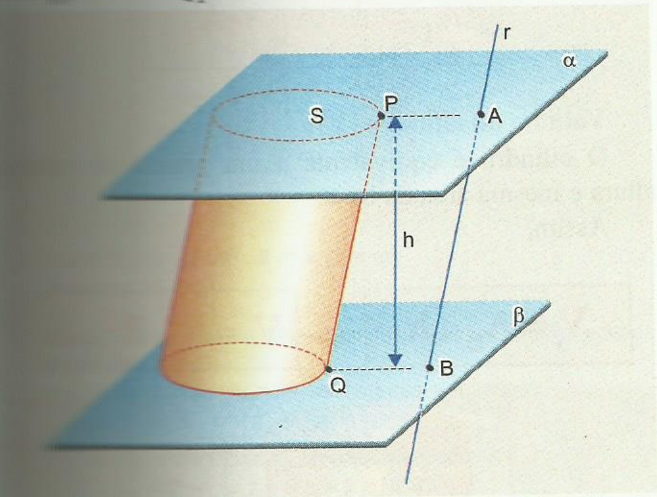
4 Cilindros

1. Cilindro de bases circulares

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, **r** uma reta que intercepta os planos α e β e **S** uma região circular contida em α.

Chama-se cilindro de base circular a união de todos os segmentos $\overline{PQ}$ paralelos a **r**, com $P \in S$ e $Q \in \beta$.



Elementos

a) A distância **h** entre os planos α e β é a **altura** do cilindro.

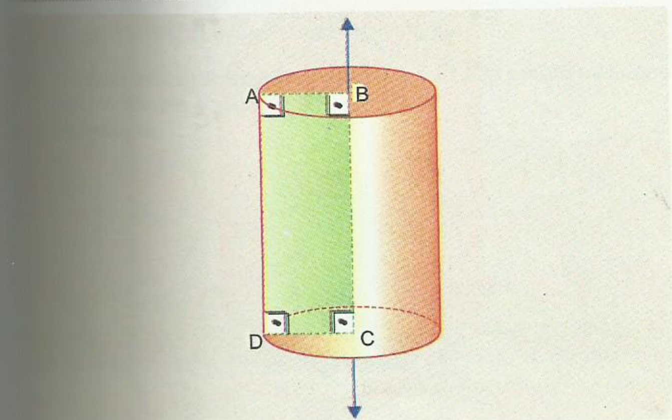
b) A região circular **S** é chamada **base** do cilindro.

c) O segmento de reta $\overline{PQ}$ da figura é chamado **geratriz** do cilindro.

2. Cilindro circular reto

Quando a reta **r** é perpendicular ao plano α, o cilindro é denominado **cilindro circular reto**.

No cilindro circular reto, a altura e a geratriz têm mesma medida.



Como o cilindro circular reto pode ser gerado por uma rotação completa de uma região retangular em torno de um de seus lados, ele também é denominado cilindro de revolução.

Na figura:

a) $\overleftrightarrow{BC}$ é o **eixo** do cilindro

b) $\overline{AD}$ é a **geratriz** da superfície lateral do cilindro.

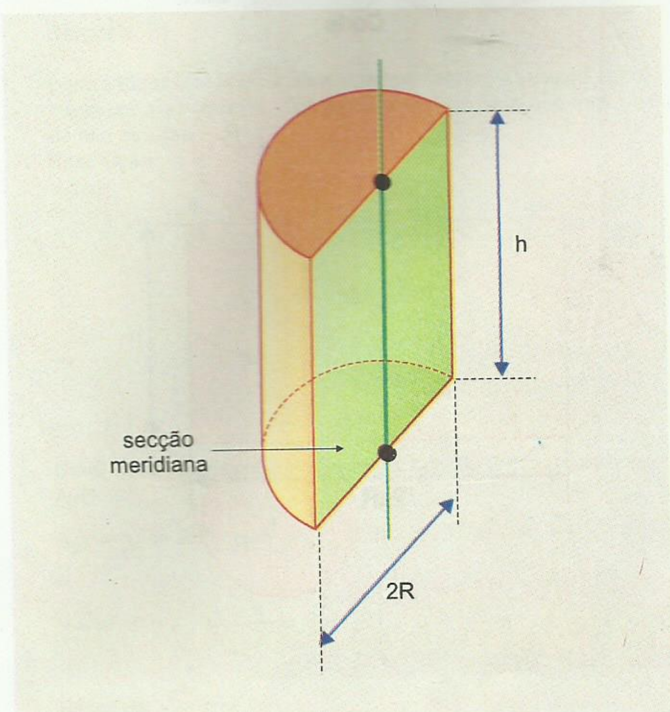
c) AB = CD é **raio da base** do cilindro.

3. Secção meridiana do cilindro circular reto

É o retângulo que se obtém ao seccionar o cilindro por um plano que contém o seu eixo.

Sendo **R** a medida do raio da base e **h** a medida da altura de um cilindro circular reto, a área da secção meridiana A_{sm} é dada por :

$$\boxed{A_{sm} = 2 \cdot R \cdot h}$$



4. Cilindro eqüilátero

É todo cilindro circular reto cuja secção meridiana é um **quadrado**.

Assim, no cilindro eqüilátero, temos:

$$h = 2R$$

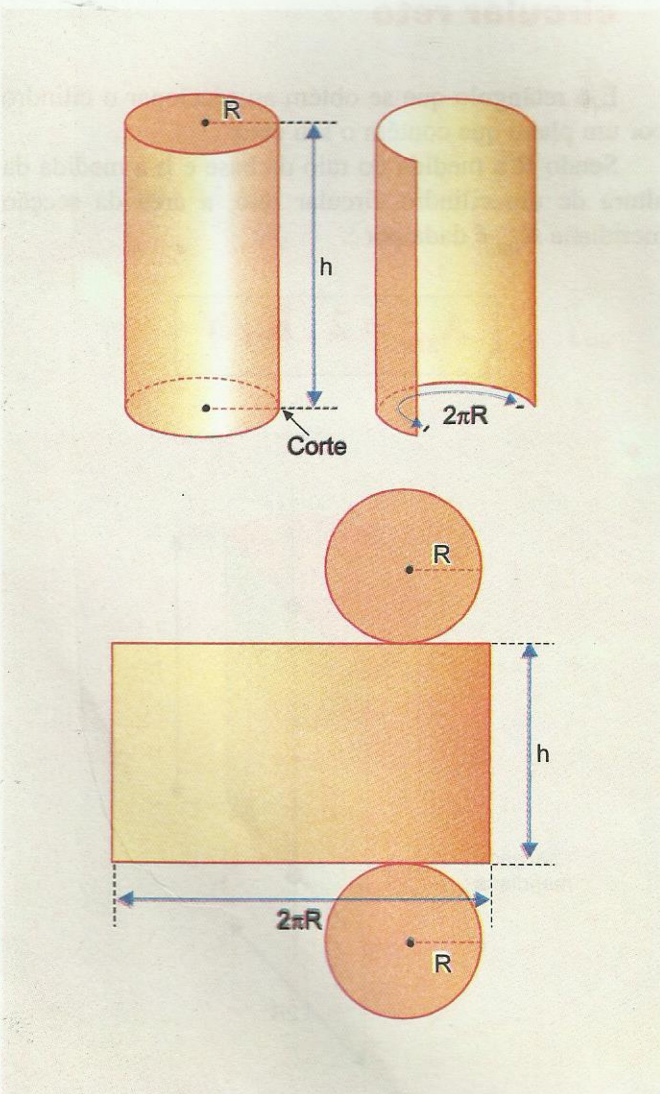
5. Cálculo de áreas e volumes

Área da base (A_b)

É a área de um círculo de raio **R**.

Assim,

$$\boxed{A_b = \pi \cdot R^2}.$$



Área lateral (A_ℓ)

A superfície lateral é a de um retângulo de dimensões **2πR** (comprimento da circunferência da base) e **h**.

Assim,

$$\boxed{A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}.$$

Área total (A_t)

É a soma das áreas das bases com a área lateral.

Assim,

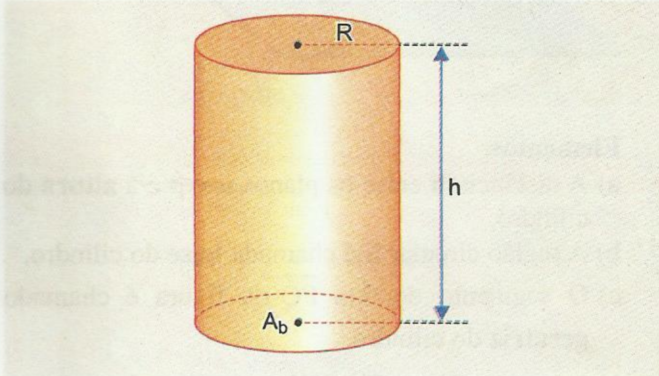
$$\boxed{A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell}.$$

Volume do cilindro (V)

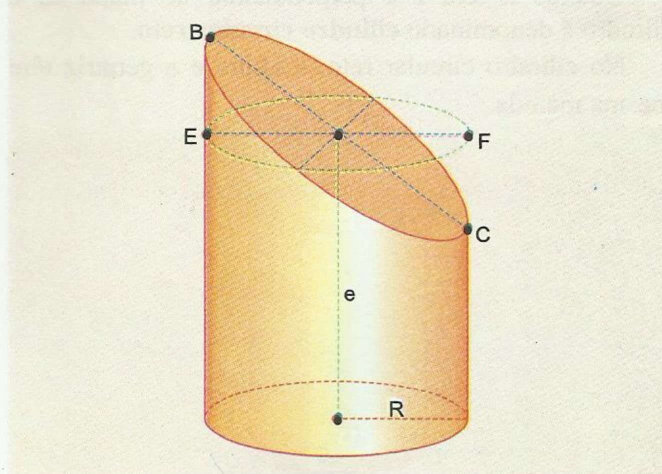
O cilindro é equivalente a um prisma de mesma altura e mesma área da base.

Assim,

$$\boxed{V = A_b \cdot h} \quad \text{ou} \quad \boxed{V = \pi \cdot R^2 \cdot h}.$$



6. Tronco de cilindro reto



8. Quantos litros d'água aproximadamente pode conter uma lata cilíndrica com 40 cm de diâmetro da base e 50 cm de altura?

Resolução

1º) Cálculo do raio da base R, em decímetros:
$2R = 40\ cm \Rightarrow R = 20\ cm \Rightarrow R = 2\ dm.$

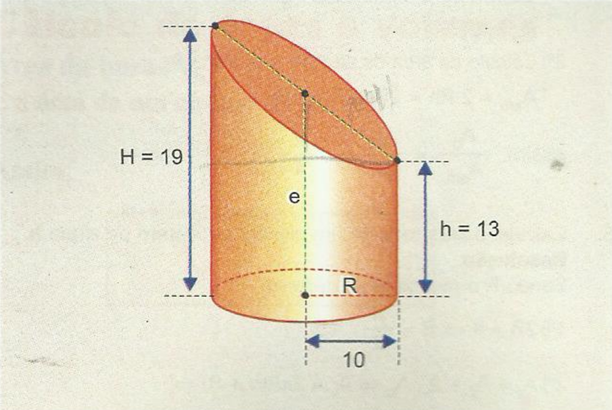
2º) Cálculo da altura h, em decímetros:
$h = 50\ cm \Rightarrow h = 5\ dm$

3º) Cálculo do volume V, em decímetros cúbicos:
$V = \pi R^2 h = \pi \,.\, 2^2 \,.\, 5 = 20\pi \cong 62{,}8$

Resposta: Aproximadamente 62,8 litros.

9. Calcular o volume de um tronco de cilindro reto, cujo raio da base mede 10 cm, sabendo que a maior geratriz mede 19 cm e a menor geratriz mede 13 cm.

Resolução



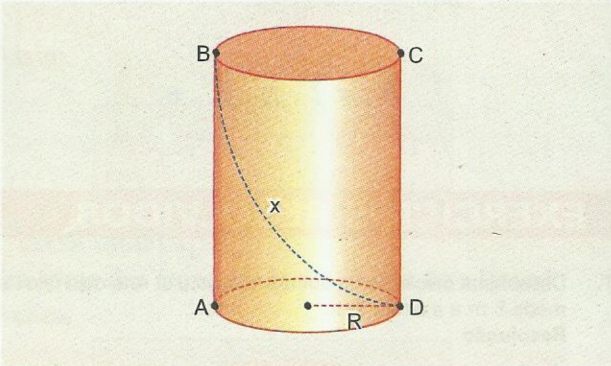
1º) Cálculo do comprimento e do eixo, em centímetros:

$$e = \frac{H + h}{2} = \frac{19 + 13}{2} = 16$$

2º) Cálculo do volume V do tronco, em centímetros cúbicos:
$V = \pi \,.\, R^2 \,.\, e = \pi \,.\, 10^2 \,.\, 16 = 1600\pi$

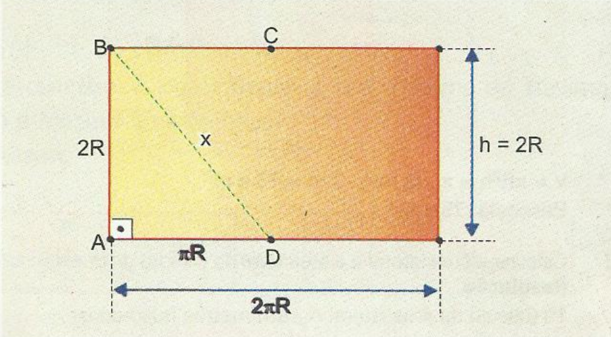
Resposta: $1600\ \pi\ cm^3$

10. Os pontos B e D são vértices não-consecutivos de uma das secções meridianas do cilindro eqüilátero de raio R da figura seguinte. Determinar o "menor caminho" x pela superfície lateral, para unir B a D.



Resolução

Desenvolvendo a superfície lateral do cilindro num plano, temos:



Assim, de acordo com o teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo ADB, tem-se:

$x^2 = (2R)^2 + (\pi R)^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2\,(4 + \pi^2) \Leftrightarrow x = R\sqrt{4 + \pi^2}$

Resposta: $R\sqrt{4 + \pi^2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. A área da secção meridiana de um cilindro eqüilátero é igual a 196 m^2. A área lateral desse cilindro, em metros quadrados, é igual a:
a) 98 b) 196 c) 49π d) 98π e) 196π

12. Num cilindro circular reto, a razão entre a área de sua superfície lateral e a área de sua secção meridiana é sempre igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) π e) 4

13. Sendo **S** a área lateral de um cilindro eqüilátero, sua área total é:
a) 2S b) $\frac{3S}{2}$ c) $\frac{2S}{3}$ d) $\frac{4S}{3}$ e) 3S

14. **(UNISA-SP)** – Se a altura de um cilindro circular reto é igual ao diâmetro da base, então a razão entre a área total e a área lateral do cilindro é igual a:
a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) $2\pi R^2$ d) 2 e) 1

15. **(UFMA)** – Um cilindro eqüilátero tem área total igual a $48\ \pi\ cm^2$. O volume desse cilindro é:
a) $48\ \pi\ cm^3$ b) $36\ \pi\ cm^3$ c) $48\sqrt{2}\ \pi\ cm^3$
d) $36\sqrt{2}\ \pi\ cm^3$ e) $32\sqrt{2}\ \pi\ cm^3$

16. **(UNIVEST-SP)** – Um cilindro circular reto tem volume igual a 64 dm^3 e área lateral igual a 400 cm^2. O raio da base mede:
a) 3,2 dm b) 24 dm c) 32 dm
d) 48 dm e) 64 dm

17. **(UNIMEP-SP)** – Faz-se girar um quadrado de lado 1 cm em torno de um de seus lados. A área total do sólido resultante vale:
a) $4\pi\ cm^2$ b) $\pi\ cm^2$ c) $8\pi\ cm^2$
d) $\frac{\pi}{2}\ cm^2$ e) $2\pi\ cm^2$

18. **(PUC)** – Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?
a) 0,3768 b) 3,768 c) 0,03768
d) 37,68 e) 0,003768

19. **(PUC)** – As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual é o volume do cilindro?
a) 1000π b) 750π c) 500π
d) 250π e) 100π

20. **(FAAP-SP)** – Um retângulo girando em torno de cada um dos lados gera dois sólidos, cujos volumes medem 360 πm^3 e 600 πm^3. Calcular a medida dos lados do retângulo.

21. **(UELON-PR)** – Considere um cilindro circular reto que tem 4 cm de altura. Aumentando-se indiferentemente o raio da base ou a altura desse cilindro em 12 cm, obtêm-se, em qualquer caso, cilindros de volumes iguais. A medida, em centímetros, do raio do cilindro original é:
a) 12 b) 10 c) 8 d) 6 e) 4

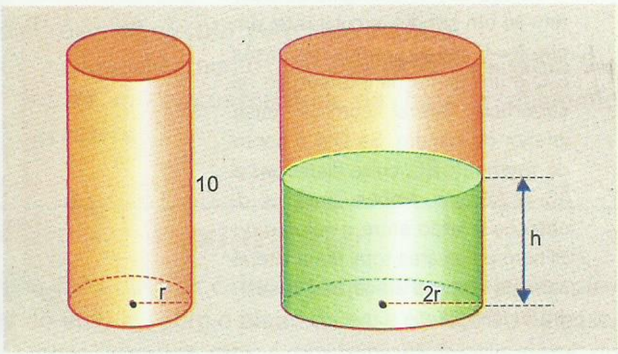
22. **(USF-SP)** – Em um cilindro circular reto de altura medindo 4 cm, a área da base, a área lateral e o volume formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. A área total desse cilindro, em centímetros quadrados, é igual a:
a) 16π b) 24π c) 32π d) 48π e) 64π

23. Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma de raio **r** cheia até uma altura **h** e outra de raio $\mathbf{\frac{r}{2}}$ e cheia até a altura **2h**. A primeira é vendida por R\$ 1,90 e a segunda, por R\$ 1,00. Qual a embalagem mais vantajosa para o comprador?

24. **(UNIMEP-SP)** – O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos, cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo raio da base é $\frac{1}{3}$ do raio da base da lata. O número de potes necessários é:
a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

25. **(PUCCAMP-SP)** – Uma piscina circular tem 5 m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de 25 g por 500 litros de água. Se a piscina tem 1,6 m de profundidade e está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água?
a) 1,45 kg b) 1,55 kg c) 1,65 kg
d) 1,75 kg e) 1,85 kg
(Use: $\pi = 3,1$)

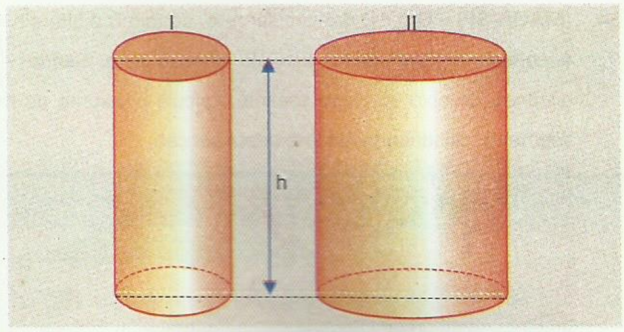
26. **(FEI-SP)** – Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm num determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?
a) 1,5 cm b) 2 cm c) 2,5 cm
d) 4,5 cm e) 5 cm



27. **(FAAP-SP)** – Uma lata cilíndrica tem rótulo retangular, envolvendo-a completamente (mas sem superposição). O rótulo mede 10 cm de altura e 12 cm de largura. Outra lata, de mesma altura tem rótulo semelhante medindo 10 cm de altura e largura de 14 cm. A razão entre o volume da lata maior e o do lata menor é:
a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{49}{36}$

28. **(FAAP-SP)** – Uma fábrica de tintas está estudando novas embalagens para seu produto, comercializado em latas cilíndricas cuja circunferência mede 10 π cm. As latas serão distribuídas em caixas de papelão ondulado, dispostas verticalmente sobre a base da caixa, numa única camada. Numa caixa de base retangular medindo 25 cm por 45 cm, quantas latas caberiam?
a) 12 b) 6 c) 11 d) 9 e) 8

29. **(MACKENZIE-SP)** – Aumentando-se em 50% o raio de base do cilindro I, obteve-se o cilindro II, cuja área lateral é igual à área total do primeiro. Se o volume do cilindro I é 16π, então a altura h dos cilindros I e II é:



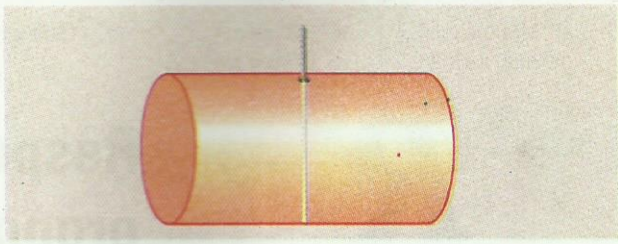
a) 10 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

30. **(MACKENZIE-SP)** – Um reservatório que tem a forma de um cilindro reto contém um volume de água igual a $\frac{2}{3}$ de sua capacidade. Se forem retirados 50 litros do líquido, a altura do seu nível baixará de 10%. O volume total do reservatório, em litros, é:
a) 500 b) 650 c) 750 d) 900 e) 1000

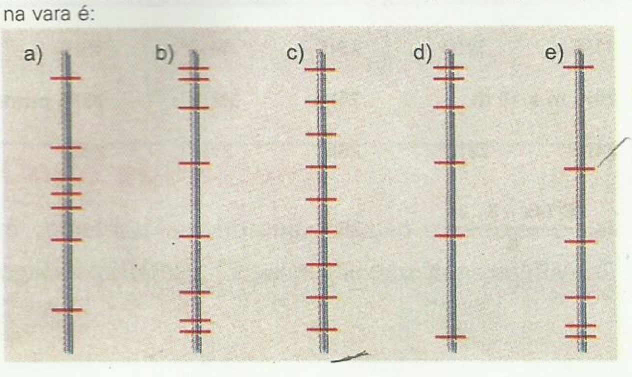
31. **(FAAP-SP)** – Um botijão de gás de cozinha tem 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura. Se você gasta 1000 πcm^3 de gás por dia, quantos dias o gás de seu botijão durará?
a) 24 b) 15 c) 28 d) 20 e) 18

32. **(UMC-SP)** – Dois recipientes cilíndricos **A** e **B** contêm água. A altura da água no recipiente **A** é de 1000 mm e em **B** é de 350 mm. A água é transferida de **A** para **B** de forma que a altura da água em **A** diminui 4 mm por minuto, enquanto que a altura em **B** aumenta 9 mm por minuto. Pode-se observar que:
a) as alturas da água em **A** e **B** ficam iguais depois de 130 minutos de bombeamento.
b) depois de 30 minutos de bombeamento a altura da água em **A** é menor que a altura da água em **B**.
c) a altura da água em **A**, após 40 minutos de bombeamento, é maior do que a altura da água em **B**.
d) a diferença das alturas da água nos dois cilindros permanece constante.
e) a variação das alturas depende do volume de água no cilindro **A**.

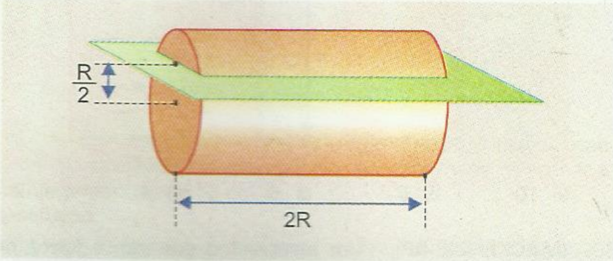
33. **(ENEM)** – Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.



A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:



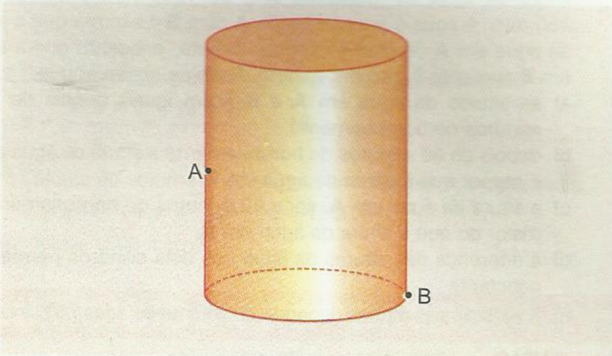
34. **(MAUÁ-SP)** – Um cilindro circular reto, de raio R e altura h = 2R, é cortado por um plano paralelo ao seu eixo. Sendo $\frac{R}{2}$ a distância do eixo ao plano secante, calcule o volume do menor segmento cilíndrico resultante desta secção.



35. **(FAAP-SP)** – A área total de um cilindro reto, de base circular, de 2 m de altura é igual à área de um círculo de 4 m de raio. Calcule o volume do cilindro.

36. Considere um cilindro eqüilátero de raio R. Os pontos A e B são pontos de secção meridiana do cilindro, sendo A o ponto médio da geratriz. Se amarrarmos um barbante esticado do ponto A ao ponto B, sua medida deverá ser:

a) $R\sqrt{5}$ b) $2R\sqrt{2}$ c) $R\sqrt{1+\pi}$
d) $R\sqrt{1+\pi^2}$ e) $R\sqrt{\pi}$



37. Um cano de drenagem é um tubo cilíndrico com 100 cm de comprimento. Os diâmetros interior e exterior são 26 cm a 32 cm, respectivamente. O volume de barro necessário para a fabricação de um desses canos é:

a) 34800 π cm^3 b) 600 π cm^3 c) 11600 π cm^3
d) 2900 π cm^3 e) 8700 π cm^3

38. **(FATEC-SP)** – Sabe-se que um cilindro de revolução de raio igual a 10 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo, a uma distância de 6 cm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é:

a) 1250 π b) 1260 π^2 c) 6,25 π^2
d) 625 π e) 625 π^2

39. **(FEI-SP)** – Um cilindro reto com diâmetro da base igual a 6 cm é seccionado por um plano oblíquo à mesma, que determina no cilindro "alturas" entre 2 cm e 8 cm, como indicado na figura. O volume do tronco resultante, cm^3, é:

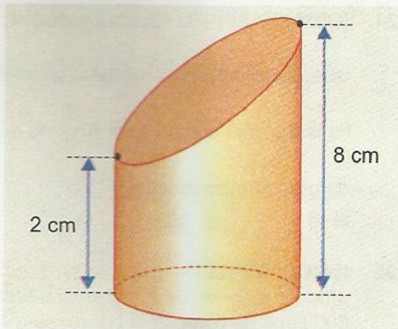
a) $7\sqrt{3}\,\pi$

b) 30π

c) $8\sqrt{3}\,\pi$

d) 45π

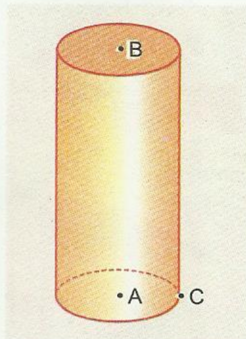
e) $10\sqrt{3}\,\pi$



40. **(FGV)** – Um cilindro de ferro de raio r e altura h está totalmente imerso na água contida em um recipiente cilíndrico de raio interno R, com R > r. Ao retirarmos o cilindro de ferro, o nível da água baixará de:

a) $\frac{Rh}{r}$ b) $\frac{rh}{R}$ c) $\left(\frac{r}{R}\right)^2 h$
d) h e) $\pi\left(\frac{r}{R}\right)^2 h$

41. **(FUVEST-SP)** – Na figura ao lado, tem-se um cilindro circular reto, em que A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento $\overline{BC}$, cujas distâncias a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são ambas iguais a *d*, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de *d*.



R Respostas dos exercícios propostos

11)E 12)D 13)B 14)B 15)E 16)C 17)A 18)A 19)D

20)6 m e 10 m 21)A 22)E 23)A primeira embalagem é mais vantajosa para o comprador

24) E 25)B 26)C 27)E 28)E 29)D 30)C 31)A 32)C 33)A

34) $\frac{R^3(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$ 35)8π m^3 36)D 37)E 38)E 39)D 40)C 41) $\frac{d}{2}$