“代数式化简求值”例题解析

代数式化简求值是初中数学教学的一个重点和难点内容。学生在解题时如果找不准解决问题的切入点、方法选取不当，往往事倍功半。如何提高学习效率，顺利渡过难关，笔者就这一问题，进行了归类总结并探讨其解法，供同学们参考。

一. 已知条件不化简，所给代数式化简

例1.（2004年山西省）先化简，再求值：

$(\frac{a-2}{a^2+2a}-\frac{a-1}{a^2+4a+4})\div\frac{a-4}{a+2}$，其中a满足：$a^2+2a-1=0$

解：$(\frac{a-2}{a^2+2a}-\frac{a-1}{a^2+4a+4})\div\frac{a-4}{a+2}$

$=[\frac{a-2}{(a+2)a}-\frac{a-1}{(a+2)^2}]\div\frac{a-4}{a+2}$

$=[\frac{a^2-4}{(a+2)^2a}-\frac{a(a-1)}{(a+2)^2a}]\div\frac{a-4}{a+2}$

$=\frac{-4+a}{a(a+2)^2}\times\frac{a+2}{a-4}$

$=\frac{1}{a(a+2)}$

$=\frac{1}{a^2+2a}$

由已知$a^2+2a-1=0$

可得$a^2+2a=1$，把它代入原式：

所以原式$=\frac{1}{a^2+2a}=1$

评析：本题把所给代数式化成最简分式后，若利用$a^2+2a-1=0$，求出a的值，再代入化简后的分式中，运算过程相当繁琐，并且易错。

例2. 已知$x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$，求$(\frac{y}{\sqrt{xy}+y}+\frac{x}{\sqrt{xy}-x})\div\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$的值。

解：$(\frac{y}{\sqrt{xy}+y}+\frac{x}{\sqrt{xy}-x})\div\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}})\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\frac{y-\sqrt{xy}+x+\sqrt{xy}}{y-x}\cdot\frac{x-y}{xy}$

$=-\frac{y+x}{xy}$

当$x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$时

原式$=-\dfrac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=-2$

评注：本题属于二次根式混合运算中难度较大的题目。在把所给代数式化简时，首先要弄清运算顺序，其次要正确使用二次根式的性质。

二. 已知条件化简，所给代数式不化简

例3. 已知a、b、c为实数，且$\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{4},\dfrac{ac}{a+c}=\dfrac{1}{5}$，试求代数式$\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$的值。

解：由$\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3},\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{4},\dfrac{ac}{a+c}=\dfrac{1}{5}$，可得：

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3,\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4,\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=5$

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=6$

所以$\dfrac{ab+bc+ac}{abc}=6$

所以$\dfrac{abc}{ab+bc+ac}=\dfrac{1}{6}$

评注：本题是一道技巧性很强的题目，观察所给已知条件的特点，从已知条件入手，找准解决问题的突破口，化难为易，使解题过程简捷清晰。

三. 已知条件和所给代数式都要化简

例4. （2005年潍坊）若$x+\dfrac{1}{x}=3$，则$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值是（　）

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{10}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

解：因为$x+\dfrac{1}{x}=3$

所以$(x+\dfrac{1}{x})^2=9$

所以$x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=9$

所以$x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$

所以$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{8}$

评注：若有$x+\frac{1}{x}=3$，求出x再代入求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值将会非常麻烦，但本题运用整体代入的方法，就简单易行。

例5. 已知$a+b<0$，且满足$a^2+2ab+b^2-a-b=2$，求$\frac{a^3+b^3}{1-3ab}$的值。

解：因为$a^2+2ab+b^2-a-b=2$

所以$(a+b)^2-(a+b)-2=0$

所以$(a+b-2)(a+b+1)=0$

所以$a+b=2$或$a+b=-1$

由$a+b<0$

故有$a+b=-1$

所以$\frac{a^3+b^3}{1-3ab}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{1-3ab}$

$=\frac{-1\times(a^2-ab+b^2)}{1-3ab}$

$=\frac{a^2-ab+b^2}{3ab-1}$

$=\frac{(a+b)^2-3ab}{3ab-1}$

$=\frac{(-1)^2-3ab}{3ab-1}$

$=\frac{1-3ab}{3ab-1}$

$=-1$

评注：本题应先对已知条件$a^2+2ab+b^2-a-b=2$进行变换和因式分解，并由$a+b<0$确定出$a+b=-1$，然后对所给代数式利用立方和公式化简，从而问题迎刃而解。