代数式求值的十种常用方法

代数式求值问题是历年中考试题中一种极为常见的题型，它除了按常规直接代入求值外，还要根据其形式多样，思路多变的特点，灵活运用恰当的方法和技巧，本文结合近两年各地市的中考试题，介绍十种常用的求值方法，以供参考。

一、利用非负数的性质

若已知条件是几个非负数的和的形式，则可利用“若几个非负数的和为零，则每个非负数都应为零”来确定字母的值，再代入求值。目前，经常出现的非负数有$|a|$，a^2，$\sqrt{a}$等。

例1（2007年乌兰察布市）若$\sqrt{1-3a}$和$|8b-3|$互为相反数，则$\left(\frac{1}{ab}\right)^2-27$=_______。

解：由题意知，$\sqrt{1-3a}+|8b-3|=0$，则$1-3a=0$且$8b-3=0$，解得$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{3}{8}$。因为$ab=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$，所以$\left(\frac{1}{ab}\right)^2-27=8^2-27=37$，故填37。

练习：（2007年深圳市）若$(a-2)^2+|b+3|=0$，则$(a+b)^{2007}$的值是（ ）

A. 0　　B. 1　　C. –1　　D. 2007

提示：$a=2$，$b=-3$，选C。

二、化简代入法

化简代入法是指先把所求的代数式进行化简，然后再代入求值，这是代数式求值中最常见、最基本的方法。

例2（2007年南宁市）先化简，再求值：$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a+b)(a-b)$，其中$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$。

解：原式$=a^2-2ab-b^2-(a^2-b^2)=a^2-2ab-b^2-a^2+b^2=-2ab$。

当$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$时，

原式$=-2ab=-2\times\frac{1}{2}\times(-1)=1$。

练习：（2007年河北省）已知$a=3$，$b=-2$，求$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}$的值。

提示：原式$=\frac{1}{a+b}$。

当$a=3$，$b=-2$时，原式=1。

三、整体代入法

当单个字母的值不能或不用求出时，可把已知条件作为一个整体，代入到待求的代数式中去求值的一种方法。通过整体代入，实现降次、归零、约分的目的，以便快速求得其值。

例3（2007年赤峰市）已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$，则$\frac{a-3ab+b}{2a+2b-7ab}=$_______。

解：由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$，即$a+b=4ab$。

所以原式$=\frac{a-3ab+b}{2a+2b-7ab}=\frac{(a+b)-3ab}{2(a+b)-7ab}$

$=\frac{4ab-3ab}{8ab-7ab}=\frac{ab}{ab}=1$。

故填1。

练习：（2007年潍坊市）代数式$3x^2-4x+6$的值为9，则$x^2-\frac{4}{3}x+6$的值为

A. 7　　B. 18　　C. 12　　D. 9

提示：$x^2-\frac{4}{3}x=1$，选A。

四、赋值求值法

赋值求值法是指代数式中的字母的取值由答题者自己确定，然后求出所提供的代数式的值的一种方法。这是一种开放型题目，答案不唯一，在赋值时，要注意取值范围。

例4（2007年宜昌市）请将式子$\frac{x^2-1}{x-1}\times\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$化简后，再从0，1，2三个数中选择一个你喜欢且使原式有意义的x的值代入求值。

解：原式$=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\cdot\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)$

$=(x+1)\cdot\frac{x+2}{x+1}=x+2$。

依题意，只要$x\neq1$就行，当$x=0$时，原式$x+2=2$或当$x=2$时，原式$x+2=4$。

练习：（2007年泸州市）先将式子$\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-1}{x^2}$化简，然后请你自选一个理想的x值求出原式的值。

提示：原式$=\frac{x}{x-1}$。只要$x\neq0$和$x\neq-1$的任意实数均可求得其值。

五、倒数法

倒数法是指将已知条件或待求的代数式作倒数变形，从而求出代数式的值的一种方法。

例5（2006年临沂市）若$\frac{2}{2y^2+3y+7}$的值为$\frac{1}{4}$，则$\frac{1}{4y^2+6y-1}$的值为

A. 1　　B. –1　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{5}$

解：由$\frac{2}{2y^2+3y+7}=\frac{1}{4}$，取倒数得，

$\frac{2y^2+3y+7}{2}=4$，即$2y^2+3y=1$。

所以$4y^2+6y-1=2(2y^2+3y)-1$

$=2\times1-1=1$，

则可得$\frac{1}{4y^2+6y-1}=1$，故选A。

练习：（2006年滕州市）已知$x-\frac{1}{x}=4$，则$\frac{x^2}{x^4-5x^2+1}$的值是________。

提示：$\frac{x^4-5x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-5=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3=13$，填$\frac{1}{13}$。

六、参数法

若已知条件以比值的形式出现，则可利用比例的性质设比值为一个参数，或利用一个字母来表示另一个字母。

例6（2007年芜湖市）如果$\frac{a}{b}=2$，则$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$的值是

A. $\frac{4}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{5}$　　D. 2

解：由$\frac{a}{b}=2$得，$a=2b$。

所以原式$=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{(2b)^2-(2b)b+b^2}{(2b)^2+b^2}$

$=\frac{3b^2}{5b^2}=\frac{3}{5}$。

故选C。

练习：（2007年云南省）若$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$，则$\frac{a-b}{b}$的值是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{4}{3}$

提示：设$a=4k$，$b=3k$，选A。

七、配方法

若已知条件含有完全平方式，则可通过配方，把条件转化成几个平方和的形式，再利用非负数的性质来确定字母的值，从而求得结果。

例7（2007年徐州市）已知$a^2+b^2+2a-4b+5=0$，求$2a^2+4b-3$的值。

解：由$a^2+b^2+2a-4b+5=0$，

得$\left(a^2+2a+1\right)+\left(b^2-4b+4\right)=0$，即$(a+1)^2+(b-2)^2=0$，由非负数的性质得$a+1=0$，$b-2=0$，解得$a=-1$，$b=2$。所以原式$=2a^2+4b-3=2\times(-1)^2+4\times2-3=7$。

练习：（2006年内江市）若$a+2b+3c=12$，且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，则$a+b^2+c^3=$_________。

提示：$a=b=c=2$，填14。

八、平方法

在直接求值比较困难时，有时也可先求出其平方值，再求平方值的平方根（即以退为进的策略），但要注意最后结果的符号。

例8（2007年天津市）已知$x+y=7$且$xy=12$，则当$x<y$时，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$的值等于______。

解：因为$x+y=7, xy=12$，

所以$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}$

$=\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2y^2}=\frac{7^2-4\times12}{12^2}=\frac{1}{144}$。

又因为$x<y$，所以$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$，

所以$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$，故填$\frac{1}{2}$。

练习：（2007年枣庄市五科联赛）已知$x+\frac{1}{x}=3$，则$x-\frac{1}{x}$的值是_______。

提示：$|x-\frac{1}{x}|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{5}$，

填$\pm\sqrt{5}$。

九、特殊值法

有些试题，用常规方法直接求解比较困难，若根据答案中所提供的信息，选择某些特殊情况进行分析，或选择某些特殊值进行计算，把一般形式

变为特殊形式进行判断，这时常常会使题目变得十分简单。

例 9 （ 2006 年 荆 门 市 ） 若 $(\sqrt{2}-x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ ， 则 $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为_______。

解 ： 由 $(\sqrt{2}-x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 知 ， 若 令 $x=1$ ， 则 $a_0+a_1+a_2+a_3=(\sqrt{2}-1)^3$；

若令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-a_3=(\sqrt{2}+1)^3$，

所以 $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2=(a_0+a_2+a_1+a_3)(a_0+a_2-a_1-a_3)=(\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}+1)^3$

$=\left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^3=1$。

故填1。

练习：（2006年龙岩市）已知实数a，b满足 $a\cdot b=1$，那么 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$ 的值为______。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

提示：可令 $a=1$，$b=1$（a、b、c的取值不惟一），选C。

十、利用根与系数的关系

如果代数式可以看作某两个“字母”的轮换对称式，而这两个“字母”又可能看作某个一元二次方程的根，可以先用根与系数的关系求得其和、积式，再整体代入求值。

例10（2007年德阳市）阅读材料：设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1，x_2，则两根与方程系数之间有如下关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$。根据该材料填空：已知 x_1，x_2 是方程 $x^2+6x+3=0$ 的两实数根，则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为______。

解：由根与系数的关系得，

$x_1+x_2=-6$，$x_1x_2=3$

所以 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(-6)^2-2\times 3}{3}=10$。故填10。

练习：（2007年云南省）已知 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-x-2=0$ 的两个根，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值是

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. $-\frac{1}{2}$

提示：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，选D。

事实上，以上这些方法并不是绝对孤立不变的，有时需要多种方法一起使用才能灵活解决问题，解题时，要仔细观测，深入分析，以便选择合理的解题方法，做到简洁、快速解题。