5. Áreas

Área de uma face lateral é a área de um dos polígonos que constitui uma face lateral do prisma.

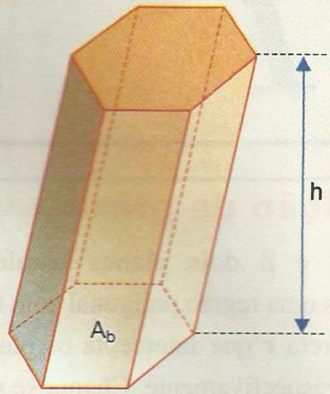
Se o prisma for regular, todas as faces laterais terão mesma área.

Área lateral é a soma das áreas de todas as faces laterais de um prisma.

Área total é a soma das áreas de todas as faces do prisma.

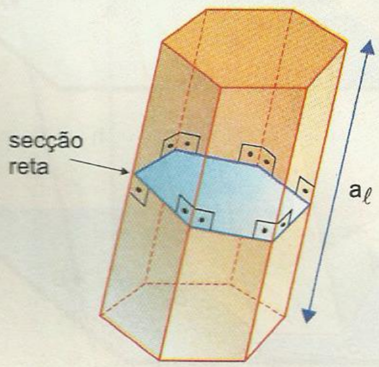
Assim, sendo A_ℓ a área lateral de um prisma, A_b a área de uma das bases e A_t a área total, temos:

$$\boxed{A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell}$$



Observação: O volume de um prisma também pode ser calculado como o produto da área de sua secção reta pela medida de sua aresta lateral.

$$\boxed{V = A_{SR} \cdot a_\ell}$$



6. Volume

Definição

Volume de um sólido é um número, associado a ele, que exprime a razão existente entre o espaço por ele ocupado e o espaço ocupado por um cubo de aresta unitária.

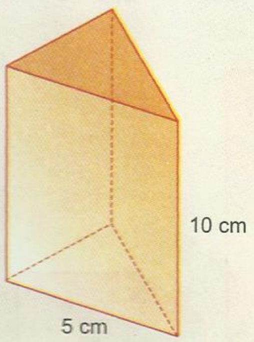
Volume dos prismas

O volume **V** de um prisma com área da base A_b e altura **h** é dado por:

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular a área da base, a área lateral e a área total de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede 5 cm e a altura 10 cm.



Resolução

1º) $A_b = \dfrac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_b = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

2º) $A_\ell = 3 \cdot (5 \cdot 10) \Leftrightarrow A_\ell = 150$

3º) $A_t = A_\ell + 2A_b = 150 + \dfrac{50\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_t = \dfrac{25(12 + \sqrt{3})}{2}$

Respostas: $A_b = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ cm², $A_\ell = 150$ cm² e

$A_t = \dfrac{25(12 + \sqrt{3})}{2}$ cm²

2. Determinar o volume do prisma do exercício anterior.

Resolução

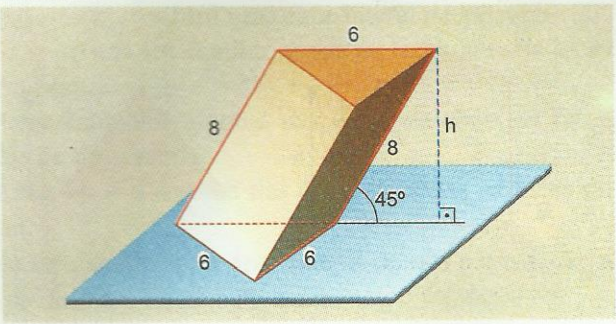
$V = A_b \cdot h$

Assim: $V = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 10 \Leftrightarrow V = \dfrac{125\sqrt{3}}{2}$

Resposta: $\dfrac{125\sqrt{3}}{2}$ cm³

8. Calcular o volume de um prisma oblíquo, sabendo-se que a base é um triângulo eqüilátero de aresta medindo 6 m e que a aresta lateral, inclinada 45° em relação ao plano da base, mede 8 m.

Resolução



1º) Cálculo da área da base, em metros quadrados.

$$A_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_b = 9\sqrt{3}$$

2º) Cálculo da altura, em metros.

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{8} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{2}$$

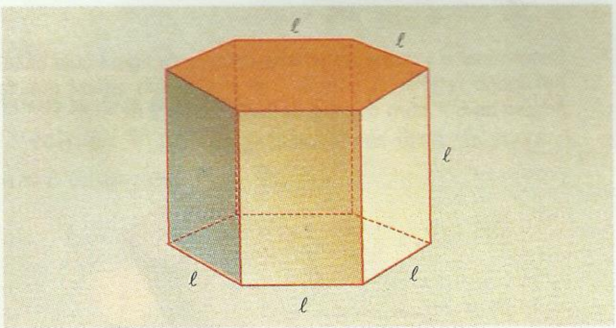
3º) Cálculo do volume, em metros cúbicos.

$$V = A_b \cdot h \Leftrightarrow V = 9\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} \Leftrightarrow V = 36\sqrt{6}$$

Resposta: $36\sqrt{6}$ m^3

9. Calcular a razão entre a área lateral e a área da base de um prisma regular hexagonal cujas dezoito arestas são todas congruentes.

Resolução



1º) Área lateral: $A_\ell = 6 \cdot (\ell \cdot \ell) = 6\ell^2$

2º) Área da base: $A_b = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\ell^2}{2}$

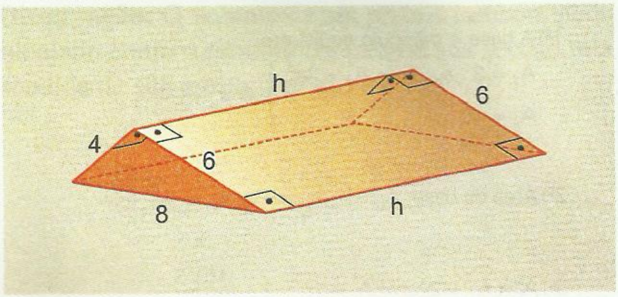
3º) Razão entre a área lateral e a área da base:

$$\frac{A_\ell}{A_b} = \frac{6\ell^2}{\frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

10. Calcular o volume de um prisma reto, cuja base é um triângulo de lados medindo 4, 6 e 8 unidades lineares, respectivamente, sabendo-se que a área lateral desse prisma é de 90 unidades quadradas.

Resolução



1º) Cálculo da altura h do prisma.

$A_\ell = 4h + 6h + 8h \Leftrightarrow A_\ell = 18h$

Assim: $18h = 90 \Leftrightarrow h = 5$

2º) Cálculo da área da base A_b do prisma.

De acordo com a fórmula de Hieron, tem-se:

$$A_b = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = 3\sqrt{15}$$

3º) Cálculo do volume V do prisma.

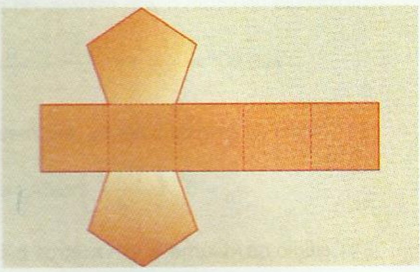
$V = A_b \cdot h = 3\sqrt{15} \cdot 5 = 15\sqrt{15}$

Resposta: $15\sqrt{15}$ unidades cúbicas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. Um prisma regular triangular tem todas as arestas congruentes e 48 m^2 de área lateral. Seu volume vale:
a) 16 m^3 b) 32 m^3 c) 64 m^3 d) $4\sqrt{3}$ m^3 e) $16\sqrt{3}$ m^3

12. **(VUNESP-SP)** – Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura abaixo, obteremos uma figura espacial cujo nome é:
a) pirâmide de base pentagonal
b) paralelepípedo
c) octaedro
d) tetraedro
e) prisma



13. **(PUC)** – A base de um prisma reto é um triângulo de lados que medem 5 m, 5 m e 8 m, e a altura do prisma tem 3 m. O volume desse prisma, em metros cúbicos, é igual a:
a) 12 b) 24 c) 36 d) 42 e) 60

14. **(PUC)** – Tem-se um prisma reto de base hexagonal cuja altura é $\sqrt{3}$ e cujo raio do círculo, que circunscreve a base, é 2. A área total desse prisma é igual a:
a) $\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) 30 d) $10\sqrt{2}$ e) 8

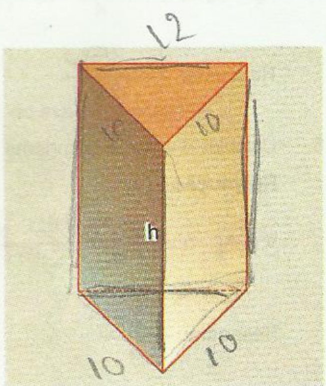
15. **(UFRN)** – Um triângulo isósceles cujos lados medem 10 cm, 10 cm e 12 cm é a base do prisma reto do volume igual a 528 cm^3, conforme a figura seguinte. Pode-se afirmar que a altura h do prisma é igual a:

a) 8 cm

b) 11 cm

c) 12 cm

d) 13 cm

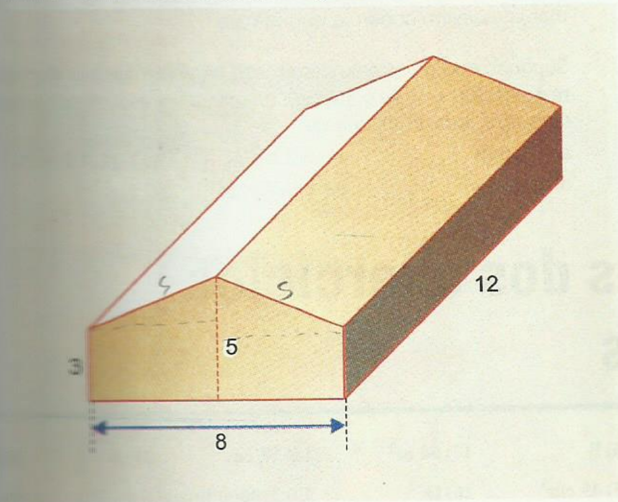


16. **(UNIUBE-MG)** – Um prisma reto de base quadrada tem 3 m de altura e área total de 80 m^2. O volume desse prisma é igual a:
a) 24 m^3 b) 48 m^3 c) 108 m^3
d) 192 m^3 e) 300 m^3

17. **(FAAP-SP)** – Em um prisma triangular regular a altura mede $2\sqrt{3}$ m e a área lateral é o quádruplo da área da base. Calcule o volume do prisma.

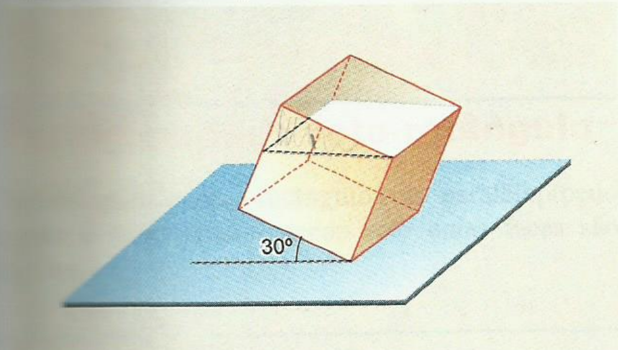
18. A área lateral de um prisma regular hexagonal é o triplo da área da base desse prisma. Calcular o seu volume, sabendo que a base do prisma tem 12 cm de perímetro.

19. **(VUNESP-SP)** – O volume do ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é:



a) 288 b) 384 c) 480 d) 360 e) 768

20. Uma caixa cúbica sem tampa, com 1 litro de capacidade, está completamente cheia de leite. Inclina-se a caixa 30° em relação ao plano horizontal, de modo que apenas uma de suas arestas fique em contato com o plano, conforme mostra a figura:

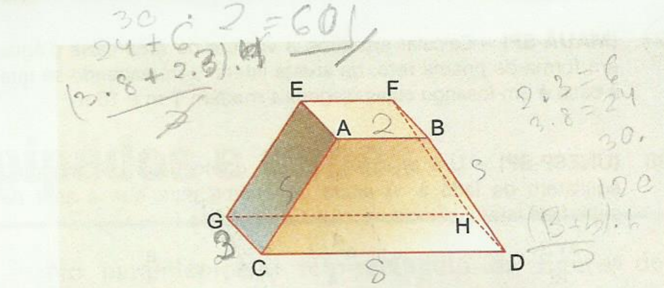


O volume do leite derramado, em cm^3, é igual a:

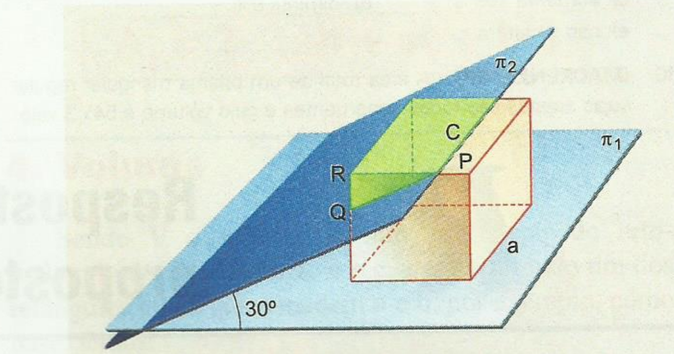
a) 250 b) $\frac{500\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{500\sqrt{3}}{3}$

d) $250\sqrt{2}$ e) 500

21. **(FUVEST-SP)** – Na figura a seguir:
a) ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5.
b) Os trapézios estão em planos paralelos, cuja distância é 3.
c) As retas AE, BF, CG e DH são paralelas.
Calcule o volume do sólido.

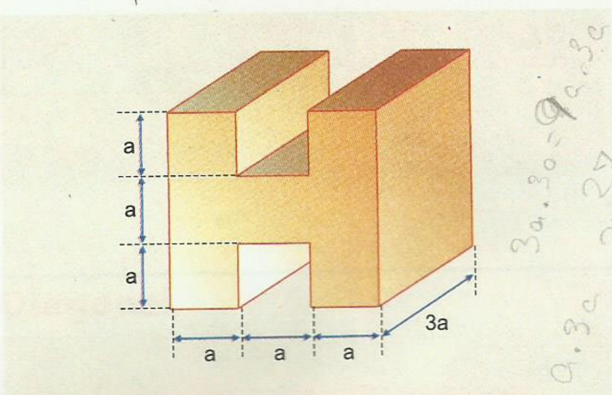


22. **(UnB-DF)** – Na figura abaixo, é dado um cubo de $8\sqrt{3}$ cm de aresta, cuja base está sobre um plano π_1. O plano π_2 é paralelo à reta que contém a aresta **a**, forma com π_1 um ângulo de 30° e "corta" do cubo um prisma C cuja base é o triângulo PQR.
O segmento PQ tem 5 cm de comprimento.
Determinar o volume do prisma C.



23. **(MACKENZIE-SP)** – Se a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma é 6480°, então o número de lados da base do prisma é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

24. **(CESGRANRIO)** – De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido, em forma de "H", mostrado na figura. O volume do sólido é:
a) 27 a^3 b) 21 a^3 c) 18 a^3 d) 14 a^3 e) 9 a^3



25. **(MAUÁ-SP)** – Calcular o volume de um prisma oblíquo, sabendo que a base é um hexágono regular de lado 2 cm e que a aresta lateral, inclinada 60° em relação ao plano da base, mede 5 cm.

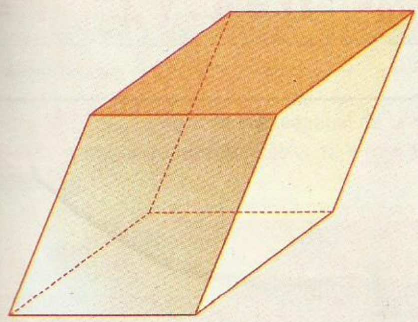
26. **(ITA-SP)** – Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em centímetros cúbicos, é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) 12 d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$

2 Paralelepípedos e cubos

1. Paralelepípedo

Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos.

paralelepípedo reto

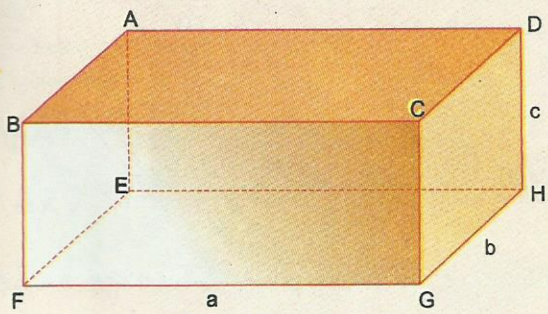


paralelepípedo oblíquo

2. Paralelepípedo reto-retângulo

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo é todo paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.

3. Área total



No paralelepípedo reto-retângulo da figura, de dimensões **a**, **b** e **c**, temos:

$A_{ABCD} = A_{EFGH} = a \cdot b$

$A_{BFGC} = A_{AEHD} = a \cdot c$

$A_{ABFE} = A_{DCGH} = b \cdot c$

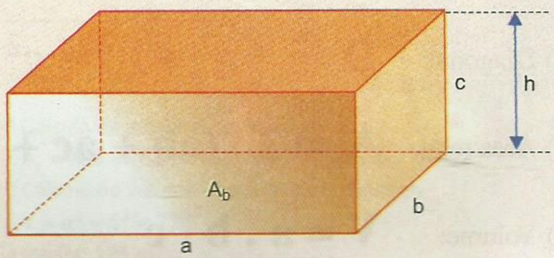
Assim, sendo A_t a área total do paralelepípedo, temos:

$$\boxed{A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$

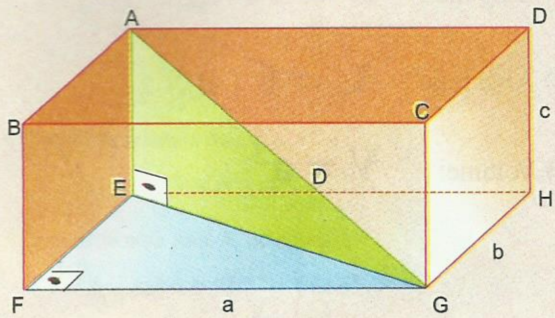
4. Volume

Sendo **V** o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a**, **b** e **c**, e considerando um dos retângulos cujos lados medem **a** e **b**, por exemplo, como base, temos:

$$V = A_b \cdot h = (a \cdot b) \cdot c \Leftrightarrow \boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$



5. Diagonal



Sejam **D** a medida da diagonal $\overline{AG}$ do paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura e **d** a medida da diagonal $\overline{EG}$ da face EFGH.

No triângulo retângulo EFG, temos:

$$(EG)^2 = (FG)^2 + (EF)^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2$$

No triângulo retângulo AEG, temos:

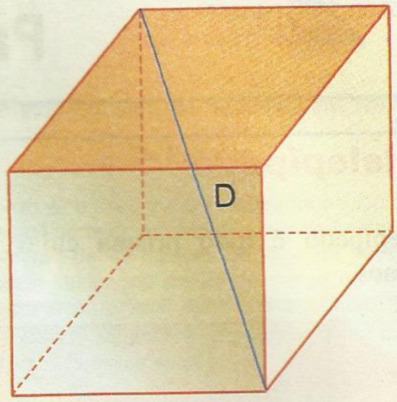
$$(AG)^2 = (EG)^2 + (AE)^2 \Rightarrow D^2 = d^2 + c^2$$

Assim,

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e, portanto:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

6. Cubo



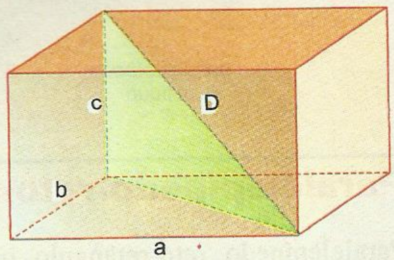
Cubo é todo paralelepípedo reto-retângulo cujas seis faces são quadradas.

Num cubo de aresta **a**, sendo A_t a área total, **D** a medida da diagonal e **V** o volume do cubo, temos:

$$\boxed{A_t = 6 \cdot a^2} \quad \boxed{D = a \cdot \sqrt{3}} \quad \boxed{V = a^3}$$

Resumo

- **Paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c**

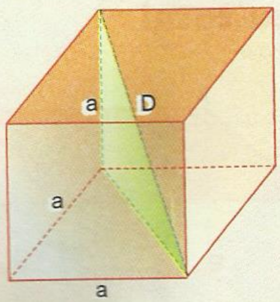


a) Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) Área total: $A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

c) Volume: $V = a \cdot b \cdot c$

- **Cubo de aresta a**

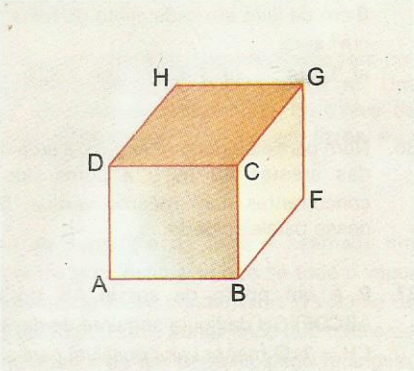


a) Diagonal: $D = a \cdot \sqrt{3}$

b) Área total: $A_t = 6 \cdot a^2$

c) Volume: $V = a^3$

(FEI-SP) – A medida da aresta do cubo da figura abaixo é **x**. **M** é a intersecção dos segmentos DG e CH. A distância do ponto **M** ao vértice **A** é:



a) $\frac{1}{2}x$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

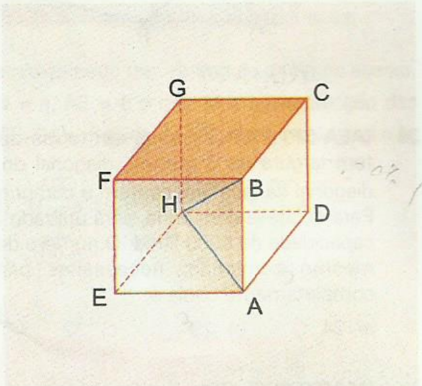
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}x$

e) $\frac{\sqrt{6}}{2}x$

(UESB-BA) – Diminuindo-se de 1 unidade de comprimento a aresta de um cubo, o seu volume diminui 61 unidades de volume. A área total desse cubo, em unidades de área é igual a:

a) 75 b) 96 c) 150 d) 294 e) 600

(FEI-SP) – O sólido ABCDEFGH é um cubo cujas arestas medem 3 cm. Qual a área do triângulo ABH?



a) $\frac{9}{2}$ cm^2

b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm^2

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2

d) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ cm^2

e) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ cm^2

(UNIFENAS-MG) – Se um cubo tem as suas arestas aumentadas em 20% cada uma, então o seu volume fica aumentado em:

a) 42,6% b) 142,6% c) 72,8%

d) 172,8% e) 92%

(FUVEST-SP) – Uma caixa d'água tem forma cúbica com 1 metro de aresta. De quanto baixa o nível da água ao retirarmos 1 litro de água da caixa?

A diagonal de um cubo tem medida **d**. Seu volume **V** é dado por:

a) $V = d^3$ b) $V = \frac{d^3}{3}$ c) $V = \frac{d^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$

d) $V = \frac{d^3 \cdot \sqrt{3}}{9}$ e) $V = \frac{d^3}{6}$

(USF-SP) – Aumentando-se em 1cm cada aresta de um cubo, o seu volume aumenta em 7 cm^3. A área lateral do cubo original é igual a:

a) 7 cm^2 b) 6 cm^2 c) 5 cm^2

d) 4 cm^2 e) 3 cm^2

22. **(PUC)** – Um cubo tem área total igual a 72 m^2. Sua diagonal mede:

a) $2\sqrt{6}$ m b) 6 m c) $\sqrt{6}$ m

d) $2\sqrt{3}$ m e) $4\sqrt{6}$ m

23. A área total de um cubo, cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm, é:

a) 140 m^2 b) $100\sqrt{3}$ cm^2 c) $120\sqrt{2}$ cm^2

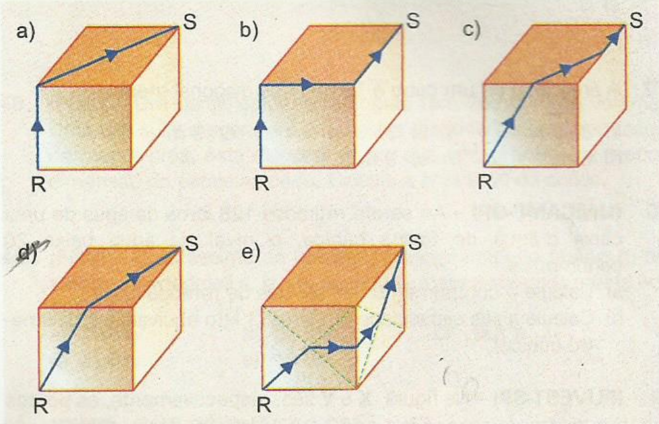
d) 150 cm^2 e) 100 cm^2

24. **(MACKENZIE-SP)** – Aumentando-se em 1 m a aresta de um cubo, a sua área lateral aumenta em 164 m^2. O volume do cubo original é:

a) 6000 m^3 b) 7000 m^3 c) 8000 m^3

d) 12000 m^3 e) 16400 m^3

25. **(CESGRANRIO)** – Dentre os caminhos ligando **R** e **S**, sobre a superfície do cubo, aquele de menor percurso é:



26. As arestas de um cubo de isopor medem 6 cm. Buracos quadrados, de 2 cm de lados, cortam o cubo, indo de cada face até a face oposta. As arestas desses buracos são paralelas às arestas do cubo como na figura abaixo. O volume da peça obtida é:

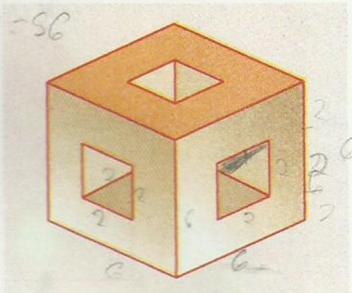
a) 144 cm^3

b) 192 cm^3

c) 180 cm^3

d) 200 cm^3

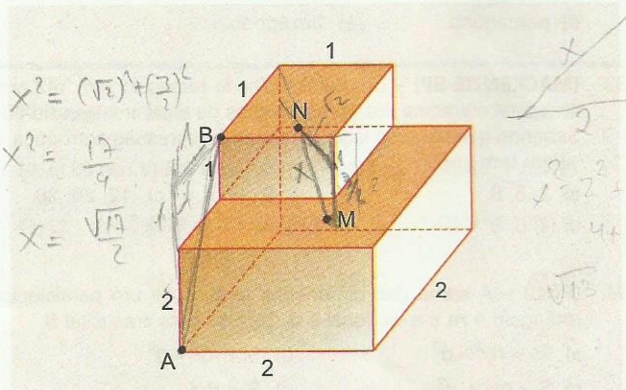
e) 160 cm^3



27. **(FEI-SP)** – O sólido abaixo é composto de dois cubos de arestas 2 cm e 1 cm e centros **M** e **N**.

a) Achar a distância AB.

b) Achar a distância MN.



$x^2 = (\sqrt{2})^2 + (\frac{3}{2})^2$

$x^2 = \frac{17}{4}$

$x = \frac{\sqrt{17}}{2}$

28. **(UEL-PR)** – A figura abaixo representa um hexaedro regular. A área da secção (ABCD) é $\sqrt{6}$ m^2. O volume do sólido, em m^3, é:

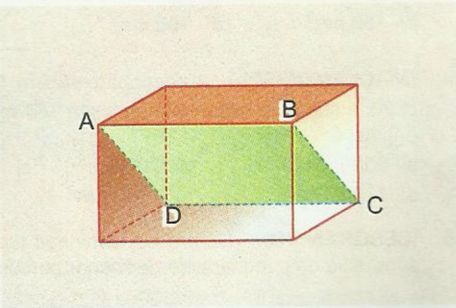
a) $3\sqrt{3}$

b) $2\sqrt[4]{3}$

c) $3\sqrt[4]{9}$

d) $\sqrt[4]{27}$

e) 3



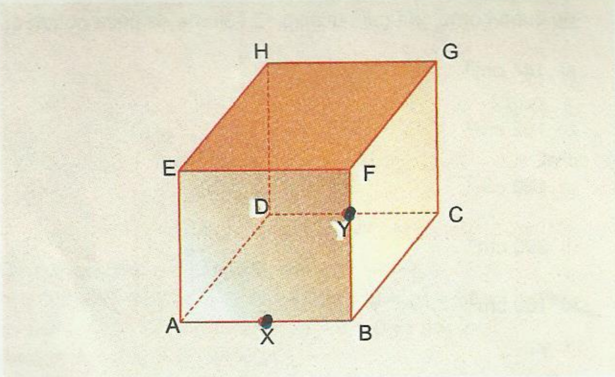
29. A área total de um cubo é 18 m^2. Sua diagonal mede:

a) $3\sqrt{2}$ m b) $3\sqrt{3}$ m c) 3 m
d) 6 m e) 9 m

30. **(UNICAMP-SP)** – Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.
a) Calcule o comprimento das arestas de referida caixa.
b) Calcule a sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

31. **(FUVEST-SP)** – Na figura, **X** e **Y** são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do cubo. A razão entre o volume do prisma AXFEDYGH e o do cubo é:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{6}$



32. **(FUVEST-SP)** – Os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ são arestas de um cubo. Um plano α, paralelo ao plano ABC, divide esse cubo em duas partes iguais. A intersecção do plano α com o cubo é um.

a) triângulo. b) quadrado. c) retângulo.
d) pentágono. e) hexágono.

33. **(MACKENZIE-SP)** – Um paralelepípedo retângulo tem 142 cm^2 de área total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60 cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão aritmética, eles valem (em cm):

a) 2, 5, 8 b) 1, 5, 9 c) 12, 20, 28
d) 4, 6, 8 e) 3, 5, 7

34. **(PUC)** – A soma das dimensões **a**, **b**, **c** de um paralelepípedo retângulo é **m** e a diagonal é **d**. Tem-se para área total **S**:

a) $S^2 = m^2 - d^2$ b) $S = m^2 - d^2$
c) $S = m^2 + d^2$ d) $S = md$
e) $S = 2\,md$

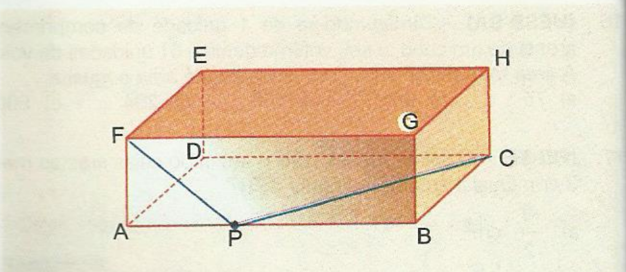
35. **(FUND. CARLOS CHAGAS-SP)** – Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa em cm^3 será:

a) 1.244 b) 1.828 c) 2.324 d) 3.808 e) 12.000

36. Num paralelepípedo retangulo, a área da base é de 12 m^2, a soma das arestas 48 m e a soma dos quadrados das arestas concorrentes num mesmo vértice, 50 m^2. Calcular o volume desse paralelepípedo.

37. **P** é um ponto da aresta $\overline{AB}$ do paralelepípedo retângulo ABCDEFGH da figura seguinte de dimensões: AB = 15, BC = 5 e CH = 3. O menor valor possível para a soma FP + PC é:

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 23



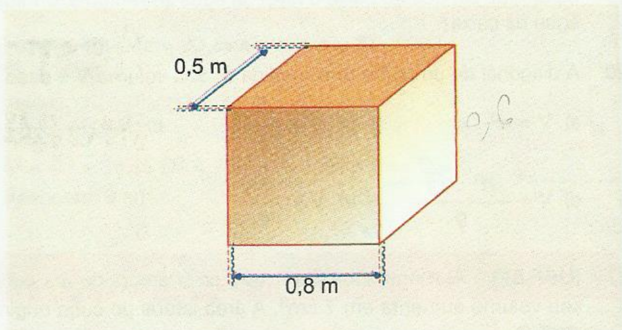
38. **(AFA-SP)** – Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo tem largura de 6 metros, diagonal do fundo com 10 metros e diagonal da face que contém o comprimento igual a $4\sqrt{5}$ metros. Para enchê-la com água, será utilizado um caminhão-tanque com capacidade de 6000 litros. O número de cargas completas, desse mesmo caminhão, necessárias para que a piscina fique completamente cheia é:

a) 24 b) 28 c) 32 d) 54 e) 80

39. **(MACKENZIE-SP)** – As dimensões **a**, **b** e **c** de um paralelepípedo reto-retângulo são tais que a > b > c. Aumentando-se **a** em 25% e mantendo-se **b** constante, para que o volume do paralelepípedo se mantenha o mesmo, a dimensão **c** deve ser diminuída de:

a) 15% b) 18% c) 20% d) 25% e) 28%

40. **(MACKENZIE-SP)** – A figura abaixo representa um reservatório de água totalmente cheio. Após terem sido consumidos 12 litros, o nível d'água terá baixado de:



a) 3 dm b) 3 cm c) 17 cm d) 17 dm e) 0,17 mm

41. **(FUVEST-SP)** – O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é 240 cm^3. As áreas de duas de suas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. A área total do paralelepípedo, em cm^2, é:

a) 96 b) 118 c) 236 d) 240 e) 472