Příklad 1:
David je na skautském táboře. V batohu má 6 ponožek (3 páry - 2 zelené, 2 šedé a 2 modré). V noci je vedoucí probudí na noční hru. David hrábne do batohu a zcela náhodně vytáhne 2 ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že si obuje ponožky stejné barvy?

Řešení:
Elementární jevy budou dvojice ponožek (neuspořádané), předpokládáme, že každá dvojice má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrána.

$$m = \binom{6}{2} = 15$$

A je jev, že si vybere správný pár (obě ponožky stejné barvy). Takové možnosti jsou pouze 3, takže $m_A = 3$.

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Příklad 2:
Házení 3 kostkami. Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že součet hodů je lichý (jev B), pokud nastal jev A (na červené kostce padla 4)

Řešení:
Jedná se o podmíněnou pravděpodobnost:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Kdy nastane $A \cap B$? Na červené 4 a zároveň součet lichý, tedy dvojice na Z a M je buď (sudá, lichá) nebo (lichá, sudá). Takových smíšených dvojic je 18, takže

$$P(A \cap B) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

V tomto případě se podmíněná pravděpodobnost rovná nepodmíněné, takže jevy A a B jsou nezávislé. To, že nastane jeden z nich neovlivní pravděpodobnost toho druhého. Takže, pokud na červené padne 4 nezmění to naše očekávání ohledně lichosti součtu.

Příklad 3:
Házení 3 kostkami. Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že rozdíl hodů na Č a M je jedna (jev G), pokus nastal jev A (na červené kostce padle 4)

Řešení:
Opět použijeme podmíněnou pravděpodobnost:

$$P(G|A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)}$$

Kdy nastane $G \cap A$? Na červené 4 a zároveň rozdíl mezi hodem na Č a M je 1. To znamená, že na modré musí být 3 nebo 5, na zelené může být cokoliv. Takových možností je tedy $2 \cdot 6 = 12$

$$P(A \cap G) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

$$P(G|A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

Kdysi jsme ovšem spočítali $P(G) = \frac{5}{18} < \frac{1}{3}$. Jevy A a G jsou tedy závislé. Pokud na Č padla 4, zvýší se pravděpodobnost, že číslo na modré bude přesně o 1 větší nebo menší, oproti situaci, kdy nevíme, co na Č padlo.

Příklad 4:
Udělala jsem chybu v matematickém příkladu a nemohu najít, kde je. Pošlu svoje řešení dvěma kamarádům, aby ho zkontrolovali. Jeden je schopný matematik a věřím, že chybu odhalí s pravděpodobností 0.9. Druhý je průměrný matematik a věřím, že chybu odhalí s pravděpodobností 0.5. Oba pracují zcela nezávisle na sobě. Jaká je pravděpodobnost, že se chybu podaří odhalit?

Řešení:
Označme A jev, že chybu odhalí první kamarád ($P(A) = 0.9$) a jev B, že ji odhalí druhý ($P(B) = 0.5$). Chci vědět, zda chybu odhalí aspoň jeden z nich, takže mě zajímá $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pravděpodobnost průniku dokážeme spočítat, pokud si uvědomíme, že jevy A a B jsou nezávislé. Potom $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= 0.9 + 0.5 - 0.9 \cdot 0.5 = 1.4 - 0.45 = 0.95$$

Příklad 5:
Pravděpodobnost, že student udělá zkoušku z biostatistiky je $P(B) = 0.7$. Pravděpodobnost, že udělá zkoušku z matematiky je $P(M) = 0.6$. Pravděpodobnost, že udělá obě zkoušky je $P(B \cap M) = 0.5$. Jsou jevy B a M nezávislé? Jaká je pravděpodobnost, že student udělá zkoušku z biostatistiky, pokud udělal matematiku? A jaká je pravděpodobnost, že udělá biostatistiku, pokud matematiku neudělal?

Řešení:

$$P(B \cap M) = 0.5 \neq 0.42 = P(B) \cdot P(M)$$

Jsou to tedy jevy závislé. To, že student udělá obě zkoušky je pravděpodobnější, než kdyby byly nezávislé.

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.83$$

$$P(B|\bar{M}) = \frac{P(B \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

Příklad 6:
Předpokládejme, že PCR test na přítomnost SARS-Cov 2 ve výtěru z nosohltanu má senzitivitu $P(T|N) = 0.9$ a specificitu $P(\bar{T}|\bar{N}) = 0.97$. Předpokládejme, že je v určitý den provedeno 40 000 PCR testů (poslední dobou to tak nějak ve všední dny bývá) a v testované populaci je prevalence viru $P(N) = 0.35$.

Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že negativně otestovaný člověk je ve skutečnosti nakažen (a kolik asi tak takových každý den je).
Také nás zajímá, jaká je pravděpodobnost, že pozitivně otestovaný člověk ve skutečnosti nemocný není (a kolik takových je).

Řešení:

$$P(N|\bar{T}) = \frac{P(N \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{T}|N) \cdot P(N)}{P(\bar{T}|N) \cdot P(N) + P(\bar{T}|\bar{N}) \cdot P(\bar{N})} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.35}{0.1 \cdot 0.35 + 0.97 \cdot 0.65} = \frac{0.035}{0.6655} = 0.0526$$

Počet negativně testovaných denně bude přibližně $40000 \cdot 0.6655 = 26620$. Z nich 5.26% je ve skutečnosti nakažených: $26620 \cdot 0.0526 = 1400$ lidí.

$$P(\bar{N}|T) = \frac{P(\bar{N} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|\bar{N}) \cdot P(\bar{N})}{P(T|\bar{N}) \cdot P(\bar{N}) + P(T|N) \cdot P(N)} =$$

$$= \frac{0.03 \cdot 0.65}{0.03 \cdot 0.65 + 0.9 \cdot 0.35} = \frac{0.0195}{0.3345} = 0.0583$$

Počet pozitivně testovaných je přibližně $40000 \cdot 0.3345 = 13380$, z nich 5.83% ve skutečnosti nakažených není: $13380 \cdot 0.0583 = 780$ lidí.

Příklad 7:
Náhodná veličina X je počet líců při hodu 3 mincemi. Jakých hodnot může nabývat a s jakými pravděpodobnostmi. Načrtněte distribuční funkci X.

Řešení:
Možné hodnoty: 0,1,2,3. Kolika způsoby může hod dopadnout?
$m = 2^3 = 8.$

- $P(X = 0) = \frac{1}{8}$
- $P(X = 1) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Příklad 8:
Spočítejte EX a var X pro X=počet líců při hodu 3 mincemi.

Řešení:

$$EX = \sum_k kP(X = k) = \sum_{k=0}^{3} kP(X = k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$varX = \sum_k (k - \mu_x)^2 P(X = k) = (0-1.5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1-1.5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2-1.5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3-1.5)^2 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{2.25}{8} + \frac{0.25 \cdot 3}{8} + \frac{0.25 \cdot 3}{8} + \frac{2.25}{8} = \frac{6}{8} = 0.75$$

Příklad 9:
Spočítejte střední hodnotu a rozptyl počtu ok při hodu na kostce (X).

Řešení:

$$EX = \sum_k kP(X = k) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + ...6 \cdot P(X = 6) =$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + ... + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$varX = E(X - EX)^2 = \sum_k (k - EX)^2 \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} (k - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}((1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2) =$$

$$= \frac{1}{6}(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25) = \frac{17.5}{6} \doteq 2.92$$

Příklad 10:
Matěj chodí do školy buď přímo (0.5km), nebo oklikou a staví se pro Lukáše (to pak ujde 0.8km). Pro Lukáše chodí náhodně s prstí 0.6. Pokud si zapomene svačinu, dojde si do pekárny pro rohlík a ujde navíc 0.2 km. Svačinu si zapomíná s prstí 0.3, nezávisle na tom, zda jde ráno k Lukášovi. Jaká je střední hodnota délky, jakou ujde Matěj po cestě do školy?

Řešení:
jev L-jde k Lukášovi, jev S-zapomněl si svačinu a jde do pekárny
Délka cesty do školy:
   0.5 ($\bar{L} \cap \bar{S}$): $P(X = 0.5) = P(\bar{L} \cap \bar{S}) = P(\bar{L})P(\bar{S}) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$
   0.8 ($L \cap \bar{S}$): $P(X = 0.8) = P(L \cap \bar{S}) = P(L)P(\bar{S}) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$
   0.7 ($\bar{L} \cap S$): $P(X = 0.7) = P(\bar{L} \cap S) = P(\bar{L})P(S) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$
   1.0 ($L \cap S$): $P(X = 1.0) = P(L \cap S) = P(L)P(S) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$
Součet všech prstí je 1.

$EX = 0.5 \cdot 0.28 + 0.8 \cdot 0.42 + 0.7 \cdot 0.12 + 1.0 \cdot 0.18 = 0.14 + 0.336 + 0.084 + 0.18 = 0.74\text{km}$