

# LÖSUNG ZUR ÜBUNG 1.13 – ABELSON UND SUSSMAN, STRUKTUR UND INTERPRETATION VON COMPUTERPROGRAMMEN (SICP)

[HTTPS://GITHUB.COM/PZUEHLKE](https://github.com/pzuehlke)

*Lösung zur Übung 1.13.* Es sei  $x_n = \text{Fib}(n)$ . Man beachte zuerst, dass die folgende zwei Gleichungen für alle  $n \geq 1$  gelten:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \\ x_n &= x_n \end{cases}$$

Andererseits sind sie äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sei  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  die Matrix an der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung. Das charakteristische Polynom von  $A$  ist  $\lambda^2 - \lambda - 1$ , deren Wurzeln

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

sind, mit zugehörigen Eigenvektoren  $(\phi, 1)$ , bzw.  $(\psi, 1)$  (oder irgendwelche Vektoren, die damit kollinear sind).

Es seien also

$$P = \begin{bmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}.$$

Dann gilt  $A = PDP^{-1}$ , und deswegen auch  $A^n = PD^nP^{-1}$  für alle  $n \geq 0$ . Somit gilt

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man berechnet leicht aus dem letzten Ausdruck, dass

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \phi^n - \psi^n \end{bmatrix}.$$

Schließlich haben wir damit bewiesen, dass

$$\boxed{\text{Fib}(n) = x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)} \quad (n \geq 0).$$

Außerdem, weil  $\psi \approx -0,618$ , ist  $x_n = \text{Fib}(n)$  die nächste ganze Zahl zu  $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$  für alle  $n \geq 1$  (vgl. die Bemerkung an Seite 37).  $\square$