第四次上机作业

陈晓宇 121110008

考虑三对角对称矩阵Tn，见 (6.0.2)。矩阵阶数分别取为 n = 100和 n = 101，要求精确计算到准确特征值的小数点后第 6 位。

第一题

题目：取初始向量为 v0 = (1, 1, 1, . . . , 1)，用乘幂法计算主特征值及其相应的特征向量。请绘制主特征值误差的下降曲线，以及特征子空间距离的下降曲线。然后，请采用 Atiken 加速技巧和 Rayleigh商技术分别对算法进行加速，并完成类似的工作。

目标：

1. 观察在n = 100和101 的时候，乘幂法是否有不同（在关掉误差容限的情况下），验证课上讲的：要在幂法的迭代过程收集到主特征信息，理论上需要初始向量在主特征子空间span(X1)上的分量必须非0，若这个分量接近0的时候，其数值表现为一个非常缓慢的假收敛过程，此时，舍入误差的积累可能起到积极的作用。

2. 绘制主特征值误差的下降曲线

3. 分别采用Atiken加速和Rayleigh加速，并绘制主特征值的误差下降曲线和特征子空间距离的下降曲线。

实验结果：

目标1：



上图是N=100时，这是迭代步数在35000~46000之间主特征值的变化曲线，



而上图是主特征值随着迭代步数的变化曲线，发现有两个平台，验证了书上所说的假收敛现象。



而上图则是N=101时，主特征值b随着迭代步数的变化曲线，发现，只有一个平台。

实验分析：因为n=100时，初始向量与主特征值所对应的特征向量之间的内积为0，也就是初始向量在主特征子空间的分量为0，而n=101时，二者的内积不为0.

目标2:



上图是n = 100时，主特征值误差随着迭代步数的变化曲线（采用了停机标准），下图是不采用停机标准所作出的图像。



发现出现了两个平台，更能说明假收敛现象。



上图是n = 101时候的主特征值误差下降曲线，没有出现假收敛现象。

目标3：分别使用Aitken和Rayleigh加速技巧对乘幂法进行加速，下面简述两种加速技巧。

Aitken：利用代替原来的计算

Rayleigh：利用代替原来的计算，发现Rayleigh商加速法是二阶收敛的。

实验结果和分析：



上图是Aitken加速。



上图是Rayleigh加速，发现二阶收敛。

第二题

题目：用反幂法求解最靠近2的特征值，及其对应的特征向量。观察是否有所谓的“一次迭代”特性。

目标：利用正幂法对于逆矩阵求解按模最小的特征值，注意的是对非奇异矩阵才能使用，对于奇异矩阵没有逆矩阵。即取n=101时，不能用反幂法解。

实验过程：原理是 ，其中，则当时，，。下面考虑一个更一般且有用的形式，用矩阵代替A应用反幂法，迭代公式如下

其中,则 。由于题目要求靠近2的特征值，则取即可。

结果与评价：



上图是主特征值误差随着迭代次数的变化，可以很明显的看到“一次迭代”的效果。容易看出，在初始的几步具有很好的性价比，一下次就很快的逼近了主特征值，后来的只有小幅变化来调整。

第三题

题目：用幂法求解第二主特征值及其特征向量；用同时迭代方法求解的前两个主特征值。比较两者的计算效果。

目标：分别运用降阶法和子空间同时迭代法求解的前两个特征值。

实验过程：

一．降阶法

取用Householder变换矩阵，其中，且，在的作用下，，而其中的主特征值就是的第二大特征值。

二．同时迭代法

实矩阵A有完备的特征向量系，取m(m<n)个初始近似向量组成一个阶列直交阵，对k=1,2……作下述操作：计算；计算阶实对称矩阵；计算的特征值的排列顺序为，并计算其特征向量矩阵，取它为一个直交矩阵；计算；对作直交三角分解：，其中为上三角矩阵，为阶列直交阵；检验相邻两次迭代得到的和之间的差是否满足精度要求，如果满足则取作为的近似值，的第j列向量作为与之相应的特征向量，否则，对k进行+1。

结果与评价: 

上图是n = 100时，主特征值，第二大特征值误差随着迭代步数的变化曲线，红色的是主特征值，蓝色的是第二主特征值。



上图是n = 101时，主特征值，第二大特征值误差随着迭代步数的变化曲线，红色的是主特征值，蓝色的是第二主特征值。

书上给出的是子空间投影法和空间同时迭代法的综合，也就是上述的实现过程。如果只是空间同时迭代法，只需要任取m个列直交向量，组成初始矩阵，然后，循环执行，。



上图是n=100时，特征值变化的曲线，蓝色的是主特征值，绿色的是第二主特征值，为了防止假收敛的现象，选取的初始向量是随机的，保证了在特征子空间上的投影不为0。由于不会出现假收敛现象，于是不会出现第二主特征值大于主特征值的现象。



上图是n=101时，特征值变化的曲线，蓝色的是主特征值，绿色的是第二主特征值。

第四题

题目：分别用古典Jacobi方法、循环Jacobi和阈值Jacobi方法求解的全部特征值；绘制相应的收敛过程。

实现过程：下面分别叙述三种Jacobi方法的实现思路

1. 古典Jacobi方法

古典Jacobi方法，令，在第k步中，取，将其作为旋转主元，然后令，其中为Givens平面旋转矩阵。当时，可以证明。

1. 循环Jacobi方法

循环的Jacobi方法，是对古典Jacobi方法的一个改进，古典的Jacobi方法需要旋转主元的全局搜索，而循环的Jacobi方法直接对矩阵的所有非对角元素，依次进行次Jacobi旋转。

1. 阀值Jacobi方法

阀值Jacobi方法是在循环Jacobi方法的改进。设定一个初始的阀值，然后逐步设置阀值，直至达到机器精度或用户要求为止，即，，当小于设定的阀值时，跳过相应的Jacobi旋转操作，直至所有的非对角线元素均小于给定的阀值时，按照上述规则，重新设立阀值。

实验结果和分析：

会发现，由于阀值和循环的处理，迭代步数的大幅度下降。



这是n=100时阀值和循环的Jacobi的误差下降曲线



而这是n=100时古典Jacobi迭代产生的误差下降曲线，比较两者的迭代次数，相差的比较巨大。书上说当循环Jacobi方法收敛时，则该方法具有渐进平方收敛速度，此方法的扫描次数和logn成正比，从第一幅图可以看出。

第五题

题目：用二分法加原点位移反幂法求解在(1,2)间的特征值。

实现过程：二分法是对实对称三角矩阵进行特征值的计算。定义的阶顺序主子式为，它们满足三项递推式，其中=1，用表示序列中相邻两个数中符号相同的数目。对于矩阵T的任意一个特征值都满足，于是据此初步锁定根的范围，然后在区间[,]中寻找矩阵T的特征值。根据如下定理：对于给定的实数，恰有个根严格大于，设a<b为两个实数，那么由于，则恰是矩阵在区间[a,b]中的特征值个数。设位于区间(𝑎,𝑏]中，取𝑐=(𝑎+𝑏)/2，计算，如果<，则∈(𝑎,𝑐]，反之则∈(𝑐,𝑏]。再对区间二分，直到最后区间长度小于预先给定的精度控制量，便取最后区间的中点作为的近似值。

在本次实验中，我们先用二分法确定粗糙的特征值，然后再利用原点位移反幂法进行调整，使其更加精确。

实验结果和分析：

的特征值=(

1.96889637615930

1.90671921922517

1.84463230542199

1.78269569982905

1.72096932211215

1.65951288855520

1.59838585428856

1.53764735577006

1.47735615357428

1.41757057554550

1.35834823244260

1.29974710161722

1.24182319231924

1.18463277011662

1.12823149087300

1.07267293602935

1.01801183805336 )

的特征值=(

1.93840988288766

1.87687818773211

1.81546328107340

1.75422341867057

1.69321669024263

1.63250096436686

1.57213383358701

1.51217255978325

1.45267401985583

1.39369465177391

1.33529040104068

1.27751666762569

1.22042825341464

1.16407931022643

1.10852328844692

1.05381288632798)

第六题

题目：阈值Jacobi方法具有求解小特征值的优势。考虑对称正定矩阵直接计算可知其特征值为，9.9×，9.81818×.请用阈值Jacobi方法求解三个特征值。在Matlab中，我们可以利用eig()计算矩阵的特征值。请比较它们的数值结果。

实验结果和分析：

，



可以看出内置函数eig的计算已经错误了。而按照阀值所进行的运算则是正确的。