$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (5x - 3) = -18$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (5x - 3) = -18$

यहाँ, $x = -3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(-3) = -18$

अतः, $x = -3$ पर, फलन f संतत है।

$x = 5$ पर, $f(5) = 5(5) - 3 = 22$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (5x - 3) = 22$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (5x - 3) = 22$

यहाँ, $x = 5$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(5) = 22$

अतः, $x = 5$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 2:

$x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

उत्तर 2:

दिया गया फलन $f(x) = 2x^2 - 1$

$x = 3$ पर, $f(3) = 2(3)^2 - 1 = 17$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x^2 - 1) = 17$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x^2 - 1) = 17$

यहाँ, $x = 3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(3) = 17$

अतः, $x = 3$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 3:

निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए:

(a) $f(x) = x - 5$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$

(d) $f(x) = |x - 5|$

उत्तर 3:

(a) दिया गया फलन $f(x) = x - 5$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है।

$x = k$ पर, $f(k) = k - 5$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x - 5) = k - 5$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} (x - 5) = k - 5$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = k - 5$
अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

(b) दिया गया फलन $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

माना, $k (k \neq 5)$ कोई वास्तविक संख्या है।

$x = k$ पर, $f(k) = \frac{1}{k-5}$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{1}{x-5} \right) = \frac{1}{k-5}$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{1}{x-5} \right) = \frac{1}{k-5}$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = \frac{1}{k-5}$

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं (5 के अतिरिक्त) के लिए संतत है।

(c) दिया गया फलन $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$

माना, $k (k \neq -5)$ कोई वास्तविक संख्या है।

$$x = k \text{ पर, } f(k) = \frac{k^2-25}{k+5} = \frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)} = (k+5)$$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{x^2-25}{x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)} \right) = k + 5$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{x^2-25}{x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)} \right) = k + 5$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = k + 5$

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं (-5 के अतिरिक्त) के लिए संतत है।

(d) दिया गया फलन $f(x) = |x - 5| = \begin{cases} 5 - x, & x < 5 \\ x - 5, & x \geq 5 \end{cases}$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 5$ या $k = 5$ या $k > 5$

पहली स्थिति: यदि, $k < 5$,

$$f(k) = 5 - k \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (5 - x) = 5 - k, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 5 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 5$,

$$f(k) = k - 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x - 5) = k - 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 5 पर संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 5$,

$$f(k) = k - 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x - 5) = k - 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 5 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n, x = n$ पर संतत है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर 4:

दिया गया फलन $f(x) = x^n$

$x = n$ पर, $f(n) = n^n$

$$\lim_{x \rightarrow n} f(x) = \lim_{x \rightarrow n} (x^n) = n^n$$

यहाँ, $x = n$ पर, $\lim_{x \rightarrow n} f(x) = f(n) = n^n$

अतः, $x = n$ पर, जहाँ n एक धन पूर्णांक है, फलन f संतत है।

प्रश्न 5:

क्या $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f, x = 0, x = 1, \text{ तथा } x = 2$ पर संतत है?

उत्तर 5:

दिया गया फलन $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

यहाँ, $x = 0$ पर, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

$x = 1$ पर, $f(1) = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x) = 1$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5) = 5$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

$x = 2$ पर, $f(2) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (5) = 5$$

यहाँ, $x = 2$ पर, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$

अतः, $x = 2$ पर, फलन f संतत है।

f के सभी असांतत्य के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जबकि f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

प्रश्न 6:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{यदि } x \leq 2 \\ 2x - 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर 6:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 2$ या $k = 2$ या $k > 2$

पहली स्थिति: यदि, $k < 2$,

$$f(k) = 2k + 3 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (2x + 3) = 2k + 3, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 2 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 2$ पर, $f(2) = 2k + 3$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 3) = 7$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 3) = 1$$

यहाँ, $x = 2$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा

अतः, $x = 2$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 2$,

$$f(k) = 2k - 3 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (2x - 3) = 2k - 3, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 2 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अतः, फलन f , $x = 2$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 7:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 3, & \text{यदि } x \leq -3 \\ -2x, & \text{यदि } -3 < x < 3 \\ 6x + 2, & \text{यदि } x \geq 3 \end{cases}$$

उत्तर 7:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार

$$k < -3 \text{ या } k = -3 \text{ या } -3 < k < 3 \text{ या } k = 3 \text{ या } k > 3$$

पहली स्थिति: यदि, $k < -3$,

$$f(k) = -k + 3 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-x + 3) = -k + 3, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , -3 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -3$ पर, $f(-3) = -(-3) + 3 = 6$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (-x + 3) = -(-3) + 3 = 6$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (-2x) = -2(-3) = 6, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x = -3$ पर संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $-3 < k < 3$,

$$f(k) = -2k \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-2x) = -2k, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $-3 < x < 3$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 3$ पर,

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2x) = -2k$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (6x + 2) = 6k + 2,$$

यहाँ, $x = 3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 3$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $k > 3$,

$$f(k) = 6k + 2 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (6x + 2) = 6k + 2, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 3 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 3$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 8:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

उत्तर 8:

इस फलन f को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1, & \text{यदि } x < 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ \frac{x}{x} = 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$$f(k) = -\frac{k}{k} = -1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(-\frac{x}{x} \right) = -1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(-\frac{x}{x} \right) = -1$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{x}{x} \right) = 1,$$

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा \neq दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$$f(k) = \frac{k}{k} = 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \left(\frac{x}{x} \right) = 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 0$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 9:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर 9:

इस फलन f को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) = -1$, जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है।

इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 10:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{यदि } x \geq 1 \\ x^2 + 1, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$$

उत्तर 10:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 1$,

$$f(k) = k^2 + 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^2 + 1) = k^2 + 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 1 + 1 = 2$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2,$$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(1)$

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 1$,

$$f(k) = k + 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x + 1) = k + 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 1$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 11:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{यदि } x \leq 2 \\ x^2 + 1, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर 11:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 2$ या $k = 2$ या $k > 2$

पहली स्थिति: यदि, $k < 2$,

$$f(k) = k^3 - 3 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^3 - 3) = k^3 - 3, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 2 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 2$ पर, $f(2) = 2^3 - 3 = 5$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 3) = 2^3 - 3 = 5$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5,$$

यहाँ, $x = 2$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(2)$

अतः, $x = 2$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 2$,

$$f(k) = k^2 + 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^2 + 1) = k^2 + 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 2$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 12:

$$f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x^2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर 12:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 1$,

$$f(k) = k^{10} - 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^{10} - 1) = k^{10} - 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 1^{10} - 1 = 0$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^{10} - 1) = 0$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2) = 1,$$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 1$,

$$f(k) = k^2 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^2) = k^2, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 1$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 13:

$$\text{क्या } f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases} \text{ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है?}$$

उत्तर 13:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 1$,

$$f(k) = k + 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x + 5) = k + 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 1 + 5 = 6$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 5) = 6$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 5) = -4,$$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 1$,

$$f(k) = k - 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x - 5) = k - 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 1$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

फलन f , के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

प्रश्न 14:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{यदि } 0 \leq x \leq 1 \\ 4, & \text{यदि } 1 < x < 3 \\ 5, & \text{यदि } 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

उत्तर 14:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार

$0 \leq k \leq 1$ या $k = 1$ या $1 < k < 3$ या $k = 3$ या $3 \leq k \leq 10$

पहली स्थिति: यदि, $0 \leq k \leq 1$,

$$f(k) = 3 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (3) = 3, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $0 \leq x \leq 1$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 3$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3) = 3$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4) = 4,$$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा \neq दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $1 < k < 3$,

$$f(k) = 4 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (4) = 4, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $1 < x < 3$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 3$ पर,

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4) = 4$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (5) = 5,$$

यहाँ, $x = 3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा \neq दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 3$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $3 \leq k \leq 10$,

$$f(k) = 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (5) = 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $3 \leq x \leq 10$ के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 1$ तथा $x = 3$ पर असंतत है।

प्रश्न 15:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{यदि } x < 0 \\ 0, & \text{यदि } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर 15:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $0 \leq k \leq 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$f(k) = 2k$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (2x) = 2k$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $x < 0$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$
 बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0$
 दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $x = 0$ के लिए संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $0 \leq k \leq 1$,
 $f(k) = 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (0) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $0 \leq x \leq 1$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 1$ पर,
 बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (0) = 0$
 दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x) = 4$,
 यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा,
 अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $k > 1$,
 $f(k) = 4k$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (4x) = 4k$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $x > 1$ के लिए संतत है।
 इसप्रकार, फलन f , केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 16:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{यदि } x \leq -1 \\ 2x, & \text{यदि } -1 < x \leq 1 \\ 2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर 16:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है।
 प्रश्नानुसार $k < -1$ या $k = -1$ या $-1 < x \leq 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < -1$,
 $f(k) = -2$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-2) = -2$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $x < -1$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -1$ पर, $f(-1) = -2$
 बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2) = -2$
 दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x) = -2$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $x = -1$ के लिए संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $-1 < x \leq 1$,

$f(k) = 2k$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (2x) = 2k$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$
 अतः, फलन f , $-1 < x \leq 1$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 1$ पर,

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2) = 2, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x = 1$, के लिए संतत है।

पांचवीं स्थिति: यदि, $k > 1$,

$$f(k) = 2 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (2) = 2, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 1$ के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 17:

a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{यदि } x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर संतत है।

उत्तर 17:

दिया है: फलन $x = 3$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(3)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} bx + 3 = 3a + 1$$

$$\Rightarrow 3a + 1 = 3b + 3 = 3a + 1$$

$$\Rightarrow 3a = 3b + 2 \quad \Rightarrow a = b + \frac{2}{3}$$

प्रश्न 18:

λ के किस मान के लिए $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर संतत है। $x = 1$ पर इसके सांतत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर 18:

दिया है: फलन $x = 0$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda(x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x + 1 = \lambda[(0)^2 - 2(0)]$$

$$\Rightarrow \lambda[(0)^2 - 2(0)] = 4(0) + 1 = \lambda(0)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \lambda = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{0}$$

अतः, λ का कोई वास्तविक मान ऐसा नहीं है जिस पर फलन संतत हो।

यदि, $x = 1$,

$$f(1) = 4(1) + 1 = 5 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 4(1) + 1 = 5, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

अतः, फलन f , λ के सभी मानों के लिए संतत है।

प्रश्न 19:

दर्शाइए कि $g(x) = x - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर असंतत है। यहाँ $[x]$ एक महत्म पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है।

उत्तर 19:

माना, k कोई पूर्णांक संख्या है।

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} x - [x] = k - (k - 1) = 1$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} x - [x] = k - (k) = 0,$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा \neq दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर, फलन f संतत नहीं है।

प्रश्न 20:

व्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

उत्तर 20:

दिया गया फलन $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ तथा

$$x = \pi \text{ पर}, f(\pi) = \pi^2 - \sin \pi + 5 = \pi^2 - 0 + 5 = \pi^2 + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} x^2 - \sin x + 5 = \pi^2 - \sin \pi + 5 = \pi^2 - 0 + 5 = \pi^2 + 5$$

$$\text{यहाँ, } x = \pi \text{ पर, } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = \pi^2 + 5$$

अतः, $x = \pi$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 21:

निम्नलिखित फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए।

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$

(b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

उत्तर 21:

माना, फलन $g(x) = \sin x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \sin k$

बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(k - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin k \cos h - \cos k \sin h = \sin k$$

दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(k + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin k \cos h + \cos k \sin h = \sin k$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(k)$

अतः, फलन g , समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

माना, फलन $h(x) = \cos x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$

बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(k - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos k \cos h + \sin k \sin h = \cos k$$

दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(k + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos k \cos h - \sin k \sin h = \cos k$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(k)$

अतः, फलन h , समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

हम जानते हैं कि यदि g और h दो संतत फलन हैं, तो $g + h, g - h$ और gh भी संतत फलन होंगे।
 अतः, **(a)** $f(x) = \sin x + \cos x$ **(b)** $f(x) = \sin x - \cos x$ और **(c)** $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
 संतत फलन है।

प्रश्न 22:

cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर 22:

माना, फलन $g(x) = \sin x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \sin k$

बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(k - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin k \cos h - \cos k \sin h = \sin k$$

दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(k + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin k \cos h + \cos k \sin h = \sin k$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(k)$

अतः, फलन g , समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

माना, फलन $h(x) = \cos x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$

बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(k - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos k \cos h + \sin k \sin h = \cos k$$

दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \rightarrow k^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(k + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos k \cos h - \sin k \sin h = \cos k$$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(k)$

अतः, फलन h , समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

हम जानते हैं कि यदि g और h दो संतत फलन हैं, तो

$\frac{g}{h}, h \neq 0$ संतत है, $\frac{1}{h}, h \neq 0$ संतत है और $\frac{g}{h}, g \neq 0$ भी संतत है।

इसलिए, $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq n\pi$ ($n \in Z$), संतत है।

अतः, $\text{cosec } x$, $x = n\pi$ ($n \in Z$), के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ($n \in Z$), संतत है।

अतः, $\sec x$, $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ($n \in Z$), के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq n\pi$ ($n \in Z$), संतत है।

अतः, $\cot x$, $x = n\pi$ ($n \in Z$), के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

प्रश्न 23:

f के सभी असंतत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ x + 1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर 23:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$$f(k) = \frac{\sin k}{k} \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin k}{k}, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0 + 1 = 1$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 0 + 1 = 1,$$

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$$f(k) = k + 1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x + 1) = k + 1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 24:

निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

उत्तर 24:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k \neq 0$ या $k = 0$

पहली स्थिति: यदि, $k \neq 0$,

$$f(k) = k^2 \sin \frac{1}{k} \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = k^2 \sin \frac{1}{k}, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, फलन f , $k \neq 0$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$$

हम जानते हैं कि, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1, x \neq 0 \Rightarrow -x^2 \leq \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\text{इसीप्रकार, दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0,$$

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

अतः, $x = 0$ पर, f संतत है। इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 25:

f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ -1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

उत्तर 25:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k \neq 0$ या $k = 0$

पहली स्थिति: यदि, $k \neq 0$ पर, $f(0) = 0 - 1 = -1$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{k \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{k \rightarrow 0^-} (\sin x - \cos x) = 0 - 1 = -1$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{k \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{k \rightarrow 0^+} (\sin x - \cos x) = 0 - 1 = -1,$$

यहाँ, $x \neq 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(x)$

अतः, फलन f , $x \neq 0$ पर संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(k) = -1$

$$\text{तथा } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-1) = -1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$$

अतः, $x = 0$ पर, f संतत है। इसप्रकार, फलन f , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 26 से 29 में k के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर संतत हो :

प्रश्न 26:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & \text{यदि } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{द्वारा परिभाषित फलन } x = \frac{\pi}{2} \text{ पर}$$

उत्तर 26:

दिया है: फलन $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{k \cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{k \cos x}{\pi - 2x} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \sin h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-k \sin h}{-2h} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k}{2} = 3 \quad \left[\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \right]$$

$$\Rightarrow k = 6$$

प्रश्न 27:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{यदि } x \leq 2 \\ 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases} \text{द्वारा परिभाषित फलन } x = 2 \text{ पर}$$

उत्तर 27:

दिया है: फलन $x = 2$ पर संतत है। इसलिए, बाँह पक्ष की सीमा = दाँह पक्ष की सीमा = $f(2)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} kx^2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = k(2)^2$$

$$\Rightarrow 4k = 3 = 4k$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 28:

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & \text{यदि } x \leq \pi \\ \cos x, & \text{यदि } x > \pi \end{cases} \text{द्वारा परिभाषित फलन } x = \pi \text{ पर}$$

उत्तर 28:

दिया है: फलन $x = \pi$ पर संतत है। इसलिए, बाँह पक्ष की सीमा = दाँह पक्ष की सीमा = $f(\pi)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} kx + 1 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cos x = k(\pi) + 1$$

$$\Rightarrow k(\pi) + 1 = \cos \pi = k\pi + 1$$

$$\Rightarrow k\pi + 1 = -1 = k\pi + 1$$

$$\Rightarrow \pi k = -2 \quad \Rightarrow k = -\frac{2}{\pi}$$

प्रश्न 29:

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & \text{यदि } x \leq 5 \\ 3x - 5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases} \text{द्वारा परिभाषित फलन } x = 5 \text{ पर}$$

उत्तर 29:

दिया है: फलन $x = 5$ पर संतत है। इसलिए, बाँह पक्ष की सीमा = दाँह पक्ष की सीमा = $f(5)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} kx + 1 = \lim_{x \rightarrow 5^+} 3x - 5 = 5k + 1$$

$$\Rightarrow 5k + 1 = 15 - 5 = 5k + 1$$

$$\Rightarrow 5k = 9 \quad \Rightarrow k = \frac{9}{5}$$

प्रश्न 30:

a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{यदि } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{यदि } x \geq 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

उत्तर 30:

दिया है: फलन $x = 2$ पर संतत है। इसलिए, बाँह पक्ष की सीमा = दाँह पक्ष की सीमा = $f(2)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} 5 = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + b = 5$$

$$\Rightarrow 2a + b = 5 \quad \dots (1)$$

फलन $x = 10$ पर संतत है। इसलिए, बाँच पक्ष की सीमा = दाँच पक्ष की सीमा = $f(10)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = f(10)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10^-} ax + b = \lim_{x \rightarrow 10^+} 21 = 21$$

$$\Rightarrow 10a + b = 21 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$$a = 2 \quad b = 1$$

प्रश्न 31:

दर्शाइए कि $f(x) = \cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर 31:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों g और h के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = goh$)। जहाँ, $g(x) = \cos x$ और $h(x) = x^2$ है। यदि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

$$[\because goh(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \cos(x^2)]$$

फलन $g(x) = \cos x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \cos k$

$$\lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(k + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos k \cos h - \sin k \sin h = \cos k$$

यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$, अतः फलन g , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

फलन $h(x) = x^2$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = k^2$

$$\lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} x^2 = k^2$$

यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} h(x) = h(k)$, अतः फलन h , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 32:

दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर 32:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों g और h के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = goh$)। जहाँ, $g(x) = |x|$ और $h(x) = \cos x$ है। यदि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

$$[\because goh(x) = g(h(x)) = g(\cos x) = |\cos x|]$$

फलन $g(x) = |x|$

इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$$g(k) = 0 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-x) = 0, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$$

अतः, फलन g , 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0,$$

$$\text{यहाँ, } x = 0 \text{ पर, फलन } g \text{ के बाएँ पक्ष की सीमा} = \text{दाएँ पक्ष की सीमा} = g(0)$$

अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$$g(k) = 0 \text{ तथा} \lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x) = 0, \text{ यहाँ,} \lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$$

अतः, फलन g , $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन g , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

फलन $h(x) = \cos x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$

$$\lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} \cos x = \cos k$$

$$\text{यहाँ,} \lim_{x \rightarrow k} h(x) = h(k), \text{ अतः, फलन } h, \text{ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।}$$

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 33:

जाँचिए कि क्या $\sin |x|$ एक संतत फलन है।

उत्तर 33:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों h और g के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = hog$)। जहाँ, $h(x) = \sin x$ और $g(x) = |x|$ है। यदि h और g दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

$$[\because hog(x) = h(g(x)) = h(|x|) = \sin|x|]$$

फलन $h(x) = \sin x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \sin k$

$$\lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} \sin x = \sin k$$

$$\text{यहाँ,} \lim_{x \rightarrow k} h(x) = h(k), \text{ अतः, फलन } h, \text{ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।}$$

फलन $g(x) = |x|$

इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$$g(k) = 0 \text{ तथा} \lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-x) = 0, \text{ यहाँ,} \lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$$

अतः, फलन g , 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$
 दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$,
 यहाँ, $x = 0$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(0)$
 अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,
 $g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$
 अतः, फलन g , $x > 0$, के लिए संतत है।
 इसप्रकार, फलन g , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
 इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 34:

$f(x) = |x| - |x + 1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असांत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 34:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों h और g के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = g - h$)। यहाँ, $g(x) = |x|$ और $h(x) = |x + 1|$ है।
 यदि h और g दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

फलन $g(x) = |x|$

इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (-x) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$

अतः, फलन g , 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$,

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(0)$

अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$

अतः, फलन g , $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन g , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

फलन $h(x) = |x + 1|$

इस फलन h को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$h(x) = \begin{cases} -(x + 1), & \text{यदि } x < -1 \\ x + 1, & \text{यदि } x \geq -1 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < -1$ या $k = -1$ या $k > -1$

पहली स्थिति: यदि, $k < -1$,

$$h(k) = -(k+1) \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} -(k+1) = -(k+1), \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} h(x) = h(k)$$

अतः, फलन h , -1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -1$ पर, $h(-1) = -1 + 1 = 0$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -(-1+1) = 0$$

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = -1+1 = 0,$$

यहाँ, $x = -1$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(-1)$

अतः, $x = -1$ पर, फलन h संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > -1$,

$$h(k) = k+1 \text{ तथा } \lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} (k+1) = k+1, \text{ यहाँ, } \lim_{x \rightarrow k} h(x) = h(k)$$

अतः, फलन h , $x > -1$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन h , सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

गणित

(पाठ - 5) (संतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 8 में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$$\sin(x^2 + 5)$$

उत्तर 1:

माना $y = \sin(x^2 + 5)$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(x^2 + 5) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5) \\ &= \cos(x^2 + 5) \cdot 2x \end{aligned}$$

प्रश्न 2:

$$\cos(\sin x)$$

उत्तर 2:

माना $y = \cos(\sin x)$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\sin(\sin x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= -\sin(\sin x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

$$\sin(ax + b)$$

उत्तर 3:

माना $y = \sin(ax + b)$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(ax + b) \cdot \frac{d}{dx}(ax + b) \\ &= \cos(ax + b) \cdot a \end{aligned}$$

प्रश्न 4:

$$\sec(\tan(\sqrt{x}))$$

उत्तर 4:

माना $y = \sec(\tan(\sqrt{x}))$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sec(\tan \sqrt{x}) \tan(\tan \sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\tan \sqrt{x}) \\ &= \sec(\tan \sqrt{x}) \tan(\tan \sqrt{x}) \cdot \sec^2 \sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \\ &= \sec(\tan \sqrt{x}) \tan(\tan \sqrt{x}) \cdot \sec^2 \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

प्रश्न 5:

$$\frac{\sin(ax + b)}{\cos(cx + d)}$$

उत्तर 5:

माना

$$y = \frac{\sin(ax + b)}{\cos(cx + d)}$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(cx + d) \cdot \frac{d}{dx} \sin(ax + b) - \sin(ax + b) \cdot \frac{d}{dx} \cos(cx + d)}{[\cos(cx + d)]^2} \\ &= \frac{\cos(cx + d) \cdot \sin(ax + b) \cdot \frac{d}{dx}(ax + b) - \sin(ax + b) \cdot [-\sin(cx + d) \cdot \frac{d}{dx}(cx + d)]}{\cos^2(cx + d)} \\ &= \frac{\cos(cx + d) \cdot \sin(ax + b) \cdot a + \sin(ax + b) \cdot \sin(cx + d) \cdot c}{\cos^2(cx + d)} \end{aligned}$$

प्रश्न 6:

$$\cos x^3 \cdot \sin^2(x^5)$$

उत्तर 6:माना $y = \cos x^3 \cdot \sin^2(x^5)$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos x^3 \cdot \frac{d}{dx} \sin^2(x^5) + \sin^2(x^5) \cdot \frac{d}{dx} \cos x^3 \\ &= \cos x^3 \cdot 2 \sin x^5 \cos x^5 \cdot \frac{d}{dx} x^5 + \sin^2(x^5) [-\sin x^3] \cdot \frac{d}{dx} x^3 \\ &= \cos x^3 \cdot 2 \sin x^5 \cos x^5 \cdot 5x^4 - \sin^2(x^5) \sin x^3 \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 7:

$$2\sqrt{\cot(x^2)}$$

उत्तर 7:माना $y = 2\sqrt{\cot(x^2)}$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cot(x^2)}} \cdot \frac{d}{dx} [\cot(x^2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cot(x^2)}} \cdot [-\operatorname{cosec} x^2] \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cot(x^2)}} \cdot [-\operatorname{cosec} x^2] \cdot 2x \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

$$\cos(\sqrt{x})$$

उत्तर 8:

माना $y = \cos(\sqrt{x})$
इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} \\ &= -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर 9:

$x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1-h-1| - |1-1|}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{-h} = -1$$

$$RHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1+h-1| - |1-1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

प्रश्न 10:

सिद्ध कीजिए कि महत्म पूर्णक फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर 10:

$x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1-h] - [1]}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-1}{-h} = \infty$$

$$RHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1+h] - [1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

$x = 2$ पर,

$$LHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2-h] - [2]}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-2}{-h} = \infty$$

$$RHD = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2+h] - [2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित प्रश्नों में $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$$2x + 3y = \sin x$$

उत्तर 1:

$$\begin{aligned} & 2x + 3y = \sin x \\ & \text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर} \\ & \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}\sin x \\ & \Rightarrow 2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3} \end{aligned}$$

प्रश्न 2:

$$2x + 3y = \sin y$$

उत्तर 2:

$$\begin{aligned} & 2x + 3y = \sin y \\ & \text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर} \\ & \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}\sin y \\ & \Rightarrow 2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} \\ & \Rightarrow \frac{dy}{dx}(\cos y - 3) = 2 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 3} \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

$$ax + by^2 = \cos y$$

उत्तर 3:

$$\begin{aligned} & ax + by^2 = \cos y \\ & \text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर} \\ & \frac{d}{dx}(ax) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}\cos y \\ & \Rightarrow a + 2by\frac{dy}{dx} = -\sin y \frac{dy}{dx} \\ & \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2by + \sin y) = -a \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2by + \sin y} \end{aligned}$$

प्रश्न 4:

$$xy + y^2 = \tan x + y$$

उत्तर 4:

$$\begin{aligned} & xy + y^2 = \tan x + y \\ & \text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर} \\ & \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\tan x + \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y - 1) = \sec^2 x - y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

प्रश्न 5:

$$x^2 + xy + y^2 = 100$$

उत्तर 5:

$$\text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर}$$

$$\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx}(100)$$

$$\Rightarrow 2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = 2x + y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y}$$

प्रश्न 6:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$$

उत्तर 6:

$$\text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर}$$

$$\frac{d}{dx} x^3 + \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx} y^3 = \frac{d}{dx} 81$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x^2 \frac{dy}{dx} + y \cdot 2x + x \cdot 2y \frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 1 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy + 3y^2) = -(3x^2 + 2xy + y^2) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

प्रश्न 7:

$$\sin^2 y + \cos xy = k$$

उत्तर 7:

$$\text{दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^2 y + \frac{d}{dx} \cos xy = \frac{d}{dx} k$$

$$\Rightarrow 2 \sin y \cos y \frac{dy}{dx} - \sin xy \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2y \frac{dy}{dx} - x \sin xy \frac{dy}{dx} - y \sin xy = 0$$

$$\Rightarrow (\sin 2y - x \sin xy) \frac{dy}{dx} = y \sin xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$$

प्रश्न 8:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

उत्तर 8:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx} \sin^2 x + \frac{d}{dx} \cos^2 y = \frac{d}{dx} 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos y (-\sin y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x - \sin 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

प्रश्न 9:

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

उत्तर 9:

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

माना, $x = \tan \theta$

$$\text{इसलिए, } y = \sin^{-1} \left(\frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} \right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2 \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = 2 \tan^{-1} x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 10:

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2} \right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

उत्तर 10:

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2} \right)$$

माना, $x = \tan \theta$

$$\text{इसलिए, } y = \tan^{-1} \left(\frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1-3 \tan^2 \theta} \right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3 \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = 3 \tan^{-1} x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

प्रश्न 11:

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right), 0 < x < 1$$

उत्तर 11:

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

माना, $x = \tan \theta$

इसलिए, $y = \cos^{-1} \left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} \right) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2 \tan^{-1} x$

$$\Rightarrow y = 2 \tan^{-1} x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 12:

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right), 0 < x < 1$$

उत्तर 12:

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

माना, $x = \tan \theta$

इसलिए,

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} \right)$$

$$= \sin^{-1}(\cos 2\theta) = \sin^{-1} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 13:

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right), -1 < x < 1$$

उत्तर 13:

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

माना, $x = \tan \theta$

$$\text{इसलिए, } y = \cos^{-1} \left(\frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} \right)$$

$$= \cos^{-1}(\sin 2\theta) = \cos^{-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 14:

$$y = \sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2} \right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उत्तर 14:

$$y = \sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2} \right)$$

माना, $x = \sin \theta$

$$\begin{aligned}
 &\text{इसलिए, } y = \sin^{-1}(2 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) \\
 &= \sin^{-1}(2 \sin \theta \cos \theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2 \sin^{-1} x
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 2 \sin^{-1} x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्न 15:

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उत्तर 15:

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$$

माना, $x = \cos \theta$

$$\text{इसलिए, } y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right) = \sec^{-1}(\sec 2\theta) = 2\theta = 2 \cos^{-1} x$$

$\Rightarrow y = 2 \cos^{-1} x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$$\frac{e^x}{\sin x}$$

उत्तर 1:

माना $y = \frac{e^x}{\sin x}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} e^x}{\sin^2 x} = \frac{e^x \cdot \cos x - \sin x \cdot e^x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{\sin^2 x}$$

प्रश्न 2:

$$e^{\sin^{-1} x}$$

उत्तर 2:

माना $y = e^{\sin^{-1} x}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = e^{\sin^{-1} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्न 3:

$$e^{x^3}$$

उत्तर 3:

माना $y = e^{x^3}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^3 = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

प्रश्न 4:

$$\sin(\tan^{-1} e^{-x})$$

उत्तर 4:

माना $y = \sin(\tan^{-1} e^{-x})$, इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} e^{-x} = \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \cdot \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot \frac{d}{dx} e^{-x} \\ &= \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot (-e^{-x}) = -\frac{e^{-x} \cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}\end{aligned}$$

प्रश्न 5:

$$\log(\cos e^x)$$

उत्तर 5:

माना $y = \log(\cos e^x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos e^x} \cdot \frac{d}{dx} \cos e^x = \frac{1}{\cos e^x} (-\sin e^x) \frac{d}{dx} e^x = -\tan e^x \cdot e^x$$

प्रश्न 6:

$$e^x + e^{x^2} + \dots + e^{x^5}$$

उत्तर 6:

माना $y = e^x + e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^4} + e^{x^5}$, इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^x + e^{x^2} \frac{d}{dx} x^2 + e^{x^3} \frac{d}{dx} x^3 + e^{x^4} \frac{d}{dx} x^4 + e^{x^5} \frac{d}{dx} x^5 \\ &= e^x + e^{x^2} \cdot 2x + e^{x^3} \cdot 3x^2 + e^{x^4} \cdot 4x^3 + e^{x^5} \cdot 5x^4 \\ &= e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}\end{aligned}$$

प्रश्न 7:

$$\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, x > 0$$

उत्तर 7:

माना $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$$

प्रश्न 8:

$$\log(\log x), x > 1$$

उत्तर 8:

माना $y = \frac{e^x}{\sin x}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$$

प्रश्न 9:

$$\frac{\cos x}{\log x}, x > 0$$

उत्तर 9:

माना $y = \frac{\cos x}{\log x}$

$$\text{इसलिए, } \frac{dy}{dx} = \frac{\log x \frac{d}{dx} \cos x - \cos x \frac{d}{dx} \log x}{(\log x)^2} = \frac{\log x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{-(x \sin x \log x + \cos x)}{x (\log x)^2}$$

प्रश्न 10:

$$\cos(\log x + e^x)$$

उत्तर 10:

माना $y = \cos(\log x + e^x)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\log x + e^x) \cdot \frac{d}{dx} (\log x + e^x) = -\sin(\log x + e^x) \cdot \left(\frac{1}{x} + e^x \right)$$

गणित

(पाठ - 5) (संतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.5

1 से 11 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिएः

प्रश्न 1:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$$

उत्तर 1:

माना $y = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \log \cos x + \log \cos 2x + \log \cos 3x$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \cos x + \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{d}{dx} \cos 2x + \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{d}{dx} \cos 3x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x [-\tan x - 2 \tan 2x - 3 \tan 3x] \end{aligned}$$

प्रश्न 2:

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$$

उत्तर 2:

माना $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \frac{1}{2} [\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4) - \log(x-5)]$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)} \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}} \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)} \right] \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

$$(\log x)^{\cos x}$$

उत्तर 3:

माना $y = (\log x)^{\cos x}$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \log(\log x)^{\cos x} = \cos x \cdot \log \log x$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \frac{d}{dx} \log \log x + \log \log x \cdot \frac{d}{dx} \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\cos x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log \log x \cdot (-\sin x) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x} \left[\frac{\cos x - \sin x \log \log x}{x \log x} \right]$$

प्रश्न 4:

$$x^x - 2^{\sin x}$$

उत्तर 4:

माना $u = x^x$ तथा $v = 2^{\sin x}$ इसलिए, $y = u - v$
दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = x^x$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log u = x \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x = x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1 = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u[1 + \log x] = x^x[1 + \log x] \quad \dots (2)$$

तथा, $v = 2^{\sin x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log v = \sin x \log 2$, इसलिए

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \log 2 \cdot \frac{d}{dx} \sin x = \log 2 \cdot \cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = v[\cos x \log 2] = 2^{\sin x}[\cos x \log 2] \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x[1 + \log x] - 2^{\sin x}[\cos x \log 2]$$

प्रश्न 5:

$$(x+3)^2 \cdot (x+4)^3 \cdot (x+5)^4$$

उत्तर 5:

माना $y = (x+3)^2 \cdot (x+4)^3 \cdot (x+5)^4$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log y = 2\log(x+3) + 3\log(x+4) + 4\log(x+5)$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{(x+3)} + 3 \cdot \frac{1}{(x+4)} + 4 \cdot \frac{1}{(x+5)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{2(x+4)(x+5) + 3(x+3)(x+5) + 4(x+3)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{2(x^2 + 9x + 20) + 3(x^2 + 8x + 15) + 4(x^2 + 7x + 12)}{(x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x+3)^2 \cdot (x+4)^3 \cdot (x+5)^4 \left[\frac{9x^2 + 70x + 133}{(x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x+3) \cdot (x+4)^2 \cdot (x+5)^3 (9x^2 + 70x + 133)$$

प्रश्न 6:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{(1+\frac{1}{x})}$$

उत्तर 6:

माना $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ तथा $v = x^{(1+\frac{1}{x})}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log u = x \log \left(x + \frac{1}{x}\right), \text{इसलिए,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx} \log \left(x + \frac{1}{x}\right) + \log \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx} x \\ &= x \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \log \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 1 = \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2} + \log \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{du}{dx} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \log \left(x + \frac{1}{x}\right) \right] \quad \dots (2) \end{aligned}$$

तथा, $v = x^{(1+\frac{1}{x})}$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log v = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \log x, \text{इसलिए,}$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2} \right] = x^{(1+\frac{1}{x})} \left[\frac{x^2 + 1 - \log x}{x^2} \right] \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \log \left(x + \frac{1}{x}\right) \right] + x^{(1+\frac{1}{x})} \left[\frac{x^2 + 1 - \log x}{x^2} \right]$$

प्रश्न 7:

$$(\log x)^x + x^{\log x}$$

उत्तर 7:

माना $u = (\log x)^x$ तथा $v = x^{\log x}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = (\log x)^x$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log u = x \log \log x, \text{इसलिए,}$$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx} \log \log x + \log \log x \cdot \frac{d}{dx} x$$

$$\begin{aligned}
 &= x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log \log x \cdot 1 = \frac{1}{\log x} + \log \log x \\
 \frac{du}{dx} &= (\log x)^x \left[\frac{1 + \log x \cdot \log \log x}{\log x} \right] \\
 &= (\log x)^{x-1} (1 + \log x \cdot \log \log x) \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

तथा, $v = x^{\log x}$, दोनों ओर \log लेने पर
 $\log v = \log x \log x$, इसलिए,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} &= \log x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} \log x \\
 &= \log x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{x} \\
 \frac{dv}{dx} &= v \left[\frac{2 \log x}{x} \right] = x^{\log x} \left[\frac{2 \log x}{x} \right] = x^{\log x-1} (2 \log x) \quad \dots (3) \\
 \text{समीकरण (2) से } \frac{du}{dx} &\text{ का तथा समीकरण (3) से } \frac{dv}{dx} \text{ का मान समीकरण (1) में रखने पर} \\
 \frac{dy}{dx} &= (\log x)^{x-1} (1 + \log x \cdot \log \log x) + x^{\log x-1} (2 \log x)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

$$(\sin x)^x + \sin^{-1} \sqrt{x}$$

उत्तर 8:

माना $u = (\sin x)^x$ तथा $v = \sin^{-1} \sqrt{x}$ इसलिए, $y = u + v$
 दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = (\sin x)^x$, दोनों ओर \log लेने पर।

$\log u = x \log \sin x$, इसलिए,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx} \log \sin x + \log \sin x \cdot \frac{d}{dx} x \\
 &= x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \log \sin x \cdot 1 = x \cot x + \log \sin x \\
 \frac{du}{dx} &= (\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

तथा, $v = \sin^{-1} \sqrt{x}$, इसलिए,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} &= \log x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} \log x = \log x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{x} \\
 \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

प्रश्न 9:

$$x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$$

उत्तर 9:

माना $u = x^{\sin x}$ तथा $v = (\sin x)^{\cos x}$ इसलिए, $y = u + v$
दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = x^{\sin x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log u = \sin x \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \sin x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} \sin x = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{x} + \log x \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = x^{\sin x} \left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cos x \right] = x^{\sin x - 1} (\sin x + x \log x \cos x) \quad \dots (2)$$

तथा, $v = (\sin x)^{\cos x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log v = \cos x \log \sin x$, इसलिए,

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \cos x \cdot \frac{d}{dx} \log \sin x + \log \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x + \log \sin x (-\sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v [\cos x \cot x - \sin x \log \sin x] = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \cot x - \sin x \log \sin x) \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x - 1} (\sin x + x \log x \cos x) + (\sin x)^{\cos x} (\cos x \cot x - \sin x \log \sin x)$$

प्रश्न 10:

$$x^{x \cos x} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

उत्तर 10:

माना $u = x^{x \cos x}$ तथा $v = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = x^{x \cos x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log u = x \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = x \cos x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x \cos x = x \cos x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot (-x \cdot \sin x + \cos x)$$

$$= \cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u [\cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x]$$

$$= x^{x \cos x} [\cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x] \quad \dots (2)$$

तथा, $v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1)$, इसलिए,

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x - \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{-4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} \right] = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left[\frac{-4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} \right] = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{x \cos x} [\cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x] - \frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

प्रश्न 11:

$$(x \cos x)^x + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

उत्तर 11:

माना $u = (x \cos x)^x$ तथा $v = (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \dots (1)$$

यहाँ, $u = (x \cos x)^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x \log(x \cos x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx} \log(x \cos x) + \log(x \cos x) \cdot \frac{d}{dx} x \\ &= x \cdot \frac{1}{(x \cos x)} (-x \sin x + \cos x) + \log(x \cos x) \cdot 1 = -x \tan x + 1 + \log(x \cos x) \\ \frac{du}{dx} &= (x \cos x)^x [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] \\ &= (x \cos x)^x [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] \dots (2) \end{aligned}$$

तथा, $v = (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \frac{1}{x} \log(x \sin x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \log(x \sin x) + \log(x \sin x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x \sin x} (x \cos x + \sin x) + \log(x \sin x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2} \right] = (x \sin x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2} \right] \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = (x \cos x)^x [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] + (x \sin x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2} \right]$$

12 से 15 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 12:

$$x^y + y^x = 1$$

उत्तर 12:

माना $u = x^y$ तथा $v = y^x$ इसलिए, $u + v = 1$
दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = x^y$, दोनों ओर \log लेने पर, $\log u = y \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = y \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} y = y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = x^y \left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} \right] \quad \dots (2)$$

तथा, $v = y^x$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log v = x \log y$, इसलिए,

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx} \log y + \log y \cdot \frac{d}{dx} x = x \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] = y^x \left[\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x^y \left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} \right] + y^x \left[\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] = 0$$

$$\Rightarrow yx^{y-1} + x^y \log x \cdot \frac{dy}{dx} + xy^{x-1} \frac{dy}{dx} + y^x \log y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (x^y \log x + xy^{x-1}) = -(y^x \log y + yx^{y-1})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + yx^{y-1}}{x^y \log x + xy^{x-1}}$$

प्रश्न 13:

$$y^x = x^y$$

उत्तर 13:

$$y^x = x^y$$

दोनों ओर \log लेने पर, $x \log y = y \log x$, इसलिए,

$$x \cdot \frac{d}{dx} \log y + \log y \cdot \frac{d}{dx} x = y \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} y$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1 = y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{x}{y} - \log x \right) = \frac{y}{x} - \log y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{x - y \log x}{y} \right) = \frac{y - x \log y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(y - x \log y)}{x(x - y \log x)}$$

प्रश्न 14:

$$(\cos x)^y = (\cos y)^x$$

उत्तर 14:

$$(\cos x)^y = (\cos y)^x$$

दोनों ओर log लेने पर, $y \cos x = x \cos y$, इसलिए,

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \cdot \frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx} \cos y + \cos y \cdot \frac{d}{dx} x \\ \Rightarrow y(-\sin x) + \cos x \cdot \frac{dy}{dx} &= x(-\sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y \cdot 1 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(\cos x + x \sin y) &= \cos y + y \sin x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos y + y \sin x}{\cos x + x \sin y} \end{aligned}$$

प्रश्न 15:

$$xy = e^{(x-y)}$$

उत्तर 15:

$$xy = e^{(x-y)}$$

दोनों ओर log लेने पर, $\log x + \log y = (x - y) \log e \Rightarrow \log x + \log y = (x - y)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 - \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{y} + 1 \right) &= 1 - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{1+y}{y} \right) = \frac{x-1}{x} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y(x-1)}{x(y+1)} \end{aligned}$$

प्रश्न 16:

$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

दोनों ओर log लेने पर,

$\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{d}{dx} x^2 + \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{d}{dx} x^4 + \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{d}{dx} x^8 \\ \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 + \frac{1}{1+x^8} \cdot 8x^7 \\ \Rightarrow f'(x) &= f(x) \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} \right] \\ \Rightarrow f'(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} \right] \end{aligned}$$

प्रश्न 17:

$(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ का अवकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से कीजिए:

- (i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके
- (ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके
- (iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

उत्तर 17:

माना $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

- (i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके अवकलन

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 - 5x + 8) \frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9) + (x^3 + 7x + 9) \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8) \\ &= (x^2 - 5x + 8)(3x^2 + 7) + (x^3 + 7x + 9)(2x - 5) \\ &= (3x^4 + 7x^2 - 15x^3 - 35x + 24x^2 + 56) + 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 35x + 18x - 45 \\ &= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \end{aligned}$$

- (ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके अवकलन

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9) \\ &= x^5 + 7x^3 + 9x^2 - 5x^4 - 35x^2 - 45x + 8x^3 + 56x + 72 \\ &= x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 11x + 72 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^5 - 5\frac{d}{dx}x^4 + 15\frac{d}{dx}x^3 - 26\frac{d}{dx}x^2 + 11\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}72 \\ &= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \end{aligned}$$

- (iii) लघुगणकीय अवकलन

$y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

दोनों ओर \log लेने पर, $\log y = \log(x^2 - 5x + 8) + \log(x^3 + 7x + 9)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(x^2 - 5x + 8)} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{(x^3 + 7x + 9)} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9) \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^2 - 5x + 8} \cdot (2x - 5) + \frac{1}{x^3 + 7x + 9} \cdot (3x^2 + 7) \\ \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{(2x - 5)(x^3 + 7x + 9) + (3x^2 + 7)(x^2 - 5x + 8)}{(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)} \right] \\ &= y \left[\frac{2x^4 + 14x^2 + 18x - 5x^3 - 35x - 45 + 3x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 7x^2 - 35x + 56}{(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)} \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9) \left[\frac{5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11}{(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)} \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \end{aligned}$$

अतः, इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

प्रश्न 18:

यदि u, v तथा w, x के फलन हैं, तो दो विधियों अर्थात् प्रथम-गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा, द्वितीय - लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = \frac{du}{dx} v \cdot w + u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot w + u \cdot v \frac{dw}{dx}$$

उत्तर 18:

माना $y = u \cdot v \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$

गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा अवकलन

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u \cdot \frac{d}{dx}(v \cdot w) + (v \cdot w) \cdot \frac{d}{dx}u \\&= u \left[v \frac{d}{dx}w + w \frac{d}{dx}v \right] + v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot w \cdot \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

लघुगणकीय अवकलन

माना $y = u \cdot v \cdot w$

दोनों ओर \log लेने पर, $\log y = \log u + \log v + \log w$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} \right] \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot v \cdot w \left[\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} \right] \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u \cdot v \cdot w}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{u \cdot v \cdot w}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{u \cdot v \cdot w}{w} \cdot \frac{dw}{dx} \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx}\end{aligned}$$

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.6

यदि प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में x तथा y दिए समीकरणों द्वारा, एक दूसरे से प्राचलिक रूप में संबंधित हों, तो प्राचलों का विलोपन किए बिना, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$$x = 2at^2, y = at^4$$

उत्तर 1:

यहाँ, $x = 2at^2, y = at^4$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 2a(2t)$ तथा $\frac{dy}{dt} = a(4t^3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4at^3}{4at} = t^2$$

प्रश्न 2:

$$x = a \cos \theta, y = b \cos \theta$$

उत्तर 2:

यहाँ, $x = a \cos \theta, y = b \cos \theta$

इसलिए, $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin \theta)$ तथा $\frac{dy}{d\theta} = b(-\sin \theta)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-b \sin \theta}{-a \sin \theta} = \frac{b}{a}$$

प्रश्न 3:

$$x = \sin t, y = \cos 2t$$

उत्तर 3:

यहाँ, $x = \sin t, y = \cos 2t$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ तथा $\frac{dy}{dt} = -\sin 2t \cdot 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \sin 2t}{\cot t} = -\frac{2(2 \sin t \cos t)}{\cos t} = -4 \sin t$$

प्रश्न 4:

$$x = 4t, y = \frac{4}{t}$$

उत्तर 4:

यहाँ, $x = 4t, y = \frac{4}{t}$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 4$ तथा $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{t^2}}{4} = -\frac{1}{t^2}$$

प्रश्न 5:

$$x = \cos \theta - \cos 2\theta, y = \sin \theta - \sin 2\theta$$

उत्तर 5:

यहाँ, $x = \cos \theta - \cos 2\theta, y = \sin \theta - \sin 2\theta$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta + 2 \sin 2\theta \quad \text{तथा } \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - 2 \cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta - 2 \cos 2\theta}{-\sin \theta + 2 \sin 2\theta}$$

प्रश्न 6:

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 + \cos \theta)$$

उत्तर 6:

यहाँ, $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 + \cos \theta)$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta) \quad \text{तथा } \frac{dy}{d\theta} = a(0 - \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = -\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = -\cot \frac{\theta}{2}$$

प्रश्न 7:

$$x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

उत्तर 7:

यहाँ, $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{dt} = \frac{\sin^3 t \frac{d}{dt} \sqrt{\cos 2t} - \sqrt{\cos 2t} \frac{d}{dt} \sin^3 t}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$= \frac{\sin^3 t \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-\sin 2t) \cdot 2 - \sqrt{\cos 2t} \cdot 3 \sin^2 t \cos t}{\cos 2t} = \frac{-\sin^3 t \cdot \sin 2t - 3 \cos 2t \cdot \sin^2 t \cos t}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}}$$

$$\text{तथा } \frac{dy}{dt} = \frac{\cos^3 t \frac{d}{dt} \sqrt{\cos 2t} - \sqrt{\cos 2t} \frac{d}{dt} \cos^3 t}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$= \frac{\cos^3 t \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-\sin 2t) \cdot 2 - \sqrt{\cos 2t} \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t)}{\cos 2t} = \frac{-\cos^3 t \cdot \sin 2t + 3 \cos 2t \cdot \cos^2 t \sin t}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\cos^3 t \cdot \sin 2t + 3 \cos 2t \cdot \cos^2 t \sin t}{-\sin^3 t \cdot \sin 2t - 3 \cos 2t \cdot \sin^2 t \cos t} \\ &= \frac{-\cos^3 t \cdot (2 \sin t \cos t) + 3 \cos 2t \cdot \cos^2 t \sin t}{-\sin^3 t \cdot (2 \sin t \cos t) - 3 \cos 2t \cdot \sin^2 t \cos t} = \frac{\cos^2 t \sin t (-2 \cos^2 t + 3 \cos 2t)}{\sin^2 t \cos t (-2 \sin^2 t - 3 \cos 2t)} \\ &= \frac{\cos t [-2 \cos^2 t + 3(2 \cos^2 t - 1)]}{\sin t [-2 \sin^2 t - 3(1 - 2 \sin^2 t)]} = \frac{\cos t [-2 \cos^2 t + 6 \cos^2 t - 3]}{\sin t [-2 \sin^2 t - 3 + 6 \sin^2 t]} \\ &= \frac{\cos t [4 \cos^2 t - 3]}{\sin t [-3 + 4 \sin^2 t]} = -\frac{4 \cos^3 t - 3 \cos t}{3 \sin t - 4 \sin^3 t} = -\frac{\cos 3t}{\sin 3t} = -\cot 3t \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

$$x = a \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) \quad y = a \sin t$$

उत्तर 8:

$$\text{यहाँ, } x = a \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) \quad y = a \sin t$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, } \frac{dx}{dt} &= a \left(-\sin t + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \cdot \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = a \left(-\sin t + \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= a \left(-\sin t + \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \right) = a \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) = a \left(\frac{-\sin^2 t + 1}{\sin t} \right) = a \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) \end{aligned}$$

$$\text{तथा } \frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos t}{a \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} \right)} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$

प्रश्न 9:

$$x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$$

उत्तर 9:

$$\text{यहाँ, } x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{d\theta} = a \sec \theta \tan \theta$$

$$\text{तथा } \frac{dy}{d\theta} = b \sec^2 \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b \sec^2 \theta}{a \sec \theta \tan \theta} = \frac{b \sec \theta}{a \tan \theta} = \frac{b \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)}{a \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)} = \frac{b}{a} \operatorname{cosec} \theta$$

प्रश्न 10:

$$x = a (\cos \theta + \theta \sin \theta), y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

उत्तर 10:

$$\text{यहाँ, } x = a (\cos \theta + \theta \sin \theta), y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{d\theta} = a [-\sin \theta + (\theta \cos \theta + \sin \theta)] = a\theta \cos \theta$$

$$\text{तथा } \frac{dy}{d\theta} = a [\cos \theta - (-\theta \sin \theta + \cos \theta)] = a\theta \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta \sin \theta}{a\theta \cos \theta} = \tan \theta$$

प्रश्न 11:

यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}, y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

उत्तर 11:

यहाँ, $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}, y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$

इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1} t}}} \cdot \frac{d}{dx} a^{\sin^{-1} t} = \frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1} t}}} \cdot a^{\sin^{-1} t} \cdot \log a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2x} \cdot x^2 \cdot \log a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x \log a}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

तथा

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1} t}}} \cdot \frac{d}{dx} a^{\cos^{-1} t} = \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1} t}}} \cdot a^{\cos^{-1} t} \cdot \log a \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2y} \cdot y^2 \cdot \log a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{y \log a}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{y \log a}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{x \log a}{\sqrt{1-t^2}}} = -\frac{y}{x}$$

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में दिए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$$x^2 + 3x + 2$$

उत्तर 1:

माना $y = x^2 + 3x + 2$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3 \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x + 3) = 2$$

प्रश्न 2:

$$x^{20}$$

उत्तर 2:

माना $y = x^{20}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{20}) = 20x^{19} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(20x^{19}) = 380x^{18}$$

प्रश्न 3:

$$x \cdot \cos x$$

उत्तर 3:

माना $y = x \cdot \cos x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x \cdot \cos x) = x \cdot \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \cdot \frac{d}{dx} x = -x \sin x + \cos x \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-x \sin x + \cos x) = -\left(x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{d}{dx} x\right) - \sin x \\ &= -x \cos x - \sin x - \sin x = -(x \cos x + 2 \sin x) \end{aligned}$$

प्रश्न 4:

$$\log x$$

उत्तर 4:

माना $y = \log x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

प्रश्न 5:

$$x^3 \log x$$

उत्तर 5:

माना $y = x^3 \log x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 \log x) = x^3 \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x^3 = x^3 \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2 \log x \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(x^2 + 3x^2 \log x) = 2x + 3\left(x^2 \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} x^2\right) \\ &= 2x + 3\left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 2x\right) = 2x + 3x + 6x \log x = 5x + 6x \log x = x(5 + 6 \log x) \end{aligned}$$

प्रश्न 6:

$$e^x \sin 5x$$

उत्तर 6:

माना $y = e^x \sin 5x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^x \sin 5x) = e^x \cdot \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x \cdot \frac{d}{dx} e^x = e^x \cos 5x \cdot 5 + \sin 5x \cdot e^x \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(5e^x \cos 5x + e^x \sin 5x) \\ &= 5 \left(e^x \cdot \frac{d}{dx} \cos 5x + \cos 5x \cdot \frac{d}{dx} e^x \right) + \left(e^x \cdot \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x \cdot \frac{d}{dx} e^x \right) \\ &= 5[e^x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 + \cos 5x \cdot e^x] + [e^x \cos 5x \cdot 5 + \sin 5x \cdot e^x] \\ &= e^x(-25 \sin 5x + 5 \cos 5x + 5 \cos 5x + \sin 5x) = e^x(10 \cos 5x - 24 \sin 5x) \end{aligned}$$

प्रश्न 7:

$$e^{6x} \cos 3x$$

उत्तर 7:

माना $y = e^{6x} \cos 3x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^{6x} \cos 3x) = e^{6x} \cdot \frac{d}{dx} \cos 3x + \cos 3x \cdot \frac{d}{dx} e^{6x} \\ &= e^{6x} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 + \cos 3x \cdot e^{6x} \cdot 6 = 3e^{6x}(-\sin 3x + 2 \cos 3x) \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}[3e^{6x}(-\sin 3x + 2 \cos 3x)] \\ &= 3e^{6x} \cdot \frac{d}{dx}(-\sin 3x + 2 \cos 3x) + (-\sin 3x + 2 \cos 3x) \cdot \frac{d}{dx} 3e^{6x} \\ &= 3e^{6x} \cdot (-3 \cos 3x - 6 \sin 3x) + (-\sin 3x + 2 \cos 3x) \cdot 18e^{6x} \\ &= e^{6x}(-9 \cos 3x - 18 \sin 3x - 18 \sin 3x + 36 \cos 3x) \\ &= e^{6x}(27 \cos 3x - 36 \sin 3x) = 9e^{6x}(3 \cos 3x - 4 \sin 3x) \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

$$\tan^{-1} x$$

उत्तर 8:

माना $y = \tan^{-1} x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{0 - 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

प्रश्न 9:

$\log(\log x)$

उत्तर 9:

माना $y = \log(\log x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\log(\log x)) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x \log x}\right) = \frac{(x \log x) \frac{d}{dx} 1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x \log x)}{(x \log x)^2} \\ &= \frac{0 - \left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x\right)}{(x \log x)^2} = -\frac{1 + \log x}{(x \log x)^2} \end{aligned}$$

प्रश्न 10:

$\sin(\log x)$

उत्तर 10:

माना $y = \sin(\log x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\sin(\log x)) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(\log x)}{x}\right] = \frac{x \frac{d}{dx} \cos(\log x) - \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx} x}{(x)^2} \\ &= \frac{x \left\{-\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x}\right\} - \cos(\log x) \cdot 1}{(x)^2} = \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{(x)^2} \end{aligned}$$

प्रश्न 11:

यदि $y = 5 \cos x - 3 \sin x$, है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

उत्तर 11:

दिया है: $y = 5 \cos x - 3 \sin x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5 \cos x - 3 \sin x) = -5 \sin x - 3 \cos x \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-5 \sin x - 3 \cos x) = -5 \cos x + 3 \sin x = -(5 \cos x - 3 \sin x) = -y \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y &= 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 12:

यदि $y = \cos^{-1} x$, है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

दिया है: $y = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos y = x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} -\sin y \frac{dy}{dx} &= 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\operatorname{cosec} y \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= -(-\operatorname{cosec} y \cot y) \cdot \frac{dy}{dx} = (\operatorname{cosec} y \cot y) \cdot (-\operatorname{cosec} y) = -\operatorname{cosec}^2 y \cot y \end{aligned}$$

प्रश्न 13:

यदि $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

उत्तर 13:

दिया है: $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)) = -3 \sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} + 4 \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow x \frac{dy}{dx} &= -3 \sin(\log x) + 4 \cos(\log x) \\ \Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx}[-3 \sin(\log x) + 4 \cos(\log x)] \\ &= -3 \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} - 4 \sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}[3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)] = -\frac{1}{x} \cdot y \\ \Rightarrow x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x}y \quad \Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0 \\ \Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 + y &= 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 14:

यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

उत्तर 14:

दिया है: $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(Ae^{mx} + Be^{nx}) = mAe^{mx} + nBe^{nx} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(mAe^{mx} + nBe^{nx}) = m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny &\text{ में } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ और } \frac{dy}{dx} \text{ का मान रखने पर} \\ LHS &= (m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx}) - (m+n)(mAe^{mx} + nBe^{nx}) + mny \\ &= m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx} - (m^2Ae^{mx} + mnBe^{nx} + mnAe^{mx} + n^2Be^{nx}) + mny \\ &= -(mnAe^{mx} + mnBe^{nx}) + mny \\ &= -mn(Ae^{mx} + Be^{nx}) + mny \\ &= -mny + mny = 0 = RHS \end{aligned}$$

प्रश्न 15:

यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ है।

उत्तर 15:

दिया है: $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(500e^{7x} + 600e^{-7x}) = 500e^{7x} \cdot 7 + 600e^{-7x} \cdot (-7) = 7(500e^{7x} - 600e^{-7x}) \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}7(500e^{7x} - 600e^{-7x}) = 7[500e^{7x} \cdot 7 + 600e^{-7x} \cdot (-7)] \\ &= 49(500e^{7x} - 600e^{-7x}) = 49y \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 49y \end{aligned}$$

प्रश्न 16:

यदि $e^y(x+1) = 1$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ है।

उत्तर 16:

दिया है: $e^y(x+1) = 1$, इसलिए,

$$\begin{aligned} e^y \frac{dy}{dx}(x+1) + (x+1) \frac{d}{dx} e^y &= \frac{d}{dx} 1 \\ \Rightarrow e^y + (x+1)e^y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x+1} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\left[\frac{(x+1) \cdot \frac{d}{dx} 1 - 1 \cdot \frac{d}{dx} (x+1)}{(x+1)^2} \right] = -\left[\frac{0-1}{(x+1)^2} \right] = \frac{1}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(-\frac{1}{x+1} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 17:

यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2$ है।

उत्तर 17:

दिया है: $y = (\tan^{-1} x)^2$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [(\tan^{-1} x)^2] = 2 \tan^{-1} x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2 \tan^{-1} x}{1+x^2} \\ \Rightarrow (1+x^2) \frac{dy}{dx} &= 2 \tan^{-1} x \\ \Rightarrow (1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx} (1+x^2) &= \frac{d}{dx} (2 \tan^{-1} x) \\ \Rightarrow (1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot 2x &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Rightarrow (1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} &= 2 \\ \Rightarrow (x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 &= 2 \end{aligned}$$

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.8

प्रश्न 1:

फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

उत्तर 1:

दिया गया फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$

(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[-4, 2]$ में संतत है।

(ii) $f'(x) = 2x + 2$

अतः, फलन f विवृत अंतराल $(-4, 2)$ में अवकलनीय है।

(iii) $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$

तथा $f(2) = (2)^2 + 2(2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$

$$\Rightarrow f(-4) = f(2)$$

यहाँ, रोले की तीनों परिस्थितियाँ सत्य हैं। इसलिए, विवृत अंतराल $(-4, 2)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि $f'(c) = 0$ है।

$$\Rightarrow f'(c) = 2c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow c = -1 \in (-4, 2)$$

अतः, फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ के लिए रोले की प्रमेय सत्यापित हो जाती है।

प्रश्न 2:

जाँच कीजिए कि क्या रोले का प्रमेय निम्नलिखित फलनों में से किन-किन पर लागू होता है। इन उदाहरणों से क्या आप रोले के प्रमेय के विलोम के बारे में कुछ कह सकते हैं?

(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$

(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$

उत्तर 2:

रोले का प्रमेय फलन $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ में तभी लागू होता है। जब रोले की निम्नलिखित तीनों परिस्थितियाँ सत्य हों।

(i) फलन f संवृत अंतराल $[a, b]$ में संतत हो।

(ii) फलन f विवृत अंतराल (a, b) में अवकलनीय हो।

(iii) $f(a) = f(b)$ हो।

(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$

फलन f संवृत अंतराल $[5, 9]$ में न संतत है, न ही विवृत अंतराल $(5, 9)$ में अवकलनीय है और $f(5) \neq f(9)$ है।

अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$

फलन f संवृत अंतराल $[-2, 2]$ में न संतत है, न ही विवृत अंतराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय है और $f(-2) \neq f(2)$ है।

अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$

फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 2]$ में संतत है।

$f'(x) = 2x$, अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 2)$ में अवकलनीय है।

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \text{ तथा } f(2) = (2)^2 - 1 = 3,$$

$$\Rightarrow f(1) \neq f(2)$$

अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = x^2 - 1$ पर लागू नहीं होता है।

प्रश्न 3:

यदि $f : [-5, 5] \rightarrow R$ एक संतत अवकल फलन है और यदि $f'(x)$ किसी भी बिंदु पर शून्य नहीं होता है तो सिद्ध कीजिए कि $f(-5) \neq f(5)$

उत्तर 3:

$f : [-5, 5] \rightarrow R$ एक संतत अवकल फलन है। अतः,

(i) फलन f संवृत अंतराल $[-5, 5]$ में संतत है।

(ii) फलन f विवृत अंतराल $(-5, 5)$ में अवकलनीय है।

माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(-5, 5)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(-5)}{5 - (-5)}$$

परन्तु दिया है कि $f'(x)$ किसी भी बिंदु पर शून्य नहीं है। अतः,

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(-5)}{5 - (-5)} \neq 0$$

$$\Rightarrow f(5) - f(-5) \neq 0$$

$$\Rightarrow f(5) \neq f(-5)$$

प्रश्न 4:

माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^2 - 4x - 3$ जहाँ $a = 1$ और $b = 4$ है।

उत्तर 4:

दिया गया फलन $f(x) = x^2 - 4x - 3, x \in [1, 4]$

(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 4]$ में संतत है।

(ii) $f'(x) = 2x - 4$

अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 4)$ में अवकलनीय है।

माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(1, 4)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \\ \Rightarrow 2c - 4 &= \frac{[(4)^2 - 4(4) - 3] - [(1)^2 - 4(1) - 3]}{3} \\ \Rightarrow 2c - 4 &= \frac{-3 - (-6)}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \Rightarrow 2c &= 5 \quad \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in (1, 4) \end{aligned}$$

अतः, फलन $f(x) = x^2 - 4x - 3, x \in [1, 4]$ के लिए माध्यमान प्रमेय सत्यापित हो जाती है।

प्रश्न 5:

माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, जहाँ $a = 1$ और $b = 3$ है। $f'(c) = 0$ के लिए $c \in (1, 3)$ को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x, x \in [1, 3]$

(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 3]$ में संतत है।

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 3)$ में अवकलनीय है।

माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(1, 3)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$\begin{aligned}f'(c) &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ \Rightarrow 3c^2 - 10c - 3 &= \frac{[(3)^3 - 5(3)^2 - 3(3)] - [(1)^3 - 5(1)^2 - 3(1)]}{2} \\ \Rightarrow 3c^2 - 10c - 3 &= \frac{(27 - 54) - (1 - 8)}{2} = \frac{-27 + 7}{2} = -10 \\ \Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 &= 0 \\ \Rightarrow 3c^2 - 3c - 7c + 7 &= 0 \\ \Rightarrow 3c(c - 1) - 7(c - 1) &= 0 \\ \Rightarrow (c - 1)(3c - 7) &= 0 \\ \Rightarrow c - 1 = 0 &\text{ या } 3c - 7 = 0 \\ \Rightarrow c = 1 &\text{ या } c = \frac{7}{3} \\ \Rightarrow c = \frac{7}{3} &\in (1, 3)\end{aligned}$$

अतः, फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x, x \in [1, 3]$ के लिए माध्यमान प्रमेय सत्यापित हो जाती है।

$f'(c) = 0$ के लिए c का मान $\frac{7}{3}$ है।

प्रश्न 6:

प्रश्न संख्या 2 में उपरोक्त दिए तीनों फलनों के लिए माध्यमान प्रमेय की अनुपयोगिता की जाँच कीजिए।

उत्तर 6:

माध्यमान प्रमेय फलन $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ में तभी लागू होता है। जब माध्यमान प्रमेय की निम्नलिखित दोनों परिस्थितियाँ सत्य हों।

- (i) फलन f संवृत अंतराल $[a, b]$ में संतत हो।
- (ii) फलन f विवृत अंतराल (a, b) में अवकलनीय हो।

(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$

फलन f संवृत अंतराल $[5, 9]$ में न संतत है और न ही विवृत अंतराल $(5, 9)$ में अवकलनीय है।

अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$

फलन f संवृत अंतराल $[-2, 2]$ में न संतत है और न ही विवृत अंतराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय है।

अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$

फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 2]$ में संतत है।

$$f'(x) = 2x$$

अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 2)$ में अवकलनीय है।

अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = x^2 - 1$ पर लागू होता है।

गणित

(पाठ - 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न संख्या 1 से 11 तक प्रदत्त फलनों का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$$(3x^2 - 9x + 5)^9$$

उत्तर 1:

माना $y = (3x^2 - 9x + 5)^9$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 9(3x^2 - 9x + 5)^8 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 9x + 5) = 9(3x^2 - 9x + 5)^8 \cdot (6x - 9) \\ &= 27(3x^2 - 9x + 5)^8 \cdot (2x - 3) \end{aligned}$$

प्रश्न 2:

$$\sin^3 x + \cos^6 x$$

उत्तर 2:

माना $y = \sin^3 x + \cos^6 x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3 \sin^2 x \cdot \frac{d}{dx} \sin x + 6 \cos^5 x \cdot \frac{d}{dx} \cos x = 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos^5 x \cdot (-\sin x) \\ &= 3 \sin x \cos x (\sin x - 2 \cos^4 x) \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

$$(5x)^{3 \cos 2x}$$

उत्तर 3:

माना $y = (5x)^{3 \cos 2x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log y = \log(5x)^{3 \cos 2x} = 3 \cos 2x \cdot \log 5x$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 3 \cos 2x \cdot \frac{d}{dx} \log 5x + \log 5x \cdot \frac{d}{dx} 3 \cos 2x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[3 \cos 2x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 + \log 5x \cdot 3(-\sin 2x) \cdot 2 \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 3(5x)^{3 \cos 2x} \left[\frac{\cos 2x - 2 \sin 2x \log 5x}{x} \right] \end{aligned}$$

प्रश्न 4:

$$\sin^{-1}(x\sqrt{x}), 0 \leq x \leq 1$$

उत्तर 4:

माना $y = \sin^{-1}(x\sqrt{x})$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} \cdot \left[x \frac{d}{dx} \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} x \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} \cdot \left[x \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot 1 \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} \cdot \left[\frac{x + 2x}{2\sqrt{x}} \right] = \frac{3x}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x^3}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{1 - x^3}} \end{aligned}$$

प्रश्न 5:

$$\frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2.$$

उत्तर 5:

माना $y = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}$ इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{2x+7} - \sqrt{2x+7} \frac{d}{dx} \cos^{-1}\frac{x}{2}}{(\sqrt{2x+7})^2} \\ &= \frac{\left[\cos^{-1}\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+7}} \cdot 2 \right] - \sqrt{2x+7} \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2}}{2x+7} \\ &= \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+7}} + \sqrt{2x+7} \frac{1}{\sqrt{4-(x)^2}}}{2x+7} = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} + 2x+7}{(2x+7)\sqrt{2x+7}\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

प्रश्न 6:

$$\cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right], 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

उत्तर 6:

माना $y = \cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right]$, इसलिए

$$\begin{aligned} y &= \cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}} \right] \\ &= \cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2} + \sqrt{(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2}}{\sqrt{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2} - \sqrt{(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2}} \right] \\ &= \cot^{-1} \left[\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} \right] = \cot^{-1} \left[\frac{2\cos \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}} \right] = \cot^{-1} \left[\cot \frac{x}{2} \right] = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 7:

$$(\log x)^{\log x}, x > 1$$

उत्तर 7:

माना $y = (\log x)^{\log x}$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log y = \log(\log x)^{\log x} = \log x \cdot \log(\log x)$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log x \cdot \frac{d}{dx} \log(\log x) + \log(\log x) \cdot \frac{d}{dx} \log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log(\log x) \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\log x} \left[\frac{1 + \log(\log x)}{x} \right]$$

प्रश्न 8:

$\cos(a \cos x + b \sin x)$, किन्हीं अचर a तथा b के लिए

उत्तर 8:

माना $y = \cos(a \cos x + b \sin x)$, इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\sin(a \cos x + b \sin x) \cdot \frac{d}{dx}(a \cos x + b \sin x) \\ &= -\sin(a \cos x + b \sin x) (-a \sin x + b \cos x) \\ &= \sin(a \cos x + b \sin x) (a \sin x - b \cos x)\end{aligned}$$

प्रश्न 9:

$$(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

उत्तर 9:

माना $y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log y = \log(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)} = (\sin x - \cos x) \cdot \log(\sin x - \cos x)$$

इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (\sin x - \cos x) \cdot \frac{d}{dx} \log(\sin x - \cos x) + \log(\sin x - \cos x) \cdot \frac{d}{dx} (\sin x - \cos x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[(\sin x - \cos x) \cdot \frac{(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)} + \log(\sin x - \cos x) (\cos x + \sin x) \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)} (\cos x + \sin x) [1 + \log(\cos x - \sin x)]\end{aligned}$$

प्रश्न 10:

$x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए

उत्तर 10:

माना $u = x^x$ तथा $y = u + x^a + a^x + a^a$ इसलिए

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{d}{dx} x^a + \frac{d}{dx} a^x + \frac{d}{dx} a^a \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + ax^{a-1} + a^x \log a + 0 \quad \dots (1)\end{aligned}$$

यहाँ, $u = x^x$, दोनों ओर \log लेने पर

$$\log u = \log x^x = x \cdot \log x$$

इसलिए,

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x = x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1 \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)\end{aligned}$$

समीकरण (1) में $\frac{du}{dx}$ का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x \log a$$

प्रश्न 11:

$x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}, x > 3$ के लिए

उत्तर 11:

माना $u = x^{x^2-3}$ तथा $v = (x-3)^{x^2}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots (1)$$

यहाँ, $u = x^{x^2-3}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log u = (x^2 - 3) \log x$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= (x^2 - 3) \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} (x^2 - 3) \\ &= (x^2 - 3) \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 2x \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dx} = u \left[\frac{x^2 - 3 + 2x^2 \log x}{x} \right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{x^2-3} \left[\frac{x^2 - 3 + 2x^2 \log x}{x} \right] = x^{x^2-4}(x^2 - 3 + 2x^2 \log x) \quad \dots (2)$$

तथा, $v = (x-3)^{x^2}$, दोनों ओर \log लेने पर

$\log v = x^2 \log(x-3)$, इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} &= x^2 \cdot \frac{d}{dx} \log(x-3) + \log(x-3) \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{x-3} + \log(x-3) \cdot 2x \\ &= \frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= v \left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log(x-3) \right] \\ &= (x-3)^{x^2} \left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log(x-3) \right] \quad \dots (3) \end{aligned}$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2-4}(x^2 - 3 + 2x^2 \log x) + (x-3)^{x^2} \left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log(x-3) \right]$$

प्रश्न 12:

यदि $y = 12(1 - \cos t)$, $x = 10(t - \sin t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

यहाँ, $x = 10(t - \sin t)$, $y = 12(1 - \cos t)$

$$\text{इसलिए, } \frac{dx}{dt} = 10(1 - \cos t) \quad \text{तथा } \frac{dy}{dt} = 12(0 + \sin t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12 \sin t}{10(1 - \cos t)} = \frac{6 \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right)}{5 \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)} = \frac{6}{5} \cot \frac{t}{2}$$

प्रश्न 13:

यदि $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$, $0 < x < 1$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

यहाँ, $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} x + \frac{d}{dx} \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \frac{d}{dx} (1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (-2x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

प्रश्न 14:

यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

उत्तर 14:

दिया है: $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$x^2(1+y) = y^2(1+x) \Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + y^2x$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y+xy) = 0 \quad [\because x \neq y \Rightarrow x-y \neq 0]$$

$$\Rightarrow y(1+x) = -x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x}$$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{(1+x) \frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} (1+x)}{(1+x)^2} \right] = - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = - \frac{1}{(1+x)^2}$$

प्रश्न 15:

यदि किसी $c > 0$ के लिए $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$, a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

उत्तर 15:

दिया है: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, इसलिए,
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(x - a)^2 + \frac{d}{dx}(y - b)^2 = \frac{d}{dx}c^2$$

$$\Rightarrow 2(x - a) + 2(y - b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y - b)\frac{d}{dx}(x - a) - (x - a)\frac{d}{dx}(y - b)}{(y - b)^2} = -\frac{(y - b)1 - (x - a)\frac{dy}{dx}}{(y - b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y - b)1 - (x - a)\left(-\frac{x - a}{y - b}\right)}{(y - b)^2} = -\frac{(y - b)^2 + (x - a)^2}{(y - b)^3} = -\frac{c^2}{(y - b)^3}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$ में मान रखने पर

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\left[1 + \left(-\frac{x - a}{y - b} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(y - b)^3} = -\frac{\left[1 + \frac{(x - a)^2}{(y - b)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{(y - b)^3} = -\frac{\left[\frac{(y - b)^2 + (x - a)^2}{(y - b)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{(y - b)^3} = -\frac{\left[\frac{c^2}{(y - b)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{(y - b)^3} \\ &= -\frac{\frac{c^3}{(y - b)^3}}{(y - b)^3} = -\frac{c^3}{(y - b)^6} = -\frac{c^3}{c^2} = -c, \quad \text{जो } a \text{ और } b \text{ से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।} \end{aligned}$$

प्रश्न 16:

यदि $\cos y = x \cos(a + y)$, के लिए $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

उत्तर 16:

दिया है: $\cos y = x \cos(a + y) \Rightarrow x = \frac{\cos y}{\cos(a+y)}$, इसलिए,

दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)\frac{d}{dy}\cos y - \cos y\frac{d}{dy}\cos(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{\cos(a+y)(-\sin y) - \cos y(-\sin(a+y))}{\cos^2(a+y)} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{-\sin y \cos(a+y) + \cos y \sin(a+y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}\end{aligned}$$

प्रश्न 17:

यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ और $y = a(\sin t - t \cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 17:

यहाँ, $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = a[-\sin t + (t \cos t + \sin t)] = at \cos t$ तथा

$$\frac{dy}{dt} = a[(\cos t - (-t \sin t + \cos t))] = at \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \tan t \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t \cdot \frac{dt}{dx} = \sec^2 t \cdot \frac{1}{at \cos t} = \frac{\sec^3 t}{at}$$

प्रश्न 18:

यदि $f(x) = |x|^3$, तो प्रमाणित कीजिए कि $f''(x)$ का अस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

उत्तर 18:

$f(x) = |x|^3$ को पुनः व्यवस्थित करके लिखने पर

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

यदि $x \geq 0$, $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$

यदि $x < 0$, $f(x) = -x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$

अतः, $f''(x)$ का अस्तित्व सभी वास्तविक संख्याओं के लिए है। इसप्रकार

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{यदि } x \geq 0 \\ -6x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

प्रश्न 19:

गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, सिद्ध कीजिए कि सभी धन पूर्णांक n के लिए

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

उत्तर 19:

माना, $P(n): \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$n = 1$ रखने पर, $LHS = \frac{d}{dx}(x^1) = 1$ तथा $RHS = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

अतः, $P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, $P(k): \frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$ सत्य है।

सिद्ध करना है कि $P(k+1): \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = (k+1)x^k$ भी सत्य होगा।

$$LHS = \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}(x^k \cdot x) = x^k \frac{d}{dx}(x) + x \frac{d}{dx}x^k$$

$$= x^k \cdot 1 + x \cdot kx^{k-1} = (1+k)x^k = RHS, \text{ अतः } P(n), n = k+1 \text{ के लिए भी सत्य है।}$$

इस प्रकार, गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, $P(n)$ सभी धन पूर्णांक n के लिए सत्य है।

प्रश्न 20:

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा cosines के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर 20:

$$\begin{aligned} \text{दिया है: } \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B, \text{ दोनों पक्षों का } x \text{ के सापेक्ष अवकलन करने पर} \\ \frac{d}{dx} \sin(A + B) &= \left(\sin A \frac{d}{dx} \cos B + \cos B \frac{d}{dx} \sin A \right) + \left(\cos A \frac{d}{dx} \sin B + \sin B \frac{d}{dx} \cos A \right) \\ \Rightarrow \cos(A + B) \cdot \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \right) &= \left(\sin A (-\sin B) \frac{dB}{dx} + \cos B \cos A \frac{dA}{dx} \right) + \left(\cos A \cos B \frac{dB}{dx} + \sin B (-\sin A) \frac{dA}{dx} \right) \\ \Rightarrow \cos(A + B) \cdot \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \right) &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \frac{dB}{dx} + (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \frac{dA}{dx} \\ \Rightarrow \cos(A + B) \cdot \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \right) &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \right) \\ \Rightarrow \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned}$$

प्रश्न 21:

क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर संतत हो किंतु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 21:

फलन $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ प्रत्येक बिंदु पर संतत है किंतु केवल दो बिंदुओं ($x = 1$ तथा $x = 3$) पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 22:

यदि $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

उत्तर 22:

$$\begin{aligned} \text{दिया है: } y &= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}, \text{ इसलिए,} \\ \frac{dy}{dx} &= \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ \frac{dl}{dx} & \frac{dm}{dx} & \frac{dn}{dx} \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ \frac{da}{dx} & \frac{db}{dx} & \frac{dc}{dx} \\ l & m & n \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 + 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 23:

यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, तो दर्शाइए कि $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$

उत्तर 23:

दिया है: $y = e^{a \cos^{-1} x}$, इसलिए,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{a \cos^{-1} x} = e^{a \cos^{-1} x} \frac{d}{dx} a \cos^{-1} x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= e^{a \cos^{-1} x} a \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 y^2}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2 y^2$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\begin{aligned}(1-x^2) \cdot 2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d}{dx} (1-x^2) &= a^2 2y \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} \left[2(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} (-2x) \right] &= 2a^2 y \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow 2 \frac{dy}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} \right] &= 2a^2 y \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} &= a^2 y \\ \Rightarrow (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y &= 0\end{aligned}$$