数形结合思想在解题中的应用

——在方程中的应用教学设计与实施*

摘要：数形结合思想是数学的重要思想方法之一，也是中学数学教育中的重要内容，贯穿整个中学数学。数形结合思想应用在不同题型的求解中，能够通过“以形助数”和“以数助形”，能够使复杂问题简单化，抽象问题具体化，但也是学生数学学习的重点跟难点。本案例结合数形结合在方程解题中的应用进行了教学设计，展示了教学的实施过程，为数形结合在解题中的应用教学的设计与组织提供范例。在教学过程中，通过引导学生用三种不同方式求解方程习题，对比分析，突出数形结合在解题过程中的优势，帮助学生充分认识数形结合在解题中的作用，渗透数形结合思想。本案例的分析与讨论，为数形结合在方程解题中的应用领域的教学设计提供有价值的思考路径与实施策略。

关键词： 数形结合；教学设计；方程；解题

Application for the methodology of number-shape combination during problem solving

—Teaching design and implementation for the application in equation

Abstract: The Methodology of number-shape combination is one main thinking method in Math, and also it is the important content of mathematics education in middle school, which exists throughout the whole middle school math. The application for the thinking method of number-shape combination can simplify complex problem and crystallize abstract problem via the “shape help number” and “number help shape” during solving different type problems. And that is also the key and difficult points for the mathematics study of students. This case makes the teaching design of equations solving with methodology of number-shape combination, and shows didactical process. It provides the example of teaching design and implementation for the problem solving with this method. During the teaching process, the advantage of number-shape combination in problem solving is highlighted through contrastive analysis and guiding the students to solving the equation problem with three different ways. The effect of number-shape combination on the problem solving can be recognized sufficiently by student, and the thinking method of number-shape combination can be permeated. This case provides the valuable thinking way and implementation strategy for teaching design on the equation problem solving by the number-shape combination.

Key words: Number-shape combination; Teaching design; Equation; Problem solving

---

* **作者简介：**王苗，女，湖北仙桃人，重庆三峡学院数学与统计学院助教，主要从事数学与计算科学方面的教育研究。

背景信息

《义务教育初中数学新课程标准》提出并强调了数学素养这一概念，它标志着我国义务教育数学课程从应试教育向素质教育的转变，突出强调学生不仅要掌握数学的基础知识、基本技能，更要掌握基本的数学思想方法。也对数学教育进行了明确规范，指出教师的教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得基本的数学活动经验。同时突出强调了教师在数学教育教学活动中应注重学生数学思想的培养[1]。

数学思想是数学教育教学过程中的重要内容，主要包括转换思想、数形结合思想、分类讨论思想、类比思想、归纳思想、函数思想、参数思想、抽象概括思想、整体思想、极限思想等。数形结合思想是初等数学教育中的重要内容，也是一种较为重要的数学思想。

数与形式数学中最古老最基本的研究对象。新课程标准认为数学是研究数量关系与空间形式的科学。把数学内容分成了“数与代数”“空间与图形”“统计与概率”“实践与综合”四个学习领域，每个领域都离不开数形结合的两个基本要素——“数”与“形”[1]。“数形结合”一词是由我国著名数学家华罗庚先生首次提出，华罗庚先生曾作词来描述数形结合的精妙，诗中写道“数形本是相倚依，焉能分作两边飞？数缺形时少直觉，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休，几何代数统一体，永远联系莫分离”。“数”与“形”各有特定的含义，它们在独立发展的同时又联系紧密，相互渗透，相互转换。数形结合思想是我们求解相关数学问题的一个重要方法，很多难以解决的代数问题很容易通过图形得到其性质，从而得到解决；同样对于图形问题，因难以找到合适的辅助线而困扰着我们，但往往通过直角坐标系等方法，将图形问题转化为代数问题，通过分析计算得到解决。

数形结合思想及其在解题中的应用，已受到广大数学教育工作者的重视与研究，理论与实践的联系也越来越紧密。

本案例以数形结合思想在方程题型求解中的应用作为主题，阐述了数形结合思想及其在方程中的应用。数形结合作为中学数学最重要的数学思想方法之一，是将“数”与“形”紧密结合起来学习数学知识的方法，即把代数与几何相结合，利用形象直观的“形”辅助学生理解抽象的“数”，也可以利用“数”来揭示图形的某些属性，化繁为简，化抽象为具体，帮助学生较好的抓住问题的关键与本质，对学生的数学学习起到指导作用，提高学生的数学学习能力。数形结合不仅是数学自身发展的需要，也是加深对数学知识的理解、发展智力、培养能力的需要。运用数形结合能揭示数学问题的条件和法论之间的内在联系，既分析其代数含义，又揭示其几何意义，使数量关系和空间形式的巧妙和谐地结合起来，并充分利用这种结合寻找解是思路，使问题得到解决。

中学数学教学的现代化关键并非内容的现代化，重要的是数学教学手段的现代化和数学思想方法的现代化。在实际教学中，数形结合的教学应当循序渐进，与知识教学学生认识水平相适应，按照反复孕育渗透，初步形成，应用发展，系统整理的顺序逐步完成。本案例从数形结合在解题中的应用为出发点，有目标的揭示和运用数学思想方法，将数形结合思想渗透到各种题型中去，将注意力集中到数学思想方法上，突出数形结合思想的解题功能，是

学生感受到数形结合的优越之处。在教学过程中注重提高学生的数形结合解题能力，加强代数符号语言与图形语言的对应关系，同时培养学生观察图形的能力，加强学生作图、构图能力的培养。[1]

案例正文

一、数形结合的概念与定界

数学是研究空间形式与数量关系的科学，主要包含两个要素——“数”与“形”。“数”表上面可以理解为数字、代数、算术等，“形”则可以理解为图形、几何、空间形式等，“结合”就是将两者相互联系在一起。

“数”和“形”二字涵义丰富。从广义上来讲，“数”为研究客观世界的工具，“形”即整个客观世界。从狭义上来讲，“数”为代数学、分析学的研究对象，“形”为几何学的研究对象[2]。“数形结合”一词中的“数”与“形”并非严谨意义上的数学概念，这里的“数”与“形”可以理解为对知识的表达与认知，“数”为数学符号表征，严密抽象，主要是指数、代数式、方程、函数、数量关系式等，代表的是抽象的数学思维；“形”为几何图像表征，生动直观，主要是指几何图形和函数图像等，代表的是形象的数学思维。

“结合”一词具有非常浓烈的方法论意义，它主要指彼此之间的紧密联系。将“结合”一词置于“数形结合”当中，可以理解为借助数学模型或结构进行转化。

数学是研究现实世界的数量关系与空间形式的科学，数和形之间是既对立又统一的关系，在一定的条件下可以相互转化。数形结合思想就是通过数和形之间的对应关系和相互转化来解决问题的思想方法。罗增儒认为数形结合思想是：“一种极富数学特点的信息转换，数学上总是用数的抽象性质来说明形象的事实，同时又用图形的性质来说明数的事实[3]”；徐斌艳认为：“数形结合就是使抽象思维和形象思维相互作用，实现数量关系与图形性质的相互转化，将抽象的数量关系和直观的图形结合起来研究数学问题[4]”；陈玉娟认为：“数形结合是重要的数学思想，又是常用的数学方法。把数量关系的研究转化为图形性质的研究，或者把图形性质的研究转化为数量关系的研究，这种解决问题过程中数与形相互转化的研究策略,就是数形结合的思想[5]”。

数形结合思想是一种重要的数学思想，也是数学学习的重要工具，是代数与几何的对立统一和完美结合。我们可以这样来理解数形结合，对同一个数学问题，可以从代数的角度来理解分析，也可以从几何的角度来认识，得到不同的解决方法，而我们就是要善于把握什么时候运用代数方法解决几何问题是最佳的、什么时候运用几何方法解决代数问题是最佳的，把抽象的数学问题变具体，把复杂的数学问题变简单。

---

①中华人名共和国教育部.义务教育数学课程标准（2011 年版）[M].北京：北京师范大学出版社，2012：2.
2徐文龙.“数形结合”的认知心理研究[D].桂林:广西师范大学，2005:6-8.
3罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社，2001:384.
4徐斌艳.数学课程与教学论[M].杭州:浙江教育出版社，2003:91.
5陈玉娟.数形结合思想贵在“结合”——一类问题错解引发的思考[J].数学通报，2012，10:38-41.

二、数形结合思想在解题中的渗透

中学数学课程中涉及数形结合思想的内容非常多，譬如：数轴、数的绝对值、比较有理数、二维平面中点的位置与坐标、图解法计算二元一次方程组、求解不等式、单项式乘法、正反比例函数、二次函数、分段函数、勾股定理及其应用、比例线段、圆和圆的位置关系等。数和形是中学数学研究的两大部分，他们之间相互转化，把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来，通过“以形助数”和“以数助形”使复杂问题简单化，抽象问题具体化，从而提高解题效率。

以形助数通常是借助数轴、单位圆、函数图象数式的结构特征等。

以数助形通常是借助向量知识、几何图形表示的数量关系、几何定理等。

实现数形结合常与以下内容有关：①实数与数轴上的点的对应关系；②所给的等式或代数式的结构含有明显的几何意义；③以几何元素和几何条件为背景建立起的概念；④函数与图像的对应关系；⑤曲线与方程的对应关系。应用数形结合思想不仅直观易发现解题途径，而且能避免复杂的计算推理，大大简化解题过程，这在解选择、填空题中更为显著，培养这种思想意识能开拓自己的思维视野。

在运用数形结合思想解题时，我们应遵守如下原则：

(1) 等价性原则。数与形的相互转化要求所讨论的问题与数与形所反映的对应关系必需一致，即代数性质和几何性质的转换必须是等价的，否则会由于几何的局限性导致表示的数不完整。

(2) 双向性质原则。利用数形结合思想，一方面要对直观几何进行分析，另一方面要对代数抽象作探索，两方面相辅相成。如只对几何问题进行代数分析或对代数问题进行几何分析，在很多时候是很难行得通的。

(3) 简单性原则。简单性原则就是用什么方法解题简单就用什么方法，不要刻意去追求某一种模式——代数问题用几何方法，几何问题用代数方法。

三、“数形结合在解题中的应用”的教学设计与实施

在数学教学过程中，既要抓学生的基础，又要培养学生一定的做题方法和技巧。通常在解答数学问题中，数量关系与图形位置关系这两者之间有着紧密却又较隐含的相互关系。解题时，往往需要揭示它们之间的内在联系，通过图形探究数量关系，再由数量关系研究图形特征，使问题化难为易，由数想形、由形知数，
从而使问题直观化，简便化。

数形结合思想在解题中运用频率比较高，在代数部分，一般利用数轴或几何图形解答；在几何部分，利用图形解答，就比较直观，简便，而了解几何图形中蕴含着的一定的数量关系，可以帮助学生快速完成部分选择，填空，解答题。这就需要学生能够对知识融会贯通，有一定的知识整合能力、归纳探索能力以及在新情境下解决新问题的创新能力。这需要在大

量的训练中去归纳总结。总之就是要多练习，多总结，多归纳，发现规律，从而熟练地掌握这种解题思想。

通过运用数形结合思想分析解决方程问题，掌握 “以形助数，用数解形”的基本思路方法。通过题组训练，让学生体会数形结合思想的运用方法和形式。

（一）情景引入

通过一道常规方程习题，来逐步引导学生探讨数形结合在方程解题中的应用，加深学生对数形结合的理解。

师：同学们，我们学习并梳理了有关方程的知识点，相信大家对这一知识点也有了一定的认识，对应的习题也做了足够的训练，对相关的习题也能够进行基本的分析，有一定的解题思维，今天我们首先来求解这样一道题，对相关知识点进行巩固，也加深同学对解题的认识。

教师在黑板上板书

若关于x的方程$x^2+2kx+3k=0$的两根分布在$x=0$的两侧，求k的取值范围.

师：大家看看这道题，大家知道我们可以得到的条件是什么？

生：条件是方程有两个根，一个正根以及一个负根。

师：很好，那么要求解的是什么？

生：求解方程中未知参数k的取值范围。

师：很好，那么大家自己能求解么？

生：能！

师：好，那先请同学们自己完成。

在教室走动，观察学生的计算

发现有同学计算错误

师：不错，但是仔细看看，这里有没有什么问题呢？

生：咦，老师，这里好像计算错了。

在教室后面发现有位同学韦达定理公式书写错误

师：这个地方是不是笔误造成的呢？没关系，可以翻看写笔记，看看是不是存在问题。

找到一位使用韦达定理求解的同学

师：对的，把你的求解过程写到黑板上吧。

继续在教室走动，观察学生的计算

学生在黑板上板书

设方程的两个根分别为x_1，x_2，则由韦达定理有：

$$x_1+x_2=-2k$$

$$x_1x_2=3k$$

由方程的两根分布在$x=0$的两侧，可知：

$$x_1x_2=3k<0$$

可得：$k<0$

发现一位使用一元二次方程求根公式求解的同学

师：(对该学生说)这种方法也不错，也可以正确求解这道练习题。

发现一位同学正在画方程对应的函数图像

师：(对该学生说)这种思想很好，继续看你能不能找出求解问题的关键点。

继续在教室走动，观察计算情况

师：部分同学都用的韦达定理在求解，我们先回顾下韦达定理。

生：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$.

师：很好。

在黑板上板书

如果一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$两个根为x_1, x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$$

师：有题目条件可知方程有两个根，一个正根，一个负根，根据条件及韦达定理，我们能不能确定两根之和的符号？

生：不能。

师：能不能确定两根的乘积的符号呢？

生：可以，小于零。

师：根据两根的乘积小于零，是否可以得到k的取值范围呢？

生：可以。

师：很好，我们一起来看看黑板上同学的求解过程。首先设方程的两个根分别为x_1, x_2，根据分析，由韦达定理可知两根乘积小于零，即：$x_1x_2=3k<0$，从而求解出k的取值范围。

生：$k<0$

通过韦达定理求解该题是一种常规方法，也是同学们最容易想到的一种方法，该方法根据已知条件，方程存在两个实根，一个正根，一个负根，虽不能判定两根之和的符号问题，但可以判定两根之积小于0，通过两根之积的符号进行求解，不需要对函数图像进行分析，是一道纯粹的代数方法。该方法需要同学掌握韦达定理的求根公式，计算也相对简单。

（二）引导学生换维思考

该到题用纯粹的代数方法求解，除了韦达定理，还存在一种较直观的求解方式，即直接根据求根公式求解出方程的解，然后根据题目条件，进行探讨，逐步引导学生掌握该方法，明确任何一道题求解方式都不是唯一的，可以尝试多种方法，扩展学生的思维的同时，加深对方程求根公式的理解。

师：这是一种求解方法，同学们还有没有其他求解方法呢？

生：可以。

生：根据方程的求根公式。

师：对，关于x的方程$x^2+2kx+3k=0$已知，并且题目告诉我们方程有两根，那么我们是否可以求出方程的解呢？

生：可以。

师：我们首先来回顾下二元一次方程的求根公式。

同学们纷纷回答

生： $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

师： 没错。

教师在黑板板书

设方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有两根 $x_1,\ x_2$，则

$$x_1,\ x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

师： 根据二元一次方程的求根公式，我们请同学们计算出方程的两个解。

在教室走动，观察计算情况，发现同学们求根基本都正确

师： 同学们做的都很好，接下来我们一起来求解。

教师在黑板板书

设方程 $x^2+2kx+3k=0$ 的两根分别为 $x_1,\ x_2$，根据求根公式可得：

$$x_1,\ x_2=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-12k}}{2}$$

师： 我们求出了方程的两个解，那么接下来要怎么处理呢？

生： 方程解的符号。

师： 对，我们知道方程有一个正根，一个负根，那么哪个根大，哪个根小呢？

生： 取正的大，取负的小。

师： 那我们不妨做这样的假设：

教师在黑板接着板书

设方程 $x^2+2kx+3k=0$ 的两根分别为 $x_1,\ x_2$，根据求根公式可得：

$$x_1,\ x_2=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-12k}}{2}$$

不妨设 $x_1=\dfrac{-2k-\sqrt{4k^2-12k}}{2}$， $x_2=\dfrac{-2k+\sqrt{4k^2-12k}}{2}$

师： 方程两根 $x_1,\ x_2$ 的大小关系是什么样的呢？

生： $x_1<x_2$

师： 对，那么根据题目条件，我们可以得到 $x_1,\ x_2$ 的符号。

生： 可以 $x_1<0, x_2>0$ 。

师： 接下来我们根据 $x_1,\ x_2$ 的符号请同学们完成接下来的求解过程。

在教室走动，观察计算情况

发现一个同学的过程写的很规范

师： (对那位同学说) 过程写的不错，很规范，到黑板上完成老师接下来的求解过程，快去。

学生走上讲台，在黑板上板书

$$x_1=\frac{-2k-\sqrt{4k^2-12k}}{2}<0\text{，即}-2k<\sqrt{4k^2-12k}\text{，可得}k<0$$

$$x_2=\frac{-2k+\sqrt{4k^2-12k}}{2}>0\text{，即}2k<\sqrt{4k^2-12k}\text{，可得}k<0$$

由两者取交集可知，$k<0$。

发现学生在不等式的计算过程中存在问题

师：(对一个学生说)在仔细检查下这个计算过程，

(对另个学生说)求解这个不等式，如果我们消掉根号，是不是就比较好求解了呢？

(对全体学生说)这里不等式的求解，关键问题就在于消掉根号，那么如何消除根号呢？是不是可以通过两边同时平方呢？

继续在教室走动，观察计算情况

师：同学们基本都完成了求解过程，我们一起来看下，同学在黑板上的板书，很规范。由x_1小于0，可得关于k的不等式，同理由x_2大于0，得到k的另一不等式，通过不等式的求解并取交集，我们能够计算处k的取值范围。但是在计算过程中大家要注意不等式的求解。我们是否可以通过两边同时平方消除根号继而求得k的取值范围呢？

生：可以。

教师在黑板上板书

将不等式$-2k<\sqrt{4k^2-12k}$两边同时平方，可得：$4k^2<4k^2-12k$

移项可得：$12k<0$，即$k<0$

同理：将不等式$2k<\sqrt{4k^2-12k}$两边同时平方、移项，可得$k<0$

两者取交集，综合可得$k<0$

师：这种求解方式主要考察方程的求根公式，同时也包含了不等式的求解，希望大家能对相关知识点课后自行巩固。

这种求解方法主要通过二元一次方程的求根公式，求出方程的两个解，根据二元一次方程的求根公式，我们可以知道方程两根的大小关系，继而结合题目条件进行求解。这个方法在求解过程中还包含了不等式的求解，考察了不等式的相关知识，同时也考察了学生的计算能力。这种方法巩固了学生对不等式的求解，训练了学生的计算能力。当然，在做题的过程中，学生容易粗心，犯计算错误。同样，这种方法也是一种纯粹的代数学方法，需要学生对代数学相关知识有深刻的理解和认知。

（三）引导学生深入思考

该道题除了代数学的求解方法，还可以运用数形结合的方法，从图像的观察得出问题求解的本质与关键点。但是大部分学生在做这道习题时，往往都会用代数学的思维与方法求解，而忽略这种数形结合的方法。所以，需要对学生进行引导，通过让学生自主画图，引导学生观察几种不同的图形，从而转换为代数学问题，进而进行求解。这里我们一步步对学生进行

引导，同时逐步渗透数形结合的思想，“以形助数，用数解形”，让学生了解到如何在解题中的运用数形结合思想，体会到数学结合在解题中的优势。

师：对这道题我们通过韦达定理，方程求根公式两种不同方式进行了解答，大家想一想还有没有其他方法可以求解呢？

生：通过图形。

师：很好。我们首先来回顾下函数的相关知识，一元二次函数与 x 轴的交点有几种情况呢？

生：3 种。

师：哪三种？

生：没有交点，一个交点，两个交点。

师：两个交点的又有几种情况呢？

生：三种。

师：具体是哪三种情况呢？

生：两个正交点，两个负交点，一正一负。

师：有没有哪位同学愿意在黑板上画出一元二次函数与 x 轴有两个交点的图形呢？

学生纷纷举手

师：(对一位同学说)就你啦！

学生走向讲台

在教室走动，观察学生的画图情况

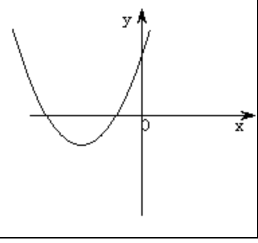
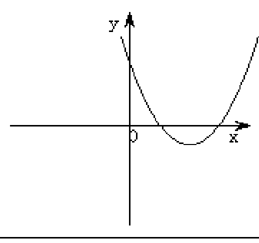
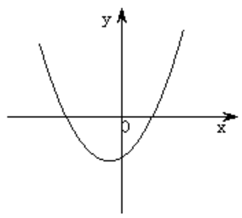
师：同学们画的都很好，但是我们要注意函数图像的开口与什么有关？

生：二次项的系数。

师：那么大家在画图的时候有没有注意到这个问题呢？下面我们一起来画下一元二次函数与 x 轴有两个交点的情况，我们以二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 为例：

教师在黑板板书

设二次函数为 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 与 x 轴的两个交点分别为 x_1，x_2

分布情况	两个交点都小于 0 $\left(x_1<0, x_2<0\right)$	两个交点都大于 0 $\left(x_1>0, x_2>0\right)$	一个交点小于 0，一个大于 0 $\left(x_1<0<x_2\right)$
大致图象（$a>0$）			

师：二次函数为 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 与 x 轴的两个交点可以理解为什么呢？

生：方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 的解。

师：那么我们是否可以通过讨论函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 与 x 轴的两个交点情况来探讨方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 的解的情况呢？

生：可以。

师：很好，接下来我们来观察下黑板上的三个图形，二次函数与 x 轴均有两根交点，那么与其对应的方程解的情况是？

生：有两个根。

师：我们先来讨论两个交点小于 0 的情况，对应方程有两个负根，那么从图形上观察，我们可以得到什么呢？

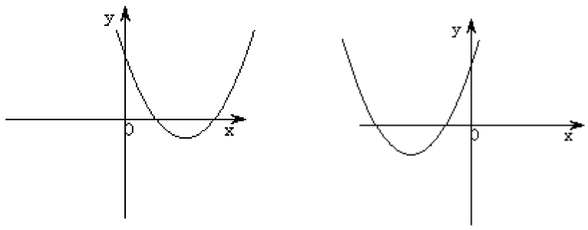
生：$f(0)>0$

师：仅由 $f(0)>0$ 能否得到与 x 轴的两个交点小于 0 呢？

生：不可以，还需加上 $\Delta>0$。

师：不错，我们可以结合图形来进行分析。

教师在黑板上画图



师：大家在想一想，黑板上两个图形是不是满足 $f(0)>0$，$\Delta>0$，这两个条件呢？

生：是。

师：这两个条件，又能否保证与 x 轴的两个交点小于 0 呢？

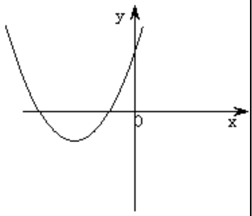
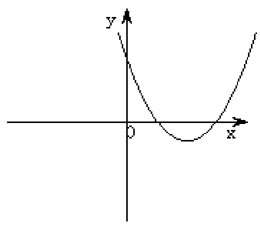
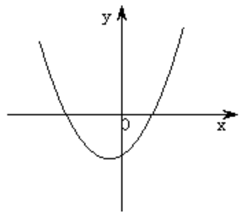
生：不能。

师：如果我们加上两根之和小于 0，能否保证呢？

生：可以。

师：请大家自己总结下根据函数与 x 轴的两个交点小于 0，我们可以得到什么结论？

教师在教室走动，观察学生的总结情况，并在黑板板书

分布情况	两个交点都小于 0 $(x_1<0, x_2<0)$	两个交点都大于 0 $(x_1>0, x_2>0)$	一个交点小于 0，一个大于 0 $(x_1<0<x_2)$
大致图象（$a>0$）			
得出的结论	$\Delta>0$ $-\dfrac{b}{2a}<0$ $f(0)>0$		

师：大家都总结的很好，要使函数该函数 x 轴的两个交点小于 0，需要满足三个条件，

$\Delta>0$，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$f(0)>0$。那么与请大家自己思考下两个交点大于0，由函数图像我们可以得到什么结论？有没有哪位同学愿意在黑板上给大家总结下？

学生举手走上讲台，并板书

$$\Delta>0$$

$$-\frac{b}{2a}>0$$

$$f(0)>0$$

教师在教室走动，观察学生总结情况

师： 大家都总结的很好，我们一起来探讨下，图形上观察，我们可以得到什么呢？

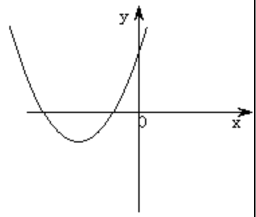
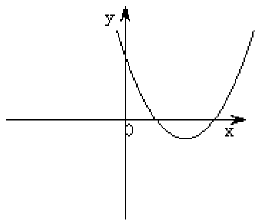
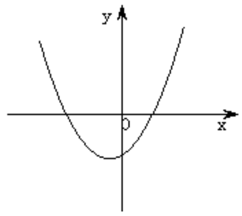
生： $f(0)>0$

师： 仅由 $f(0)>0$ 能否得到与 x 轴的两个交点大于 0 呢？

生： 不可以，还需加上 $\Delta>0$ 与两根之和大于 0。

师： 很好！

教师在黑板板书

分布情况	两个交点都小于 0 $(x_1<0, x_2<0)$	两个交点都大于 0 $(x_1>0, x_2>0)$	一个交点小于 0，一个大于 0 $(x_1<0<x_2)$
大致图象（$a>0$）			
得出的结论	$\Delta>0$ $-\frac{b}{2a}<0$ $f(0)>0$	$\Delta>0$ $-\frac{b}{2a}>0$ $f(0)>0$	

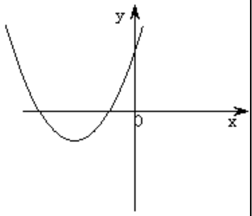
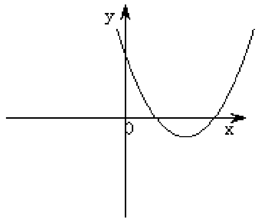
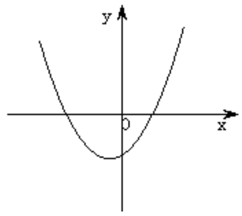
师： 最后，我们再来探讨下函数与 x 轴的两个交点，一个交点小于 0，一个大于 0 情况，通过观察图像我们可以得到什么结论呢？

生： $f(0)<0$

师： 很好，通过 $f(0)<0$ 我们可以得到函数与 x 轴的两个交点，一个交点小于 0，一个大于 0 么？

生： 可以。

教师在黑板板书

分布情况	两个交点都小于0 $(x_1<0, x_2<0)$	两个交点都大于0 $(x_1>0, x_2>0)$	一个交点小于0，一个大于0 $(x_1<0<x_2)$
大致图象（$a>0$）			
得出的结论	$\Delta>0$ $-\dfrac{b}{2a}<0$ $f(0)>0$	$\Delta>0$ $-\dfrac{b}{2a}>0$ $f(0)>0$	$f(0)<0$

师：很好！回到我们这道题，探讨k取什么范围时，使得关于x的方程$x^2+2kx+3k=0$的两根分布在$x=0$的两侧。那么我们可以理解为探讨什么呢？

生：探讨函数 $f(x)=x^2+2kx+3k$ 与x轴的两个交点。

师：方程的两根分布在$x=0$的两侧，对应两根的什么情况呢？

生：一个正根，一个负根。

师：那么这道题求解k的取值范围实际上是求解什么呢？

生： $f(0)<0$

师：我们请大家自己求解，有没有哪位同学愿意在黑板上求解呢？

学生举手走上讲台，并板书

设函数 $f(x)=x^2+2kx+3k$，由函数与x轴的两个交点，一个交点小于0，一个大于0可得：

$$f(0)<0$$

即：$3k<0$

可得：$k<0$

教师在教室走动，观察学生计算情况

师：大家都做的很好，我们一起来看看黑板上同学的计算，大家是不是这样计算的呢？

生：是

师：同学在黑板上的求解过程就很好，大家在求解计算的时候也要注意过程的规范性。我们通过图形分析，把这道题转化为求解使得函数 $f(0)<0$ 的k的取值范围。这种方法就是我们今天要探讨的数形结合思想在解题中的应用。

这种方程的解法，是典型的数形结合的求解方式，也是学生不容易想到的求解方法，但是一旦学生能够将方程解的问题转化为函数与x轴交点问题，通过对一元二次函数的图像分析，就能够很容易的进行求解。这里考察了一元二次函数的图像的相关知识，同时引导学生

对其进行了观察分析，将代数问题转化为了函数的图像问题，代数与图形相结合，对问题进行简化，从而可以很容易的进行求解。通过将代数问题转化为图形问题，引导学生逐步认识数形结合，体会到它的妙处。同时也注重了学生的画图能力以及图像的观察能力的培养，渗透了数形结合思想。

（四）情景剥离，突出数形结合

通过对该题的三种求解方法，由学生自行体会数学结合在解题中的妙用，加深对数形结合的理解。

师：我们通过三种方式分析求解了该道习题，第一种及第二种方法主要是从代数学的维度进行求解，第三种，我们采用数形结合的方法进行求解，大家认为那种方式最复杂呢？

生：第二种。

师：哪种方式最简单呢？

生：（部分学生说）第一种

（部分学生说）第三种

师：大家都说的很好，如果我们对函数图像较为熟悉，那么是不是很容易的能分析出求解条件？

生：是

师：对比第一种韦达定理求解与第三种数形结合求解，如果我们熟悉函数图像，结合图像分析求解，哪种方式求解过程更为简洁呢？

生：数形结合。

师：代数与图形的结合很多时候能够简化我们的求解过程，不仅仅是我们刚才学习的方程问题中，还有很多类型的题型中都有应用，比如不等式问题、函数问题、勾股定理及其应用等，可以简化我们的求解过程。

通过对比分析，引导学生体会数形结合思想，扩展学生的思维，同时也让学生了解数形结合思想不仅仅是在方程的求解过程中有应用，在其他知识点对应的题型中同样有应用，如不等式问题，函数问题、几何问题等，激发学生的学习兴趣，同时也能更好的进行自主学习与课后拓展。

案例思考题

1. 中学数形结合思想内容在教材中是怎样编排的？怎样体现的？如果你来执教中学数形结合思想在解题中的应用，你会遵循怎样的顺序来进行教学？

2. 简述你对中学数形结合思想内容本质的理解。

3. 阅读本案例，你是如何看待老师在教学中所设计的问题情境？

4. 阅读本案例，简述老师是如何引导学生认识到数形结合在解题中的应用及其解题优势。

5. 老师的中学方程课为“数形结合在方程解题中的应用”等相关内容的教学设计带来哪些启示？

案例使用说明

1. 适用范围

适用对象：中学教育专业研究生或本科生，教师教育相关专业的研究生或本科生，以及中学数学教师的专业培训。

适用课程：《数学解题理论》等相关章节。

2. 教学目的

①获得对“数形结合在解题中的应用”领域教学设计与实施的知识与经验，提高教学设计能力。

②加深对数形结合思想方法的理解，逐步渗透数形结合思想。

③让学生体会到数形结合思想在方程求解中的妙用，避免复杂的计算与推理，在解题时能提高效率。了解到数形结合不仅仅是在方程解题中有应用，在其他知识点对应的题型中同样也有应用，如不等式的求解、函数的求解等。

④加深学生对数形结合的理解，增强学生的图形意识，培养学生对图形的认识以及分析能力，“以形助数，用数解形”，增养学生问题转化的意识。

3. 要点提示

相关理论

教学设计、数形结合、方程、函数图形

关键知识点

数形结合思想在方程求解中的应用，包含韦达定理、方程的求根公式以及一元二次函数图像及数形结合

关键能力

研读教材的能力、学情分析的能力、教学设计的能力、教学实施的能力

案例分析思路

使用本案例时，可根据具体课程内容的需求，结合相关的理论与方法，从以下几个方面进行分析。

首先突出数形结合思想及其在解题中的优势。本案例中通过对数形结合在方程解题中的应用进行了分析，由习题引入，通过引导学生用三种方式对该题进行了求解，对比分析，使学生认识到数形结合在解题中的妙用，让学生体会到数形结合在解题中的简洁性。该课程可以理解为总结课程，阐述数形结合在方程解题中的应用，加注重对基本图形的掌握及图形分析能力。加深学生对数形结合的理解的同时也巩固了相关知识点，同时也使学生认识到数形结合在解题中能化复杂为简单，更

第二，对学生学习情况的把握。了解学生的困惑与疑难时，才能站在他们的立场设计和实施教学。对于代数题，很多时候我们结合图形来求解会比较简单，而较为复杂的几何题，往往转化为代数来描述，结合代数来求解能起到化繁为简的作用，而这些往往都是学生容易忽略的。学生的数形结合思想比较薄弱，我们应该正视学生的这种情况，在教学设计中逐步引导，不否定学生的解法，而是鼓励学生们自己发现问题，修正错误，理解新知。在思想渗透的同时，复习巩固已学的知识点，加强学生手动画图的能力及图形的分析能力。

第三，注重学生思维的拓展。一道习题往往有多重求解方式，而学生的思维也往往会局

限于其中一种解答方法，所以我们需要从多角度引导学生，发散他们的思维，发展学生融会贯通、迁移整合知识的能力。本案例通过三种求解方式，韦达定理、方程求根公式以及结合图形进行分析转化，学生往往会忽略其中一种或两种求解方式，而局限于其中一种，如韦达定理，亦或者方程求根公式，所以，我们在教学过程并未急于告诉学生答案，而是允许学生充分思考、表达自己的想法，注重学生思维的引导，学会一题多解，融会贯通。通过学生的独立思考，自主做题以及学生的板书了解学生的掌握情况，判断学生是否能够用不同方法进行求解。

最后，案例体现了“数形结合在解题中的应用”教学特征。通过对本案例的分析，使学生思考如何对“数形结合在解题中的应用”领域中的其他内容进行设计，从对个别案例的学习上升到对某个数学领域内容的教学设计分析。

4. 教学建议

时间安排：大学标准课 4 节：180 分钟。讨论数形结合思想在不同题型中的应用(方程、不等式、函数)3 节，反思总结 1 节

环节安排：布置预习，对数形结合在不同题型中的应用内容进行梳理→分组讨论进行初步的教学设计→各组研读案例并进行汇报→小组合作，选择“数形结合思想”在方程、不等式、函数等方面内容进行教学设计→学生在课上进行教学实践→教师点评

人数要求：40 人以下的班级教学。

教学方法：参与式教学、小组合作等方式，以师生的讨论为主，讲授为辅。

工具选择：多媒体、案例打印资料、录像机。

组织引导：教师布置任务清晰、预习要求明确

提供给学生必要的参考资料

给予学生必要的技能训练，便于课堂教学实践的进行

对学生课下的讨论予以必要的指导和建议

活动设计建议：

①阅读《义务教育数学课程标准》和教材中“数形结合”相关内容，同时查阅相关的教学设计和实施的文献，对数形结合内容进行初步的教学设计。

②阅读本案例，独立思考，记录思考与问题。

③小组讨论交流，记录数形结合在不同题型中应用过程中的问题。在小组的交流与汇报中，教师进行点评与提升。

④指导学生在课下对自己的设计进行完善，教师给予必要的指导。

⑤在进行小组汇报交流时，聆听小组要做好记录，便于提问与交流。

⑥教师对小组的设计进行点评，适时的提升理论，把握教学的整体进程。

5. 推荐阅读

[1] 罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社，2001:384.

[2] 徐斌艳.数学课程与教学论[M].杭州:浙江教育出版社，2003:91.

[3] [美]约翰·D·布兰思福特等著.程可拉，孙亚玲，王旭卿译.人是如何学习的 大脑、心理、经验及学校（扩展版）[M].上海：华东师范大学出版社，2016：3-24.

附录：课堂实录整理（略）