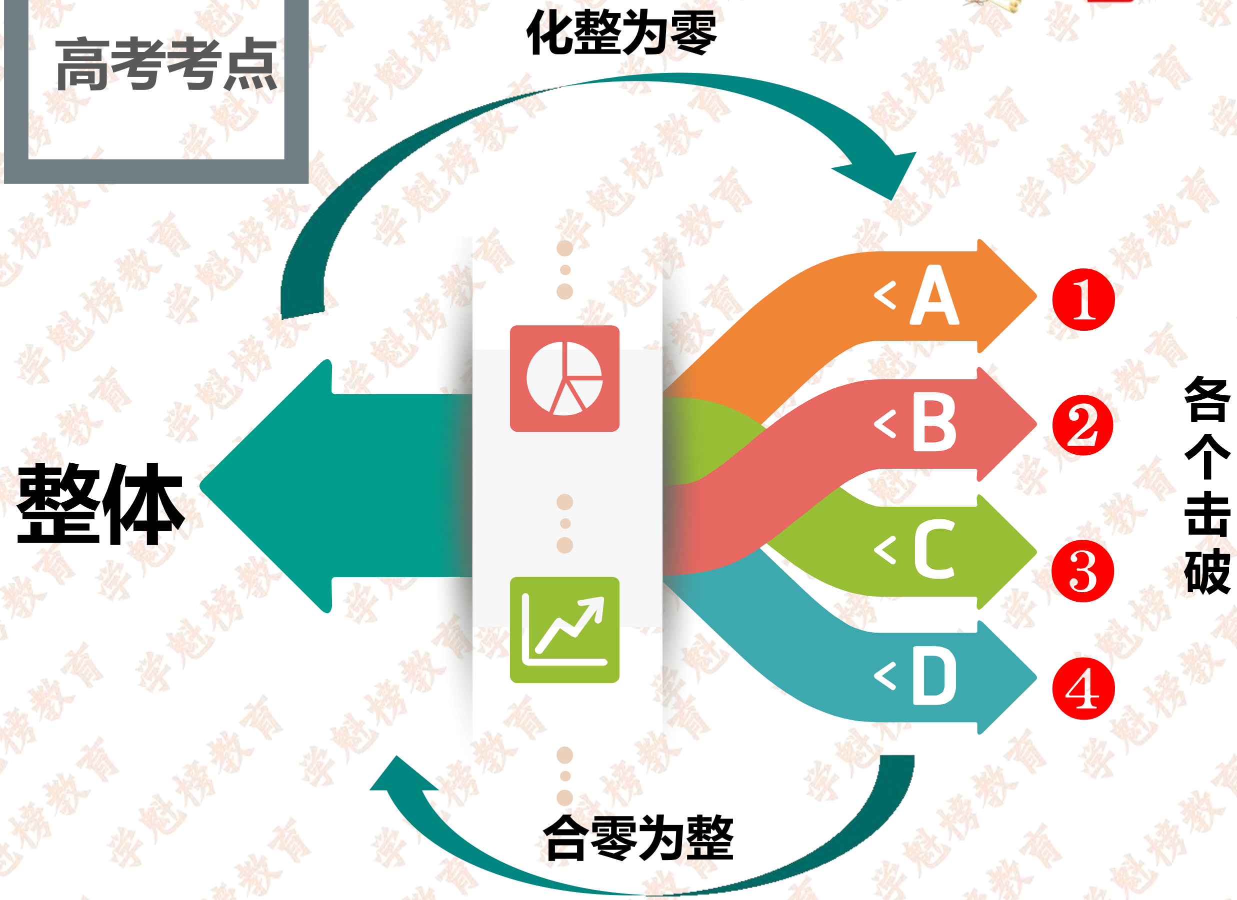
分类讨论

分享人：邱崇

高考考点



分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础性问题，通过对基础性问题的解答，解决原问题的思维策略，实质上，分类讨论是“化整为零，各个击破，再积零为整”的数学策略，分类讨论可以优化解题思路，降低问题难度

核心原则

这三个原则是核心，贯穿于各个类型的分类讨论中，务必记住

常见分类讨论知识点

- 绝对值概念的定义；
- 一元二次方程根的判别式与根的情况；
- 二次函数二次项系数
- 反比例函数$y=$ $(x\neq0)$的反比例系数k，正比例函数$y=kx$的比例系数k，一次函数$y=kx+b$的斜率k与图象位置及函数单调性的关系；
- 指数函数$y=a^x$及其反函数$y=\log_a x$中底数$a>1$及$a<1$对函数单调性的影响

常见分类讨论知识点

- 等比数列前n项和公式中$q=1$与$q\neq1$的区别
- 不等式性质中两边同乘(除)以正数或负数时对不等号方向的影响
- 直线与圆锥曲线位置关系的讨论
- 运用点斜式、斜截式直线方程时斜率k是否存在
- 排列组合时位置顺序的讨论

根据概念分类

example

若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________.

设函数$y=a^x(a>0$且$a\neq 1)$和函数$y=x+a$.则函数$f(x)=a^x-x-a(a>0$且$a\neq 1)$有两个零点，就是函数$y=a^x(a>0$且$a\neq 1)$的图象与函数$y=x+a$的图象有两个交点.

由图象可知，当$0<a<1$时，两函数只有一个交点，不符合；

当$a>1$时，因为函数$y=a^x(a>1)$的图象过点$(0,1)$，而直线$y=x+a$的图象与y轴的交点一定在点$(0,1)$的上方，所以一定有两个交点．所以实数a的取值范围是$a>1$.

有许多核心的数学概念是分类的，比如：直线斜率、指数函数、对数函数等，与这样的数学概念有关的问题往往需要根据数学概念进行分类，从而全面完整地解决问题

根据运算需要分类

example

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和 $S_n>0(n=1,2,3,\cdots)$．求 q 的取值范围；

$\because\{a_n\}$是等比数列，$S_n>0$，可得 $a_1=S_1>0$，$q\neq0$，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1>0$；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$，

即$\dfrac{1-q^n}{1-q}>0(n=1,2,3,\cdots)$，

上式等价于①$\begin{cases}1-q<0\\1-q^n<0\end{cases}$

分类讨论的许多问题是由运算的需要引发的，比如：除法运算中分母是否为0；解方程、不等式中的恒等变形；用导数求函数单调性时导数正负的讨论；对数运算中底数是否大于1；数列运算中对公差、公比限制条件的讨论等，如果运算需要对不同情况作出解释，就要进行分类讨论

根据运算需要分类

example

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和 $S_n>0$($n=1,2,3$，…)．求 q 的取值范围；

或②$\begin{cases}1-q>0\\1-q^n>0\end{cases}$ ($n=1,2,3$，…)

解①式得 $q>1$；

解②式，由于 n 可为奇数、可为偶数，故 $-1<q<1$.

综上，q 的取值范围是$(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

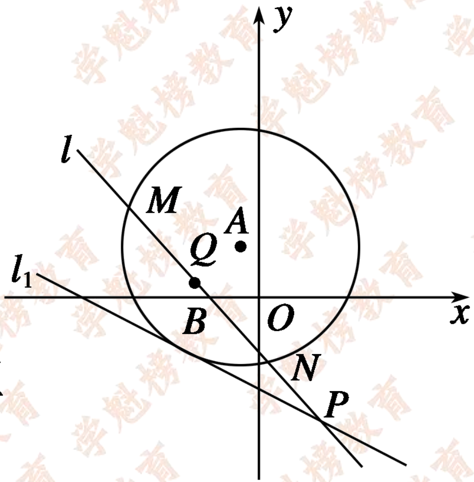
根据图形的位置或形状变动分类

example

如图所示，已知以点 $A(-1,2)$ 为圆心的圆与直线 l_1：$x+2y+7=0$ 相切，过点 $B(-2,0)$ 的动直线 l 与圆 A 相交于 M，N 两点，Q 是 MN 的中点，直线 l 与 l_1 相交于点 P.

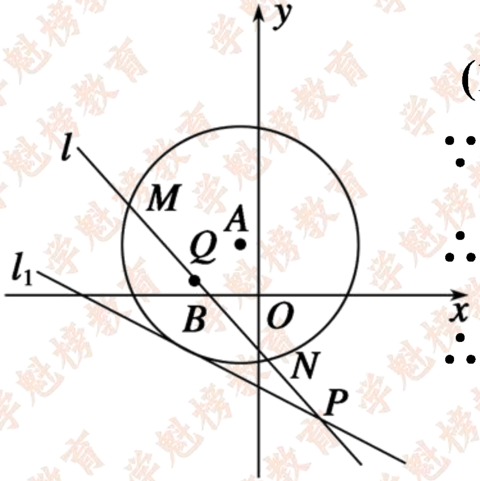
(1)求圆 A 的方程；

(2)当 $|MN|=2\sqrt{19}$ 时，求直线 l 的方程；



一般由图形的位置或形状变动引发的讨论包括：二次函数对称轴位置的变动；函数问题中区间的变动；函数图象形状的变动；直线由斜率引起的位置变动；圆锥曲线由焦点引起的位置变动或由离心率引起的形状变动；立体几何中点、线、面的位置变动等

根据图形的位置或形状变动分类



(1)设圆 A 的半径为 R.

$\because$圆 A 与直线 l_1：$x+2y+7=0$ 相切，

$\therefore R=\dfrac{|-1+4+7|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

$\therefore$圆 A 的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=20$.

根据图形的位置或形状变动分类

(2)当直线 l 与 x 轴垂直时，易知 $x=-2$ 符合题意；

当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，

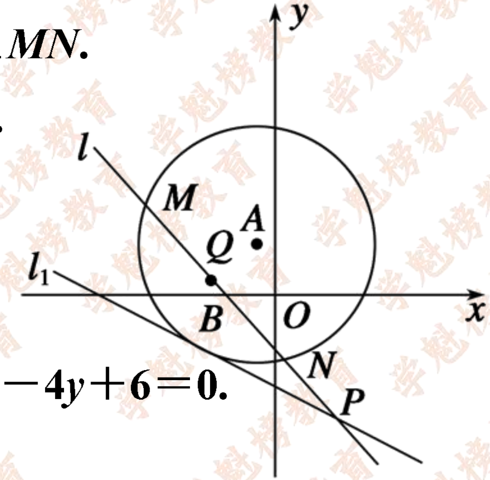
即 $kx-y+2k=0$.连结 AQ，则 $AQ\perp MN$.

$\because MN=2\sqrt{19}$，$\therefore AQ=\sqrt{20-19}=1$.

由 $AQ=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，得 $k=\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$直线 l 的方程为 $3x-4y+6=0$.

$\therefore$所求直线 l 的方程为 $x=-2$ 或 $3x-4y+6=0$.



总结