LÖSUNG ZUR ÜBUNG 1.13 – STRUKTUR UND INTERPRETATION VON COMPUTERPROGRAMMEN (SICP) VON H. ABELSON UND G. J. SUSSMAN

HTTPS://GITHUB.COM/PZUEHLKE

Lösung zur Übung 1.13. Es sei $x_n = \text{Fib}(n)$. Man beachte zuerst, dass die folgende zwei Gleichungen für alle $n \geqslant 1$ gelten:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \\ x_n &= x_n \end{cases}$$

Andererseits sind sie äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ die Matrix an der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung. Das charakteristiche Polynom von A ist $\lambda^2 - \lambda - 1$, deren Wurzeln

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sind, mit zugehörigen Eigenvektoren $(\phi, 1)$, bzw. $(\psi, 1)$ (oder irgendwelche Vektoren, die damit kollinear sind).

Es seien also

$$P = \begin{bmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $A = PDP^{-1}$, und deswegen auch $A^n = PD^nP^{-1}$ für alle $n \geqslant 0$. Somit gilt

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man berechnet leicht aus dem letzten Ausdruck, dass

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \phi^n - \psi^n \end{bmatrix}.$$

Schließlich haben wir damit bewiesen, dass

$$\boxed{\text{Fib}(n) = x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)} \qquad (n \geqslant 0).$$

Außerdem, weil $\psi \approx -0,618$, ist $x_n = \text{Fib}(n)$ die nächste ganze Zahl zu $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ für alle $n \geqslant 1$ (vgl. die Bemerkung an Seite 37). □