

प्रश्न 4:

एक परिवर्तनशील धन का किनारा 3 cm/s की दर से बढ़ रहा है। धन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लंबा है?

उत्तर 4:

माना, धन के किनारे की लंबाई = $x \text{ cm}$

इसलिए, धन का आयतन $V = x^3$

इसलिए, t के सापेक्ष V के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

दिया है: धन का किनारा 3 cm/s की दर से बढ़ रहा है। इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 3x^2(3) = 9x^2$

जब $x = 10 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dV}{dt} = 9(10)^2 = 900 \text{ cm}^3/\text{s}$

अतः, धन का आयतन $900 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 5:

एक स्थिर झील में एक पथर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 5 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 cm है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

उत्तर 5:

माना, वृत्त की त्रिज्या = $r \text{ cm}$

त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

इसलिए, t के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर = $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 5 = 10\pi r$

जब $r = 8 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dA}{dt} = 10\pi \cdot (8) = 80\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

अतः, घिरा हुआ क्षेत्रफल $80\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ की दर से बदल रहा है।

प्रश्न 6:

एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9 \text{ cm}$ है?

उत्तर 6:

माना, वृत्त की त्रिज्या = $r \text{ cm}$, त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि $C = 2\pi r$

इसलिए, t के सापेक्ष C के परिवर्तन की दर = $\frac{dC}{dt} = 2\pi \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot (0.7) = 1.4\pi$

जब $r = 4.9 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dC}{dt} = 1.4\pi = 1.4 \times \frac{22}{7} = 4.4 \text{ cm/s}$

अतः, वृत्त की परिधि की वृद्धि की दर 4.4 cm/s है।

प्रश्न 7:

एक आयत की लंबाई $x, 5 \text{ cm/min}$ की दर से घट रही है और चौड़ाई $y, 4 \text{ cm/min}$ की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8 \text{ cm}$ और $y = 6 \text{ cm}$ हैं तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर 7:

आयत की लंबाई = $x \text{ cm}$ और चौड़ाई = $y \text{ cm}$

दिया है: $\frac{dx}{dt} = -5 \text{ cm/min}$ और $\frac{dy}{dt} = 4 \text{ cm/min}$

(a) आयत का परिमाप $P = 2(x + y)$

इसलिए, t के सापेक्ष P के परिवर्तन की दर = $\frac{dP}{dt} = 2 \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = 2(-5 + 4) = -2 \text{ cm/min}$

जब $x = 8 \text{ cm}$ और $y = 6 \text{ cm}$ हैं, तो $\frac{dP}{dt} = -2 \text{ cm/min}$

अतः, आयत का परिमाप 2 cm/min की दर से घट रहा है।

(b) आयत का क्षेत्रफल $A = xy$

इसलिए, t के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर $= \frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} = -5y + 4x \text{ cm}^2/\text{min}$

जब $x = 8 \text{ cm}$ और $y = 6 \text{ cm}$ हैं, तो $\frac{dA}{dt} = -5 \times 6 + 4 \times 8 = 2 \text{ cm}^2/\text{min}$

अतः आयत का क्षेत्रफल $2 \text{ cm}^2/\text{min}$ की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 8:

एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 cm^3 गैस प्रति सेकंड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 cm है।

उत्तर 8:

माना, गुब्बारे की त्रिज्या $= r \text{ cm}$, त्रिज्या r वाले गुब्बारे का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

इसलिए, t के सापेक्ष V के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow 900 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

जब $r = 15 \text{ cm}$ है, तो $900 = 4\pi(15)^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi \times 225} = \frac{1}{\pi} \text{ cm/s}$

अतः, गुब्बारे की त्रिज्या की वृद्धि की दर $\frac{1}{\pi} \text{ cm/s}$ है।

प्रश्न 9:

एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 cm है।

उत्तर 9:

माना, गुब्बारे की त्रिज्या $= r \text{ cm}$, त्रिज्या r वाले गुब्बारे का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

इसलिए, r के सापेक्ष V के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

जब $r = 10 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dV}{dr} = 4\pi(10)^2 = 400\pi \text{ cm}^3/\text{cm}$

अतः, गुब्बारे के आयतन की वृद्धि की दर $400\pi \text{ cm}^3/\text{cm}$ है।

प्रश्न 10:

एक 5 cm लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 cm/s की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 m दूर है?

उत्तर 10:

आकृति में AB दीवार है और AC सीढ़ी है। माना, BC = x और AB = y

दिया है: $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$ और $AC = 5 \text{ cm}$

त्रिभुज ABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

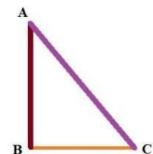
$\Rightarrow 25 = y^2 + x^2$

जब $x = 4 \text{ cm}$ है, तो $25 = y^2 + 16 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$

इसलिए, t के सापेक्ष अवकलन करने पर $0 = 2y \frac{dy}{dt} + 2x \frac{dx}{dt}$

जब $x = 4 \text{ cm}$ और $y = 3$ है, तो, $0 = 2(3) \frac{dy}{dt} + 2(4)(2) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \text{ cm/s}$

अतः, दीवार पर इसकी ऊँचाई $\frac{8}{3} \text{ cm/s}$ की दर से घट रही है।



प्रश्न 11:

एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x -निर्देशांक की तुलना में y -निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

उत्तर 11:

$$\text{दिया है: } \frac{dy}{dt} = 8 \frac{dx}{dt} \quad \dots (1)$$

$$\text{और } 6y = x^3 + 2 \quad \dots (2)$$

इसलिए, t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$6 \frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad \dots (3)$$

समीकरण (1) और (3) को हल करने पर

$$6 \left(8 \frac{dx}{dt} \right) = 3x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

यदि $x = 4$, तो समीकरण (2) से

$$6y = 4^3 + 2 \Rightarrow 6y = 66 \Rightarrow y = 11, \quad \text{इसलिए बिंदु} = (4, 11)$$

यदि $x = -4$, तो समीकरण (2) से

$$6y = -4^3 + 2 \Rightarrow 6y = -62 \Rightarrow y = -\frac{31}{3}, \quad \text{इसलिए बिंदु} = \left(-4, -\frac{31}{3} \right)$$

अतः, बिंदु $(4, 11)$ और $\left(-4, -\frac{31}{3} \right)$ हैं।

प्रश्न 12:

हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2} \text{ cm/s}$ की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है?

उत्तर 12:

माना, बुलबुले की त्रिज्या $= r \text{ cm}$, त्रिज्या r वाले बुलबुले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\text{इसलिए, } t \text{ के सापेक्ष } V \text{ के परिवर्तन की दर } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi r^2$$

जब $r = 1 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dV}{dt} = 2\pi(1)^2 = 2\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

अतः, बुलबुले के आयतन की वृद्धि की दर $2\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ है।

प्रश्न 13:

एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x + 1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

गुब्बारे की त्रिज्या $= \frac{3}{4}(2x + 1) \text{ cm}$, त्रिज्या $\frac{3}{4}(2x + 1)$ वाले गुब्बारे का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi \left[\frac{3}{4}(2x + 1) \right]^3$

$$\text{इसलिए, } x \text{ के सापेक्ष } V \text{ के परिवर्तन की दर } \frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \left[\frac{3}{4}(2x + 1) \right]^2 \frac{3}{4}(2) = \frac{27}{8}\pi(2x + 1)^2$$

अतः, गुब्बारे के आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{27}{8}\pi(2x + 1)^2$ है।

प्रश्न 14:

एक पाइप से रेत $12 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने के शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 cm है?

उत्तर 14:

माना, शंकु की त्रिज्या $= r \text{ cm}$ और शंकु की ऊँचाई $= h \text{ cm}$

दिया है: आयतन V के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dt} = 12 \text{ cm}^3/\text{s}$ और $h = \frac{1}{6}r$

$$\text{त्रिज्या } r \text{ वाले और } h \text{ ऊँचाई वाले शंकु का आयतन } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h)^2 h = 12\pi h^3$$

इसलिए, t के सापेक्ष V के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dt} = 12\pi \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12 = 36\pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{3\pi h^2}$
जब $h = 4 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3\pi(4)^2} = \frac{1}{48\pi} \text{ cm/s}$
अतः, रेत से बने के शंकु की ऊंचाई $\frac{1}{48\pi} \text{ cm/s}$ से बढ़ रही है।

प्रश्न 15:

एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंध कुल लागत $C(x)$ (रूपये में)

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

उत्तर 15:

$$\text{कुल लागत } C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

इसलिए, सीमांत लागत $\frac{dc}{dx} = 0.021x^2 - 0.006x + 15$

$$\text{जब } x = 17 \text{ है, तो } \frac{dc}{dx} = 0.021(17)^2 - 0.006(17) + 15 = 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$$

अतः, जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत ₹20.967 है।

प्रश्न 16:

किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ (रुपयों में)

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

उत्तर 16:

$$\text{कुल कुल आय } R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

इसलिए, सीमांत आय $\frac{dR}{dx} = 26x + 26$

$$\text{जब } x = 7 \text{ है, तो } \frac{dR}{dx} = 26(7) + 26 = 182 + 26 = 208$$

अतः जब $x = 7$ है, तो सीमांत आय ₹208 है।

प्रश्न 17 तथा 18 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

प्रश्न 17:

एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6\text{ cm}$ पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है:

- (A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

उत्तर 17:

त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$, इसलिए, r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dr} = \pi \cdot 2r = 2\pi r$

जब $r = 6 \text{ cm}$ है, तो $\frac{dA}{dr} = 2\pi(6) = 12\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$, अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 18:

एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय (रूपयों में) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

- (A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

उत्तर 18:

कुल कुल आय $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$, इसलिए, सीमांत आय $\frac{dR}{dx} = 6x + 36$

जब $x = 15$ है, तो $\frac{dR}{dx} = 6(15) + 36 = 90 + 36 = 126$, अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ - 6) (अवकलज ले अनुप्रयोग)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 6.2

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए \mathbf{R} पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

उत्तर 1:

$f(x) = 3x + 17 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$, सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए
इसलिए, फलन \mathbf{R} पर निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 2:

सिद्ध कीजिए कि \mathbf{R} पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

उत्तर 2:

$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} > 0$, सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए
इसलिए, फलन \mathbf{R} पर निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन

(a) $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर हासमान है।

(c) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

उत्तर 3:

$f(x) = \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

(a) $f'(x) = \cos x > 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए

इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) $f'(x) = \cos x < 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए

इसलिए, फलन $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर हासमान है।

(c) $f'(x) = \cos x > 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए तथा $f'(x) = \cos x < 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए

इसलिए, फलन $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

प्रश्न 4:

अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान

(b) निरंतर हासमान

उत्तर 4:

$f(x) = 2x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 4x - 3$

यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

(a) $f'(x) = 4x - 3 > 0$, सभी $x \in (\frac{3}{4}, \infty)$ के लिए, इसलिए, फलन $(\frac{3}{4}, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) $f'(x) = \cos x < 0$, सभी $x \in (-\infty, \frac{3}{4})$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\infty, \frac{3}{4})$ में निरंतर हासमान है।

प्रश्न 5:

अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान

(b) निरंतर हासमान

उत्तर 5:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x - 3)(x + 2)$$

$$\text{यदि } f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, 3$$

$x = -2$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को तीन अंतरालों $(-\infty, -2), (-2, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-) (-) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(-2, 3)$	$(-) (+) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(3, \infty)$	$(+) (+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है

(a) फलन f अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) फलन f अंतराल $(-2, 3)$ में निरंतर हासमान है।

प्रश्न 6:

अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्नलिखित फलन f निरंतर वर्धमान या हासमान है:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

(b) $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

(c) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

(d) $f(x) = 6 - 9x - x^2$

(e) $f(x) = (x + 1)^3(x - 3)^3$

उत्तर 6:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'(x) = 2x + 2 < 0$, सभी $x \in (-\infty, -1)$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\infty, -1)$ में निरंतर हासमान है।

$f'(x) = 2x + 2 > 0$, सभी $x \in (-1, \infty)$ के लिए, इसलिए, फलन $(-1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) $f(x) = 10 - 6x - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -6 - 4x$

यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow -6 - 4x = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f'(x) = -6 - 4x > 0$, सभी $x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\infty, -\frac{3}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

$f'(x) = -6 - 4x < 0$, सभी $x \in (-\frac{3}{2}, \infty)$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\frac{3}{2}, \infty)$ में निरंतर हासमान है।

(c) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = -6x^2 - 18x - 12 = -6(x^2 + 3x + 2) = -6(x + 2)(x + 1)$

यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow -6(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2, -1$

$x = -2$ और $x = -1$ वास्तविक रेखा को तीन अंतरालों $(-\infty, -2), (-2, -1)$ और $(-1, \infty)$ में विभक्त करता है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-) (-) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(-2, -1)$	$(+) (-) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(-1, \infty)$	$(+) (+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है

फलन f अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(-1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है तथा अंतराल $(-2, -1)$ में निरंतर हासमान है।

(d) $f(x) = 6 - 9x - x^2 \Rightarrow f'(x) = -9 - 2x$

यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow -9 - 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$

$f'(x) = -9 - 2x > 0$, सभी $x \in (-\infty, -\frac{9}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\infty, -\frac{9}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

$f'(x) = -9 - 2x < 0$, सभी $x \in (-\frac{9}{2}, \infty)$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\frac{9}{2}, \infty)$ में निरंतर हासमान है।

(e) $f(x) = (x + 1)^3(x - 3)^3$

$\Rightarrow f'(x) = 3(x+1)^2(x-3)^3 + (x+1)^3 \cdot 3(x-3)^2$
 $= 3(x+1)^2(x-3)^2(x-3+x+1) = 3(x+1)^2(x-3)^2(2x-2) = 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)$
 यदि $f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = -1, 1, 3$
 $x = -1, x = 1$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को अंतरालों $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -1)$	$(+)(+)(-) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(-1, 1)$	$(+)(+)(-) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(1, 3)$	$(+)(+)(+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(3, \infty)$	$(+)(+)(+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है

फलन f अंतराल $(-\infty, 1)$ में निरंतर हासमान है तथा अंतराल $(1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$, अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

उत्तर 7:

$$\begin{aligned}
 y &= \log(1+x) - \frac{2x}{2+x} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x) \cdot 2 - 2x(1)}{(2+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{4+x^2+4x-4-4x}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \\
 x^2 &> 0 \text{ तथा } (2+x)^2 > 0, \text{ क्योंकि ये पूर्ण वर्ग हैं और } (1+x) > 0 \text{ क्योंकि } x > -1. \\
 \text{इस प्रकार, } \frac{dy}{dx} &> 0, \text{ यदि } x > -1. \\
 \text{अतः, फलन संपूर्ण प्रांत में वर्धमान है।}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

उत्तर 8:

$$\begin{aligned}
 y &= [x(x-2)]^2 \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 2[x(x-2)] \cdot \frac{d}{dx}[x(x-2)] = 2[x(x-2)](2x-2) = 4[x(x-2)(x-1)] \\
 \text{यदि } f'(x) = 0 &\Rightarrow 4[x(x-2)(x-1)] = 0 \Rightarrow x = 0, 1, 2 \\
 x = 0, x = 1 &\text{ और } x = 2 \text{ वास्तविक रेखा को अंतरालों } (-\infty, 0), (0, 1), (1, 2) \text{ और } (2, \infty) \text{ में विभक्त करता है।}
 \end{aligned}$$

अंतराल	$y'(x)$ का चिन्ह	फलन y की प्रकृति
$(-\infty, 0)$	$(-)(-)(-) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(0, 1)$	$(+)(-)(-) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(1, 2)$	$(+)(-)(+) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(2, \infty)$	$(+)(+)(+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है

फलन y अंतरालों $(0, 1)$ तथा $(2, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

उत्तर 9:

$$y = \frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{(2 + \cos \theta) \cdot 4 \cos \theta - 4 \sin \theta(0 - \sin \theta)}{(2 + \cos \theta)^2} - 1 = \frac{8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - (2 + \cos \theta)^2}{(2 + \cos \theta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{8 \cos \theta + 4 - 4 - \cos^2 \theta - 4 \cos \theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{4 \cos \theta - \cos^2 \theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta (4 - \cos \theta)}{(2 + \cos \theta)^2}$$

$(2 + \cos \theta)^2 > 0$, क्योंकि ये पूर्ण वर्ग हैं और $\cos \theta > 0$ क्योंकि $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$(4 - \cos \theta) > 0$, क्योंकि $0 \leq \cos \theta \leq 1$, सभी $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ के लिए

इस प्रकार, $\frac{dy}{d\theta} > 0$, यदि $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. अतः, यह θ का एक वर्धमान फलन है।

प्रश्न 10:

सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

उत्तर 10:

$$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0, \text{ सभी } x \in (0, \infty) \text{ के लिए}$$

इसलिए, फलन $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 11:

सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ में $f(x) = x^2 - x + 1$ से प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

उत्तर 11:

$$f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$$

$$\text{यदि } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ अंतराल $(-1, 1)$ को अंतरालों $(-\infty, \frac{1}{2})$ और $(\frac{1}{2}, \infty)$ में विभक्त करता है।

$f'(x) = 2x - 1 < 0$, सभी $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(-\infty, \frac{1}{2})$ में निरंतर हासमान है।

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, सभी $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ के लिए, इसलिए, फलन $(\frac{1}{2}, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

इसप्रकार, $(-1, 1)$ में फलन न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

प्रश्न 12:

निम्नलिखित में कौन से फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है?

(A) $\cos x$

(B) $\cos 2x$

(C) $\cos 3x$

(D) $\tan x$

उत्तर 12:

(A) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f'(x) = -\sin x < 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है।

(B) $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x$

यदि $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, तब $2x \in (0, \pi)$, परन्तु $\sin 2x > 0$ यदि $2x \in (0, \pi)$, इसलिए, $-\sin 2x < 0$ यदि $2x \in (0, \pi)$

$f'(x) = -2 \sin 2x < 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है।

(C) $f(x) = \cos 3x \Rightarrow f'(x) = -3 \sin 3x$

यदि $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, तब $3x \in (0, \frac{3\pi}{2})$, परन्तु $\sin 3x > 0$ यदि $3x \in (0, \pi)$,

इसलिए, $-\sin 3x < 0$ यदि $3x \in (0, \pi)$ अर्थात् $x \in (0, \frac{\pi}{3})$

$f'(x) = -2 \sin 3x < 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है।

$\sin 3x < 0$ यदि $3x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, इसलिए, $-\sin 3x > 0$ यदि $3x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ अर्थात् $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = -2 \sin 3x > 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

इसप्रकार, $(0, \frac{\pi}{2})$ में फलन न तो वर्धमान है और न ही हासमान है।

$$(\mathbf{D}) f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

$f'(x) = \sec^2 x > 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

अतः, $\cos x$ और $\cos 2x$ फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है। इसलिए, विकल्प (A) और (B) सही हैं।

प्रश्न 13:

निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन निरंतर हासमान है?

(A) $(0, 1)$

(B) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

(C) $(0, \frac{\pi}{2})$

(D) इनमें से कोई नहीं

उत्तर 13:

$$f(x) = x^{100} + \sin x - 1 \Rightarrow f'(x) = 100x^{99} + \cos x$$

(A) $100x^{99} > 0$ और $\cos x > 0$, सभी $x \in (0, 1)$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, 1)$ में निरंतर वर्धमान है।

(B) $100x^{99} > 0$ और $\cos x < 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए, परन्तु $100x^{99} > \cos x$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए,

इसलिए, $f'(x) = 100x^{99} + \cos x > 0$, अतः, फलन $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर वर्धमान है।

(C) $100x^{99} > 0$ और $\cos x > 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

इस प्रकार, किसी भी अंतराल में फलन निरंतर हासमान नहीं हैं। इसलिए, विकल्प (D) सही हैं।

प्रश्न 14:

a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल $[1, 2]$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

उत्तर 14:

$$f(x) = x^2 + ax + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + a$$

परन्तु $f, (1, 2)$ में निरंतर वर्धमान है। $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2x + a > 0 \Rightarrow x > -\frac{a}{2}$

यहाँ, $x > -\frac{a}{2}$ जब $x \in (1, 2)$ अर्थात् $1 < x < 2$, इसलिए, a का वह न्यूनतम मान जिसके लिए अंतराल $(1, 2)$ में फलन निरंतर वर्धमान है। $-\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$

प्रश्न 15:

मान लीजिए $[-1, 1]$ से असंयुक्त एक अंतराल I हो तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \frac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f , निरंतर वर्धमान है।

उत्तर 15:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

$$\text{यदि } f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 1$$

$x = -1$ और $x = 1$ वास्तविक रेखा को अंतरालों $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ और $(1, \infty)$ में विभक्त करता है। अतः, $(-\infty, -1)$ और $(1, \infty)$ अंतराल I को दर्शाते हैं।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -1)$	$(-)(-) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(1, \infty)$	$(+)(+)(+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है

फलन f अंतरालों $(-\infty, -1)$ तथा $(1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है। अतः फलन f , अंतराल I में निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 16:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x, (0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान और $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर हासमान है।

उत्तर 16:

$$f(x) = \log \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \tan x$$

$f'(x) = \tan x > 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है।

$f'(x) = \tan x < 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए, इसलिए, फलन $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर हासमान है।

प्रश्न 17:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log|\cos x|, (0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान और $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर वर्धमान है।

उत्तर 17:

$$f(x) = \log|\cos x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = -\cot x$$

$f'(x) = -\cot x < 0$, सभी $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिए, इसलिए, फलन $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर हासमान है।

$f'(x) = -\cot x > 0$, सभी $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ के लिए, इसलिए, फलन $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 18:

सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

उत्तर 18:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

$3(x - 1)^2 \geq 0$, क्योंकि ये पूर्ण वर्ग हैं। अतः फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

प्रश्न 19:

निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

- (A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

उत्तर 19:

$$y = x^2 e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

$$\text{यदि } f'(x) = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$x = 0$ और $x = 2$ वास्तविक रेखा को अंतरालों $(-\infty, 0), (0, 2)$ और $(2, \infty)$ में विभक्त करता है।

अंतराल	$y'(x)$ का चिन्ह	फलन y की प्रकृति
$(-\infty, 0)$	$(-)(+) < 0$	f निरंतर हासमान है
$(0, 2)$	$(+)(+) > 0$	f निरंतर वर्धमान है
$(2, \infty)$	$(+)(-) < 0$	f निरंतर हासमान है

फलन y अंतराल $(0, 2)$ में निरंतर वर्धमान है।

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ - 6) (अवकलज ले अनुप्रयोग)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1:

वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

वक्र $y = 3x^4 - 4x$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 12x^3 - 4$

$$\text{यदि } x = 4 \text{ हो तो प्रवणता} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = 12(4)^3 - 4 = 768 - 4 = 764$$

प्रश्न 2:

वक्र $y = \frac{x-1}{x-2}, x \neq 2$ के $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:

वक्र $y = \frac{x-1}{x-2}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2).1 - (x-1).1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$$\text{यदि } x = 10 \text{ हो तो प्रवणता} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10} = \frac{-1}{(10-2)^2} = -\frac{1}{64}$$

प्रश्न 3:

वक्र $y = x^3 - x + 1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 2 है।

उत्तर 3:

वक्र $y = x^3 - x + 1$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$

$$\text{यदि } x - \text{निर्देशांक } 2 \text{ हो तो प्रवणता} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 3(2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11$$

प्रश्न 4:

वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 3 है।

उत्तर 4:

वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

$$\text{यदि } x - \text{निर्देशांक } 3 \text{ हो तो प्रवणता} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = 3(3)^2 - 3 = 27 - 3 = 24$$

प्रश्न 5:

वक्र $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

$$\text{यहाँ } x = a \cos^3 \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 3a \cos^2 \theta (-\sin \theta) = -3a \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$\text{तथा } y = a \sin^3 \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta (\cos \theta) = 3a \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\text{अभिलंब की प्रवणता} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{-3a \sin \theta \cos^2 \theta}{3a \cos \theta \sin^2 \theta} = \cot \theta,$$

$$\text{यदि } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ हो तो अभिलंब की प्रवणता} = -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

प्रश्न 6:

वक्र $x = 1 - a \sin \theta, y = b \cos^2 \theta$ के $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:

$$\text{यहाँ } x = 1 - a \sin \theta \quad \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -a \cos \theta$$

$$\text{तथा } y = b \cos^2 \theta \quad \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2b \cos \theta (-\sin \theta) = -2b \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{अभिलंब की प्रवणता} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{-a \cos \theta}{-2b \cos \theta \sin \theta} = -\frac{a}{2b \sin \theta}$$

$$\text{यदि } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ हो तो अभिलंब की प्रवणता} = -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{a}{2b \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{a}{2b}$$

प्रश्न 7:

वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ x - अक्ष के समांतर हैं।

उत्तर 7:

$$\text{वक्र } y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\text{यदि स्पर्श रेखाएँ } x \text{ - अक्ष के समांतर हो तो प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \Rightarrow 3(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow x = -1, 3$$

यदि $x = -1$, तो $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$, इसलिए बिंदु = $(-1, 12)$

यदि $x = 3$, तो $y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7 = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$, इसलिए बिंदु = $(3, -20)$

अतः वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर बिंदु $(-1, 12)$ और $(3, -20)$ पर स्पर्श रेखाएँ x - अक्ष के समांतर हैं।

प्रश्न 8:

वक्र $y = (x - 2)^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा, बिंदुओं $(2, 0)$ और $(4, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समांतर है।

उत्तर 8:

$$\text{वक्र } y = (x - 2)^2 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 2(x - 2)$$

$$\text{बिंदुओं } (2, 0) \text{ और } (4, 4) \text{ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता} = \frac{4-0}{4-2} = 2$$

दिया है: वक्र $y = (x - 2)^2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता = बिंदुओं $(2, 0)$ और $(4, 4)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$\Rightarrow 2(x - 2) = 2 \quad \Rightarrow x - 2 = 1 \quad \Rightarrow x = 3,$$

यदि $x = 3$, तो $y = (3 - 2)^2 = 1$, इसलिए बिंदु = $(3, 1)$

प्रश्न 9:

वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिंदु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

उत्तर 9:

$$\text{वक्र } y = x^3 - 11x + 5 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11$$

रेखा $y = x - 11$ की प्रवणता = 1

दिया है:

$$\text{वक्र } y = x^3 - 11x + 5 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \text{रेखा } y = x - 11 \text{ की प्रवणता}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 11 = 1 \quad \Rightarrow 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = \pm 2$$

यदि $x = 2$, तो $y = (2)^3 - 11(2) + 5 = -9$, इसलिए बिंदु = $(2, -9)$

यदि $x = -2$, तो $y = (-2)^3 - 11(-2) + 5 = 18$, इसलिए बिंदु = $(-2, 19)$

बिंदुओं $(2, -9)$ और $(-2, 19)$ में से केवल बिंदु $(2, -9)$ ही रेखा $y = x - 11$ को संतुष्ट करता है।

अतः वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर वह बिंदु $(2, -9)$ है जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

प्रश्न 10:

प्रवणता -1 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ को स्पर्श करती है।

उत्तर 10:

वक्र $y = \frac{1}{x-1}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

दिया है: वक्र $y = \frac{1}{x-1}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} = -1 \quad \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow x-1 = \pm 1 \quad \Rightarrow x = 0, 2$$

यदि $x = 0$, तो $y = \frac{1}{0-1} = -1$, इसलिए बिंदु $= (0, -1)$, अतः, स्पर्श रेखा $y + 1 = -1(x - 0) \Rightarrow x + y + 1 = 0$

यदि $x = 2$, तो $y = \frac{1}{2-1} = 1$, इसलिए बिंदु $= (2, 1)$, अतः, स्पर्श रेखा $y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow x + y - 3 = 0$

प्रश्न 11:

प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$ को स्पर्श करती है।

उत्तर 11:

वक्र $y = \frac{1}{x-3}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-3)^2}$

दिया है: वक्र $y = \frac{1}{x-3}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 2$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x-3)^2} = 2 \quad \Rightarrow (x-3)^2 = -2$$

किसी वास्तविक संख्या का वर्ग क्रणात्मक नहीं हो सकता है। अतः, इस वक्र की ऐसी कोई स्पर्श रेखा का अस्तित्व नहीं है जिसकी प्रवणता 2 हो।

प्रश्न 12:

प्रवणता 0 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$ को स्पर्श करती है।

उत्तर 12:

वक्र $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}$

दिया है: वक्र $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 0$

$$\Rightarrow -\frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2} = 0 \quad \Rightarrow 2x-2 = 0 \quad \Rightarrow x = 1$$

यदि $x = 1$, तो $y = \frac{1}{1^2-2(1)+3} = \frac{1}{2}$, इसलिए बिंदु $= (1, \frac{1}{2})$, अतः, स्पर्श रेखा $y - \frac{1}{2} = 0(x - 1) \Rightarrow 2y - 1 = 0$

प्रश्न 13:

वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(i) x - अक्ष के समांतर है

(ii) y - अक्ष के समांतर है

उत्तर 13:

वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ का अवकलन x के सापेक्ष करने पर, $\frac{2x}{9} + \frac{2y}{16} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y}$

वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y}$

(i) यदि स्पर्श रेखा x - अक्ष के समांतर है, तो प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{16x}{9y} = 0 \Rightarrow x = 0$

वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ में x का मान रखने पर, $\frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

इसलिए, बिंदु $= (0, 4)$ तथा $(0, -4)$

(ii) यदि स्पर्श रेखा y - अक्ष के समांतर है, तो अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{9y}{16x} = 0 \Rightarrow y = 0$
 वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ में y का मान रखने पर,
 $\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
 इसलिए, बिंदु $= (3, 0)$ तथा $(-3, 0)$

प्रश्न 14:

दिए वक्रों पर निर्दिष्ट बिंदुओं पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए:

- (i)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के $(0, 5)$ पर
- (ii)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के $(1, 3)$ पर
- (iii)** $y = x^3$ के $(1, 1)$ पर
- (iv)** $y = x^2$ के $(0, 0)$ पर
- (v)** $x = \cos t, y = \sin t$ के $t = \frac{\pi}{4}$ पर

उत्तर 14:

(i) वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$
 बिंदु $(0, 5)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,5)} = 4(0)^3 - 18(0)^2 + 26(0) - 10 = -10$

इसलिए बिंदु $(0, 5)$ पर स्पर्श रेखा $y - 5 = -10(x - 0) \Rightarrow 10x + y = 5$

बिंदु $(0, 5)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(0,5)} = -\frac{1}{10}$

इसलिए बिंदु $(0, 5)$ पर अभिलंब $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0) \Rightarrow x - 10y + 50 = 0$

(ii) वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$
 बिंदु $(1, 3)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,3)} = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 26(1) - 10 = 2$

इसलिए बिंदु $(1, 3)$ पर स्पर्श रेखा $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$

बिंदु $(1, 3)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(1,3)} = -\frac{1}{2}$

इसलिए बिंदु $(1, 3)$ पर अभिलंब $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y = 7$

(iii) वक्र $y = x^3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2$

बिंदु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = 3(1)^2 = 3$

इसलिए बिंदु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा $y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2$

बिंदु $(1, 1)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(1,1)} = -\frac{1}{3}$

इसलिए बिंदु $(1, 1)$ पर अभिलंब $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y = 4$

(iv) वक्र $y = x^2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 2x$

बिंदु $(0, 0)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = 0$

इसलिए बिंदु $(0, 0)$ पर स्पर्श रेखा $y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$

बिंदु $(0, 0)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(0,0)} = \frac{1}{0}$

इसलिए बिंदु $(0, 0)$ पर अभिलंब $y - 0 = \frac{1}{0}(x - 0) \Rightarrow x = 0$

(v) वक्र $x = \cos t, y = \sin t$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$

बिंदु $t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$

इसलिए बिंदु $t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा $y - \sin \frac{\pi}{4} = -1(x - \cos \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow x + y = \sqrt{2}$

बिंदु $t = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\left. \frac{dx}{dy} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = 1$

इसलिए बिंदु $t = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow x = y$

प्रश्न 15:

वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(a) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है। (b) रेखा $5y - 15x = 13$ पर लंब है।

उत्तर 15:

वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 2x - 2$

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 2$

यदि वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है। तब दोनों की प्रवणताएँ समान होंगी।

इसलिए, $2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$

वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ में $x = 2$ रखने पर, $y = (2)^2 - 2(2) + 7 = 7$, इसलिए बिंदु $= (2, 7)$

इसलिए बिंदु $(2, 7)$ पर स्पर्श रेखा $y - 7 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 3$

यदि वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा $5y - 15x = 13$ पर लंब है।

तो $(2x - 2) \times 3 = -1 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ में $x = \frac{5}{6}$ रखने पर, $y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{25-60+252}{36} = \frac{217}{36}$,

इसलिए बिंदु $= \left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ तथा इस बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)} = 2 \times \frac{5}{6} - 2 = -\frac{1}{3}$

इसलिए बिंदु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर स्पर्श रेखा $y - \frac{217}{36} = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{6}) \Rightarrow 12x + 36y - 227 = 0$

प्रश्न 16:

सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं जहाँ $x = 2$ तथा $x = -2$ है।

उत्तर 16:

वक्र $y = 7x^3 + 11$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 21x^2$

बिंदु $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 21(2)^2 = 84$

बिंदु $x = -2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = 21(-2)^2 = 84$

बिंदुओं $x = 2$ तथा $x = -2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता समान है। इसलिए, इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

प्रश्न 17:

वक्र $y = x^3$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु के y - निर्देशांक के बराबर है।

उत्तर 17:

वक्र $y = x^3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2$

माना (x_1, y_1) वक्र $y = x^3$ पर कोई बिंदु हैं जिस पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु के y - निर्देशांक के बराबर है। अर्थात्

$$y_1 = \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, y_1)} = 3x_1^2$$

$$\Rightarrow y_1 = 3x_1^2$$

बिंदु (x_1, y_1) वक्र $y = x^3$ पर स्थित है। अतः $y_1 = x_1^3$

$$\dots (1)$$

$$\dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर,

$$x_1^3 = 3x_1^2 \Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2(x_1 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, 3$$

समीकरण (1) से,

यदि $x_1 = 0$, तो $y_1 = 0$, इसलिए बिंदु = $(0, 0)$

यदि $x_1 = 3$, तो $y_1 = 3(3)^2 = 27$, इसलिए बिंदु = $(3, 27)$

प्रश्न 18:

वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$, पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ मूल बिंदु से होकर जाती हैं।

उत्तर 18:

वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x^4$

माना (x_1, y_1) वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर कोई बिंदु हैं जिस पर स्पर्श रेखा मूल बिंदु से होकर जाती है।

$$\text{बिंदु } (x_1, y_1) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता } \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, y_1)} = 12x_1^2 - 10x_1^4 \dots (1)$$

$$\text{मूल बिंदु तथा बिंदु } (x_1, y_1) \text{ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता } = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1} \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$\frac{y_1}{x_1} = 12x_1^2 - 10x_1^4 \Rightarrow y_1 = 12x_1^3 - 10x_1^5 \dots (3)$$

बिंदु (x_1, y_1) वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर स्थित है। अतः $y_1 = 4x_1^3 - 2x_1^5 \dots (4)$

समीकरण (3) और (4) को हल करने पर,

$$12x_1^3 - 10x_1^5 = 4x_1^3 - 2x_1^5 \Rightarrow 8x_1^3 - 8x_1^5 = 0 \Rightarrow x_1^3(1 - x_1^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \pm 1$$

समीकरण (3) से,

यदि $x_1 = 0$, तो $y_1 = 12(0)^3 - 10(0)^5 = 0$, इसलिए बिंदु = $(0, 0)$

यदि $x_1 = 1$, तो $y_1 = 12(1)^3 - 10(1)^5 = 2$, इसलिए बिंदु = $(1, 2)$

यदि $x_1 = -1$, तो $y_1 = 12(-1)^3 - 10(-1)^5 = -2$, इसलिए बिंदु = $(-1, -2)$

प्रश्न 19:

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर वे x - अक्ष के समांतर हैं।

उत्तर 19:

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$

यदि स्पर्श रेखा x - अक्ष के समांतर है। तो प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ में $x = 1$ रखने पर,

$$1^2 + y^2 - 2(1) - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2,$$

इसलिए बिंदु = $(1, 2)$ तथा $(1, -2)$

बिंदु $(1, 2)$ पर स्पर्श रेखा $y - 2 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 2$

बिंदु $(1, -2)$ पर स्पर्श रेखा $y - (-2) = 0(x - 1) \Rightarrow y = -2$

प्रश्न 20:

वक्र $ay^2 = x^3$ के बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 20:

वक्र $ay^2 = x^3$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $2ay \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$

वक्र $ay^2 = x^3$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} = -\frac{2ay}{3x^2}$

इसलिए बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} \Big|_{(am^2, am^3)} = -\frac{2a(am^3)}{3(am^2)^2} = -\frac{2}{3m}$

बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब $y - am^3 = -\frac{2}{3m}(x - am^2) \Rightarrow 2x + 3my = 3am^4 + 2am^2$

प्रश्न 21:

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है।

उत्तर 21:

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3x^2+2}$

रेखा $x + 14y + 4 = 0$ की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{14}$

यदि वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ का अभिलंब $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है। तब दोनों की प्रवणताएँ समान होंगी।

इसलिए, $-\frac{1}{3x^2+2} = -\frac{1}{14} \Rightarrow 3x^2 + 2 = 14 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ में $x = 2$ रखने पर, $y = (2)^3 + 2(2) + 6 = 18$, इसलिए बिंदु $= (2, 18)$

इसलिए बिंदु $(2, 18)$ पर अभिलंब $y - 18 = -\frac{1}{14}(x - 2) \Rightarrow x + 14y = 254$

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ में $x = -2$ रखने पर, $y = (-2)^3 + 2(-2) + 6 = -6$, इसलिए बिंदु $= (-2, -6)$

इसलिए बिंदु $(-2, -6)$ पर अभिलंब $y + 6 = -\frac{1}{14}(x + 2) \Rightarrow x + 14y + 86 = 0$

प्रश्न 22:

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए

उत्तर 22:

वक्र $y^2 = 4ax$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y}$

वक्र $y^2 = 4ax$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{4a}$

इसलिए बिंदु $(at^2, 2at)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} \Big|_{(at^2, 2at)} = -\frac{2(2at)}{4a} = -t$

बिंदु $(at^2, 2at)$ पर अभिलंब $y - 2at = -t(x - at^2)$

$\Rightarrow tx + y = 2at + at^3$

प्रश्न 23:

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटती है, यदि $8k^2 = 1$ है।

उत्तर 23:

$$x = y^2 \quad \dots (1)$$

$$xy = k \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) से x का मान समीकरण (2) में रखने पर, $y^3 = k \Rightarrow y = k^{\frac{1}{3}}$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर, $x = k^{\frac{2}{3}}$

अतः, दोनों वक्र एक दूसरे को बिंदु $(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}})$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

वक्र $x = y^2$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $1 = 2y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

वक्र $x = y^2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

इसलिए बिंदु $(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}})$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}}$

वक्र $xy = k$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

वक्र $xy = k$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

इसलिए बिंदु $(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}})$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}})} = -\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}}$

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}} \times \left(-\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} \right) = -\frac{1}{2k^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{(8k^2)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{(1)^{\frac{1}{3}}} = -1 \quad [\because 8k^2 = 1]$$

\Rightarrow वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटती है।

प्रश्न 24:

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 24:

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

इसलिए बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{dy}{dx} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा $y - y_0 = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2} (x - x_0)$

$$\Rightarrow a^2yy_0 - a^2y_0^2 = b^2xx_0 - b^2x_0^2$$

$$\Rightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = b^2xx_0 - a^2yy_0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{b^2} - \frac{yy_0}{b^2} \quad [a^2b^2 से भाग देने पर]$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} \quad \left[\because \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \right]$$

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{dx}{dy} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{a^2}{b^2}$

इसलिए बिंदु (x_0, y_0) पर अभिलंब की प्रवणता $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{a^2}{b^2}$

बिंदु (x_0, y_0) पर अभिलंब $y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{a^2}{b^2} (x - x_0)$

$$\Rightarrow \frac{y - y_0}{a^2y_0} = -\frac{(x - x_0)}{b^2x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{(x - x_0)}{b^2x_0} + \frac{y - y_0}{a^2y_0} = 0$$

