线性系统的能控性和能观性

A

为什么要引入能控性和能观性

- 系统设计的基础
  - 能控性：是否所有的状态都可以被输入控制
  - 能控性：是否所有的状态都可以被输出反映

线性定常系统的能控性

- 连续系统的定义
  - 状态能控：若存在分段连续的输入u(t)，能在有限时间 [t0,tf] 内，使得系统的某一初始状态 x(t0)转移到任一终端状态 x(tf) ，则称此状态是能控的
  - 系统能控：若系统在状态空间中所有状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的
- 线性定常连续系统的定义
  - 若存在输入u(t)，能在有限时间 [t0,tf] 内，将系统从任意非零初始状态 x(t0) 转移到终端状态 x(tf) = 0 ，则称状态 x(t0) 是能控的
  - 如果存在输入u(t)，能在有限时间 [t0,tf] 内，将系统从初始状态 x(t0)=0 转移到任意非零终端状态 x(tf) ，则称状态 x(tf) 是能达的。
- 判别方法
  - 约旦标准型判定
    - 对角线矩阵：当A为对角线矩阵时，若B的任一行不为0，则系统完全能控
    - 约旦块矩阵：当A为约旦块时，若约当块对应的B末尾行非全0，则系统能控
    - 若矩阵非标准型，则线性变换为约旦型标准型 $\dot{x}=Ax+Bu \xrightarrow{x=Tz} \dot{z}=Jz+T^{-1}Bu$
  - 秩判据
    - 定理：线性定常连续系统(A，B)状态完全能控的充要条件是能控性矩阵满秩，即rank(M)=n,其中，能控性矩阵为M=[B,AB,...,A^(n-1)B] ，系统维数为 n。

线性定常系统的能观性

- 线性连续定常系统的定义
  - 状态能观：指定初始时刻t0，若利用在[t0,tf]内测得的一组y(t)值能够唯一确定t0时刻的一个状态x(t0)，则称该初始状态在t0时刻是能观的；
  - 系统完全能观：若系统在初始时刻t0的任意状态x(t0)，均可由在有限时间[t0,tf]内测得的y(t)唯一确定，则系统完全能观
- 判别方法
  - 约旦标准型判定
    - 对角线矩阵：当A为对角线矩阵时，若C任一列行不为0，则系统完全能观
    - 约旦块矩阵：当A为约旦块矩阵时，若约旦块对应的C首列非全零，则系统能观
    - 若矩阵非标准型，则线性变换为约旦型标准型
  - 秩判据
    - 定理：线性定常连续系统(A，C)状态完全能观的充要条件是能观性矩阵满秩，即rank(N)=n,其中，能观性矩阵为N=[C,CA,...,CA^(n-1)]^(-1),系统维数为n。

能控性与能观性的对偶关系

- 对偶关系：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+B_1u_1(t)\\ y_1(t)=C_1x_1(t)\end{cases}\begin{cases}\dot{x}_2(t)=A_2x_2(t)+B_2u_2(t)\\ y_2(t)=C_2x_2(t)\end{cases}\quad A_2=A_1^T,B_2=C_1^T,C_2=B_1^T$
- 对偶原理：系统1完全能控、系统2完全能观；系统1完全能观、系统2完全能控

状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

- 能控标准型
  - n维线性定常系统，若系统状态完全能控，则可化为能控标准型
    - $T_{c1}=[A^{n-1}b,\ A^{n-2}b,\ \cdots,\ Ab,\ b]\begin{bmatrix}1&&&&\\ a_{n-1}&1&&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&&\\ a_2&a_3&\cdots&1&\\ a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\end{bmatrix}$
  - 单输入系统
    - 能控标准I型
      - $\overline{A}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\ 0&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&1\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\overline{b}=T_{c1}^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{aligned}&\beta_0=c(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_1b)\\ &\vdots\\ &\beta_{n-2}=c(Ab+a_{n-1}b)\\ &\beta_{n-1}=cb\end{aligned}$
      - $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0$ $\overline{c}=cT_{c1}=[\beta_0\ \ \beta_1\ \ \cdots\ \ \beta_{n-1}]$
    - $T_{c2}=[b,Ab,\dots,A^{n-1}b]$
    - 能控标准II型
      - $\overline{A}=T_{c2}^{-1}AT_{c2}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\ 1&0&\cdots&0&-a_1\\ 0&1&\cdots&0&-a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix},\overline{b}=T_{c2}^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix},\overline{c}=cT_{c2}=[\overline{\beta}_0\ \ \overline{\beta}_1\ \ \cdots\ \ \overline{\beta}_{n-1}]$ $\begin{aligned}&\overline{\beta}_0=cb\\ &\overline{\beta}_1=cAb\\ &\vdots\\ &\overline{\beta}_{n-1}=cA^{n-1}b\end{aligned}$
- 能观标准型
  - n维线性定常系统，若系统状态完全能观，则可化为能观标准型
    - $T_{01}^{-1}=N=\begin{bmatrix}c\\cA\\ \vdots\\cA^{n-1}\end{bmatrix}$
  - 单输入系统
    - 能观标准I型
      - $\tilde{A}=T_{01}^{-1}AT_{01}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\ 0&0&\ddots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&1\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix},\tilde{b}=T_{01}^{-1}b=\begin{bmatrix}\overline{\beta}_0\\ \overline{\beta}_1\\ \vdots\\ \overline{\beta}_{n-2}\\ \overline{\beta}_{n-1}\end{bmatrix},\tilde{c}=cT_{01}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$
      - $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0$ $\begin{aligned}&\overline{\beta}_0=cb\\ &\overline{\beta}_1=cAb\\ &\vdots\\ &\overline{\beta}_{n-1}=cA^{n-1}b\end{aligned}$
    - $T_{02}^{-1}=\begin{bmatrix}1&a_{n-1}&\cdots&a_2&a_1\\ 0&1&\cdots&a_3&a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&a_{n-1}\\ 0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^{n-1}\\ \vdots\\ CA\\ C\end{bmatrix}$
    - 能观标准II型
      - $\tilde{A}=T_{02}^{-1}AT_{02}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\ 1&0&\cdots&0&-a_1\\ 0&1&\cdots&0&-a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix},\tilde{b}=T_{02}^{-1}b=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-2}\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix},\tilde{c}=cT_{02}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1]$
      - $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0$ $\begin{aligned}&\beta_0=c(A^{n-1}b+a_{n-1}A^{n-2}b+\cdots+a_1b)\\ &\vdots\\ &\beta_{n-2}=c(Ab+a_{n-1}b)\\ &\beta_{n-1}=cb\end{aligned}$
- 能观标准I型与能控标准II型对偶
- 能观标准II型与能控标准I型对偶

线性系统的结构分解

- 按能控性分解
  - $\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$
  - $\hat{A}=R_c^{-1}AR_c=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}&\hat{A}_{12}\\ 0&\hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$ （列：n_1，$n-n_1$）
  - $\hat{B}=R_c^{-1}B=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$
  - $\hat{C}=CR_c=[\underbrace{\hat{C}_1}_{n_1}\ \ \underbrace{\hat{C}_2}_{n-n_1}]$
  - 能控状态变量组 $\begin{cases}\dot{\hat{x}}_c=\hat{A}_{11}x_c+\hat{A}_{12}x_{\bar{c}}+\hat{B}_1u\\ y_1=\hat{C}_1x_c\end{cases}$
  - 不能控状态变量组 $\begin{cases}\dot{\hat{x}}_{\bar{c}}=\hat{A}_{22}x_{\bar{c}}\\ y_2=\hat{C}_2x_{\bar{c}}\end{cases}$
  - 传递函数关系 $W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\hat{C}_1(sI-\hat{A}_{11})^{-1}\hat{B}_1=\widetilde{W}_1(s)$
  - 步骤
    - 1.判断能控性
    - 2.确定变换矩阵：能控性矩阵中选择n1个线性无关列向量，作为Rc的前n1列；其余n-n1列，在保证Rc非奇异条件下，任意选
    - 3.套公式计算
- 坐标变换矩阵
- 按能观性分解
  - $\tilde{x}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$
  - $\widetilde{A}=R_0^{-1}AR_0=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11}&0\\ \widetilde{A}_{21}&\widetilde{A}_{12}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$ （列：n_1，$n-n_1$）
  - $\widetilde{B}=R_0^{-1}B=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n_1\\ \}n-n_1\end{matrix}$
  - $\widetilde{C}=CR_0=[\underbrace{\widetilde{C}_1}_{n}\ \ \underbrace{0}_{n-n_1}]$
  - 能观状态变量组 $\dot{\tilde{x}}_1=\widetilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\widetilde{B}_1u$，$y=\widetilde{C}_1\tilde{x}_1$
  - 不能观状态变量组 $\dot{\tilde{x}}_2=\widetilde{A}_{21}\tilde{x}_1+\widetilde{A}_{22}\tilde{x}_2+\widetilde{B}_2u$
  - 传递函数关系 $W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\hat{C}_1(sI-\hat{A}_{11})^{-1}\hat{B}_1=\widetilde{W}_o(s)$
  - 步骤
    - 1.判断能观性
    - 2.确定变换矩阵：前n1列是能观性判别阵中的n1个线性无关的行；另外n-n1个行在确保R0^(-1)为非奇异的条件下，完全任意
    - 3.套公式计算
- 按能控和能观性分解
  - 按能控性分解 $\begin{matrix}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{matrix}\xrightarrow{x=R_c\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}}\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=R_c^{-1}AR_c\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+R_c^{-1}Bu\\ \qquad=\begin{bmatrix}A_1&A_2\\ 0&A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=CR_c\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}=[C_1\ \ C_2]\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}\end{cases}$
    - 能控子系统 $\sum_c(A_1,\hat{B},C_1):\begin{cases}\dot{x}_c=A_1x_c+A_2x_{\bar{c}}+\hat{B}u\\ y_1=C_1x_c\end{cases}$
      - 按能观性分解 $\sum_c(A_1,\hat{B},C_1):\begin{cases}\dot{x}_c=A_1x_c+A_2x_{\bar{c}}+\hat{B}u\\ y_1=C_1x_c\end{cases}\xrightarrow{x_c=R_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}}\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=P_{o1}^{-1}A_1P_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+P_{o1}^{-1}A_2P_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+P_{o1}^{-1}\hat{B}u\\ \qquad=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}&0\\ \hat{A}_{21}&\hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{A}_{13}&0\\ \hat{A}_{23}&\hat{A}_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ \hat{B}_2\end{bmatrix}u\\ y=C_1P_{o1}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=[\hat{C}_1\ \ 0]\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$
        - 能控能观子系统
        - 能控不能观子系统
    - 不能控子系统 $\sum_{\bar{c}}(A_4,0,C_2):\begin{cases}\dot{x}_{\bar{c}}=\hat{A}_4x_{\bar{c}}\\ y_2=\hat{C}_2x_{\bar{c}}\end{cases}$
      - 按能观性分解 $\sum_{\bar{c}}(A_4,0,C_2):\begin{cases}\dot{x}_{\bar{c}}=\hat{A}_4x_{\bar{c}}\\ y_2=\hat{C}_2x_{\bar{c}}\end{cases}\xrightarrow{x_{\bar{c}}=R_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}}\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o}\\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=R_{o2}^{-1}A_4R_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{33}&0\\ \hat{A}_{43}&\hat{A}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\\ y_2=C_2R_{o2}=[\hat{C}_3\ \ 0]\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$
        - 不能控能观子系统
        - 不能控不能观子系统
  - 传递函数关系：系统的传递函数与能控能观子系统的传递函数一致

传递函数矩阵的实现问题

- 实现：对于给定传递函数W(s)，若存在一个状态空间表达式使成立C（sI- A)^(-1) B+ D= W （s），则该状态空间表达式为其一个实现
- 最小实现
  - 传递函数W(s)的一个实现为 $\begin{matrix}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{matrix}$ ，若其不存在其它实现使维数小于x的维数，则（A,B,C）为最小实现。
  - 反映系统的最简单结构，系统维数唯一，具体形式不唯一
- 步骤
  - 1、初选任意一个实现：提取其中即能控又能观子系统
  - 2、初选能控性实现：提取其中能观子系统
  - 3、初选能观性实现：提取其中能控性子系统