学魁榜
考取高分不用愁

# 《思想方法：转化与化归思想》

分享人：北京大学邱崇

# 本节要点

本节要点

01 转化与化归思想

02 题型分类

03 小结

分享人：北京大学邱崇

# 转化与化归思想

**转化与化归**：等价变换，化难为易。

复杂、
陌生、
未解决、
不统一


简单
熟悉
已解决
统一

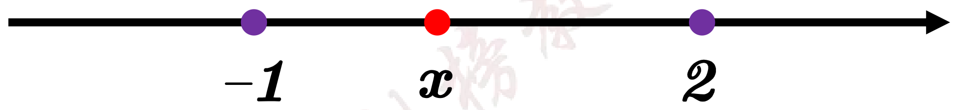
歪脖看世界：

横看是这道题，侧看原来是你

# 转化与化归思想

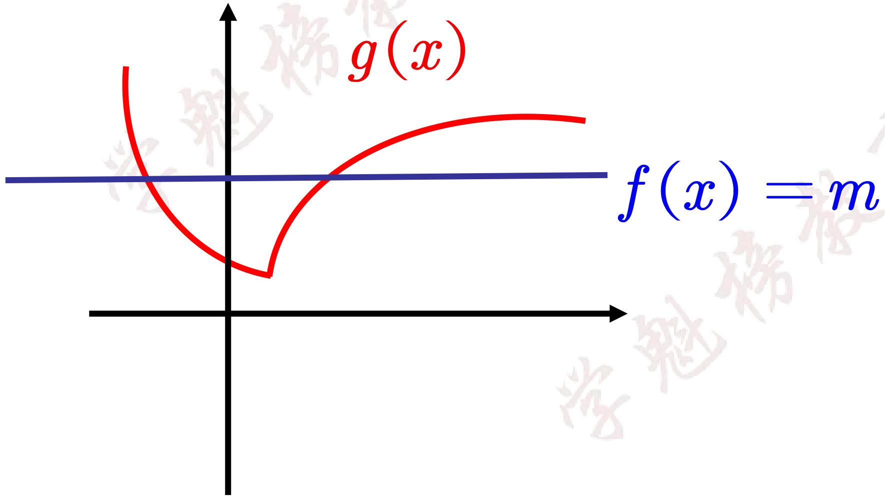
示例：**数和形的转化：**

$$|x+1|+|x-2|$$




数轴上$x$到$-1$的距离与$x$到$2$的距离之和

$g(x)=m$的解的个数



# 转化与化归思想


每一个原则就是转化问题的标准，不需要准确地记住每一个原则的名字，只需要在脑海中存有印象，知道遇到问题的时候有哪些思考的方向

# 1. 一般化原则

**一般化：如果遇到非统一格式，常常转化为统一格式或者常见形式**

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，解三角形中的边化角或角化边，换元法的使用等

**例1**：函数$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$的最小正周期为(　).

$\dfrac{\pi}{4}$　　$\dfrac{\pi}{2}$　　$\pi$　　$2\pi$

**解**：由题意得$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$

$$=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+(\frac{\sin x}{\cos x})^2}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\sin x\cdot\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

故本题正确答案为C。

分享人：北京大学邱崇

# 2. 熟悉已知化原则

**熟悉化：将陌生的问题转化为熟悉的问题，将未知的问题转化为已知问题，以便于运用熟知的知识、经验和问题来解决**

例2：设 $y=(\log_2 x)^2+(t-2)\log_2 x-t+1$，若 $t$ 在 $[-2,2]$ 上变化时，$y$ 恒取正值，则 $x$ 的取值范围是________________.

解：设 $y=f(t)=(\log_2 x-1)t+(\log_2 x)^2-2\log_2 x+1$，

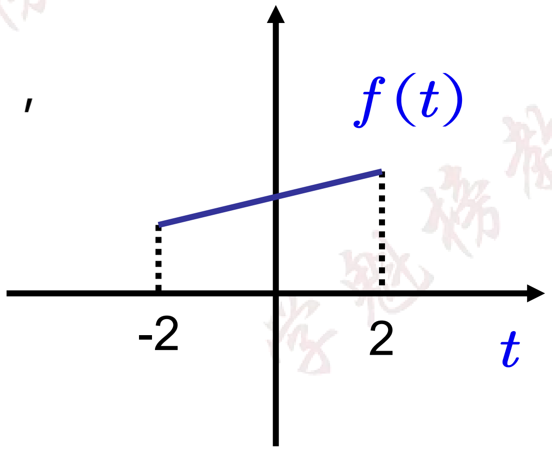
则 $f(t)$ 是一次函数，当 $t\in[-2,2]$ 时，$f(t)>0$ 恒成立．

则由 $\begin{cases} f(-2)>0 \\ f(2)>0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3>0 \\ (\log_2 x)^2-1>0 \end{cases}$，

解得 $\log_2 x<-1$ 或 $\log_2 x>3$．$\therefore 0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>8$，

$\therefore x$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(8,+\infty)$．

$t$ 才是真正的未知数，一般情况下，题干中给了谁的范围，谁就是未知数




分享人：北京大学邱崇

# 3. 具体原则

**具体化：将抽象的问题转化为具体的问题，方便计算，常假设特定形式，解决虚拟数列、函数等问题，特殊值法是最常见应用**

**例3：** 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq 0$，且 $a_1$、$a_3$、$a_9$ 成等比数列，则 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$的值是________.

**解：** 由题意知，只要满足$a_1$、$a_3$、$a_9$成等比数列的条件，$\{a_n\}$取何种等差数列与所求代数式的值是没有关系的．因此，可把抽象数列化归为具体数列

取$\{a_n\}$为公差$d=1$的等差数列，$a_1=1$，

则$a_3=3$，$a_9=9$，满足题设条件

此时，$a_n=n$，

所以$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\dfrac{1+3+9}{2+4+10}=\dfrac{13}{16}$

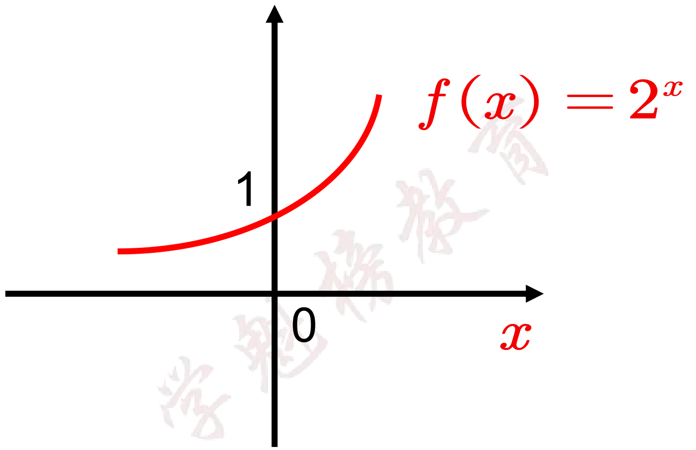
# 3. 具体原则

**具体化：将抽象的问题转化为具体的问题，方便计算，常假设特定形式，解决虚拟数列、函数等问题，特殊值法是最常见应用**

**例4：**已知定义在实数集 R 上的函数 $y=f(x)$恒不为零，同时满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，那么当 $x<0$ 时，一定有________(填序号).

①$f(x)<-1$；②$-1<f(x)<0$；③$0<f(x)<1$.

**解：**由题意知，只要满足题设条件，f(x)是何种函数与所选答案是没有关系的。因此，可把抽象函数化归为具体函数




取$f(x)=2^x$，满足题设条件

此时，$x<0$，$0<f(x)<1$

选③

# 4. 等价原则

**等价性：将把原问题转化为一个易于解决的等价命题，达到转化的目的，如解决恒成立问题或求参数取值范围等**

**例5：**若方程 $\sin^2x+\cos x+k=0$ 有解，则 $k$ 的取值范围为____________.

**解：**求 $k=-\sin^2x-\cos x$ 的值域．

$k=\cos^2x-\cos x-1$

$=(\cos x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}.$

当 $\cos x=\frac{1}{2}$时，$k_{\min}=-\frac{5}{4}$，

当 $\cos x=-1$ 时，$k_{\max}=1$，

$\therefore -\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant 1.$

分享人：北京大学邱崇

# 4. 等价原则

**等价性：将把原问题转化为一个易于解决的等价命题，达到转化的目的，如解决恒成立问题或求参数取值范围等**

**例6：**已知$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$, $x+y-k>0$恒成立，求k的取值范围

**解：**"$x+y-k>0$恒成立"等价于"$x+y>k$恒成立"

即$(x+y)_{\min}>k$恒成立，只需求$(x+y)_{\min}$即可

三角换元，$\begin{cases} x-1=3\cos\theta \\ y+1=4\sin\theta \end{cases}$，所以$\begin{cases} x=3\cos\theta+1 \\ y=4\sin\theta-1 \end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$

所以$x+y=3\cos\theta+4\sin\theta=5\sin(\theta+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\dfrac{3}{4}$

当$\theta+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$时，$\sin(\theta+\varphi)=-1$，$(x+y)_{\min}=-5$

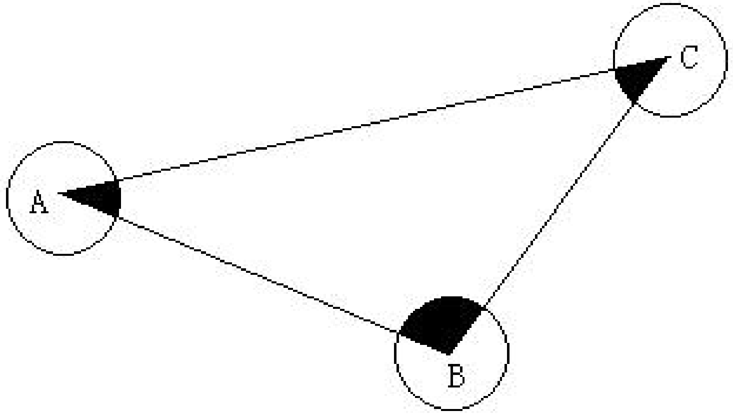
所以$k$的范围是$(-\infty, -5]$

分享人：北京大学邱崇

# 4. 等价原则

**等价性：** 将把原问题转化为一个易于解决的等价命题，达到转化的目的，如解决恒成立问题或求参数取值范围等

**例7：** 如图，⊙A，⊙B，⊙C两两不相交，且半径都是0.5cm，则图中的阴影面积为______。




**解：**

阴影区域为三个扇形，扇形的圆心角的内角和为180°

所以阴影区域可拼接成一个半径为0.5 $cm$的半圆，

所以$S_{阴影}=\frac{1}{2}\pi\times(0.5)^2\ cm^2=\frac{\pi}{8}\ cm^2$

分享人：北京大学邱崇

## 5. 正难则反原则

**取对立面**：**将问题的正面较复杂时，其反面一般是简单的；设法从问题的反面去探求，使问题获得解决。一般题干含有“至多”“至少”或绝对类等字样**

**例8**：已知三条抛物线：$y=x^2+4ax-4a+3$，$y=x^2+(a-1)x+a^2$，$y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 $x$ 轴相交，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：正面解决需要考虑情况太复杂，从对立面思考，即先考虑都不与 x 轴相交的情况。

令 $y=0$，由 $\begin{cases} \Delta_1=(4a)^2-4(3-4a)<0 \\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0 \\ \Delta_3=(2a)^2+8a<0 \end{cases}$，解得 $-\dfrac{3}{2}<a<-1$，

∴满足题意的 $a$ 的取值范围是 $a\leqslant-\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant-1$.

分享人：北京大学邱崇

# 5. 正难则反原则

**取对立面：将问题的正面较复杂时，其反面一般是简单的；设法从问题的反面去探求，使问题获得解决。一般题干含有“至多”“至少”或绝对类等字样**

**例9**：若椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=a^2$（$a>0$）与连接两点 $A(1,2)$ 和 $B(3,4)$ 的线段没有公共点，求实数 $a$ 的取值范围

**若从正面思考，需要讨论A、B在椭圆内或椭圆外多种情况。**

**解：** 设 $a$ 的允许值的集合为全集 $I=\{a\mid a\in\mathbf{R},a>0\}$，先求椭圆和线段 $AB$ 有公共点时 $a$ 的取值范围.

易得线段 $AB$ 的方程为 $y=x+1,x\in[1,3]$，

由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=a^2,\\ y=x+1\end{cases}$ 得 $a^2=\frac{3}{2}x^2+2x+1,x\in[1,3]$，计算可得 $\frac{9}{2}\leqslant a^2\leqslant\frac{41}{2}$，又因为 $a>0$，所以 $\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{82}}{2}$.

故当椭圆与线段 $AB$ 没有公共点时，实数 $a$ 的取值范围为 $(0,\frac{3\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{82}}{2},+\infty)$.

**分享人：北京大学邱崇**

# 小结

01 明白“转化与化归思想”的本质：

**“转换角度看世界”**

掌握常见题型及转化方式

02

原则 $\left\{\begin{array}{l}\text{一般化原则}\\ \text{熟悉已知化原则}\\ \text{具体原则}\\ \text{等价原则}\\ \text{正难则反原则}\end{array}\right.$

分享人：北京大学邱崇