



学 | 魁 | 榜  
考取高分不用愁

# 《不等式-一元二次不等式及其解法》

分享人：北京大学邱崇



# 不等式

1

不等关系与不等式

2

一元二次函数零点问题

3

一元二次不等式及其解法

4

基本不等式

5

线性规划问题



# 直击高考



(2017 · 宁夏考题)

不等式  $(1+x)(1-x) > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

(2018 · 101中学高三检测)解关于 $x$ 的不等式

$$ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$$

(2017 · 广州高三模拟) 若关于 $x$ 不等式  $x^2 + ax + 1 \geq 0$

在 $\mathbb{R}$ 上恒成立,求 $a$ 的取值范围.

(全国I/II/III卷及各独立命题省份：导数题)

导数  $f'(x) = ax^2 + bx + c$  的零点分布情况求解单调性

# 本节要点



01

基础知识

02

四类题型

求一元二次不等式解集、  
讨论一元二次不等式解集、  
恒成立问题、  
解一元高次不等式解集

03

小结

▲ 分享人：北京大学邱崇



# 1. 一元二次不等式解法



## 1. 一元二次不等式、一元二次方程和二次函数

代数 一元二次不等式

数  $ax^2 + bx + c > 0$  或

$ax^2 + bx + c < 0$  的解集

几何

二次函数

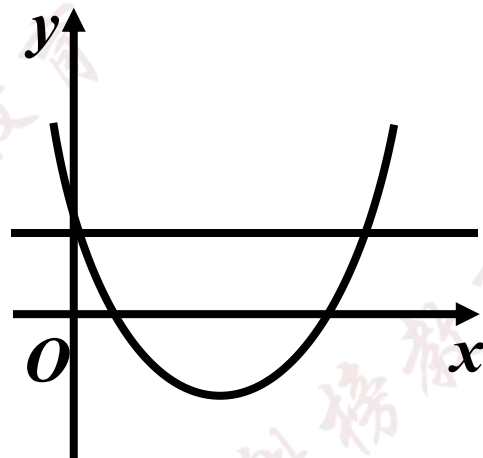
$y = ax^2 + bx + c$  的图像

根的讨论  
求解集

一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$  方程的根

函数的零点  
根的讨论







# 1. 一元二次不等式解法



## 1. 一元二次不等式、一元二次方程和二次函数

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ( $a > 0$ ) 的图象				
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) 的根		有两相异实根 $x = x_1$ 或 $x = x_2$	有两相同实根 $x = x_1$	无实根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ( $a > 0$ )	$\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x   x \neq x_1\}$	$\mathbf{R}$
	$ax^2 + bx + c < 0$ ( $a > 0$ )	$\{x   x_1 < x < x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$



# 题型一 求一元二次不等式解集



**表现形式：**一元二次不等式求其解集

**方法：**因式分解，数形结合

**例：**不等式  $x^2 + x - 2 < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

**步骤：**第一步：将不等式**一边为0**

第二步：将不等式变为等式**因式分解**，并求**根**，依次标在数轴

上  $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

第三步：观察二次前系数，画出二次函数图像

第四步：记数轴上方为正，下方为负，根据不等式符号写出解集



# 题型一 求一元二次不等式解集

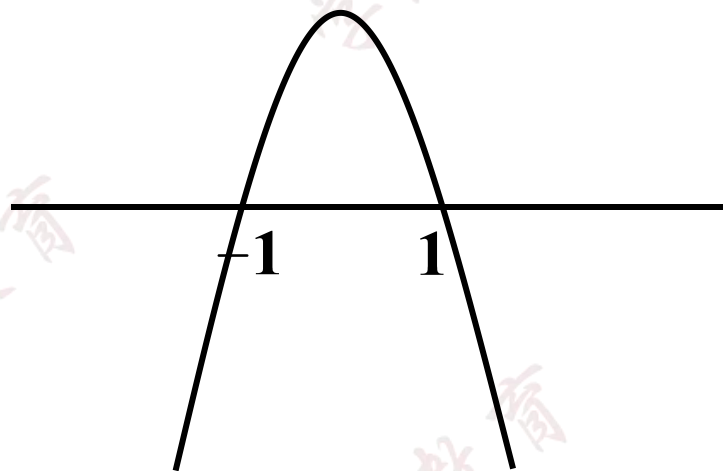


例1 : (2017 · 宁夏检测广东考题)

不等式  $(1+x)(1-x) > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

解 :  $(1+x)(1-x) = -x^2 + 1 = 0$

得  $x_1 = -1, x_2 = 1$



由图像可得 ,  
不等式的解集为  $(-1, 1)$

注 : 在画二次函数图像时注意开口





## 题型二 讨论一元二次不等式解集



**表现形式：**含参一元二次不等式，求其解集

**方法：**分类讨论，数形结合

**例：**(2018·101中学高三检测)解关于 $x$ 的不等式

$$ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$$

**步骤：**

**第一步：**判断不等式**类型**，即最高次幂前系数是否可能为0.

如果参数为0则可直接求解.

**第二步：**如果为二次不等式，则需要通过**判别式讨论根的情况**

**第三步：**根据根和开口情况，**画出函数图像**，并找到满足不等式要求的部分

**第四步：**用**集合或区间**形式表示不等式解集



## 题型二 讨论一元二次不等式解集



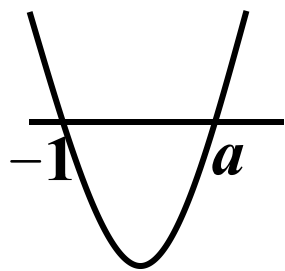
**例2** : 解关于 $x$ 的不等式  $x^2 + (1-a)x - a > 0$

**解** : 方程因式分解得  $x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$

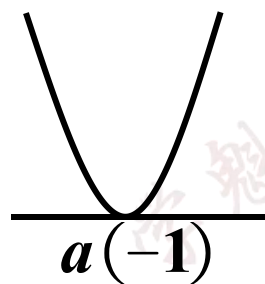
令其等于0 , 解为  $x_1 = -1, x_2 = a$ , 必有两根 ( **可以相等** )

由于函数  $y = x^2 + (1-a)x - a$  开口向上

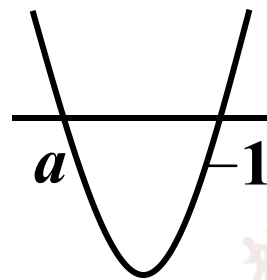
当  $a > -1$  时



当  $a = -1$  时



当  $a < -1$  时



由图 , 综上所述可得 ,

- 当  $a > -1$  时, 解集为  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > a\}$
- 当  $a = -1$  时, 解集为  $\{x | x \neq -1\}$
- 当  $a < -1$  时, 解集为  $\{x | x < a \text{ 或 } x > -1\}$



## 题型二 讨论一元二次不等式解集



例3 : (2018 · 101中学高三检测) 解关于 $x$ 的不等式

$$ax^2 - (a+1)x + 1 > 0$$

解： 若 $a=0$ , 原不等式等价于 $-x+1 < 0$ , 解得 $x > 1$

若 $a < 0$ , 原不等式等价于 $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x - 1) > 0$ , 解得  $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\}$

若 $a > 0$ , 由于 $1, \frac{1}{a}$ 的大小不定, 故需讨论 $a$ 与1的关系, 从而解决

综上所述: 当 $a=0$ 时, 解集为 $\{x \mid x > 1\}$

当 $a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\}$ ; 当 $a = 1$ 时, 解集为 $\{x \mid x \neq 1\}$

当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\right\}$ ; 当 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$



## 题型三 一元二次不等式恒成立问题



**表现形式：**不等式在固定范围内恒成立，求参数范围

**方法：**1. 数形结合；

**例：**（2017·广州综合测试改）若关于 $x$ 不等式  $x^2 + ax + 1 \geq 0$

在 $R$ 上恒成立求 $a$ 的取值范围.

**数形结合法步骤：**

**第一步：**通过不等号确定二次函数开口方向

**第二步：**讨论判别式小于等于0时,参数范围

**第三步：**判别式大于0时,画出简易的二次函数图像,讨论对称轴和定义域关系,从而找到参数范围



## 题型三 一元二次不等式恒成立问题



**注** 常见一元二次不等式恒成立的充要条件

(1)  $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$  在  $R$  恒成立的充要条件是 :  $a > 0, b^2 - 4ac < 0$

(2)  $ax^2 + bx + c \geq 0 (a \neq 0)$  在  $R$  恒成立的充要条件是 :  $a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$

(3)  $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$  在  $R$  恒成立的充要条件是 :  $a < 0, b^2 - 4ac < 0$

(4)  $ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0)$  在  $R$  恒成立的充要条件是 :  $a < 0, b^2 - 4ac \leq 0$





## 题型三 一元二次不等式恒成立问题



**表现形式：**不等式在固定范围内恒成立，**可将参数与变量分开。**

**并求参数范围**

**方法：**2.参变分离

**例：**（2017·广州综合测试改）若关于 $x$ 不等式  $x^2 + ax + 1 \geq 0$

在 $R$ 上恒成立求 $a$ 的取值范围.

**参变分离法步骤：**

**第一步：**观察是否可以将参数和变量分离在不等号两侧

**第二步：**在题目所给范围内,将参变分离

**第三步：**通过不等式恒成立解法，将其转化为求函数最值问题,从而求解参数范围



## 题型三 一元二次不等式恒成立问题



**注** 常见不等式恒成立的解法

$$(1) \forall x, f(x) > a/f(x) \geq a \Rightarrow f(x)_{\min} > a/f(x)_{\min} \geq a$$

$$(2) \forall x, f(x) < a/f(x) \leq a \Rightarrow f(x)_{\max} < a/f(x)_{\max} \leq a$$

另给出两种解决存在性的解法，但由于与恒成立问题类似，  
所以只给出解决方式

$$(3) \exists x, f(x) > a/f(x) \geq a \Rightarrow f(x)_{\max} > a/f(x)_{\max} \geq a$$

$$(4) \exists x, f(x) < a/f(x) \leq a \Rightarrow f(x)_{\min} < a/f(x)_{\min} \leq a$$



## 题型三 一元二次不等式恒成立问题



例4：（2017·广州综合测试改）若关于 $x$ 不等式

$x^2 + ax + 1 \geq 0$  在 $\mathbb{R}$ 上恒成立求 $a$ 的取值范围.

解法一(数形结合法)：

$$\Delta = a^2 - 4 \leq 0 \text{ 即 } a \in [-2, 2]$$

解法二(分离参数法)：

$$x^2 + ax + 1 \geq 0 \text{ 等价于 } \begin{cases} x < 0 \text{ 时, } a \leq -\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow a \leq \left(-\frac{x^2+1}{x}\right)_{\min} \\ x = 0 \text{ 时, } 1 \geq 0 \text{ 恒成立, } x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \text{ 时, } a \geq -\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow a \geq \left(-\frac{x^2+1}{x}\right)_{\max} \end{cases}$$

故在不同区间内找到 $a$ 的取值,取交集后得到 $a \in [-2, 2]$



## 题型四 解一元高次不等式解集



**表现形式：**整式形式下最高次幂 $>2$ ，并求其解集

**方法：**穿针引线法

**例：**求 $x^3-2x^2-x+2>0$ 的解集

**步骤：**第一步：通过不等式的诸多性质对不等式进行移项，使得右侧为0。（注意：**一定要保证x前的系数为正数**）

**第二步：**将不等号换成等号解出所有根。

$$x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x-1)(x+1)=0$$

$$x_1=2, x_2=1, x_3=-1$$

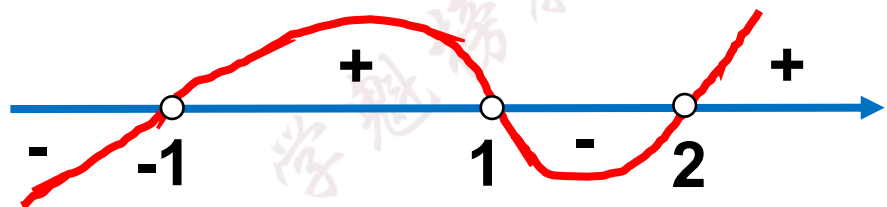


## 题型四 解一元高次不等式解集



第三步：在数轴上从左到右依次标出各根(分母为圈,分子为实).

第四步：画穿根线：以数轴为标准，从“最右根”的右上方穿过根，往左下画线，依次穿过各根(奇过偶不过).



第五步：观察不等号，如果不等号为“ $>$ ”，则取数轴上方，穿根线以内的范围；如果不等号为“ $<$ ”则取数轴下方，穿根线以内的范围.

由图可得  $(x-2)(x-1)(x+1) > 0$  的解集为  $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$





# 小结



## 01 基本方法

数形结合，分类讨论，穿针引线法，分离参数法

## 02 基本题型

求一元二次不等式解集、讨论一元二次不等式解集、  
一元二次不等式恒成立问题、解一元高次不等式解集