Wild Mathing

МАТЕМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Напутствие……………………………………………… 3

Задачи вступительных испытаний в МГУ им. М.В.Ломоносова……………………….. 4

Олимпиадные задачи……………………………………………… 8

Варианты ЕГЭ. Часть «С»……………………………………………… 9

№19. Теория чисел……………………………………………… 13

№18. Задачи с параметром……………………………………………… 15

№17. «Экономические» задачи……………………………………………… 19

№16. Планиметрия……………………………………………… 22

№14. Стереометрия……………………………………………… 23

№11. Текстовые задачи……………………………………………… 26

Варианты ЕГЭ. Часть «В»……………………………………………… 29

Другие задачи……………………………………………… 34

Полезные материалы и рекомендации……………………………………………… 35

Статья «Тригонометрические уравнения»……………………………………………… 36

Справочные материалы……………………………………………… 46

Список использованной литературы……………………………………………… 53

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

НАПУТСТВИЕ

Это 2-е издание интерактивного задачника по математике «Wild Mathing». В первую очередь он будет полезен абитуриентам при подготовке к экзаменам и олимпиадам, но хочется верить, что и любой интересующийся математикой откроет для себя нечто новое. Как работать с пособием? Выберите актуальные разделы, проработайте предложенные задачи, а затем обратитесь к видеоразборам, кликнув по соответствующим номерам. Все ролики динамичны, содержат полные решения и верные ответы. Любая активность на YouTube-канале приветствуется: если видеоряд оказался полезным — просто нажмите «Мне нравится», если по задаче возникли вопросы — смело задавайте их в комментариях, а если вам хочется получать уведомления о новых видео и трансляциях — подпишитесь на канал и включите оповещения. Мыслите критически, занимайтесь математикой, счастливо!

YouTube https://youtube.com/wildmathing

https://vk.com/wildmathing

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ В МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ДВИ-2017

#1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}$ или 3?

#2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

#3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

#4. Решите неравенство $x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le x\log_7 x\cdot\log_6 x^4$.

#5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD=\angle BCD$.

#6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

#7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC, \triangle HAC, \triangle HAB$ равны соответственно $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

#8. Решите данную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-y\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \\ \dfrac{y}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ДВИ-2016

#1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$ если $f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{3}{7}$.

#2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

#3. Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x$.

#4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}\left(1+\log_x^2 3\right)\leq 1$.

#5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB=BT=3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

#6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

#7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK:KC=3:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

#8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2 \cos ax+\log_a \cos^{10} ax}+\sqrt{58+\log_a^2 \sin ax-\log_a \sin^6 ax}+\sqrt{5+\log_a^2 \operatorname{tg} ax+\log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ДВИ-2015

#1. Найдите $f(2)$, если $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{3}{x}+\frac{1}{10}$.

#2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-7x+5=0$.

#3. Решите неравенство $\cos x+\sqrt{2}\cos 2x-\sin x\geq 0$.

#4. Решите уравнение $\log_x\left|2x^2-3\right|=4\log_{\left|2x^2-3\right|}x$.

#5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD:DE:EB=1:2:1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC=30°$.

#6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехали мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберется до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

#7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E:EB'=B'D:DC'=1:2$.

#8. Найдите все пары (α,β) при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos 2\alpha}+\frac{2+\cos 2\alpha}{\beta^2+\beta+1}+\frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

Задачи с параметром из вступительных испытаний в МГУ

#1. При каких значениях параметра a данная система имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

#2. Найти все a, при которых данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} \left|6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} - 5\right| + \left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} + 1\right| - \left|1 - 6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}}\right| = 5 - \left(\sin\dfrac{\pi(y-2x)}{12}\right)^2, \\ 10 - 9\left(x^2 + (y-a)^2\right) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \dfrac{8}{9}}. \end{cases}$$

#3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

#1. Найти наибольшее натуральное n, для которого число $6500!$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

#2. При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$ имеет ровно одно решение?

#3. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90°$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geq 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

#4. Из пункта А в пункт В в $8:00$ выехал велосипедист, а через некоторое время из В в А вышел пешеход. Велосипедист прибыл в В через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в А в $17:00$ того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из А в В проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

#5. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

#6. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1, BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

#7. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM:MB = 3:1$, $CN:NB = 1:7$. Какой процент от площади четырехугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN.

#8. В четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырехугольника.

#9. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\sqrt{3}/4$.

а) Найдите отношение BC к BD.

б) Найдите отношение радиуса окружности к BD.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «С»

Вариант I

#13. а) Решите уравнение $3^{3x}-4\cdot 3^{x+2}+3^{5-x}=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_7 4; \log_7 16]$.

#14. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его сечением плоскостью α, проходящей через диагональ BD_1 параллельно прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани BCC_1B_1, если $AB=12$, $AA_1=10$.

#15. Решите неравенство $\log_2^2\left(25-x^2\right)-7\log_2\left(25-x^2\right)+12\ge 0.$

#16. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC=60°$, $\angle BCA=45°$.

а) Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC=2\sqrt{3}$.

#17. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t=1;2;3;\ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

#18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;4]$.

$$\begin{cases} ax\ge 2, \\ \sqrt{x-1}>a, \\ 3x\le 2a+11. \end{cases}$$

#19. На доске написаны несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

Вариант II

#13. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

#14. Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

#15. Решите неравенство $\left(9^x - 2\cdot 3^x\right)^2 - 62\cdot\left(9^x - 2\cdot 3^x\right) - 63 \ge 0$.

#16. Точка M — середина гипотенузы AB треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N.

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM, если $\operatorname{tg}\angle BAC = 4/3$.

#17. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

#18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

$$\begin{cases} |x| + |a| \le 4, \\ x^2 + 8x < 16a + 48. \end{cases}$$

#19. На доске написаны несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

Вариант III

#13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{\sin x+0,5}\left(0,5\cdot\log_{\sqrt{7}}\sin x+3\cdot\log_{343}\cos x+\log_5 2/\log_5 7\right)}{\cos^2 6x-1}=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения из промежутка $\left(\lg(\cos 2\pi);\, e^{2\ln\sqrt{2\pi}}\right].$

#14. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6. Через середины ребер AC и BB_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость.

а) Докажите, что ребро BC делится секущей плоскостью в отношении $2:1$, считая от вершины C.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

#15. Решите неравенство $\left|\log_2 x-4\right|\geq 3+\dfrac{1}{5-\left|\log_2 x-4\right|}.$

#16. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL=2BL$.

б) Найдите площадь четырехугольника $BCKL$, если площадь трапеции равна 9.

#17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— с 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

#18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2+5|x-a|-7x\leq -4a$ имеет единственное решение.

#19. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое число может принимать процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

Вариант IV

#13. а) Решите уравнение $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$.

б) Укажите все корни этого уравнения из промежутка $\left[-\sqrt{3};\sqrt{30}\right]$.

#14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

#15. Решите неравенство $3^{x^2}\cdot 5^{x-1}\geq 3$.

#16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны длины сторон и диагональ: $AB=3$, $BC=CD=5, AD=8, AC=7$.

а) Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD.

#17. В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60000 рублей. В течение трех лет суммарный доход жителей региона B увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m.

#18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система уравнений имеет ровно два различных решения. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=a^2-3a. \end{cases}$

#19. а) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n, что $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{100}$?

б) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n, что $\left|\frac{m^2}{n^2}-2\right|\leq\frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n, при каждом из которых значение выражения $\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$ является наименьшим.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

#1. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?

#2. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

#3. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя). А также грузовики для перевозки этих глыб грузоподъемностью 5 тонн.

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках?

в) Какое наименьшее количество грузовиков потребуется для перевозки всех глыб?

#4. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

#5. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Приведите пример количества солдат в первом и втором взводах.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

#6. Каждое из чисел $5, 6, \ldots, 9$ умножают на каждое из чисел $12, 13, \ldots, 17$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают.

а) Какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

б) Можно ли получить в итоге ноль?

в) Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

#7. а) Существует ли четырехзначное число, произведение цифр которого в 15 раз больше суммы?

б) Существует ли четырехзначное число, произведение цифр которого в 200 раз больше суммы?

в) Найти все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 12,5 раз больше суммы.

#8. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему быть равно 2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему быть равно $4:3$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему, если известно, что среднее по величине число равно 20?

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Подготовительные задачи

#1. При всех значениях a решите уравнение $(a-1)x=a+3$.

#2. Для каждого значения a решите уравнение $\frac{x-a}{x-5}=0$.

#3. Для каждого значения a решите неравенство $x^2>a$.

#4. При всех значениях параметра a решите неравенство $|x-3|\geq a$.

#5. При всех a решите неравенство $\sqrt{x}>-a$.

#6. Решите неравенство $(0,5)^x\leq b+2$ для всех значений параметра b.

#7. Для каждого значения a решите уравнение $\log_a x=1$.

#8. Для каждого значения t решите уравнение $\sin x=t$.

#9. Решите уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ при всех a.

#10. При каких значениях a функция $y=\frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум в точке $x=6$?

#11. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2-ax+a+1=0$ больше 1?

#12. При каких a из неравенства $2x+a<2$ следует неравенство $x<-2$?

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

Графический метод

#1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|-(x-3)^2+4\right|=a$ имеет ровно два корня.

#2. При каких значениях x данное уравнение имеет ровно два решения относительно t?

$$\frac{|t+2|\left(t^2-3t+2\right)}{t-1}+x^2-1=0.$$

#3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ a=x+y. \end{cases}$$

#4. Найдите все значения a, при каждом из которых данное уравнение на промежутке имеет $(0;+\infty)$ хотя бы три корня.

$$\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-1.$$

#5. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых данная система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x-2)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

#6. Найдите все значения a, при каждом из которых данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1. \end{cases}$$

#7. При каких значениях m на плоскости найдется круг, содержащий все точки, удовлетворяющие данной системе неравенств?

$$\begin{cases} 2y-x\le 2, \\ y+2x\le 2, \\ y+mx\ge -1. \end{cases}$$

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

#8. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{4x-a}{x-2a}<0$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $2\le x\le 4$.

#9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система имеет ровно два решения.

$$\begin{cases}(y-2x)(2y-x)\le 0,\\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

#10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-1}\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\ln(5x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

#11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данная система уравнений имеет два различных решения.

$$\begin{cases}\left((x+5)^2+y^2-a^2\right)\ln\left(9-x^2-y^2\right)=0,\\ \left((x+5)^2+y^2-a^2\right)\left(x+y+5-a\right)=0.\end{cases}$$

Аналитический метод

#1. Найдите все значения a, при каждом из которых данное уравнение имеет хотя бы одно решение.

$$\frac{1-2a\sqrt{1+x^2}+a\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)-2\sqrt{1+x^2}}=3.$$

#2. Найдите все значения a, при каждом из которых данное неравенство выполнено при всех x.

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3.$$

#3. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2-a-x$ имеет ровно 3 корня?

#4. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f\left(x\right)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$ на множестве $|x|\geq 1$ не менее 6.

#5. При каких значениях параметра a область определения функции y содержит ровно 7 целых чисел, если $y=\sqrt{a^8x^{0,25}-x^{0,25+x\log_x a}-a^{8,25}+a^x\sqrt{a^{0,5}}}$.

#6. Найти все a, при которых данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases}\left|6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}-5\right|+\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}+1\right|-\left|1-6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}\right|=5-\left(\sin\frac{\pi\left(y-2x\right)}{12}\right)^2,\\ 10-9\left(x^2+\left(y-a\right)^2\right)=3\sqrt{x^2+\left(y-a\right)^2-\frac{8}{9}}.\end{cases}$$

#7. При каких a один корень уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ больше 1, а другой меньше 1?

#8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x+(a-2)^2\sin x+a(a-2)(a-3)=0$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно три различных корня.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

«ЭКОНОМИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ

#1. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка кредита 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

#2. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

#3. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

#4. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

#5. 30 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 30 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

#6. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

#7. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год, после начисления процентов, четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. Еще через год накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

#8. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.
— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

#9. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часто долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

#10. Мария Петровна положила в банк 1 500 000 рублей под 7% годовых. Схема начисления процентов следующая: каждый год банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 7%). По истечении двух лет банк повысил процент с 7% до 10%. Сколько лет должен пролежать вклад, чтобы он увеличился по сравнению с первоначальным на 577 993,5 рублей (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

#11. Цена производителя на товар A составляет 20 рублей. Прежде, чем попасть на прилавок магазина, товар проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает текущую цену в 2 или 3 раза и осуществляет услуги по транспортировке и хранению товара. Магазин делает наценку 20%, после чего покупатель приобрел товар за 576 рублей. Сколько посредников было между магазином и производителем?

#12. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

#13. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

#14. Для увеличения выпуска продукции решено расширить производство за счет использования имеющейся свободной площади в 70 м^2, на которой предполагается установить оборудование двух видов общей стоимостью не более 100 млн. руб. Каждый комплект оборудования вида A занимает 20 м^2, стоит 10 млн. руб. и позволяет получить за смену 40 ед. продукции, а каждый комплект оборудования вида B занимает 10 м^2, стоит 30 млн. руб. и позволяет получить за смену 80 ед. продукции. Определить значение максимально возможного прироста выпуска продукции за смену.

#15. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

#16. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как $2:3$, а объем составлял бы 576 м^3. Каковы должны быть размеры всех его сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

#17. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

#18. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие завода, расположенного в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

#19. В июле Виктор взял кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 28 млн рублей?

ПЛАНИМЕТРИЯ

#1. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

#2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

#3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Подготовительные задачи

#1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми B_1D_1 и DC_1.

#2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AA_1 и BD_1.

#3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AC и BD_1.

#4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BD_1 и DC_1.

#5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AA_1 и BB_1 соответственно. Найдите угол между прямыми BM и C_1N.

#6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки A_1, D_1 и B.

#7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E, F и D_1.

#8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра B_1C_1. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и M.

#9. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки N, E и M — середины ребер AA_1, AB и BC соответственно. Постройте сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки N, E и M.

#10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K делит ребро BB_1 на отрезки $BK = 3$ и $B_1K = 1$. Постройте сечение куба плоскостью α, проходящей через точки C_1, K параллельно к прямой BD_1. В каком отношении плоскость α делит отрезок B_1D_1?

#11. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α, проходящей через точки M, N перпендикулярно к плоскости ABC.

#12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через точки C_1, D_1 и F.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

Задачи ЕГЭ

#1. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

#2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Скрещивающиеся диагонали BA_1 и CB_1 боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB: AA_1 = \sqrt{2}: 1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.

#3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

#4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Точка M — середина ребра SE. Точка L делит ребро SC в отношение $2: 1$, считая от вершины S.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через ребро AB и точку M пересекает ребро SC в точке L.

б) $AB = 4\sqrt{3}$, $SA = 10$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC.

#5. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

#6. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом $120°$ при вершине D, а боковые грани призмы — квадраты.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

#7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 3$, $AA_1 = \sqrt{6}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены соответственно точки M, N и K так, что $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и K.

б) Найдите площадь полученного сечения.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

#8. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π.

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка H делит проходящей через нее диаметр больше окружности в отношении $1:7$.

б) Найдите площадь поверхности шара.

#9. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $4:1$, считая от вершины S.

б) Найдите объем большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.

#10. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точка E — середина ребра SC. Плоскость α проходит через точки A и E параллельно к BD.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α.

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SB?

#11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ точки M, N и L — середины ребер BC, DE и AA_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые MN и LC перпендикулярны.

б) Плоскость, проходящая через точки M, N и L пересекает ребро BB_1 в точке P. Найдите отношение $BP:PB_1$.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

#1. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

#2. Имеется два сплава. Первый содержит 31% меди, второй — 25% меди. Из этих двух сплавов получили третий. Сколько процентов составляет концентрация меди в нем, если массы первого и второго сплавов равны 120 кг и 80 кг соответственно?

#3. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов30-процентного раствора использовали для получения смеси?

#4. Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

#5. Винни-Пух съедает горшочек мёда за 3 минуты, Пяточок — за 8 минут, а ослик Иа — за 24 минуты. За сколько минут они съедят горшочек мёда втроем?

#6. Игорь и Паша красят забор за 12 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 20 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроем?

#7. Расстояние между городами A и B равно 440 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал второй автомобиль. Найдите скорость второго автомобиля, если автомобили встретились через 2 часа после его выезда из города B. Ответ дайте в км/ч.

#8. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

#9. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

#10. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

#11. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и товарный поезда, скорости которых равны 70 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 30 секундам. Ответ дайте в метрах.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

#12. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй длиной — 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго сухогруза составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

#13. Баржа прошла по течению 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 3 часа больше, чем на путь по течению. Найдите скорость баржи в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

#14. Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

#15. Войсковой обоз длиной 2 км движется со скоростью 3 км/ч. Вестовой пробегает из конца обоза до его начала и обратно за 30 минут. Найдите скорость вестового. Ответ дайте в км/ч.

#16. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

#17. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

#18. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

#19. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 25 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 475 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

#20. Треть времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, вторую треть времени — со скоростью 75 км/ч. а последнюю треть — со скоростью 85 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

#21. Из посёлка А в посёлок В, расстояние между которыми равно 20 км, выехал грузовик, а через 8 минут следом за ним выехал автобус, скорость которого на 5 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость автобуса, если в посёлок В он прибыл одновременно с грузовиком. Ответ дайте в км/ч.

#22. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

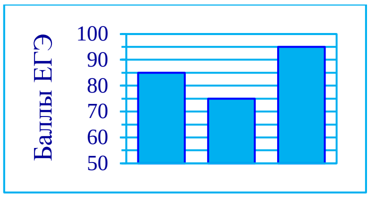
#23. Из пункта А в пункт В в $8:00$ выехал велосипедист, а через некоторое время из В в А вышел пешеход. Велосипедист прибыл в В через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в А в $17:00$ того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из А в В проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «B»

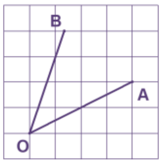
Вариант I

#1. На спидометре известного американского автомобиля «Chevrolet Impala» 1959 года максимальная отметка — 120 миль/ч. А сколько это в км/ч, если американская миля равна 1609 метрам? Ответ округлите до целого числа, пожалуйста.

#2. На диаграмме отражены данные по трем сданным ЕГЭ, справа из которых находится математика. Определите с ее помощью среднее арифметическое всех трех результатов.



#3. На клетчатой бумаге с единичным размером клеток изображен угол BOA. Найдите его тангенс.



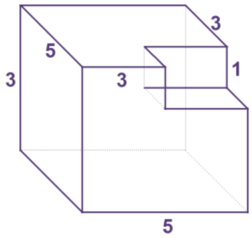
#4. Фабрика выпускает сумки. Увы, в среднем 3 сумки из 25 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов

#5. Решите безобидное уравнение $3^{\log_9(5x-5)}=5$.

#6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=4$, $\operatorname{tg} A=0{,}75$. Найдите AC.

#7. Прямая, заданная уравнением $y=-4x-11$, является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

#8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



#9. Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

#10. Деревенский трактор тащит сани с силой $F=80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S=50$ м вычисляется по формуле $A=FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

#11. У нас в распоряжении есть три насоса: первый и второй наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

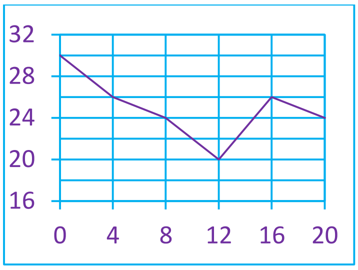
#12. Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

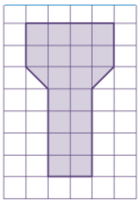
Вариант II

#1. В летнем лагере с порядками строго: на каждого ребенка полагается 15 г соли в день. В лагере 240 детей. Какое наименьшее число килограммовых пачек соли достаточно для всех детей на неделю?

#2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



#3. Найдите площадь водонапорной башни, изображенной (в меру моих способностей) справа на клетчатой решетке с единичным размером клеток.

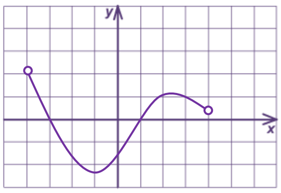


#4. В совершенно случайном эксперименте совершенно симметричную монету бросают трижды. Найти вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

#5. Решите безобидное уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)=2$.

#6. В треугольнике STK угол S равен $90°$, SH – перпендикуляр к TK, $\cos K=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, $SK=14$. Найти SH.

#7. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на промежутке $(-4;\ 4)$. Найдите точку минимума функции $y=f(x)$.



#8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 3. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды равна 2.

#9. Вычислите значение выражения $\dfrac{21}{3^{\log_3 7}}+\dfrac{6}{7^{\log_7 3}}$.

#10. Камень ради интереса брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t)=-t^2+14t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 48 метров.

#11. Пассажирский электропоезд «Ласточка» длиной 300 м движется со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 600 м со скоростью 80 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

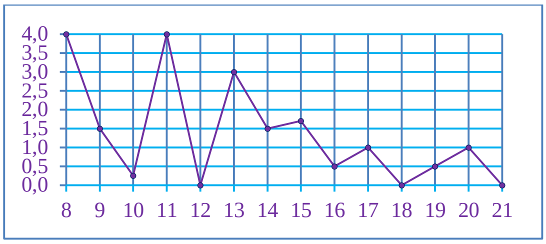
#12. Найдите наименьшее значение функции $y=x^3+3x^2+2$ на отрезке $[-4;\ 1]$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

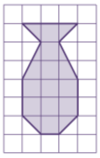
Вариант III

#1. Флакон шампуня «Русские традиции» стоит 75 рублей. Если понадобится мыть им голову ежечасно, то какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

#2. На графике по горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



#3. Найдите площадь вазы, изображенной (в меру моих способностей) справа на клетчатой решетке с единичным размером клеток.

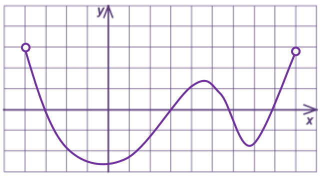


#4. Ваня любит математику. Изучая собственные результаты пробных экзаменов, он установил, что решит на очередном пробном ЕГЭ более 16 задач с вероятностью 0,76, а более 15 задач с вероятностью 0,88. Какова согласно этим данным вероятность того, что он решит ровно 16 задач?

#5. Решите безобидное уравнение $8^{9-x} = 64^{x}$.

#6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 3/5$, $AC = 4$. Какова длина AB?

#7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4;\ 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе напишите длину наибольшего из них.



#8. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности.

#9. Вычислите значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

#10. Катапульта метает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{110}\ м^{-1}, b = \dfrac{13}{11}$ — постоянные параметры, x(м) — смещение камня по горизонтали, y(м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах, пожалуйста) от крепостной стены высотой 19 метров нужно расположить катапульту, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

#11. Вновь задача про насосы. Первый наполняет бак за 19 минут, второй — за 57 минут, а третий — за 1 час и 16 минут. За сколько минут они наполнят бак, работая одновременно?

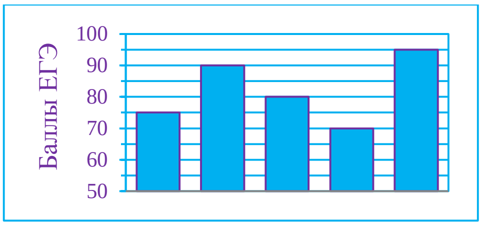
#12. Найдите точку максимума функции $y = (60 - x)e^{x+60}$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

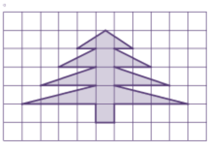
Вариант IV

#1. В «Перекрестке» с $9:00$ до $13:00$ по будням действует скидка 10% пенсионерам. Сколько рублей заплатит пенсионер Михаил Иваныч, если приобретет там в указанные часы молоко с ценником 50 рублей?

#2. На диаграмме отражены данные по пяти сданным ЕГЭ, справа из которых находится математика. Определите с ее помощью разницу между наибольшим и наименьшим результатами.



#3. Найдите площадь ели, изображенной (в меру моих способностей) справа на клетчатой решетке с единичным размером клеток.



#4. Вероятность того, что китайский чайник, заказанный с «AliExpress», прослужит хотя бы 3 года не так уж и велика: 0,47. Какова в таком случае вероятность того, что он прослужит меньше трех лет?

#5. Решите безобидное уравнение $\sqrt{2x-3}=13$.

#6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $AC=4$. Найдите $2\sqrt{5}AH$.

#7. Прямая $y=2x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2-2x-c$. Найдите значение с.

#8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB=5$, $AD=\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1.

#9. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+1$.

#10. Решим слегка идеализированную экономическую задачу. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q=100-10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ укажите, пожалуйста, в тыс. руб.

#11. Знакомый нам электропоезд «Ласточка» двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину поезда, ответ выразите метрах, пожалуйста.

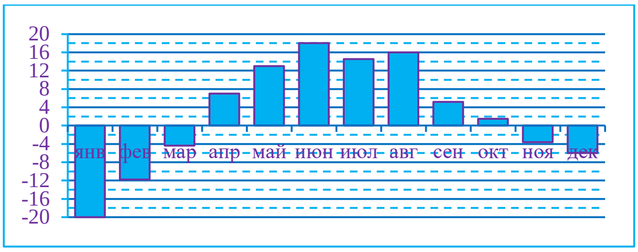
#12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+576}{x}$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

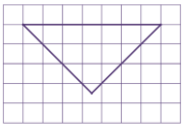
Вариант V

#1. Летом килограмм вкусной клубники стоит 90 рублей. Маша купила 1 кг 400 г такой клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей

#2. На диаграмме по вертикали указана среднемесячная температура в градусах Цельсия. Определите с ее помощью наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь включительно. Ответ дайте, пожалуйста, в градусах Цельсия.



#3. На клетчатой, как не трудно убедиться, бумаге с единичным размером клетки изображен равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведенной к гипотенузе.

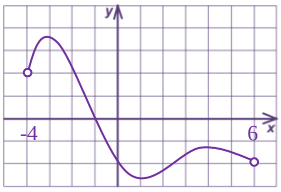


#4. Василий так часто играет в дороге в шахматы, что выигрывает у своего телефона на сложном уровне с вероятностью 0,65, если играет белыми фигурами, и 0,6 — черными. А какова вероятность того, что он выиграет две партии подряд, если после каждой партии цвет фигур меняется?

#5. Решите безобидное уравнение $0{,}5^{x-6}=8^x$.

#6. Периметр равнобедренной трапеции равен 40. А ее основания равны 12 и 18. Найдите площадь трапеции.

#7. На рисунке изображен график функции $f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельная оси абсцисс или совпадает с ней.



#8. В цилиндрический сосуд налили 3000 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 20 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему же равен объем детали? Ответ выразите, пожалуйста, в $см^3$.

#9. Вычислите значение $\dfrac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{16-\sqrt{60}}$.

#10. Мяч бросили (если не сказать пнули) под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется формулой $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах, пожалуйста) время полета составит 2,3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=23$ м/с? Примите $g=10\ м/с^2$.

#11. Из городов А и В навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

#12. Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+4)^9-9x$ на отрезке $[-3{,}5;\ 0]$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

#1. Что больше: e^{π} или π^{e}?

#2. Толщина кожуры апельсина равна 1 см, а его диаметр — 8 см. Чего в апельсине больше: кожуры или мякоти? *(Форму апельсина считать шарообразной.)*

#3. Представьте, что вы оказались в заснеженном поле, на расстоянии 30 метров к югу от дороги, идущей с запада на восток. В 40 метрах к западу от ближайшей на дороге к вам точки расположен снегокат. За какое наименьшее время вы сможете добраться до снегоката, если скорость передвижения по полю составляет 1 м/с, а скорость передвижения по дороге — 2 м/с? Ответ дайте в секундах.

#4. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

#5. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

#6. Решите уравнение $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x$.

#7. Докажите, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

#8. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Для перехода к видеоразбору задачи кликните по ее номеру

ПОЛЕЗНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

В этой главе воедино собраны ссылки на видеоролики, в которых обсуждаются общие вопросы подготовки к экзаменам: литература, организационные моменты, полезные ресурсы и приемы.

#1. *Материалы для подготовки к первой части ЕГЭ*

#2. *Материалы для подготовки ко второй части ЕГЭ*

#3. *Материалы для подготовки к теории чисел на ЕГЭ*

#4. *Материалы для подготовки к ДВИ в МГУ*

#5. *Как сберечь время на ЕГЭ?*

#6. *Как извлекать корни в столбик?*

#7. *Как не делать глупых ошибок?*

#8. *Материалы по высшей математике*

#9. *Опыт сдачи ЕГЭ*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В рамках этой главы мы разберем несколько ключевых методов решения тригонометрических уравнений. Вас ждут-дожидаются 22 экзаменационных задания: попытайтесь одолеть их самостоятельно, а затем осмыслите приведенные решения. По каждому номеру вы найдете лаконичные и строгие выкладки, а также словесные комментарии, в которых акцентирую внимание на важных деталях, объясняю, что привело к успеху и почему. Отбору корней в тригонометрических уравнениях посвящены последние две страницы этой статьи, а справочные материалы вы найдете в конце книги. Учтите, что для успеха на экзамене тригонометрические формулы не просто нужно держать в голове — их следует понимать и уметь применять, вас очень продвинет вперед умение выводить эти тождества. Итак, освежите в памяти, как решать простейшие тригонометрические уравнения, уделите должное внимание теории в целом, и приступим к разбору задач!

I. Сведение к квадратным уравнениям

Пример 1

$\sin^2 x+4\sin x+3=0.$

Пусть $\sin x=t$, *тогда*

$t^2+4t+3=0,$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1, \\ \sin x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Стоит лишь заметить, что слева квадратный трехчлен относительно синуса, сделать соответствующую замену, как решения легко находятся. Но помните, что $|\sin x|\le 1$, *а значит, некоторые корни могут оказаться посторонними. При желании можно не вводить новую переменную, а решать уравнение сразу относительно тригонометрической функции. Далее так и будем поступать.*

Пример 2

$5\sin 3x-2\cos^2 3x=-4.$

$5\sin 3x-2(1-\sin^2 3x)+4=0,$

$$2\sin^2 3x+5\sin 3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x=-2, \\ \sin 3x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ 3x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, -\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

Классика жанра! Используется основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$ *С его помощью удается все «причесать» к синусам. То, что аргумент у нас 3x, не помеха: соответствующие серии решений делятся на три, дабы получить «чистенький» икс. Обратите внимание: для двух различных серий решений используется всего лишь одна целочисленная переменная — это полностью корректно, но впереди будут и такие задачи, в которых различные переменные необходимы.*

Пример 3

$$\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-3=0.$$

$$\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{ctg}^2 x-3=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}^2 x=3,\\ \operatorname{ctg}^2 x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Несмотря на то, что по формулам приведения знак тангенса должен был смениться, у нас как был минус, так и остался. Его «съел» квадрат тангенса: минус на минус дает плюс — помните? Кстати, вы заметили, как здесь красиво устроены серии решений? Их удается записать всего лишь одной фразой. Уравнения, подобные тем, что во второй строке, называются биквадратными, и, уверен, вы знаете, что с ними делать.

Пример 4

$$\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1.$$

$$\sin x+2\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+1,$$

$$\sin x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+1,$$

$$\sin x+1-2\sin^2 x=1,$$

$$\sin x\left(1-2\sin x\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pi n,\ \left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\in\mathbb{Z}.$$

Не вздумайте использовать здесь формулы приведения! С таким аргументом не пройдет. Зато формулы суммы аргументов годятся как никогда лучше. Корни уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ *записаны одной цельной конструкцией, но это ради экономии места, не более: для простейших уравнений с синусом рекомендую писать серии решений развернуто. В нашем случае вот так:*

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Эта форма прозрачна и удобна для дальнейшей работы: пересечение найденных решений с ОДЗ, отбор корней на данном промежутке и т.д.

II. Группировка и разложение на множители

Пример 5

$$\operatorname{ctg}^2 x+\left(1+\sqrt{3}\right)\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0.$$

$$\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0,$$

$$\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+1\right)+\sqrt{3}\left(\operatorname{ctg} x+1\right)=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg} x+1\right)\left(\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x=-1,\\ \operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n\\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Не знаю, как вам, а мне эта задача нравится! Ее можно было бы отнести к предыдущей главе, ведь уравнение является квадратным изначально, и можно управиться с помощью дискриминанта или теоремы Виета — пробовали? Но с помощью группировки множителей удается решить задачу быстрей. Впрочем, оставлю это здесь:

$$1)\ D=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}=1-2\sqrt{3}+3=\left(1-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$2)\ \begin{cases}t_1\cdot t_2=\sqrt{3},\\ t_1+t_2=-1-\sqrt{3}.\end{cases}$$

Пример 6

$$2\operatorname{tg} x\cdot\sin x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+8\sin x-4\sqrt{2}=0.$$
$$\operatorname{tg} x(2\sin x-\sqrt{2})+4(2\sin x-\sqrt{2})=0,$$
$$(\operatorname{tg} x+4)(2\sin x-\sqrt{2})=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-4,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\operatorname{arctg}4+\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right., \; n\in\mathbb{Z}.$$

$Ответ:\ -\operatorname{arctg}4+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Группируем слагаемые так, чтобы получить в левой части произведение, а справа ноль — это существенно упростило бы задачу. К успеху здесь приводят различные варианты группировки, главное — пробовать. В этот раз простора хватило на две серии решений для уравнения с синусом. Кстати, подумайте, нет ли в этом примере ограничений на нашу переменную: вы ведь не забываете про ОДЗ?

Пример 7

$$2\cos x+\sin^2 x=2\cos^3 x.$$
$$2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+\sin^2 x=0,$$
$$2\cos x\sin^2 x+\sin^2 x=0,$$
$$\sin^2 x\left(2\cos x+1\right)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x=0,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}.$$

$Ответ:\ \pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Надеюсь, вы справились с этой задачкой! Вновь разложение на множители можно провернуть по-разному, было бы желание. Еще больше надежд возлагаю на то, что, решая частные случаи простейших тригонометрических уравнений, вы обращаетесь не к памяти, а представляете или рисуете тригонометр. Например, для $\sin x=0$ *достаточно отметить две точки числовой окружности, у которых ординаты равны нулю, а далее записать соответствующие серии решений. Одной фразой, как вы уже поняли, это можно сделать, используя «πn» (n ∈ ℤ): такая периодичность возникает благодаря тому, что точки на окружности — диаметрально противоположные.*

Пример 8

$$\cos 2x-2\cos x+2\sin x=0.$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos x+2\sin x=0,$$
$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)-2\left(\cos x-\sin x\right)=0,$$
$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x-2\right)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x,\\ \cos x+\sin x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$Ответ:\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Симпатичное уравнение! Вы поняли, почему сумма $\sin x+\cos x$ *не может равняться двум? Поскольку* $|\sin x|\le 1$ *и* $|\cos x|\le 1$, *то двоечку можно получить только в случае* $\sin x=\cos x=1$. *Но это противоречит чуть ли не всему на свете! Например, тому, что* $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. *В этой задаче нам попалось уравнение вида* $\sin x=\cos x$ *— предлагаю для начала просто нарисовать тригонометр и спросить себя, в каких точках окружности косинус равен синусу. Иными словами, у каких точек единичной окружности абсцисса равна ординате? Ну а о другом подходе мы поговорим в следующей главе!*

III. Сведение к однородным уравнениям

Пример 9

$$2\sin x-3\cos x=0,\ \big|\div\cos x\neq 0$$
$$2\,\mathrm{tg}\,x-3=0,$$
$$\mathrm{tg}\,x=\frac{3}{2},$$
$$x=\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Если a или b равно нулю, то конструкция совсем тривиальная, а если эти коэффициенты отличны от нуля, то выручает деление обеих частей уравнения на* $\cos x\neq 0$. *Как результат — простейшее уравнение на тангенс. Подумайте, что было бы в случае деления на* $\sin x\neq 0$? *То, что наш делитель отличен от нуля в первом шаге алгоритма, доказывается от противного — рассмотрим это ниже. Вы также можете освежить в памяти метод вспомогательного аргумента, который здесь служит достойной альтернативой.*

Пример 10

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0,\ \big|\div\cos^2 x\neq 0$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{3\sin\cos x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$
$$\mathrm{tg}^2 x-3\,\mathrm{tg}\,x+2=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=1,\\ \mathrm{tg}\,x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\\ x=\mathrm{arctg}\,2+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \mathrm{arctg}\,2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ *— так выглядит однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Алгоритм решения снова весьма прост: если* $a\neq 0$, *делим все на* $\cos^2 x\neq 0$. *Кстати, а что делать, если* $a=0$? *Вы это, уверен, знаете. Лучше поговорим про доказательство того, почему же все-таки этот косинус не ноль: если бы вдруг он был нулем, то уравнение приняло бы вид* $\sin^2 x=0$. *Но синус и косинус одного аргумента не могут одновременно равняться нулю* $(\sin^2 x+\cos^2 x=1)$, *значит, мы пришли к противоречию. Косинус, равный нулю, не является решением исходного уравнения, на него смело можно делить.*

Пример 11

$$3\sin^2 x-0{,}5\sin 2x=2.$$
$$3\sin^2 x-0{,}5\cdot 2\sin x\cos x=2\cdot 1,$$
$$3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x),$$
$$3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\sin^2 x+2\cos^2 x,$$
$$2\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin^2 x,\ \big|\div\sin^2 x\neq 0$$
$$2\,\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}\,x-1=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{ctg}\,x=\dfrac{1}{2},\\ \mathrm{ctg}\,x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{2}+\pi n\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \mathrm{arcctg}\frac{1}{2}+\pi n,-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Используя известные тождества, «причесываем» уравнения до стандартной формы, с которой работали в прошлом номере. Обратите внимание на то, что любое число можно представить с помощью суммы квадратов синуса и косинуса — основное тригонометрическое тождество на то и называется основным. Разнообразия ради в этот раз поделили на квадрат синуса: как видите, ничего криминального в этом нет. На всякий случай оставлю это здесь:

$$1)\ \mathrm{tg}\,x=2\ \Leftrightarrow\ \mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{2},$$
$$2)\ \mathrm{arctg}\,2=\mathrm{arcctg}\frac{1}{2}.$$

IV. Работа с тригонометрическими неравенствами и ОДЗ

Пример 12

$\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{\pi n}{2} \end{array}\right. \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует. Не забудьте про «существует» и про то, что тангенс и котангенс существуют не всегда. Рекомендую писать ОДЗ сразу отдельно и полностью, но здесь и далее все подобные ограничения мы будем учитывать в рамках равносильного перехода. Ради экономии места, как вы поняли.

Пример 13

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$$

$$\begin{cases} \sin x(2\sin x - 1) = 0, \\ 2\cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi n, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Обязательно находите, в каких точках обнуляется знаменатель и учитывайте это при записи итогового ответа. В нынешнем номере легко заметить, что ОДЗ «выбивает» серию $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 14

$$\frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x(\cos x + 2\sin x) = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Совет будет простой: иллюстрируйте свое решение с помощью тригонометра, чтобы не ошибиться — отмечаем закрашенными точками корни уравнения из числителя, а затем выбираем те из них, что располагаются в первой или второй четвертях и, стало быть, удовлетворяют условию $\sin x > 0.$

V. Решаем, тренируемся, получаем хороший балл

Пример 15

$15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}.$

$5^{\cos x}\cdot 3^{\cos x}-3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}=0,$

$3^{\cos x}\cdot (5^{\cos x}-5^{\sin x})=0,$

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\cos x}=0, \\ 5^{\cos x}=5^{\sin x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$

Самое ценное знание для этой задачи состоит в том, что трижды пять — пятнадцать. Ну а с однородными уравнениями первой степени мы уже в хороших отношениях. В ходе решения использовано то, что показательная функция принимает только положительные значения. То есть при желании еще на первых шагах можно было делить обе части уравнения на $3^{\cos x}$*. Поскольку осталось еще несколько пустых строк для комментариев, оставлю это здесь:*

$$\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pi n,\, n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Пример 16

$\log_2(\cos x+\sin 2x+8)=3.$

$\cos x+\sin 2x+8=2^3,$

$\cos x+2\sin x\cos x+8=8,$

$\cos x(1+2\sin x)=0,$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. ,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\, -\frac{\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$

Логарифм в этой задаче никакой серьезной нагрузки не несет, расслабьтесь! Достаточно знать соответствующее определение. Конечно, не стоит забывать и про ограничения, связанные с логарифмами: основание — больше нуля и не равно единице, аргумент — больше нуля. Но, заметьте, в нашем случае эти условия выполняются «автоматически» по ходу решения: основание логарифма равно двум, и с ним все хорошо, а аргумент положителен, поскольку третьей строкой мы написали, что он должен равняться восьми. То есть те значения икс, что мы указали в ответе, заведомо дадут положительный аргумент исходного логарифма — такие вот дела!

Пример 17

$7\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{\cos x}+1=0.$

$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$

$\frac{7(1-\cos^2 x)-\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$

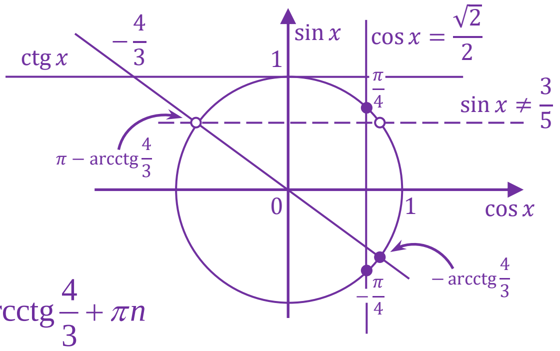
$$\begin{cases} -6\cos^2 x-\cos x+7=0, \\ \cos^2 x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1, \\ \cos x=-\frac{7}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=2\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$

Нередко с тангенсом становится приятней работать, если записать его в виде отношения синуса к косинусу. Для сложения дробей необходим общий знаменатель — это, хочется верить, все помнят. И, наконец, не забудем правило из 13-го номера: дробь равна нулю $\Leftrightarrow$ *числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

Пример 18

$$\frac{\left(\operatorname{ctg} x+\frac{4}{3}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sin x-\frac{3}{5}}=0.$$



$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x=-\frac{4}{3},\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.\\ \sin x\neq\frac{3}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\neq\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k\\ x\neq\pi-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k\end{array}\right.\end{array}\right.,\ n,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

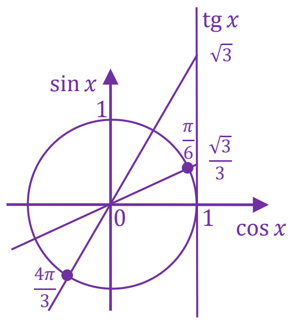
Ответ: $-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Интересная ситуация с «отсевом» корней! Совет будет таков: изобразите решения соответствующих уравнений и неравенств на тригонометре, тогда легче будет видеть, кто лишний, а кто нет. В этом примере может возникнуть сомнение, совпадают ли $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$ *и* $\pi-\arcsin\frac{3}{5}$, *но вспомните египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Он прямоугольный. Попробуйте выразить синус и котангенс острого угла при катете длины 4 по определению, и вы поймете, что исследуемые обратные тригонометрические выражения совпадают.*

Пример 19

$$|\cos x|=2\cos x-\sqrt{3}\sin x.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos x\geq 0,\\ \cos x=2\cos x-\sqrt{3}\sin x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos x<0,\\ -\cos x=2\cos x-\sqrt{3}\sin x\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos x\geq 0,\\ \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos x<0,\\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$



Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Хорошая задача! Здесь не просто два случая — один с плюсом, другой с минусом — мы должны учесть, для каких значений $\cos x$ *как мы будем раскрывать модуль. Для положительных или нуля — так, для отрицательных — этак. В общем, речь идет о совокупности двух систем. Тригонометрические неравенства можно и нужно решать с помощью тригонометра: косинус положителен в первой и четвертой четвертях, а во второй и третьей — отрицателен. Напомню для интересующихся, что аналитический ответ, например, к неравенству* $\cos x>0$ *выглядит так:* $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$

Пример 20

$$\log_9\left(3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2\right)=x.$$

$$3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\left(1-\sin^2 x\right)-2=9^x,$$

$$6\sin^2 x+5\sqrt{2}\sin x-8=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Похожая конструкция у нас уже была в 16-ом примере, не так ли? Надеюсь в связи с этим, что с нынешней задачкой вы справились: главное — не побояться «страшненького» дискриминанта и по-честному найти корни квадратного уравнения, далее — дело техники. Заметьте, что в этот раз формальное нахождение ОДЗ было бы несколько громоздким: $3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2>0$. *Но, как и раньше, это условие выполнено в ходе решения: второй строкой мы приравниваем аргумент к положительному выражению* 9^x.

Пример 21

$$\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}=4\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$\begin{cases}\sin x-4\cos^2\dfrac{x}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}=0,\\ \sin^2\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x-2\sin^2 x=0,\\ \dfrac{x}{2}\neq \pi n, n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\left(1-2\sin x\right)=0,\\ x\neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi m\\ x=\left(-1\right)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m\end{array}\right., m\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pi+2\pi m, x=\left(-1\right)^m\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in\mathbb{Z}.$$

В этом нетрудном номере есть одна важная деталь: работая со знаменателем дроби, важно найти ограничения на «чистую» переменную x, а не останавливаться на полпути. Таким образом удается учесть ОДЗ без каких-либо проблем. Особенно, если все закрашенные и выколотые точки вы будете отмечать на одном и том же тригонометре.

Пример 22

$$\begin{cases}2\sin x-5\cos y=7,\\ 5\sin x+\cos y=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos y=4-5\sin x,\\ 2\sin x-5\cdot(4-5\sin x)=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=4-5\sin x,\\ 27\sin x=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos y=4-5\cdot 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ y=\pi+2\pi k\end{cases}, n, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi k\right), n,k\in\mathbb{Z}.$$

Напоследок, порядка ради, рассмотрим систему тригонометрических уравнений. Вспомните два школьных аналитических метода: метод подстановки и метод сложения. В этой задаче легко выразить из второго уравнения косинус, после чего сделать подстановку в первое уравнение и получить часть ответа. Кстати, ответ принято давать в скобках, как и координаты точек, либо системой. В этой задаче особенно важно показать независимость x и y, используя разные целочисленные переменные — в нашем случае n *и* k.

VI. Отбор корней из данного промежутка

В каждом примере ниже будет общее условие: для указанной серии решений отобрать все корни, принадлежащие данному промежутку. Сделать это нетрудно, но ваша главная цель в другом — освойте, как можно больше подходов к решению подобного рода задач.

Пример 1

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[-\pi;\pi\right].}$$

$$-\pi\le\frac{\pi}{6}+\pi n\le\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$-1\le\frac{1}{6}+n\le 1,$$

$$-1-\frac{1}{6}\le n\le 1-\frac{1}{6},$$

$$-\frac{7}{6}\le n\le\frac{5}{6},$$

$T.к.$ $еще$ $n\in\mathbb{Z},$ $то$ $n=-1;\,0.$

$Значит,$ $искомые$ $корни:$ $-\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}.$

Итак, у нас есть серия решений и промежуток $\left[-\pi;\pi\right]$, *из которого и предстоит отобрать корни. Запишем то условие, что корни принадлежат указанному отрезку, с помощью двойного неравенства, а затем решим его. Работаем одновременно с каждой частью этого двойного неравенства: смело можно делить на положительное число π, также можно переносить слагаемые из одной части в другую, меняя знак на противоположный. Наша цель — ограничить переменную «эн» двумя числами и, вспомнив о целочисленности, найти все ее возможные значения. Получив «эн», делаем подстановку в исходную серию решений, дабы найти икс, и именно этот результат мы указываем в ответе. Высший пилотаж — записать корни в порядке возрастания, но это необязательно. Обязательно — попытаться решить следующий пример разобранным способом.*

Пример 2

$$\boxed{x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[0;2\pi\right].}$$

$$0\le-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$0\le-\frac{1}{2}+2n\le 2,$$

$$\frac{1}{2}\le 2n\le\frac{5}{2},\ \left|\div 2\right.$$

$$\frac{1}{4}\le n\le\frac{5}{4},$$

$С$ $учетом$ $целочисленности:$ $n=1.$

$Значит,$ $x=\frac{3\pi}{2}.$

$$0\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$0\le\frac{1}{2}+2n\le 2,$$

$$-\frac{1}{2}\le 2n\le\frac{3}{2},\left|\div 2\right.$$

$$-\frac{1}{4}\le n\le\frac{3}{4},$$

$T.к.$ $вдобавок$ $n\in\mathbb{Z},$ $то$ $n=0.$

$Стало$ $быть,$ $x=\frac{\pi}{2}.$

$Ответ:$ $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}.$

Такие серии корней могли получиться, например, при решении уравнения $\cos x=0$. *И, отбирая корни с помощью двойных неравенств, вам предстоит работать с каждой серией в отдельности. Как обычно, не забудьте, найдя подходящие значения целочисленной переменной, определить требуемые корни: в ответе пишем именно их.*

Пример 3

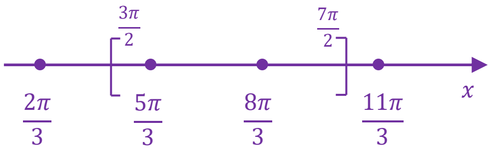
$$\boxed{x=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right].}$$

при $n=0:\quad x=\frac{2\pi}{3}$,

при $n=1:\quad x=\frac{5\pi}{3}$,

при $n=2:\quad x=\frac{8\pi}{3}$,

при $n=3:\quad x=\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: $\frac{5\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$.

Вот еще один метод отбора корней: более простой и не менее строгий. Последовательно подставляем целые значения вместо «эн» в нашу серию решений, чтобы получить конкретные икс. Чем больше «эн», тем больше корень. Иными словами, функция $x(n)=\frac{2\pi}{3}+\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$ *является монотонно возрастающей. Значение аргумента* $n=0$ *дало корень меньший левой границы отрезка, а значит, нет смысла брать еще меньшие «эн» — будем двигаться вправо: возьмем* $n=1$, $n=2$ *и найдем корни. Как видим, они удовлетворяют указанному отрезку. Но взяв* $n=3$, *мы получаем слишком большой икс, из этого следует, что нет смысла разыскивать подходящие корни, подставляя все бóльшие и бóльшие «эн». Вот и все, задача решена!*

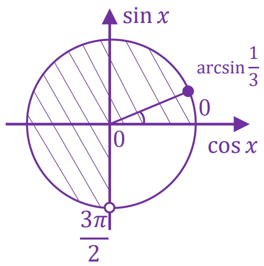
Пример 4

$$\boxed{x=\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[0;\frac{3\pi}{2}\right).}$$

$$\arcsin\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \arcsin\frac{1}{3}\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right).$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.



Иногда корнями служат нетабличные «арк-числа». Как производить отбор в этом случае? Нужно твердо помнить определения обратных тригонометрических функций и уметь находить ключевые числа на тригонометре. В нашем номере хватает понимания того, в какой четверти находится $\arcsin\frac{1}{3}$ *(в первой, ясное дело). Единственный корень на указанном полуинтервале получаем при* $n=0$.

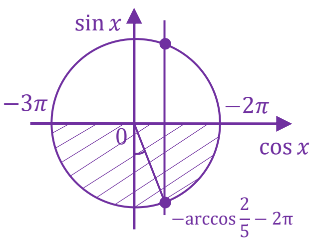
Пример 5

$$\boxed{x=\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n\in Z;[-3\pi;-2\pi].}$$

$$-\arccos\frac{2}{5}\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\arccos\frac{2}{5}-2\pi\in[-3\pi;-2\pi].$$

Ответ: $-\arccos\frac{2}{5}-2\pi$.



Не у всех получается безошибочно отбирать корни на тригонометре. Но в качестве «фильтра» он легок в применении. В заключительном примере нетрудно заметить, что одна из серий решений заведомо не даст подходящих корней. Кстати, не забудьте в своих решениях отмечать на числовой окружности данный промежуток и подходящте корни!

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

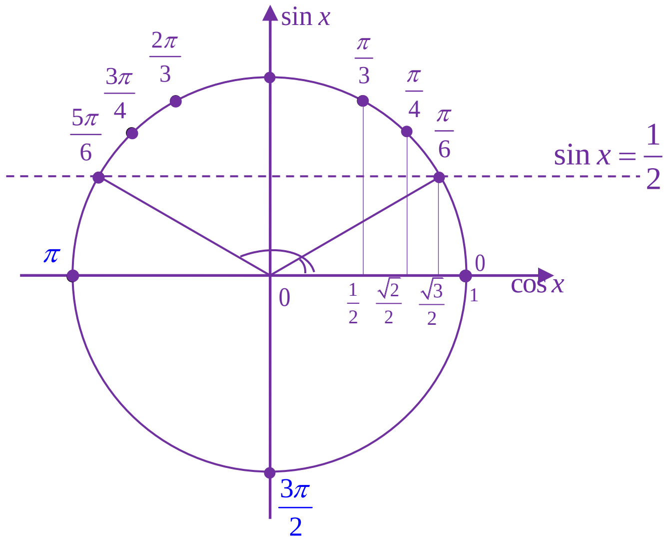
Тригонометрия

Таблица значений тригонометрических функций

Функция	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Основные тригонометрические тождества и тригонометр

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
5. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
6. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$



Формулы суммы и разности аргументов

7. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
8. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
9. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
10. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
11. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
12. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Формулы двойных аргументов

13. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
14. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
15. $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$

Определения обратных тригонометрических функций

16. Если $|a| \le 1$, то $\arcsin a = t \iff \begin{cases} \sin t = a, \\ -\pi/2 \le t \le \pi/2 \end{cases}$

17. Если $|a| \le 1$, то $\arccos a = t \iff \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

18. $\mathrm{arctg}\, a = t \iff \begin{cases} \mathrm{tg}\, t = a, \\ -\pi/2 < t < \pi/2 \end{cases}$

19. $\mathrm{arcctg}\, a = t \iff \begin{cases} \mathrm{ctg}\, t = a, \\ 0 < t < \pi \end{cases}$

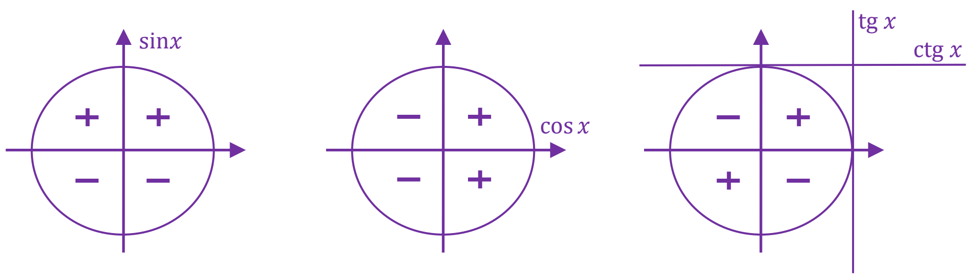
Формулы преобразования отрицательных аргументов

20. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
21. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
22. $\mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
23. $\mathrm{ctg}\,(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
24. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
25. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
26. $\mathrm{arctg}\,(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$
27. $\mathrm{arcctg}\,(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$

Формулы решений простейших тригонометрических уравнений

Вид уравнения	*Ограничения*	*Формула записи корней*
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert \le 1$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n;\ n \in Z \end{array}\right.$
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$a \in \mathbb{R}$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$a \in \mathbb{R}$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, n \in Z$

Знаки тригонометрических функций



Алгебра и арифметика

Свойства степени

1. $a^0 = 1$
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $(a^m)^n = a^{mn}$
5. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
9. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Свойства квадратного (арифметического) корня и определение модуля числа

11. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
12. $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$
13. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
14. $\sqrt{a^2} = |a|$
15. $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$

Формулы сокращённого умножения

16. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
17. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
18. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
19. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
20. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
21. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
22. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Определение логарифма

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

23. $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \qquad [b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1]$

Свойства логарифма

24. $b^{\log_b a} = a$
25. $\log_a 1 = 0$
26. $\log_a a = 1$
27. $\log_a a^m = m$

Действия с логарифмами

28. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
29. $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$
30. $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$
31. $k \cdot \log_a b = \log_{a^{1/k}} b$
32. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
33. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Арифметическая прогрессия

34. $a_n = a_1 + (n-1)d$
35. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$
36. $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

Геометрическая прогрессия

37. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
38. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} \qquad$ [для $q \neq 1$]
39. $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$

Начала анализа

Производные некоторых функций, правила их вычисления и свойства

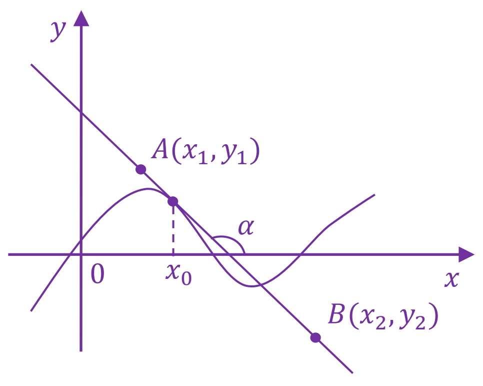
$f(x)$	$f'(x)$
C	0
kx	k
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x

1. $(u+v)' = u' + v'$.
2. $(u-v)' = u' - v'$
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $\big(u(v)\big)' = u'(v) \cdot v'$

1. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ возр.
(на интервале)
2. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ убыв.
(на интервале)

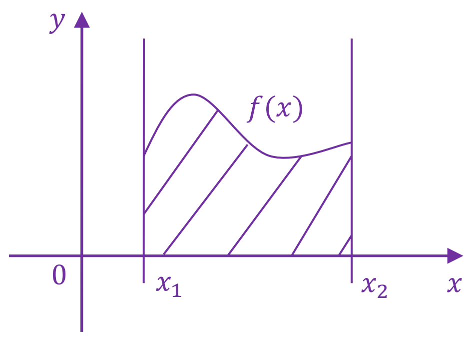
$f(x)$	$f'(x)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Геометрический смысл производной



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

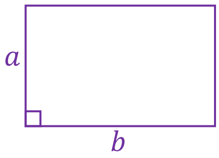
Формула нахождения площади криволинейной трапеции



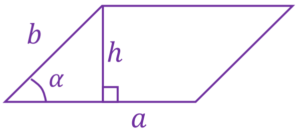
$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Планиметрия

$S = a^2$

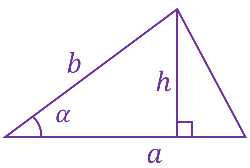


$S = ab$



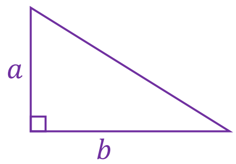
$S = ah$

$S = ab \cdot \sin\alpha$

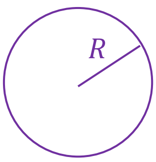


$S = \frac{1}{2}ah$

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$

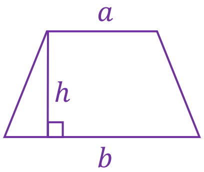


$S = \frac{1}{2}ab$

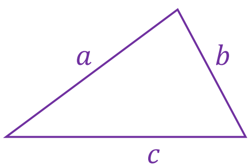


$S = \pi R^2$

$l = 2\pi R$

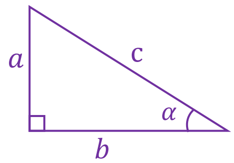


$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$



$R = \frac{abc}{4S}$

$r = \frac{2S}{a+b+c}$



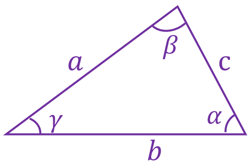
Определения тригонометрических функций:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Теорема Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2$

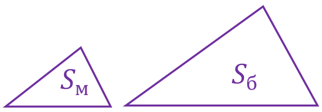


Теорема косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

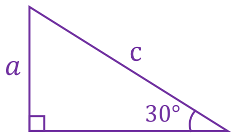
Теорема синусов:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$



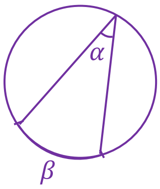
Отношение площадей подобных фигур:

$\frac{S_б}{S_м} = k^2$



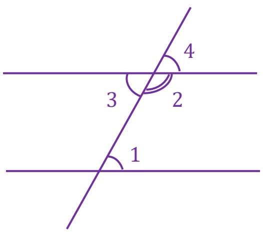
Свойство катета, лежащего напротив угла в 30°:

$a = \frac{1}{2}c$



Свойство вписанного угла в окружность:

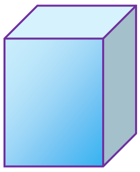
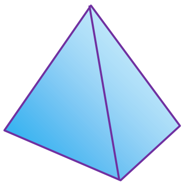
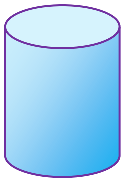
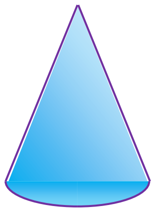
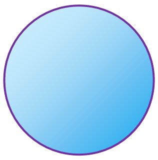
$\alpha = \frac{1}{2}\beta$



Свойства вертикальных, смежных углов и углов при параллельных прямых:

1. $\angle 3 = \angle 4$
2. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$
3. $\angle 1 = \angle 3$
4. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$
5. $\angle 1 = \angle 4$

Стереометрия

 $V = SH$	 $V = \frac{1}{3}SH$
 $V = SH$ $S_{бок} = 2\pi RH$	 $V = \frac{1}{3}SH$ $S_{бок} = \pi Rl$
 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S_{пов} = 4\pi R^2$	$S_{пов}$ *— площадь поверхности* $S_{бок}$ *— площадь боковой поверхности* S *— площадь основания* R *— радиус* H *— высота* l *— образующая*

Теория вероятностей

Элементарные исходы для 2 игральных кубиков

(36 исходов)					
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Элементарные исходы для 1, 2 и 3 бросков монет

1 монета *(2 исхода)*	***2 монеты*** *(4 исхода)*	***3 монеты*** *(8 исходов)*
О	ОО	ООО
Р	ОР	ООР
	РО	ОРО
	РР	ОРР
		РОО
		РОР
		РРО
		РРР

Классическое определение вероятности события и вероятность независимых событий

1. $P(A) = \frac{n}{m}$

   n – благоприятные исходы,

   m – общее число исходов

2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

#1. Ткачук. В.В. Математика — абитуриенту. — 18-е изд., стереотип. — М: МЦНМО, 2018 — 944 с.

#2. Гордин. Р.К. ЕГЭ 2018. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М: МЦНМО, 2018 — 128 с.

#3. Гордин. Р.К. ЕГЭ 2018. Математика. Планиметрия. Стереометрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М: МЦНМО, 2018 — 240 с.

#4. Шестаков С.А. ЕГЭ 2018. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М: МЦНМО, 2018 — 288 с.

#5. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 384 с.

#6. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005-2017) / А.В. Бегунц [и др.] — М.:МЦНМО, 2017 — 208 с.

#7. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. — 6-е изд., стереотип. — М.: Мнемозина, 2009 — 428 с.

#8. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. — 6-е изд., стереотип. — М.: Мнемозина, 2009 — 348 с.

#9. Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.fipi.ru

#10. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru

#11. Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://alexlarin.net

#12. Центральная приемная комиссия МГУ им. М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://cpk.msu.ru

#13. «Покори Воробьевы Горы!» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://pvg.mk.ru

#14. Подготовка к олимпиадам и ЕГЭ по математике и физике: Игорь Вячеславович Яковлев [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://mathus.ru