

CONTENIDO DEL CURSO DE CÁLCULO

1.- ¿Qué es una función?

Es muy probable que en cursos anteriores de matemáticas hayan conocido las funciones, sin embargo debido a que son esenciales para el cálculo integral y diferencial, nos tomaremos este capítulo a entenderlas desde sus fundamentos básicos, hasta llegar a aplicaciones complejas aplicadas junto con el cálculo.

No se preocupen este curso está elaborado para que entiendan de una manera fresca cada uno de sus puntos y las funciones son un especial caso, serán los ladrillos sobre los cuales nos sostendremos. Por lo tanto el éxito de este curso dependerá de que tanto comprendan el significado de una función. Ahora, el hecho de que ustedes comprendan el significado de una función dependerá en gran medida de mi capacidad para explicárselos. También, mi capacidad para explicarles el tema está condicionada al hecho de haber comido, en verdad entre más hambre tenga mientras hablo del tema, menos podré explicarlo, es claro que las tareas se hacen mejor con el estómago lleno. Lo que coma, estará en función de cuánto dinero traiga en mi bolsillo; pues dependiendo del dinero me comprare un taco o una pizza entera. Entonces al final el éxito de este curso estará en función de lo que coma, y he comido una pizza entera.

A toda esta relación entre el éxito de mi curso y la pizza, es a lo que se le llama función, ahora para términos matemáticos, vamos a definir la función de una manera adecuada.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto "X" de números reales "x" a un conjunto "Y" de números reales "y", donde el número "y" es único para cada valor "x".

Como ejemplos para comprender el texto anterior podremos citar el salario de una persona, que depende del número de horas trabajadas, la distancia recorrida por un objeto a velocidad constante depende del tiempo que ha transcurrido desde el punto del que salió. Como relaciones más complejas podemos citar que el volumen de un gas depende de la temperatura a la que está. Hay funciones más complejas y otras más sencillas pero en palabras sencillas

“Una función es la relación que hay entre dos conjuntos”

1.1.- Conceptos básicos.

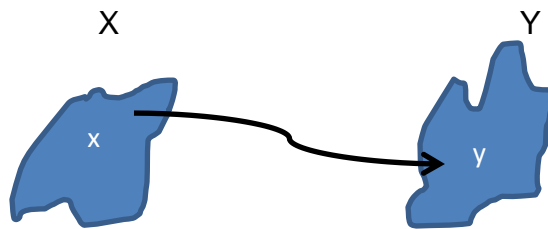


Figura 1.

X	Y=X ²
4	16
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9
-4	16

Tabla 1.

Este es un ejemplo sencillo y práctico para entender el concepto de función, la figura 1 muestra una relación de este tipo, vamos a considerar que todos los valores “y” del conjunto “Y” están en función de los valores de “x” del conjunto “X”. Observando la tabla de la derecha podremos determinar una regla que asocie un solo valor de “y” a un solo valor de “x”.

$$y = x^2$$

Esta es una ecuación que define una función en la cual cada valor de “y” tiene un solo valor de “x” relacionado.

Para denotar funciones se utilizan las letras “ f ”, “ g ”, y “ h ”.

El conjunto “X” es el “dominio” de la función, y el conjunto “Y” de todos los valores asignados a cada “x” en “X” es el contra dominio de la función.

Una vez que hemos comprendido los párrafos anteriores, nos dispondremos a representar una función, su dominio y contradominio. Vamos a representar los dominios y contradominios de la ecuación escrita anteriormente.

Utilizaremos la letra “ f ” para declarar nuestra función.

Y quedaría de la siguiente manera....

$$f(x) = x^2$$

El Dominio de esta función es $(-\infty, +\infty)$ y el contradominio es $(0, +\infty)$

La tabla 1 nos muestra la correspondencia de valores entre “x” y “y” es decir que para cada valor de “x” hay un valor a “y”. A este conjunto de números le llamaremos pares ordenados. Entonces podemos decir que la función definida por $y = x^2$ consta de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación, estos pares son ilimitados, en la tabla se encuentran algunos ejemplos como $(4, 16)$, $(3, 9)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$.

Tomemos otro ejemplo para instruir otra vez en cada uno de los términos antes explicados, analicemos la ecuación.

$$y = x^3$$

La tabla quedaría de la siguiente forma.

X	Y=X ³
4	64
3	27
2	8
1	1
0	0
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-4	-64

Tabla 2.

Declararemos nuestra función de la siguiente manera.

$$f(x) = x^3$$

El dominio de esta función es $(-\infty, +\infty)$ y su contra dominio es $(-\infty, +\infty)$

Un ejemplo de los pares ordenados de la ecuación son $(4, 16)$, $(1, 1)$, $(-2, -8)$

Estos pares son los que satisfacen la ecuación $y = x^2$. Podríamos considerar una función como un conjunto de pares ordenados como los que hemos visto en los dos ejemplos anteriores, por supuesto que existen un número ilimitado de pares ordenados. Conociendo este término, puede llegar a ser más fácil definir una función en base a este concepto, esto haría la definición de función mucho más precisa y comprensible, sería así.

Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de contradominio de la función.

El dominio siempre determinará los valores del contradominio, por tal motivo cuando se declara una función se debe dejar en claro el dominio, esto puede ser implícito o explícitamente. Por ejemplo si la función se define así.

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1$$

Aquí el dominio se declara implícitamente pues la función solo tiene un valor si " x " es cualquier número real; por lo tanto el dominio es el conjunto de todos los números reales.

Por el contrario si nuestra función se define de la siguiente manera.

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1 \quad 1 \leq x \leq 5$$

Entonces el dominio de la función consta de todos los números reales entre 1 y 5, incluido estos mismos.

Otro ejemplo más

En la función definida por

$$f(x) = \frac{6x - 3}{x + 5}$$

Está implícito que $x \neq -5$ y esto es porque el cociente no está definido para un valor de $x = -5$, por lo tanto el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales excepto -5.

EJEMPLO.-

Dada la función

$$f(x) = 2x^2 + x - 2$$

Determinar

a).- (a) $f(0)$; (b) $f(3)$; (c) $f(h)$; (d) $f(2h)$

$$(a) f(0) = 2(0^2) + 0 - 2$$

$$f(0) = 0 - 2$$

$$(b) f(3) = 2(3^2) + 3 - 2$$

$$f(3) = 19$$

$$(c) f(h) = 2h^2 + h - 2$$

$$(d) f(2h) = 2(2h^2) + 2h - 2$$

$$f(2h) = 4h^2 + 2h - 2$$

1.2 Funciones y su representación gráfica.

El concepto definido anteriormente de función como un conjunto de pares ordenados nos facilitara enunciar la siguiente definición de grafica de una función.

Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f .

A continuación graficaremos algunas de las funciones que hemos estado tratando

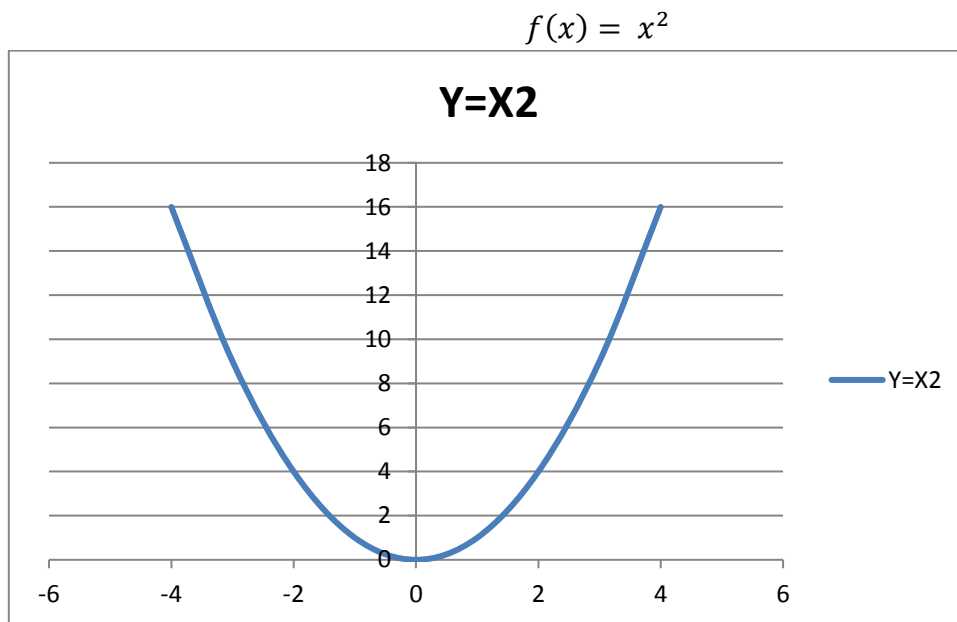
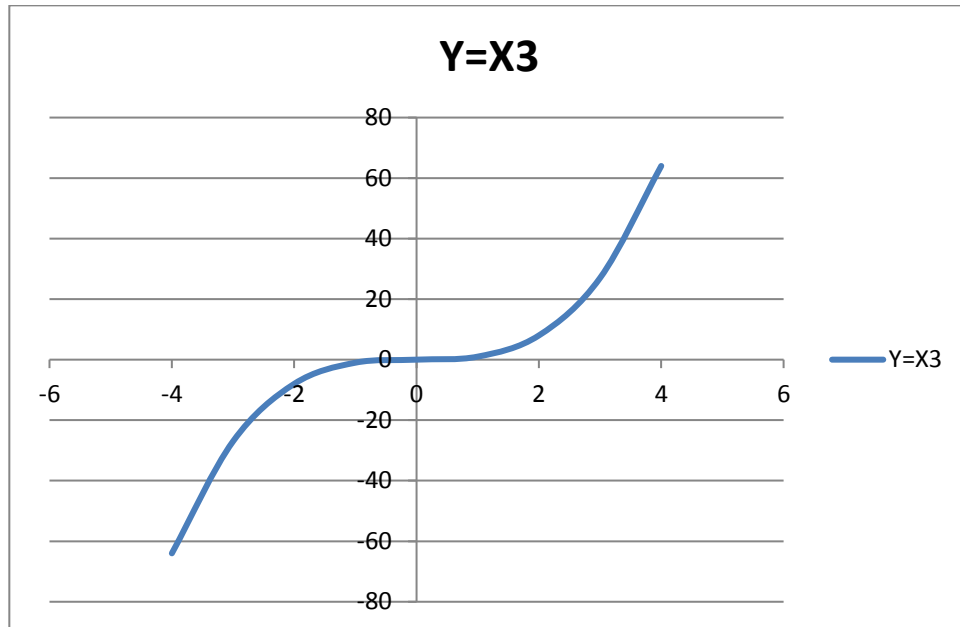


Figura 3.

$$f(x) = x^3$$



Recuerde que en una función existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. Lo cual representado de manera gráfica podríamos citarlo de la siguiente manera.

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función en no más de un punto.

El punto anterior es de mucha importancia, porque es una definición que por sí misma nos indica que es una función y que no lo es. Como por ejemplo la ecuación de circunferencia no es una función pues una recta que intersecte un punto de la gráfica podría bien intersectar cualquier otro punto.

EJEMPLO1.-

Determinaremos el dominio de la función h definida por:

$$h(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

- Sabemos que $\sqrt{x(x-2)}$ no es un número real cuando $x(x-2) < 0$, el dominio de la función h consta de los valores de x para los cuales $x(x-2) \geq 0$. Esta desigualdad se satisface cuando se tiene alguno de los dos casos siguientes $x \geq 0$ y $x-2 \geq 0$; o si $x \leq 0$ y $x-2 \leq 0$.

- Caso1:

$x \geq 0$ y $x-2 \geq 0$. Esto es,

$$x \geq 0 \text{ y } x \leq 2$$

Ambas desigualdades se cumplen si $x \geq 2$, lo cual equivale a que x este en el intervalo $[2, +\infty)$

- Caso2:

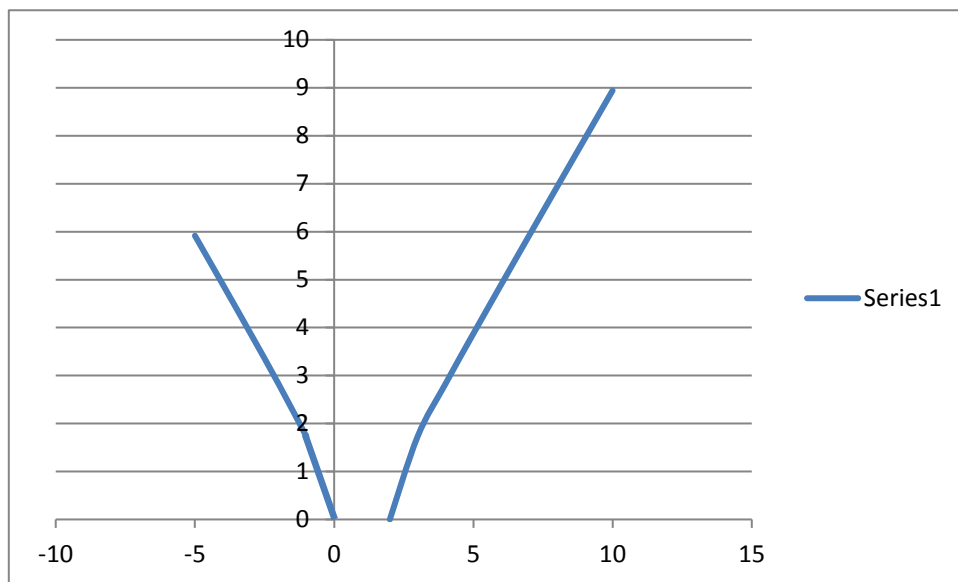
$x \leq 0$ y $x \leq 2$. Esto es,

$$x \leq 0 \text{ y } x \leq 2$$

Las dos desigualdades se cumplen si $x \leq 0$, lo cual equivale a que x pertenezca al intervalo $(-\infty, 0]$.

Las soluciones de estos dos casos se combinan para obtener el dominio de g , el cual es $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Nuestra grafica quedaría de la siguiente manera:



Esta grafica decae desde la izquierda hasta $x = 0$, asciende hacia la derecha a partir de $x = 2$, y no contiene puntos cuando x esta en el intervalo abierto $(0,2)$. La grafica apoya la respuesta.

Ejemplo 2.-

La función f esta definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 2 \\ 7, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determinaremos el dominio y el contra dominio de f y dibujaremos su grafica.

Como f esta definida para todo x , su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La siguiente grafica consta del punto $(2, 7)$ y todos los puntos sobre la parábola $y = x^2$ excepto $(2, 4)$. El contra dominio de f es $[0 + \infty]$

2.- INTRODUCCIÓN AL CALCULO DIFERENCIAL.

2.1.- DERIVADA Y SUS INTERPRETACIONES

Cuando surgen cuestiones concernientes a la razón entre dos cantidades variables, entramos en los dominios del Cálculo Diferencial. Son por tanto objeto de estudio del cálculo diferencial temas como la velocidad (razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla) de una partícula en un momento determinado, la pendiente (razón entre la diferencia de las ordenadas y las abscisas de dos puntos en el plano cartesiano) de la recta tangente a una gráfica en un punto dado de ésta, etc.

Incrementos: cuando una cantidad variable pasa de un valor inicial a otro valor, se dice que ha tenido un *incremento*. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para denotar esta diferencia se utiliza el símbolo Dx , que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro. Por ejemplo, si el valor inicial de una variable x , x_1 , es igual a 3, y el valor final x_2 es igual a 7, el incremento $Dx = x_2 - x_1 = 7 - 3 = 4$: la variable se ha incrementado positivamente en 4 unidades. En cambio, si el valor inicial es 7 y el valor final 3, $Dx = x_2 - x_1 = 3 - 7 = -4$: la variable ha tenido un incremento negativo (*decremento*) de 4 unidades.

Derivada de una función: Sea f una función definida en todo número de algún intervalo I , la derivada de f es aquella función, denotada por f' , tal que su valor en cualquier número x de I , está dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si el limite existe}$$

Se dice que una función es diferenciable o derivable cuando es posible hallar su derivada

Los símbolos utilizados para denotar una derivada son:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} f(x), \quad D_x y, \quad D_x f(x), \quad f'(x)$$

Geométricamente la derivada de una función f en un punto determinado se interpreta como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

2.1.1 CÁLCULO DE PENDIENTES

Para resolver muchos problemas en cálculo tendremos que determinar la recta tangente a la gráfica de una función en un punto específico, y a la pendiente

de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto la denominaremos pendiente de la gráfica en el punto.

Así que vamos a empezar, consideremos que la función f es continua en x_1 . Se debe definir la pendiente de la recta tangente a la grafica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Sea I un intervalo abierto que contiene a x_1 , en el cual esta definida f . Sea $Q(x_2, f(x_2))$ otro punto sobre la grafica de f tal que x_2 tambien esta en I .

Ahora dibujaremos una recta secante que pase entre los puntos P y Q . A la diferencias de las abscisas de P y Q se denota por Δx . De modo que.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observamos que Δx representa epql cambio en el valor de x y puede ser positivo o negativo. A este cambio lo nombraremos como incremento de x .

Volvamos a la recta secante entre P y Q , ahora determinaremos su pendiente, que estará definida por:

$$m_{pq} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$m_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora considere el punto P como un punto fijo y que el punto Q se mueve a lo largo de la curva hacia P ; esto es que Q tiende o se aproxima a P . Esto equivale a decir que Δx tiende a cero.

Conforme esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P . Si la recta secante PQ tiene una posición limite, es esta posición limite la que se quiere como la recta tangente a la grafica de f en el punto P . Se desea asi, que la pendiente de la recta tangente a la grafica de f en P sea el limite de m_{pq} conforme Δx tiende a cero, si este limite existe. Si $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{pq}$ es igual a $+\infty$ o a $-\infty$, entonces conforme Δx tiende a cero la recta PQ tiende a la recta que pasa por P y es paralela al eje y .

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se denomina pendiente a la gráfica en el punto.

Ejemplo1.-

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto $(2, 3)$. Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente en $(2, 3)$.

Solución.

Primero se calcula la pendiente de la recta tangente en $(2, 3)$. Con $f(x) = x^2 - 1$, se tiene .

$$m(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$m(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(2 + \Delta x)^2 - 1] - 3}{\Delta x}$$

$$m(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$m(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4$$

2.1.2 CALCULO DE INCREMENTO Y DE RAZONES DE CAMBIO.

INCREMENTOS:

Cuando una cantidad variable pasa de un valor inicial a otro valor, se dice que ha tenido un incremento. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para denotar esta diferencia se utiliza el símbolo Δx , que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro. Por ejemplo, si el valor inicial de una variable x , x_1 , es igual a 3, y el valor final x_2 es igual a 7, el incremento $\Delta x = x_2 - x_1 = 7 - 3 = 4$: la variable se ha incrementado positivamente en 4 unidades. En cambio, si el valor inicial es 7 y el valor final 3, $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 7 = -4$: la variable ha tenido un incremento negativo (decremento) de 4 unidades.

RAZON DE CAMBIO

Comenzando por la Razón Instantánea de Cambio de una función cuya variable independiente es el tiempo t . suponiendo que Q es una cantidad que varía con respecto del tiempo t , escribiendo $Q = f(t)$, siendo el valor de Q en el instante t . Por ejemplo

- ⌘ El tamaño de una población (peces, ratas, personas, bacterias,...)
- ⌘ La cantidad de dinero en una cuenta en un banco
- ⌘ El volumen de un globo mientras se infla
- ⌘ La distancia t recorrida en un viaje después del comienzo de un viaje

El cambio en Q desde el tiempo t hasta el tiempo $t + \Delta t$, es el incremento

La Razón de Cambio Promedio de Q (por la unidad de tiempo) es, por definición, la razón de cambio ΔQ en Q con respecto del cambio Δt en t , por lo que es el cociente

Definimos la razón de cambio instantánea de Q (por unidad de tiempo) como el límite de esta razón promedio cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Es decir, la razón de cambio instantánea de Q es

Lo cual simplemente es la derivada $f'(t)$. Así vemos que la razón de cambio instantánea de $Q = f(t)$ es la derivada

La interpretación intuitiva de la razón de cambio instantánea, pensamos que el punto $P(t, f(t))$ se mueve a lo largo de la gráfica de la función $Q = f(t)$. Cuando

Q cambia con el tiempo t , el punto P se mueve a lo largo de la curva. Pero si súbitamente, en el instante t , el punto P comienza a seguir una trayectoria recta, entonces la nueva trayectoria de P corresponde que Q cambia a una razón constante.

También como conclusión tenemos que si la pendiente de la recta tangente es positiva ésta es ascendente y si la pendiente es negativa ésta es descendente, así

Q es creciente en el instante t si
 Q es decreciente en el instante t si

La derivada de cualquier función, no solamente una función del tiempo, puede interpretarse como una razón de cambio instantánea con respecto de la variable independiente. Si $y = f(x)$, entonces la razón de cambio promedio de y (por un cambio unitario en x) en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ es el cociente

La razón de cambio instantánea de y con respecto de x es el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, de la razón de cambio promedio. Así, la razón de cambio instantánea de y con respecto de x es

Interpretación geométrica de la derivada

Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P . Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en P , y por tanto el ángulo α tiende a ser β .

La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$m_t = f'(a)$$

Dada la parábola $f(x) = x^2$, hallar los puntos en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. La bisectriz del primer cuadrante tiene como ecuación $y = x$, por tanto su pendiente es $m = 1$. Como las dos rectas son paralelas tendrán la misma pendiente, así que:
 $f'(a) = 1$.

Porque la pendiente de la tangente a la curva es igual a la derivada en el punto $x = a$.

2.1.3 DERIVADA DE FUNCIONES POLINOMIALES SENCILLAS

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = (x^2 + 2)(x^3 + 3) \quad b) y = (2x^3 - 2)(3x^2 - x)$$

$$c) y = (2x + 3)(x^2 + 4x - 5) \quad d) y = (1 + 5x^3)(1 + 3x^2)$$

$$e) y = (a + x)(b + x) \quad f) y = (3x^2 - 1)(x + 2) - (x^2 + 1)$$

$$g) y = (2x^3 + 5) - (x^2 - 3)(7 + x)$$

Solución:

a) Primero efectuaremos el producto y después derivaremos.

$$y = (x^2 + 2)(x^3 + 3) = x^5 + 3x^2 + 2x^3 + 6$$

$$y' = 5x^4 + 6x + 6x^2$$

También se puede hacer utilizando la siguiente regla de derivación:

Si $y = f(x) \cdot g(x)$ entonces $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, es decir, la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función, siendo, en este caso, $f(x) = (x^2 + 2)$ y $g(x) = (x^3 + 3)$, por tanto:

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x^3 + 3) + (x^2 + 2)3x^2 = 2x^4 + 6x + 3x^4 + 6x^2 \\ &= 5x^4 + 6x + 6x^2 \end{aligned}$$

b)

$$y' = 6x^2(3x^2 - x) + (2x^3 - 2)(6x - 1) = 18x^4 - 6x^3 + 12x^4 - 2x^3 - 12x + 2$$

$$y' = 30x^4 - 8x^3 - 12x + 2$$

c)

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 + 4x - 5) + (2x + 3)(2x + 4) \\ &= 2x^2 + 8x - 10 + 4x^2 + 8x + 6x + 12 = \\ &= 6x^2 + 22x + 2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} y' &= 15x^2(1 + 3x^2) + (1 + 5x^3)6x = 15x^2 + 45x^4 + 6x + 30x^4 = \\ &= 75x^4 + 15x^2 + 6x \end{aligned}$$

e)

$$y' = 1(b + x) + (a + x)1 = b + x + a + x = 2x + a + b$$

f)

$$\begin{aligned} y' &= 6x(x + 2) + (3x^2 - 1)1 - 2x = 6x^2 + 12x + 3x^2 - 1 - 2x = \\ &= 9x^2 + 10x - 1 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 2x(7 + x) - (x^2 - 3)1 = 6x^2 - 14x - 2x^2 - x^2 + 3 = \\ &= 3x^2 - 14x + 3 \end{aligned}$$

3. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.

3.1 FORMULAS Y REGLAS PARA DERIVAR

MÉTODO DE DERIVACIÓN POR INCREMENTO (REGLA DE LOS 4 PASOS):

Este método de derivación esta basado en la definición de derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Si vemos detenidamente la última notación, en ella esta basada la regla de los 4 pasos, que son los siguientes:

1. $f(x + \Delta x)$. Este paso nos indica que a todas las variables x les tenemos que sumar su incremento en x ($x + \Delta x$), por ejemplo si la función es $y = x^2 + 3x$, al sumarle $x + \Delta x$ nos queda $y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)$, en otras palabras podemos decir que todas las x de la función se cambiaran o sustituirán por $(x + \Delta x)$. Después de agregar los $(x + \Delta x)$, tenemos que hacer las operaciones algebraicas correspondientes, como desarrollar el cuadrado $(x + \Delta x)^2$ y la multiplicación $3(x + \Delta x)$, en el caso del ejemplo dado.

2. $-f(x)$. Este paso nos indica que a la función a la que se sumó el $(x + \Delta x)$ se le tiene que restar ahora la función inicial que en este caso es $x^2 + 3x$.

3. Después de restar la función inicial, se factoriza la expresión y se divide todo entre Δx .

4. Después de la división se aplica el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, con lo cual todas las expresiones que tengan Δx se van a eliminar y lo que quede será la derivada de nuestra función.

EJERCICIOS RESUELTOS:

Hallar la derivada de la función $y = x^2 + 3x$, aplicando la regla de los 4 pasos.

Sumando los incrementos de x:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x$$

Restamos ahora la funcion inicial:

$$y + \Delta y - y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x = +2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

Ahora dividimos entre Δx , podemos hacerlo factorizando por termino comun o simplemente dividir termino por termino entre Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 2x - \Delta x + 3$$

Finalmente aplicamos el límite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a lo que nos quedó de la división.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x - \Delta x + 3 = 2x + 3$$

FORMULAS DE DERIVACIÓN

FÓRMULAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

1. $\frac{d}{dx}c = 0$; Si $c = \text{constante}$

La derivada de una constante es igual a cero.

2. $\frac{d}{dx}x = 1$

La derivada de x con respecto a x es igual a la unidad.

3. $\frac{d}{dx}Cx = C$

La derivada de una constante, multiplicada por la variable x elevada a la uno, con respecto a x , es igual a la constante.

4. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

La derivada de x elevada a una potencia n , con respecto a x , es igual al producto de n por x elevada a la $n - 1$.

5. $\frac{d}{dx}Cx^n = nCx^{n-1}$

La derivada de una constante multiplicada por x elevada a la n , es igual al producto de n por la constante por x elevada a la $n - 1$.

EJERCICIOS RESUELTOS:

Hallar la derivada de las funciones que se dan a continuación:

1. $y = 10$

Para expresar que estamos obteniendo la derivada de la función, a la derivada de y la representaremos como y' (ye prima).

De acuerdo con la fórmula 1 de derivación:

Si: $y = 10 \Rightarrow y' = 0$

2. $y = \frac{1}{2}$

De acuerdo con la fórmula 1 de derivación:

Si: $y = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = 0$

3. $y = \sqrt{\frac{3}{16}}$

De acuerdo con la fórmula 1 de derivación:

Si: $y = \sqrt{\frac{3}{16}} \Rightarrow y' = 0$

4. $y = x$

De acuerdo con la fórmula 2 de derivación:

Si: $y = x \Rightarrow y' = 1$

5. $y = 12x$

De acuerdo con la formula 3 de derivación:

Si: $y = 12x \Rightarrow y' = 12$

6. $y = -25x$

De acuerdo con la formula 3 de derivación:

Si: $y = -25x \Rightarrow y' = -25$

7. $y = x^3$

De acuerdo con la formula 4 de derivación:

Si: $y = x^3 \Rightarrow y' = (3)(x)^{3-1} \Rightarrow y' = 3x^2$

8. $y = x^5$

De acuerdo con la formula 4 de derivación:

Si: $y = x^5 \Rightarrow y' = (5)(x)^{5-1} \Rightarrow y' = 5x^4$

9. $y = 4x^2$

De acuerdo con la formula 5 de derivación:

Si: $y = 4x^2 \Rightarrow y' = (2)(4)(x)^{2-1} \Rightarrow y' = 8x$

10. $y = -12x^6$

De acuerdo con la formula 5 de derivación:

Si: $y = -12x^6 \Rightarrow y' = (6)(-12)(x)^{6-1} \Rightarrow y' = -72x^5$

11. $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 10$

De acuerdo con las formulas 1, 3, 4 y 5 de derivación:

Si: $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 10 \Rightarrow y' = 9x^2 + 10x - 4$

12. $y = 10x^6 + x^4 - 4x^3 + 105x^2 - 6x + 9$

De acuerdo con las formulas 1, 3, 4 y 5 de derivación:

Si: $y = 10x^6 + x^4 - 4x^3 + 105x^2 - 6x + 9 \Rightarrow y' = 60x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 210x - 6$

FORMULAS DE DERIVACIÓN DE FUNCIONES QUE REALIZAN OPERACIONES ALGEBRAICAS (SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISION)

Ahora nos enfocaremos a las derivadas un poco mas complicadas, las que involucran funciones que realizan operaciones algebraicas, empecemos por la suma y la resta:

$$I. \frac{d}{dx}(u + v + \dots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \dots \text{ (suma y resta)}$$

Para hallar las derivadas de funciones que nada mas realizan operaciones de suma y resta, lo único que tenemos que hacer es: sacar por separado la derivada de cada uno de los términos de la función.

Aplicaremos la formula de derivada de sumas y restas cuando:

- A. La función no esta en forma de cociente.
- B. En caso de que exista una raíz, esta no contiene mas de dos términos.
- C. Si los términos están agrupados en un paréntesis, este paréntesis no esta elevado a un exponente diferente de uno.

$$1. y = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 15$$

$$y' = \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(8x^2) + \frac{d}{dx}(9x) - \frac{d}{dx}(15)$$

$$y' = 8x^2 - 16x + 9$$

$$2. y = 20x^6 - 18x^4 + 90x^2 - 150$$

$$y' = \frac{d}{dx}(20x^6) - \frac{d}{dx}(18x^4) + \frac{d}{dx}(90x^2) - \frac{d}{dx}(150)$$

$$y' = 120x^5 - 72x^3 + 180x$$

$$\text{li. } \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u) \quad (\text{multiplicación})$$

Para obtener la derivada de un producto, debemos de empezar por definir quien es el termino u y quien es el termino v . Una vez definidos estos términos debemos de seguir el siguiente procedimiento:

- A. Sustituir los valores de u y v en la formula de derivación.
- B. Derivar las expresiones que tengan delante de si el operador diferencial $\frac{d}{dx}$
- C. Realizar las operaciones algebraicas de simplificación (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, etc.).

$$3. \quad y = \underbrace{(3x^3 + 8x^2 + 5)}_u \underbrace{(4x^2 - 3x)}_v$$

Sustituyendo en la formula:

$$y' = (3x^3 + 8x^2 + 5) \frac{d}{dx}(4x^2 - 3x) + (4x^2 - 3x) \frac{d}{dx}(3x^3 + 8x^2 + 5)$$

$$\text{Derivando: } \frac{d}{dx}(4x^2 - 3x) = (4x - 3) \text{ Y } \frac{d}{dx}(3x^3 + 8x^2 + 5) = (9x^2 + 16x):$$

$$y' = (3x^3 + 8x^2 + 5)(8x - 3) + (4x^2 - 3x)(9x^2 + 16x)$$

Multiplicando los paréntesis:

$$y' = 24x^4 - 9x^3 + 64x^3 - 24x^2 + 40x - 15 + 36x^4 + 64x^3 - 27x^3 - 48x^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$y' = 60x^4 + 92x^3 - 72x^2 + 40x - 15$$

$$4. \ y = \frac{(9x^3 - 10)}{u} \frac{(8x^4 - 3x^3)}{v}$$

Sustituyendo en la formula:

$$y' = (9x^3 - 10) \frac{d}{dx}(8x^4 - 3x^3) + (8x^4 - 3x^3) \frac{d}{dx}(9x^3 - 10)$$

$$\text{Derivando } \frac{d}{dx}(8x^4 - 3x^3) = (32x^3 - 9x^2) \text{ y } \frac{d}{dx}(9x^3 - 10) = (27x^2):$$

$$y' = (9x^3 - 10)(32x^3 - 9x^2) + (8x^4 - 3x^3)(27x^2)$$

Multiplcando los paréntesis:

$$y' = 288x^6 - 81x^5 - 320x^3 + 90x^2 + 216x^6 - 81x^5$$

Reduciendo términos semejantes:

$$y' = 504x^6 - 162x^5 - 320x^3 + 90x^2$$

$$\text{lii. } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0 \quad (\text{división})$$

Para obtener la derivada de un cociente, al igual que en la multiplicación, primero tenemos que ver quien es el termino u y quien es el termino v .

El procedimiento es el siguiente:

A. Sustituimos en la formula los valores de u y v . Como en la formula se van a sustituir los valores de $\frac{d}{dx}(u)$ y $\frac{d}{dx}(v)$, podemos sacar estos valores antes de sustituirlos en la formula y con esto, la derivación quedaría incluida en este paso.

B. En el denominador de la formula debe de ir el valor del termino v elevado al cuadrado, para no estar repitiendo varias veces este valor, podemos escribir nada mas v^2 en el denominador y hasta el final sustituimos el valor v ya elevado al cuadrado. Esto se debe a que las operaciones de reducción se realizan en el numerador y no en el denominador.

C. Cuando se haga la multiplicación de los paréntesis del lado derecho, debemos de poner los resultados de estas multiplicaciones encerrados todos en un paréntesis, ya que el signo negativo que estaba delante de estos dos paréntesis, va a afectar a todos estos términos cambiándoles el signo.

D. Después de las multiplicaciones y cambios de signos, se reducen los términos semejantes.

E. Una vez reducido el numerador se puede hacer una factorización si con ello se puede hacer una reducción del exponente del paréntesis del denominador.

$$5. \quad y = \frac{3x+5}{2x^2+3x}$$

Definimos los valores de u y v y de una vez sacamos sus derivadas $\left(\frac{d}{dx}u \right.$ y

$\left. \frac{d}{dx}v \right)$:

$$y = \frac{3x+5}{2x^2+3x} \quad \begin{array}{l} \rightarrow u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 3 \\ \rightarrow v \Rightarrow \frac{d}{dx}v = 4x+3 \end{array}$$

Sustituyendo en la formula los valores de u , v , $\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$:

$$y' = \frac{(2x^2 + 3x)(3) - (3x + 5)(4x + 3)}{v^2}$$

Efectuando las multiplicaciones:

$$y' = \frac{6x^2 + 9x - (12x^2 + 9x + 20x + 15)}{v^2}$$

Cambiando los signos de los terminos de adentro del paréntesis:

$$y' = \frac{6x^2 + 9x - 12x^2 - 29x - 15}{v^2}$$

Reduciendo los terminos semejantes y sustituyendo el valor de v en el denominador:

$$y' = \frac{-6x^2 - 20x - 15}{(2x^2 + 3x)^2} \quad \text{O} \quad y' = -\frac{6x^2 + 20x + 15}{(2x^2 + 3x)^2}$$

En la respuesta opcional que se da, como todos los terminos del numerador son negativos, se coloca delante del resultado un signo negativo y con ello todos los signos de los terminos del numerador cambian de negativos a positivos. Esto se hace mas que nada por cuestion de estetica ya que según algunos autores se ven mejor las cantidades expresadas con signos positivos, pero de cualquier forma los dos resultados son correctos.

$$6. y = \frac{8x^2 + 3x - 5}{4x^2 - 2x - 1}$$

Definimos los valores de u y v y de una vez sacamos sus derivadas ($\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$):

$$y = \frac{8x^2 + 3x - 5}{4x^2 - 2x - 1} \rightarrow u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 16x - 3$$

$$\rightarrow v \Rightarrow \frac{d}{dx}v = 8x - 2$$

Sustituyendo en la formula los valores de u , v , $\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$:

$$y' = \frac{(4x^2 - 2x - 1)(16x - 3) - (8x^2 + 3x - 5)(8x - 2)}{v^2}$$

Efectuando las multiplicaciones:

$$y' = \frac{64x^3 + 12x^2 - 32x^2 - 6x - 16x - 3 - (64x^3 - 16x^2 + 24x^2 - 6x - 40x + 10)}{v^2}$$

Cambiando los signos de los terminos de adentro del paréntesis:

$$y' = \frac{64x^3 + 12x^2 - 32x^2 - 6x - 16x - 3 - 64x^3 + 16x^2 - 24x^2 + 6x + 40x - 10}{v^2}$$

Reduciendo los terminos semejantes y sustituyendo el valor de v :

$$y' = -\frac{6x^2 + 20x + 15}{(4x^2 - 2x - 1)^2}$$

$$7. y = \frac{3x+2}{2x+3}$$

Definimos los valores de u y v y de una vez sacamos sus derivadas ($\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$):

$$y = \frac{3x+2}{2x+3} \quad \begin{array}{l} \rightarrow u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 3 \\ \rightarrow v \Rightarrow \frac{d}{dx}v = 2 \end{array}$$

Sustituyendo en la formula los valores de u , v , $\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$:

$$y' = \frac{(2x+3)(3) - (3x+2)(2)}{v^2}$$

Efectuando las multiplicaciones:

$$y' = \frac{6x+9 - (6x+4)}{v^2}$$

Cambiando los signos de los terminos de adentro del paréntesis:

$$y' = \frac{6x+9 - 6x - 4}{v^2}$$

Reduciendo los terminos semejantes y sustituyendo el valor de v :

$$y' = -\frac{5}{(2x+3)^2}$$

$$8. y = \frac{3-2x}{3+2x}$$

Definimos los valores de u y v y de una vez sacamos sus derivadas ($\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$):

$$y = \frac{3-2x}{3+2x} \quad \begin{array}{l} \rightarrow u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = -2 \\ \rightarrow v \Rightarrow \frac{d}{dx}v = 2 \end{array}$$

Sustituyendo en la formula los valores de u , v , $\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$:

$$y' = \frac{(3+2x)(-2) - (3-2x)(2)}{v^2}$$

Efectuando las multiplicaciones:

$$y' = \frac{-6x - 4x - (6 - 4x)}{v^2}$$

Cambiando los signos de los terminos de adentro del paréntesis:

$$y' = \frac{6 - 4x - 6x + 4x}{v^2}$$

Reduciendo los terminos semejantes y sustituyendo el valor de v :

$$y' = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

$$\text{Iv. } \frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1} \frac{d}{dx}(u) \quad (\text{potencia})$$

Obtener la derivada de una potencia no es tan complicado, ya que no hay que hacer tantas operaciones algebraicas de reducción como en la multiplicación y la división.

El procedimiento es el siguiente:

A. El termino u va a estar formado por todos los terminos que se encuentren dentro del paréntesis, mientras que el termino m va a ser el exponente que se encuentra en la parte de afuera del paréntesis.

B. Se sustituyen los valores de u y m en la formula de derivación y como en la parte final de dicha formula, nos piden la derivada del termino $u \left[\frac{d}{dx}(u) \right]$, podemos sacar de una vez esta derivada y sustituirla de esta forma en la formula de derivación.

C. Una vez sustituidos los valores en la formula de derivación, lo unico que hay que hacer son las operaciones algebraicas de reducción, en este caso, solo tenemos que multiplicar los terminos de los paréntesis que no tengan exponente en la parte de afuera.

$$9. y = (3x^2 + 5x)^7$$

Definimos los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y = \underbrace{(3x^2 + 5x)}_u^{7 \rightarrow m}$$

$$\text{Entonces si } u = 3x^2 + 5x \Rightarrow \frac{d}{dx}(u) = 6x + 5$$

Sustituimos en la formula los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y' = 7(3x^2 + 5x)^6(6x + 5)$$

Multiplicando el numero que tenemos al inicio por las cantidades cuyo paréntesis no tiene exponente en la parte de afuera:

$$y' = (42x + 35)(3x^2 + 5x)^6$$

El paréntesis que tiene exponente en la parte de afuera, $(3x^2 + 5x)^6$, permanece igual durante el proceso de simplificación y reducción.

$$10. y = (9x^3 - 42x^2 + 5x)^6$$

Definimos los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ u}}{9x^3 - 42x^2 + 5x} \right)^{6 \rightarrow m}$$

Entonces si $u = 3x^2 + 5x \Rightarrow \frac{d}{dx}(u) = 6x + 5$

Sustituimos en la formula los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y' = 6(9x^3 - 42x^2 + 5x)^5 (27x^2 - 84x + 5)$$

Multiplicando las expresiones cuyo paréntesis no tienen exponente en la parte de afuera o que no se encuentran dentro de algun paréntesis.

$$y' = (162x^2 - 48x + 30)(9x^3 - 42x^2 + 5x)^5$$

11. $y = (2x^2 + 3)^2$

Definimos los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ u}}{2x^2 + 5} \right)^{2 \rightarrow m}$$

Entonces si $u = 2x^2 + 5 \Rightarrow \frac{d}{dx}(u) = 4x$

Sustituimos en la formula los valores de u , m y $\frac{d}{dx}(u)$:

$$y' = 2(2x^2 + 3)(4x)$$

En este ejercicio ninguno de los paréntesis tiene exponente en la parte de afuera, por lo que todos los terminos se tienen que multiplicar para hallar el resultado de la derivada.

Tenemos 2 opciones para hacer la multiplicacion:

A. Que el 2 multiplique primero al parentesis $(2x^2 + 3)$ y el resultado de esto se multiplique por $(4x)$ ó:

B. que el 2 multiplique primero al $(4x)$ y el resultado de esto se multiplique por el paréntesis $(2x^2 + 3)$.

No importa el orden en que se haga la multiplicación, si se hizo en forma correcta el resultado al final sera el mismo.

$$y' = 2(2x^2 + 3)(4x) \Rightarrow y' = (4x^2 + 6)(4x) \Rightarrow y' = 16x^3 + 24x$$

$$y' = 2(2x^2 + 3)(4x) \Rightarrow y' = (2x^2 + 3)(8x) \Rightarrow y' = 16x^3 + 24x$$

Derivación de funciones con variables con exponentes negativos y exponentes fraccionarios

Cuando tengamos que derivar funciones con variables con exponentes negativos, fraccionarios o ambos, tenemos que recordar dos leyes de exponentes para expresiones algebraicas:

A. Para exponentes negativos: una expresión algebraica que este actuando como factor en un cociente, puede pasarse del numerador al denominador siempre y cuando le cambiemos el signo al exponente de dicho factor.

Matemáticamente, lo anterior se representa así:

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}} \quad \text{O} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

B. Para exponentes fraccionarios: un exponente fraccionario nos representa o nos va a dar lugar a un radical o raíz. Esto quiere decir que una potencia de exponente fraccionario se puede convertir en una raíz y viceversa, donde el numerador del exponente fraccionario se va a convertir en el exponente de la base dentro de la raíz y el denominador del exponente fraccionario se va a convertir en el índice de la raíz.

Matemáticamente, lo anterior se represente así:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Estas dos leyes de exponentes nos van servir a veces al principio y al final del proceso de derivación. Al principio para ayudarnos a que la función pueda derivarse por medio de la fórmula de potencia

Cuando la variable que queramos derivar se encuentre en el denominador, algunas veces para no usar la fórmula de derivación de un cociente, podemos pasar

nuestra variable al numerador y con esto, podemos usar mejor la formula de derivada de una potencia.

Hallar el valor de las derivadas de las siguientes funciones, usando la formula de potencia y procurando que el resultado no tenga exponentes negativos ni fraccionarios:

Ejemplos:

$$1. y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

Como los terminos solo estan sumandose, entonces solo tenemos que hallar la derivada de cada uno de los terminos, todos van a llevar el mismo procedimiento.

Lo primero que haremos sera pasar las variables del denominador al numerador, de acuerdo con la ley del exponente negativo, al pasar el termino al numerador, tenemos que cambiarle el signo al exponente.

Pasando las variables al numerador la función nos queda:

$$y = x^{-2} + x^{-3} - x^{-4}$$

Ahora ya podemos derivar cada uno de los terminos, solo debemos de tener cuidado al momento de restarle la unidad al exponente ya que este al ser negativo y restarle uno, hace que el exponente y el uno tengan signos iguales y en realidad en lugar de restarlos tenemos que sumarlos por ejemplo el exponente del primer termino es -2 así que al restarle uno lo que tenemos es $-2 - 1 = -3$, esto sucedera siempre que derivemos a una variable con exponente negativo.

La derivada nos queda:

$$y = -2x^{-3} - 3x^{-4} + 4x^{-5}$$

Finalmente solo tenemos que volver a pasar las variables al denominador para que así ya no tengan exponente negativo, solo pasaremos las variables que tienen exponentes negativos, los coeficientes y los signos de estos permanecerán en el numerador:

El resultado de la derivada es:

$$y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$$

El procedimiento completo es:

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \Rightarrow y = x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} \Rightarrow y = -2x^{-3} - 3x^{-4} - 4x^{-5} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$$

$$2. y = \frac{8}{x^3} + 9x^2 + 3x^{-3}$$

Para este ejercicio solo pasaremos a x^3 al numerador, así que la función nos queda

$$y = 8x^{-3} + 9x^2 + 3x^{-3}$$

En la función tenemos dos terminos semejantes ($8x^{-3}$ y $3x^{-3}$) los cuales podemos simplificar, así que la función sería ahora:

$$y = 11x^{-3} + 9x^2$$

DERIVANDO LA FUNCIÓN:

$$y' = -33x^{-4} + 18x$$

Pasando al denominador la variable con exponente negativo:

$$y' = -\frac{33}{x^4} + 18x$$

El procedimiento completo paso a paso es:

$$y = \frac{8}{x^3} + 9x^2 + 3x^{-3} \Rightarrow y = 8x^{-3} + 9x^2 + 3x^{-3} \Rightarrow y = 11x^{-3} + 9x^2 \Rightarrow y' = -33x^{-4} + 18x \Rightarrow y' = -\frac{33}{x^4} + 18x$$

$$3. y = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{5x^3} + \frac{9}{4x^4}$$

Pasamos al numerador las variables (solo pasan las x, sus coeficientes se quedan en el denominador)

$$y = \frac{x^{-2}}{2} + \frac{4x^{-3}}{5} + \frac{9x^{-4}}{4}$$

DERIVANDO:

$$y' = -\frac{2x^{-3}}{2} + \frac{12x^{-4}}{5} - \frac{36x^{-5}}{4}$$

En el primer y el tercer termino podemos dividir el coeficiente entre el denominador:

$$y' = -x^{-3} + \frac{12x^{-4}}{5} - 9x^{-5}$$

Pasando las variables negativas al denominador:

$$y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{12}{5x^4} + \frac{9}{x^5}$$

El procedimiento completo es:

$$y = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{5x^3} + \frac{9}{4x^4} \Rightarrow y = \frac{x^{-2}}{2} - \frac{4x^{-3}}{5} + \frac{9x^{-4}}{4} \Rightarrow y' = -\frac{2x^{-3}}{2} + \frac{12x^{-4}}{5} - \frac{36x^{-5}}{4} \Rightarrow y' = -x^{-3} + \frac{12x^{-4}}{5} - 9x^{-5} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{12}{5x^4} + \frac{9}{x^5}$$

$$4. y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}}$$

Estas funciones aunque tienen exponente fraccionario ya pueden ser derivadas, solo recordamos la tecnica basica de derivación, el exponente multiplica al coeficiente de la variable y al exponente de la variable se le resta una unidad. Como el coeficiente de todos los terminos es uno, entonces al multiplicarlo por el exponente de la variable, nos quedara como coeficiente del termino lo que inicialmente era el exponente, en lo que respecta a restarle una unidad al exponente, una tecnica sencilla para obtener el exponente de la variable es que al numero de arriba le restemos el de abajo y al resultado le pongamos el denominador

de la función, por ejemplo para el $\frac{4}{3}$ al 4 le restamos 3, así que queda 1, a este 1 le ponemos el denominador de la fracción, así que nos daría $\frac{1}{3}$ que es el resultado de $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, entonces derivando la función:

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$$

Como se dijo antes un exponente fraccionario nos da lugar a un radical, así que eliminaremos estos exponentes colocando a las variables dentro de un radical, donde el numerador del exponente fraccionario se convertirá en el exponente de x y el denominador del exponente fraccionario se convertirá en el índice de la raíz:

Eliminando exponentes fraccionarios:

$$y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$$

El procedimiento completo es:

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$$

$$5. y = x^{\frac{11}{2}} + x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$$

Derivando la función:

$$y = \frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

Haremos ahora el proceso de formar los radicales, pero si observamos el tercer termino, su exponente es negativo, así que la diferencia que tendra con los otros es que se le tiene que aplicar la regla del exponente negativo, así que la raiz del tercer termino ira en el denominador, esto pasara con todas las x que queden con exponente negativo.

Formando los radicales:

$$y' = \frac{11}{2}\sqrt{x^9} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Como veran el signo del exponente determina donde quedara la variable (y en consecuencia la raiz, en el caso de radicales), si en numerador o en el denominador.

Existen funciones en las cuales para obtener la derivada de la misma, tenemos que utilizar varias formulas de las de operaciones algebraicas. En este tipo de ejercicios debemos de analizar que operación esta haciendo cada funcion para que podamos seleccionar que formulas vamos a utilizar y algo muy importante, en que orden se van a utilizar dichas formulas.

En el ejemplo que se resuelva a continuación, se combinaran varias formulas para obtener el resultado de la derivada.

Derivar la siguiente funcion:

$$1.- y = (3x^2 + 5)^4 (5x^3 + 3)^3$$

La funcion que nos dan es una multiplicación de dos expresiones algebraicas, donde cada una de las expresiones es una potencia.

Resolvamos el ejercicio como un producto:

$$y = \underbrace{(3x^2 + 5)}_u^4 \underbrace{(5x^3 + 3)}_v^3$$

Tomando como termino u a $(3x^2 + 5)^4$ y como termino v a $(5x^3 + 3)^3$, sustituimos estos valores en la formula de derivada de un producto:

$$y' = (3x^2 + 5)^4 \frac{d}{dx}(5x^3 + 3)^3 + (5x^3 + 3)^3 \frac{d}{dx}(3x^2 + 5)^4$$

para obtener las derivadas de los terminos $(5x^3 + 3)^3$ y $(3x^2 + 5)^4$, usamos la formula de derivada de una potencia, donde u van a ser los terminos que estan Dentro de los paréntesis y los valores de m van a ser 3 y 4 respectivamente. en este paso se termina el uso del calculo diferencial, todo lo que hagamos después de esto, seran nada mas procedimientos algebraicos de simplificación y reducción del resultado.

Saquemos la derivada de los terminos $(5x^3 + 3)^3$ Y $(3x^2 + 5)^4$

$$\frac{d}{dx}(5x^3 + 3)^3 = (3)(5x^3 + 3)^2(15x^2) = (45x^2)(5x^3 + 3)^2$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 5)^4 = (4)(3x^2 + 5)^3(6x) = (24x)(3x^2 + 5)^3$$

Sustituyendo estos valores en la derivada del producto tenemos:

$$y' = (3x^2 + 5)^4(45x^2)(5x^3 + 3)^2 + (5x^3 + 3)^3(24x)(3x^2 + 5)^3$$

Esta expresión algebraica es muy compleja para dejarla como resultado, así que tenemos que simplificarla y para ello recurriremos al álgebra..

Para simplificar el resultado, podemos factorizar por término común. Para determinar cual es el término común, tenemos que ver que expresiones aparecen repetidas en los dos términos (recordar que el signo positivo que tenemos entre los paréntesis hace que tengamos dos términos los cuales después de multiplicarse entre ellos deberán sumarse), las expresiones que aparecen en ambos términos son $(3x^2 + 5)$ y $(5x^3 + 3)$, a cada uno de los paréntesis le pondremos el menor exponente con que aparece en ambos términos, así que el término común de esta expresión es $(3x^2 + 5)^3(5x^3 + 3)^2$.

Ya que tenemos definido el término común, lo que haremos es escribirlo y después de él abriremos un corchete de la siguiente manera:

$$y' = (3x^2 + 5)^3(5x^3 + 3)^2[\quad]$$

Ahora viene la parte más complicada y que causa más confusión, así que cuidado y en caso de no entenderlo, les sugiero leerlo varias veces o preguntarlo en clase.

Veamos para que nos sirve el termino comun, el hecho de sacar un termino comun es porque a cada uno de los terminos que tenemos en la derivada le vamos a quitar este termino comun y lo que nos quede es lo que vamos a poner dentro del corchete, suena enredado pero veamoslo así:

En el primer termino de la derivada tenemos $(3x^2 + 5)^4 (45x^2)(5x^3 + 3)^2$ y nuestro termino comun es $(3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2$ esto quiere decir que $(3x^2 + 5)^4 (45x^2)(5x^3 + 3)^2$ lo vamos a dividir entre $(3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2$, esto es $\frac{(3x^2 + 5)^4 (45x^2)(5x^3 + 3)^2}{(3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2}$, si lo vemos paréntesis por paréntesis tendríamos lo siguiente: $\frac{(3x^2 + 5)^4}{(3x^2 + 5)^3} = (3x^2 + 5)$, $\frac{(5x^3 + 3)^2}{(5x^3 + 3)^2} = 1$, y el caso del $(45x^2)$ no tenemos nadie en el termino comun que lo divida, así que después de la division quedara igual.

Revisemos ahora el resultado de las divisiones para entender lo que hicimos, podemos decir que de acuerdo a su exponente, teniamos 4 paréntesis de $(3x^2 + 5)$ pero como sacamos tres para el termino comun, entonces solo nos queda uno para colocar dentro del corchete, del paréntesis $(45x^2)$ no tenemos ninguno en el termino comun, así que este paréntesis se quedara en el corchete y finalmente del paréntesis $(5x^3 + 3)$ tenemos dos de ellos en el primer termino de nuestra derivada pero como sacamos dos para el termino comun, no nos queda ninguno para poner en el corchete, si lo lograron entender felicidades, si no veamos el resultado de la division:

$$\frac{(3x^2 + 5)^4 (45x^2)(5x^3 + 3)^2}{(3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2} = (3x^2 + 5)(45x^2)$$

El resultado de la division es lo que pondremos dentro del corchete,

Para el segundo termino de nuestra derivada haremos lo mismo:

$$\frac{(5x^3 + 3)^3 (24x) (3x^2 + 5)^3}{(3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2} = (5x^3 + 3)(24x)$$

Regresando a nuestra derivada y poniendo dentro del corchete los resultados de las divisiones tenemos:

$$y' = (3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2 \left[(3x^2 + 5)(45x^2) + (5x^3 + 3)(24x) \right]$$

Las cantidades que quedan dentro del corchete se pueden simplificar. Primero multiplicamos los paréntesis $(3x^2 + 5)(45x^2)$ y $(5x^3 + 3)(24x)$ por separado entre ellos:

$$y' = (3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2 \left[135x^4 + 225x^2 + 120x^4 + 72x \right]$$

Después de las multiplicaciones, ahora lo que tenemos que hacer es reducir los terminos semejantes de dentro del corchete.

$$y' = (3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2 \left[135x^4 + 225x^2 + 120x^4 + 72x \right]$$

Finalmente por cuestiones de estetica cambiemos nuestro corchete por un paréntesis y ya tendremos el resultado de nuestra derivada:

$$y' = (3x^2 + 5)^3 (5x^3 + 3)^2 (255x^4 + 225x^2 + 72x)$$

Estos ejercicios son complicados porque apenas estamos adentrándonos en lo que son las aplicaciones prácticas de las derivadas, pero si podemos resolverlos y mejor aun comprenderlos, podemos decir con seguridad que nos vamos acercando al dominio y correcta aplicación de las operaciones matemáticas relacionadas con el cálculo diferencial.

2.2.2 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

En las derivadas de funciones trascendentales, la parte complicada es obtener la derivada del término u que esta presente en dicha función, mientras mas complicado sea este término u mas complicado sera obtener el resultado de nuestra derivada.

Cabe señalar que en las derivadas de funciones trascendentales tambien vamos a tener que usar varias formulas de derivación, mayormente combinando las formulas de derivadas algebraicas con las formulas de derivads trascendentales.

En los siguiente ejercicios se detallan el uso de estas formulas para obtener la derivada de una funcion transcendental.

EJEMPLOS:

LOGARITMICAS

1. $y = \text{Log } 4x^3$

La funcion que nos dan es logaritmo comun, la formula para obtener su derivada es $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \left(\frac{d}{dx} u \right)$, tambien la podemos manejar como SIEMPRE QUE $a > 0, a \neq 1$

$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \log_a e$ en lo personal la prefiero de esta forma, no importa cual se use el SIEMPRE QUE $a > 0, a \neq 1$ resultado sera el mismo.

El procedimiento para hallar la derivada es el siguiente: el termino $u = 4x^3$, por lo que $\frac{d}{dx} u = 12x^2$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx} u$ en la derivada logaritmo comun, esto quedara dividido entre u y le agregamos la expresi3n log e, la fraccion $\frac{\frac{d}{dx} u}{u}$ debe de dividirse y con eso tenemos ya el resultado de nuestra derivada.

$$y' = \frac{12x^2}{4x^3} \text{Log } e \Rightarrow y' = \frac{3}{x} \text{Log } e$$

$$2. y = \text{Log}(16x^2 + 5x^3) =$$

La funcion que nos dan es logaritmo comun, la formula para obtener su derivada es $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \log_a e$ SIEMPRE QUE $a > 0, a \neq 1$

El termino $u = 16x^2 + 5x^3$, por lo que $\frac{d}{dx} u = 32x + 15x^2$. Para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx} u$ en la derivada logaritmo comun y copiamos todas las expresiones que lleva la respuesta de esta derivada (log e).

$$y = \frac{32x + 15x^2}{(16x^2 + 5x^3)} \text{Log } e$$

para simplificar el resultado, factorizamos por termino comun al numerador y al denominador, el termino comun es x, al menos con esto logramos eliminar una x y reducir el exponente de las variables.

$$y = \frac{x(32 + 15x)}{x(16x + 5x^2)} \text{Log } e \Rightarrow y' = \frac{32 + 15x}{16x + 5x^2} \text{Log } e$$

$$3. y = \text{Ln } 8x^3$$

la funcion que nos dan es logarítmica, pero esta corresponde a un logaritmo natural. la formula para obtener su derivada es $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \left(\frac{d}{dx} u \right)$, tambien la podemos

manejar como $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx} u}{u}$ en lo personal la prefiero de esta forma, no importa cual se use el resultado sera el mismo.

el procedimiento para obtener su derivada va a ser el mismo que el del logaritmo comun, de hecho, la respuesta solo difiere de la logaritmo comun en que el resultado no va a llevar la expresión log e.

el termino $u = 8x^3$, por lo que $\frac{d}{dx} u = 24x^2$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx} u$ en la derivada logarítmica natural y luego dividimos esto entre u : debemos revisar si la fraccion que nos resulte se puede simplificar.

$$y' = \frac{24x^2}{8x^3}$$

simplificando la fraccion (dividiendo):

$$y' = \frac{3}{x}$$

$$4. y = \ln 3x^{-2}$$

la funcion es de tipo logaritmo natural. la formula para obtener su derivada es

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u} .$$

el termino $u = 3x^{-2}$, por lo que $\frac{d}{dx}u = -6x^{-3}$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la derivada logarítmica natural y luego dividimos esto entre u : debemos revisar si la fraccion que nos resulte se puede simplificar.

$$y' = \frac{-6x^{-3}}{3x^{-2}}$$

simplificando la fraccion (dividiendo):

$$y' = -\frac{2}{x}$$

para no cometer un error en la simplificación de la fraccion, se recomienda que cuando las variables a simplificar tengan exponente negativo, es mejor convertir

dichos exponentes a positivos cambiando de lugar a las variables, utilizando las leyes de exponentes que se vieron en las derivadas de variables con exponentes negativos. si movemos las variable antes de la division la fraccion nos queda:

$$y = \frac{-6x^2}{3x^3}$$

como se puede observar la x^{-3} se pasa al denominador y se convierte en x^3 y la x^{-2} pasa al numerador y se convierte en x^2 . después de esto se hace la simplificación.

exponenciales

5. $y = a^{-10x^3}$

la funcion es de tipo exponencial de base a. la formula que usaremos es $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \left(\frac{d}{dx}u \right)$, que tambien la podemos expresar de la forma: $\frac{d}{dx}(a^u) = \left(\frac{d}{dx}u \right) a^u \ln a$, de preferencia podemos mandar el termino $\left(\frac{d}{dx}u \right)$ de todas las formulas de derivacion trascendente al principio, pues de todas maneras al sustituirlas el ultimo paso siempre es mandar la expresi3n $\left(\frac{d}{dx}u \right)$ al principio de la derivada, de aqu3 en adelante todas las formulas de derivaci3n ya tendran este cambio cuando la mencionemos.

el termino u es el exponente de la funci3n, as3 que $u = -10x^3$, por lo que $\frac{d}{dx}u = -30x^2$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la derivada exponencial de base a y copiamos todas las expresiones que lleva la respuesta de esta derivada $(a^u \ln a)$.

$$y' = -30x^2 a^{-10x^3} \ln a$$

$$6. y = a^{-16x^2 + 7x^3}$$

la funcion es de tipo exponencial de base a. la formula que usaremos es:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) a^u \ln a$$

el termino $u = -16x^2 + 7x^3$, por lo que $\frac{d}{dx}u = -32x + 21x^2$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la derivada exponencial de base a y copiamos todas las expresiones que lleva la respuesta de esta derivada.

$$y' = (-32x + 21x^2) a^{-16x^2 + 7x^3} \ln a$$

debemos de tener cuidado con la respuesta ya que como $\frac{d}{dx}u$ tiene dos terminos debemos agruparlos en un paréntesis, ya que el resultado de la derivada debe de ser un producto, esto lo tendremos que hacer siempre que $\frac{d}{dx}u$ tenga dos o mas termino, cuando tiene un solo termino no es necesario usar el paréntesis.

$$7. y = e^{9x^2 + 7}$$

la funcion es de tipo exponencial de base e. la formula que usaremos es

$$\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) e^u$$

el termino $u = 9x^2 + 7$, por lo que $\frac{d}{dx}u = 18x$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la derivada exponencial de base e y la unica expresión que se le añade a $\frac{d}{dx}u$ es la función e^{9x^2+7} que es lo que teniamos al inicio.

$$y' = 18x e^{9x^2+7}$$

$$8. y = e^{-10x^4 - 3x^3}$$

la funcion es de tipo exponencial de base e. la formula que usaremos es $\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) e^u$

el termino $u = -10x^4 - 3x^3$, por lo que $\frac{d}{dx}u = -40x^3 - 9x^2$. para obtener la derivada, sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la derivada exponencial de base e y la unica expresión que se le añade a $\frac{d}{dx}u$ es la función $e^{-10x^4 - 3x^3}$ que es lo que teniamos al inicio.

$$y' = (-40x^3 - 9x^2) e^{-10x^4 - 3x^3}$$

otra forma de escribir el resultado es dejar a los terminos del primer paréntesis, para ello deberemos de cambiar el signo de las cantidades de afuera del paréntesis y tambien el signo de afuera del paréntesis (en este caso al no haber signo delante del paréntesis, asumiremos que el signo de afuera del paréntesis es positivo), aplicando todo lo anterior el resultado de la derivada tambien puede ser:

$$y' = -(40x^3 + 9x^2) e^{-10x^4 - 3x^3}$$

trigonometricas directas

en este tipo de derivadas se realiza el mismo procedimiento que en las derivadas trascendentales exponenciales y logarítmicas, es decir que el trabajo fuerte es obtener la derivada del termino u y una vez que tengamos la derivada de este termino, la formula de derivación nos dira por que funcion trigonometrica cambia la derivada con respecto a la funcion trigonometrica que teniamos al principio.

$$1. y = \text{sen } 10x^3$$

la funcion trigonometrica que nos estan dando es la funcion seno, el termino $u = 10x^3$, por lo que $\frac{d}{dx}u = 30x^2$. sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la formula de derivada de la funcion seno, $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \cos u$, esta formula nos indica que la derivada de la función seno de u cambia a funcion coseno de u al derivarla, así que la derivada nos da:

$$y' = 30x^2 \text{ Cos } 10x^3$$

$$2. y = \cos 4x^{-3}$$

la funcion trigonometrica que nos estan dando es la funcion coseno, el termino $u = 10x^3$, por lo que $\frac{d}{dx}u = 30x^2$. sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la formula de derivada de la funcion coseno $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \text{sen } u$, esta formula nos indica que la derivada de la función coseno de u cambia a funcion seno de u al derivarla, así que la derivada nos da:

$$y' = -(-12x^{-4}) \text{ sen } 4x^{-3}$$

como la derivada de la funcion coseno es negativa, multiplicamos los signos negativos de los factores:

$$y' = 12x^{-4} \text{ sen } 4x^{-3}$$

aplicando la ley de exponentes para eliminar los exponentes negativos obtenes el resultado final:

$$y' = \frac{12}{x^4} \text{ Sen } \frac{4}{x^3}$$

$$3. y = \tan 20x^2$$

la funcion trigonometrica que nos estan dando es la funcion tangente, el termino $u = 20x^2$, por lo que $\frac{d}{dx}u = 40x$. sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la formula de derivada de la funcion tangente $\frac{d}{dx}(\tan u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \sec^2 u$, esta formula nos indica que la derivada de la función tangente de u cambia a funcion secante cuadrada de u al derivarla, así que la derivada nos da:

$$y' = 40x \sec^2 20x^2$$

$$4. y = \csc (50x^3 + 7x)$$

la funcion trigonometrica que nos estan dando es la funcion cosecante, el termino $u = 50x^3 + 7x$, por lo que $\frac{d}{dx}u = 150x^2 + 7$. sustituimos $\frac{d}{dx}u$ en la formula de derivada de la funcion cosecante, $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \csc u \cot u$, esta formula nos indica que la derivada de la función cosecante de u cambia a funcion cosecante de u por cotangente de u , así que la derivada nos da:

$$y' = - (150x^2 + 7) \csc (50x^3 + 7x) \cot (50x^3 + 7x)$$

ahora pasaremos a algo un poco mas complejo llamémoslo combinación de formulas, así que cuidado.

podemos tener dos casos:

1. que una de las funciones trascendentes no sea independiente, es decir que este dentro de la otra.

en este caso las derivadas trascendentes pueden combinarse entre ellas, es decir en un ejercicio de derivación podemos usar al mismo tiempo formulas de funciones logaritmicas, exponenciales y trigonometricas.

2. que de las funciones trascendentes sean independientes la una de la otra, esto es que al combinar dos funciones trascendentes una no esta dentro de la otra

en este caso lo mas seguro es que esten realizando alguna operación algebraica, así que esto a veces se puede convertir (dependiendo del ejercicio) en la peor pesadilla que podemos tener y el mayor dolor de cabeza, ya que podemos encontrar ejercicios de derivación en que no solo tengamos que usar varias formulas de derivadas trascendentes sino que tambien tengamos que usar formulas de operaciones algebraicas ($u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ y u^m).

veamos algunos ejemplos de este tipo de derivacion:

derivar:

1. $y = \text{Sen } e^{10x^3}$

en este ejercicio tenemos dos funciones trascendentes, estas son una función trigonométrica y una función exponencial. esta derivada pertenece al primer caso de combinación de formulas, ya que la función exponencial esta dentro de la función trigonométrica.

básicamente lo que tenemos que derivar es una función seno de u , donde $u = e^{10x^3}$, así que usaremos la formula de la derivada de la función seno de u :

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx} u \right) \cos u .$$

procedimiento: como $u = e^{10x^3}$ tenemos que hallar $\frac{d}{dx} u$, pero como u esta formada por una función exponencial de base e , para poder hallar $\frac{d}{dx} u$ tenemos que usar la formula $\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx} u \right) e^u$, entonces:

$$\text{como: } u = e^{10x^3} \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx} u \right) e^u \Rightarrow \frac{d}{dx} u = 30x^2 e^{10x^3}$$

ahora sustituimos $\frac{d}{dx} u$ que acabamos de obtener y $u = e^{10x^3}$ en la formula de la derivada de la función seno $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx} u \right) \cos u$, por lo que el resultado de la derivada de .

$$y' = 30x^2 e^{10x^3} \cos e^{10x^3}$$

$$2. y = a^{\ln 3x}$$

en este ejercicio tambien tenemos dos funciones trascendentes, estas son una función exponencial y una función logarítmica. esta derivada pertenece al primer caso de combinación de formulas, ya que la función logarítmica esta dentro de la función exponencial.

básicamente lo que tenemos que derivar es una función exponencial de base a elevada a la u , donde $u = \ln 3x$, así que usaremos la formula de la derivada de la función exponencial de base a elevada a la u , $\frac{d}{dx}(a^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) a^u \ln a$.

procedimiento: como $u = \ln 3x$ tenemos que hallar $\frac{d}{dx}u$, pero como u esta formada por una funcion logaritmo natural de u , para poder hallar $\frac{d}{dx}u$ tenemos que usar la formula $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$, entonces:

$$\text{como: } u = \ln 3x \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u} \Rightarrow \frac{d}{dx}u = \frac{3}{3x} \Rightarrow \frac{d}{dx}u = \frac{1}{x}$$

ahora sustituimos $\frac{d}{dx}u$ que acabamos de obtener y $u = \ln 3x$ en la formula de la derivada de la función exponencial de base a elevada a la u , $\frac{d}{dx}(a^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) a^u \ln a$, por lo que el resultado de la derivada es .

$$y' = \frac{1}{x} a^{\ln 3x} \ln a$$

$$3. y = \tan (\ln 8x^4)$$

en este ejercicio tambien tenemos dos funciones trascendentes, estas son una función trigonométrica y una función logarítmica. esta derivada pertenece al primer caso de combinación de formulas, ya que la función logarítmica esta dentro de la función trigonométrica.

básicamente lo que tenemos que derivar es una función tangente de u , donde $u = \ln 8x^4$, así que usaremos la formula de la derivada de la función tangente de u , $\frac{d}{dx}(\tan u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \sec^2 u$.

procedimiento: como $u = \ln 8x^4$ tenemos que hallar $\frac{d}{dx}u$, pero como u esta formada por una funcion logaritmo natural de u , para poder hallar $\frac{d}{dx}u$ tenemos que usar la formula $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$, entonces:

$$\text{como: } u = \ln 8x^4 \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u} \Rightarrow \frac{d}{dx}u = \frac{32x^3}{8x^4} \Rightarrow \frac{d}{dx}u = \frac{4}{x}$$

ahora sustituimos $\frac{d}{dx}u$ que acabamos de obtener y $u = \ln 8x^4$ en la formula de la derivada de la función tangente de u , $\frac{d}{dx}(\tan u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \sec^2 u$. por lo que el resultado de la derivada es .

$$y' = \frac{4}{x} \sec^2 \ln 8x^4$$

$$4. y = e^{\sec 15x}$$

en este ejercicio tambien tenemos dos funciones trascendentes, estas son una función exponencial y una función trigonométrica. esta derivada pertenece al primer caso de combinación de formulas, ya que la función trigonométrica esta dentro de la función exponencial.

básicamente lo que tenemos que derivar es una función exponencial de base e elevado a la u , donde $u = \sec 15x$, así que usaremos la formula de la derivada de la función exponencial de base e elevado a la u , $\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) e^u$.

procedimiento: como $u = \sec 15x$ tenemos que hallar $\frac{d}{dx}u$, pero como u esta formada por una funcion secante de u , para poder hallar $\frac{d}{dx}u$ tenemos que usar la formula $\frac{d}{dx}(\sec u) = \frac{d}{dx}u \sec u \operatorname{tg} u$, entonces:

como: $u = \sec 15x$ usando la formula $\frac{d}{dx}(\sec u) = \frac{d}{dx}u \sec u \operatorname{tg} u \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}u = 15 \sec 15x \operatorname{tg} 15x$$

ahora sustituimos $\frac{d}{dx}u$ que acabamos de obtener y $u = \sec 15x$ en la formula de la derivada de la función exponencial de base e elevado a la u , $\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) e^u$. por lo que el resultado de la derivada es .

$$y' = 15 \sec 15x \operatorname{tg} 15x \left(e^{\sec 15x} \right)$$

5. $\ln \cos 8x^2$

en este ejercicio tambien tenemos dos funciones trascendentes, estas son una función logaritmica y una función. trigonometrica esta derivada pertenece al primer caso de combinación de formulas, ya que la función trigonometrica esta dentro de la función logaritmica.

básicamente lo que tenemos que derivar es una función logaritmo natural de u , donde $u = \cos 8x^2$, así que usaremos la formula de la derivada de la función logaritmo natural de u , $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$.

procedimiento: como $u = \cos 8x^2$ tenemos que hallar $\frac{d}{dx}u$, pero como u esta formada por una funcion coseno de u , para poder hallar $\frac{d}{dx}u$ tenemos que usar la formula $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \sin u$, entonces:

$$\text{como: } u = \cos 8x^2 \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \sin u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = -16x \sin 8x^2$$

ahora sustituimos $\frac{d}{dx}u$ que acabamos de obtener y $u = \cos 8x^2$ en la formula de la derivada de la función logaritmo natural de u , $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$. por lo que el resultado de la derivada es:

$$y' = -\frac{16x \sin 8x^2}{\cos 8x^2}$$

como en el resultado nos que dan dos funciones trigonometricas con el mismo angulo ($8x^2$) podemos usar las identidades trigonometricas para simplificar el resultado. en este caso usaremos la identidad $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, así que la expresión

$\frac{\sin 8x^2}{\cos 8x^2}$ se puede cambiar por $\tan 8x^2$, así que el resultado de la derivada es:

$$y' = -16x \tan 8x^2$$

$$6. y = \sin 4x - \cos 15x^2$$

en este ejercicio tambien aparecen dos funciones trascendentes, pero a diferencia de los ejercicios 1, 2, 3, 4 y 5, en que una funcion estaba o era una parte de la otra, las funciones son independientes la una de la otra y solo estan realizando una operacion algebraica, en este caso una diferencia.

como las funciones estan realizando una operación algebraica, tenemos que sacar la derivada de esta operación algebraica, en este caso una diferencia, así que la formula que vamos a usar es la de derivada de una suma o resta:

$$\frac{d}{dx}(u - v \pm \dots) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v) \pm \dots$$

como dijimos la operación algebraica que tenemos es un diferencia, por lo que $u = \text{sen } 4x$ y $v = \cos 15x^2$. para obtener la $\frac{d}{dx}u$ tenemos que utilizar la formula

de derivada de la funcion seno $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \cos u$, mientras que para obtener la

$\frac{d}{dx}v$ tenemos que utilizar la formula sacar la derivada de la funcion coseno

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \text{sen } u.$$

$$\text{como: } u = \text{sen } 4x \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \cos u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 4x \cos 4x$$

$$\text{como: } v = \cos 15x^2 \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\cos v) = -\left(\frac{d}{dx}v\right) \text{sen } v \Rightarrow \frac{d}{dx}v = -30x \text{ Sen } 15x^2$$

. en este caso por manejo de formula, estamos suponiendo que $v = u$, por eso todas las u de la formula de la derivada del coseno fueron consideradas como v .

ahora sustituimos $\frac{d}{dx}u$ y $\frac{d}{dx}v$ en nuestra formula de suma o resta:

$$\frac{d}{dx}(u - v \pm \dots) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v) \pm \dots \text{ con lo que obtenemos:}$$

$$y' = 4 \cos 4x - (-30x \text{ sen } 15x^2)$$

multiplicando los signos del segundo parentesis:

$$y' = 4 \cos 4x + 30x \text{ sen } 15x^2$$

$$7. y = \tan 10x^3 \cos 20x^2$$

la operación algebraica que tenemos es un producto, por lo que tendremos que utilizar la formula de derivada algebraica de un producto $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u)$.

como dijimos la operación algebraica que tenemos es un producto, por lo que $u = \tan 10x^3$ y $v = \cos 20x^2$. para obtener la $\frac{d}{dx}u$ tenemos que utilizar la formula de derivada de la funcion tangente $\frac{d}{dx}(\tan u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \sec^2 u$, mientras que para obtener la $\frac{d}{dx}v$ tenemos que utilizar la formula sacar la derivada de la funcion coseno $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \sin u$.

$$\text{como: } u = \tan 10x^3 \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\tan u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \sec^2 u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 30x^2 \sec^2 10x^3$$

$$\text{como: } v = \cos 20x^2 \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\cos u) = -\left(\frac{d}{dx}u\right) \sin u \Rightarrow \frac{d}{dx}v = -40x \sin 20x^2.$$

ahora sustituimos $u = \tan 10x^3$, $\frac{d}{dx}u = 30x^2 \sec^2 10x^3$, $v = \cos 20x^2$ y $\frac{d}{dx}v = -40x \sin 20x^2$, en nuestra formula de producto $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u)$ con lo que obtenemos:

$$y' = \tan 10x^3 (-40x \sin 20x^2) + \cos 20x^2 (30x^2 \sec^2 10x^3)$$

para tener listo el resultado vamos a pasar los terminos independientes, esto es, las cantidades algebraicas que no estan dentro de alguna función trigonometrica ($-40x$ y $30x^2$) por cuestion de estetica, como el primer termino es negativo, mejor

cambiamos el orden de los terminos, para que el primer termino sea el positivo y el segundo el negativo. aplicando todo lo anterior el resultado de nuestra derivada es:

$$y' = 30x^2 \cos 20x^2 \sec^2 10x^3 - 40x \tan 10x^3 \sin 20x^2$$

$$8. y = \frac{e^{4x}}{\cot 20x}$$

la operación algebraica que tenemos es un cociente, por lo que tendremos que utilizar la formula de derivada algebraica de un producto

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

como dijimos la operación algebraica que tenemos es un cociente, por lo que $u = e^{4x}$ y $v = \cot 20x$. para obtener la $\frac{d}{dx}u$ tenemos que utilizar la formula de derivada de la funcion exponencial de base e elevado a la u , $\frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u \right) e^u$., mientras que para obtener la $\frac{d}{dx}v$ tenemos que utilizar la formula sacar la derivada de la funcion cotangente $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\left(\frac{d}{dx}u \right) \csc^2 u$.

$$\text{como: } u = e^{4x} \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(e^u) = \left(\frac{d}{dx}u \right) e^u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 4 e^{4x}$$

$$\text{como: } v = \cot 20x \text{ usando la formula } \frac{d}{dx}(\cot u) = -\left(\frac{d}{dx}u \right) \csc^2 u \Rightarrow \frac{d}{dx}v = -20 \csc^2 20x.$$

ahora sustituimos $u = e^{4x}$, $\frac{d}{dx}u = 4 e^{4x}$, $v = \cot 20x$ y $\frac{d}{dx}v = -20 \csc^2 20x$, en nuestra

formula de cociente $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2}$, $v \neq 0$ con lo que obtenemos:

$$y' = \frac{\cot 20x (4 e^{4x}) - e^{4x} (-20 \csc^2 20x)}{v^2}$$

para tener listo el resultado vamos a pasar los terminos independientes, esto es, las cantidades algebraicas que no estan dentro de alguna función trigonométrica (4 y -20). realizamos la multiplicación de signos en el segundo termino del numerador y agregamos el valor de v , que quedara elevado al cuadrado. realizando todo lo anterior el resultado de nuestra derivada es:

$$y' = \frac{4 e^{4x} \cot 20x + 20 e^{4x} \csc^2 20x}{(\cot 20x)^2}$$

para terminar podemos factorizar el numerador por termino comun, el termino comun es $4 e^{4x}$, entonces el resultado final de la derivada es:

$$y' = \frac{4 e^{4x} (\cot 20x + 5 \csc^2 20x)}{\cot^2 20x}$$

9. $y = \sin^3 8x^4$

la operación algebraica que tenemos es una potencia, ya que $\sin^3 8x^4 = (\sin 8x^4)^3$ por lo que tendremos que utilizar la formula de derivada algebraica de una potencia producto $\frac{d}{dx}(u^m) = m u^{m-1} \left(\frac{d}{dx}u \right)$.

como dijimos la operación algebraica que tenemos es una potencia, por lo que $u = \sin 8x^4$ y $m = 3$. para obtener la $\frac{d}{dx}u$ tenemos que utilizar la formula de derivada de la función seno $\frac{d}{dx}(\sin u) = \left(\frac{d}{dx}u \right) \cos u$.

como: $u = \text{Sen } 8x^4$ usando la formula $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \left(\frac{d}{dx}u\right) \cos u \Rightarrow \frac{d}{dx}u = 32x^3 \text{ Cos } 8x^4$

ahora sustituimos $u = \text{Sen } 8x^4$, $m = 3$ y $\frac{d}{dx}u = 32x^3 \text{ Cos } 8x^4$, en nuestra formula de potencia $\frac{d}{dx}(u^m) = m u^{m-1} \left(\frac{d}{dx}u\right)$, con lo que obtenemos:

$$y = (3) (\text{Sen } 8x^4)^2 (32x^3 \text{ Cos } 8x^4)$$

para tener listo el resultado vamos a multiplicar los terminos independientes (3 y $32x^3$). y colocaremos el resultado de este producto al inicio, tambien colocaremos el exponente de afuera del paréntesis de la función seno arriba de la función seno, para formar la expresión seno cuadrado, realizando todo lo anterior el resultado de nuestra derivada es:

$$y' = 96x^3 \text{ Sen}^2 8x^4 \text{ Cos } 8x^4$$

$$10. y = \sec^7 15x^4$$

la operación algebraica que tenemos es una potencia, por lo que tendremos que utilizar la formula de derivada algebraica de una potencia producto

$$\frac{d}{dx}(u^m) = m u^{m-1} \left(\frac{d}{dx}u\right).$$

como dijimos la operación algebraica que tenemos es una potencia, por lo que $u = \text{Sec } 15x^4$ y $m = 7$. para obtener la $\frac{d}{dx}u$ tenemos que utilizar la formula de derivada de la funcion secante $\frac{d}{dx}(\text{Sec } u) = \frac{d}{dx}u \text{ Sec } u \text{ Tg } u$.

como: $u = \sec 15x^4$ usando la formula $\frac{d}{dx}(\sec u) = \frac{d}{dx}u \sec u \operatorname{Tg} u \Rightarrow$
 $\frac{d}{dx}u = 60x^3 \sec 15x^4 \operatorname{Tg} 15x^4$

ahora sustituimos $u = \sec 15x^4$, $m = 7$ y $\frac{d}{dx}u = 60x^3 \sec 15x^4 \operatorname{Tg} 15x^4$, en nuestra formula de potencia $\frac{d}{dx}(u^m) = m u^{m-1} \left(\frac{d}{dx}u \right)$, con lo que obtenemos:

$$y' = (7)(\sec 15x^4)^6 (60x^3 \sec 15x^4 \operatorname{Tg} 15x^4)$$

para tener listo el resultado vamos a multiplicar los terminos independientes (3 y 32x³). y colocaremos el resultado de este producto al inicio, como tenemos dos funciones secante de 15x⁴, podemos juntarlas en una sola, como una esta elevada a la 6 y la otra a la uno, entonces podemos poner solo una elevada a la 7. tambien colocaremos el exponente de afuera del paréntesis de la función seno arriba de la función seno, para formar la expresión seno cuadrado, realizando todo lo anterior el resultado de nuestra derivada es:

$$y' = 420x^3 \sec^7 15x^4 \operatorname{Tg} 15x^4$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

DERIVAR:

$$1. y = \operatorname{Arc Sen} (2x - 3)$$

la funcion que tenemos para derivar es la funcion arco seno

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

el procedimiento que se sigue en este ejercicio para hallar la derivada de la funcion dada es el siguiente:

se define cual es el valor de u y a partir de este valor se sacan los valores que nos indica la formula de la derivada funcion arco seno, estos valores son $\frac{d}{dx}u$ y u^2 . el valor de $u = 2x - 3$, por lo que el valor de $\frac{d}{dx}u = 2$ y $u^2 = (2x - 3)^2$. valores los

sustituimos en la formula de la derivada de la funcion arco seno $\frac{d}{dx}(\arcsen u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$y = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$$

desarrollamos la expresi3n $(2x - 3)^2$, la cual nos da $4x^2 - 12x + 9$, pero por el signo negativo que esta delante del par3ntesis todos los terminos cambian de signo.

$$y = \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-12x+9)}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+12x-9}}$$

reducimos los terminos semejantes dentro del radical ($1 - 9 = -8$).

$$y = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}}$$

el trinomio que esta dentro de la raiz cuadrada, lo factorizamos por termino comun, el termino comun es 4.

$$y = \frac{2}{\sqrt{4(-x^2+3x-2)}}$$

el cuatro tiene raíz cuadrada exacta, por lo que le sacamos raíz cuadrada (2) y el resultado se coloca ya en la parte de afuera de la raíz cuadrada.

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$$

hacemos una simplificación ya que podemos dividir el 2 que esta en el numerador entre el 2 que esta en el denominador. el resultado de la división es uno, por lo que nos quedara uno en el numerador.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$$

$$2. y = \arccos x^2$$

la funcion que tenemos para derivar es la funcion arco coseno

$$\frac{d}{dx}(\arccos u) = - \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

el procedimiento que se sigue en este ejercicio para hallar la derivada de la funcion dada es el siguiente:

se define cual es el valor de u y a partir de este valor se sacan los valores que nos indica la formula de la derivada función arco coseno, estos valores son $\frac{d}{dx}u$ y u^2 .

$$\text{el valor de } u = x^2, \text{ por lo que el valor de } u' = 2x \text{ y } u^2 = (x^2)^2 \Rightarrow u^2 = x^4$$

ya que tenemos los valores de $\frac{d}{dx}u$ y u^2 los sustituimos en la formula de la derivada de la función arco coseno $\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$, que es una derivada negativa.

$$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-(x^4)}}$$

solo que hay que tener en cuenta que delante de u^2 hay también un signo negativo, por lo que el valor u^2 cambiara de signo.

$$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$3. y = \arctan 3x^2$$

la función que tenemos para derivar es la función arco tangente

$$\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}.$$

se define cual es el valor de u y a partir de este valor se sacan los valores $\frac{d}{dx}u$ y u^2 .

el valor de $u = 3x^2$, por lo que el valor de $\frac{d}{dx}u = 6x$ y $u^2 = (3x^2)^2 \Rightarrow u^2 = 9x^4$.

los valores de $\frac{d}{dx}u$ y u^2 los sustituimos en la formula de la derivada de la función arco tangente $\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$.

$$y' = \frac{6x}{1+9x^4}$$

$$4. y = \text{Arc Cos} \frac{1}{2}x$$

la función que tenemos para derivar es la función arco coseno

$$\frac{d}{dx}(\arccos u) = - \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

se define cual es el valor de u y a partir de este valor se sacan los valores $\frac{d}{dx}u$ y u^2 .

$$\text{el valor de } u = \frac{1}{2}x, \text{ por lo que el valor de } \frac{d}{dx}u = \frac{1}{2} \text{ y } u^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{4}x^2.$$

de $\frac{d}{dx}u$ y u^2 los sustituimos en la formula de la derivada de la función arco

$$\text{coseno } \frac{d}{dx}(\arccos u) = - \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

los términos que tenemos dentro de la raíz cuadrada, los sumamos siguiendo las reglas de la suma de fracciones.

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}}}$$

de la fracción que nos queda dentro de la raíz cuadrada, solo el denominador (4) tiene raíz cuadrada exacta, así que le sacamos raíz cuadrada.

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}}$$

podemos hacer la ley del “sándwich”, con esto ya eliminamos la fracción que teníamos en el denominador.

$$y = \frac{2}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

hacemos la división del 2 del numerador con el 2 del denominador y ya tenemos el resultado de la derivada.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$5. y = \text{Arc Tan } \frac{3}{x}$$

la función que tenemos para derivar es la función arco tangente

$$\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}.$$

se define cual es el valor de u y a partir de este valor se sacan los valores de $\frac{d}{dx}u$ y u^2 .

el valor de $u = \frac{3}{x}$, es decir $u = 3x^{-1}$, por lo que el valor de $\frac{d}{dx}u = -3x^{-2}$ es decir

$$\frac{d}{dx}u = -\frac{3}{x^2} \text{ y } u^2 = \left(\frac{3}{x}\right)^2 \Rightarrow u^2 = \frac{9}{x^2}.$$

los valores de $\frac{d}{dx}u$ y u^2 los sustituimos en la formula de la derivada de la

función arco tangente $\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}.$

$$y = \frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}}$$

los términos que tenemos en el denominador, los sumamos siguiendo las reglas de la suma de fracciones aplicando la ley de los signos de la división la fracción nos queda negativa.

$$y' = -\frac{\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2+9}{x^2}}$$

para poder reducir la fracción tenemos que aplicar la ley del “sándwich”.

$$y' = \frac{3x^2}{x^2(x^2+9)}$$

hacemos la división de la x^2 del numerador con la x^2 del denominador (la que esta fuera del paréntesis) Y YA TENEMOS EL RESULTADO DE LA DERIVADA.

$$y' = \frac{3}{x^2+9}$$

3.2 REGLA DE LA CADENA

REGLA DE LA CADENA.

Sea una función $g(x) = \sqrt{f(x)}$. La función $g(x)$ es una función compuesta ya que está formada por una función $f(x)$ que se encuentra dentro de otra, la raíz cuadrada. Para obtener su derivada se puede utilizar la definición de derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
\frac{d}{dx} [\sqrt{f(x)}] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h} \cdot \frac{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h(\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)})} = \\
&= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}} \right] \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \frac{df}{dx}
\end{aligned}$$

Si considero a la función como $g(f) = \sqrt{f}$, la derivada $\frac{dg}{df} = \frac{1}{2\sqrt{f}}$. Por lo tanto, el resultado del ejemplo anterior se puede escribir como el producto de dos derivadas: $\frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$ y dado que la derivada se puede ver como el cociente de dos diferenciales:

$$\frac{dg}{df} \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}.$$

En un caso más general, sea $g(f(x))$, esto es, una función compuesta. En el argumento de la función g hay otra función, $f(x)$. La derivada de g como función de x se escribe como $\frac{dg}{dx}$. Supongamos que se hace un cambio de variable donde $u = f(x)$. La función $g(f(x))$ se puede escribir, entonces, como $g(u)$ y por lo tanto, su derivada es $\frac{dg}{du}$. Dado que u es una función de x se puede derivar: $\frac{du}{dx}$. Por inspección de los últimos dos términos, se puede ver que si se hace el producto entre ellos:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}$$

Dado que los diferenciales du se pueden eliminar.

Ejemplo 1.

Sea la función $g(x) = \sqrt{x^4 - 3x + 8}$. Esta es una función compuesta en la que:

$$g(u) = \sqrt{u} \qquad u(x) = x^4 - 3x + 8$$

La derivada de cada uno de los términos es:

$$\frac{dg}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dx} = 4x^3 - 3$$

entonces,

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \right) (4x^3 - 3)$$

y dado que $u(x) = x^4 - 3x + 8$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{4x^3 - 3}{2\sqrt{x^4 - 3x + 8}}.$$

Ejemplo 2.

Sea la función $g(x) = (4x^2 - 2)^3$. La función compuesta se puede ver como $g(u) = u^3$ donde $u(x) = 4x^2 - 2$. Se quiere demostrar que el resultado obtenido utilizando la regla de la cadena es el mismo que si se resuelve el cubo. Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = (3u^2)(8x) = 24x(4x^2 - 2)^2 = 24x(16x^4 - 16x^2 + 4)$$

Ahora resolviendo el cubo antes de derivar:

$$g(x) = (4x^2 - 2)^3 = (4x^2)^3 - 6(4x^2)^2 + 12(4x^2) - 8 = 64x^6 - 96x^4 + 48x^2 - 8$$
$$\frac{dg}{dx} = 384x^5 - 384x^3 + 96x = 24x(16x^4 - 16x^2 + 4)$$

El resultado es el mismo.

Sean dos funciones $g=g(u)$ y $u=u(x)$ para las cuales las derivadas existen. La función compuesta $g(x) = g(u(x))$ tiene una derivada dada por:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}.$$

Si se tiene una función $g = u^n$ donde $u = u(x)$, entonces, las derivadas de cada una de las funciones son $\frac{dg}{du} = nu^{n-1}$ y $\frac{du}{dx}$. Así, $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$.

Regla de la potencia para funciones.

Sea $g(x) = f^n(x)$ donde g es una función derivable, entonces,

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx} f^n = n f^{n-1} \frac{df}{dx}.$$

Ejemplo 3.

Derivar las siguientes funciones.

$$\frac{d}{dx}(3x+5)^8 = 8(3x+5)^7(3) = 24(3x+5)^7$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3 - 2x + 3)^5 = 5(4x^3 - 2x + 3)^4(12x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{(x^2 + 5)^5}{\sqrt{5x + 6}} &= \frac{5(x^2 + 5)^4(2x)\sqrt{5x + 6} - (x^2 + 5)^5 \frac{1}{2}(5x + 6)^{-1/2}}{5x + 6} = \\&= \frac{10x(x^2 + 5)^4 \sqrt{5x + 6} - \frac{(x^2 + 5)^5}{2\sqrt{5x + 6}}}{5x + 6} = \\&= \frac{20x(x^2 + 5)^4 (5x + 6) - (x^2 + 5)^5}{2\sqrt{5x + 6} (5x + 6)} = \\&= \frac{(x^2 + 5)^4 [20x(5x + 6) - (x^2 + 5)]}{2(5x + 6)^{3/2}} = \\&= \frac{(x^2 + 5)^4 (49x^2 + 60x - 5)}{2(5x + 6)^{3/2}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (3x^4 - 2(x+5)^3 + 6)^{2/5} &= \frac{2}{5} (3x^4 - 2(x+5)^3 + 6)^{-3/5} \frac{d}{dx} (3x^4 - 2(x+5)^3 + 6) = \\
&= \frac{2}{5 \sqrt[5]{(3x^4 - 2(x+5)^3 + 6)^3}} [12x^3 - 6(x+5)^2] = \\
&= \frac{12[2x^3 - x^2 - 10x - 25]}{5 \sqrt[5]{(3x^4 - 2(x+5)^3 + 6)^3}}
\end{aligned}$$

4. APLICACIÓN DE LA DERIVADA

APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL CÁLCULO DE LÍMITES

Los límites de formas indeterminadas que no pueden resolverse mediante la factorización, generalmente se resuelven por la conocida en la matemática como *Regla de L'Hôpital*, que contiene en su estructura el concepto de derivada.

Teorema de L'Hôpital

Supongamos que las funciones f y g están definidas y son derivables en cierto entorno de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, y $g'(x) \neq 0$ en cierto entorno de a ,

entonces, si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), existe también $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple

$$\text{que: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La Regla de L'Hôpital también es válida en el caso que las funciones f y g no están definidas en a , pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Si $f'(a) = g'(a) = 0$, y $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones f y g , podemos aplicar la Regla de L'Hôpital a $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, y obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}; \text{ aplicar sucesivamente.}$$

Ejemplo resuelto 1:

Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

En este caso estamos ante la indeterminación $\frac{0}{0}$, pues

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1 + \ln x) = 1^2 - 1 + 0 = 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1} (e^x - e) = e^1 - e = 0$$

Resolvemos aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 8x} = \frac{3-6}{3-8} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo resuelto 2:

$$\text{Hallar: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{4}{x}}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{4}{x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x^2} \cdot \cos \frac{4}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (4 \cos \frac{4}{x}) = 4 \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{4}{x}) = 4 \cdot 1 = 4$$

Cálculo de límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

El teorema anterior es válido si se sustituye la exigencia de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, y se llama, por extensión, Regla de L'Hôpital.

Ejemplo resuelto 3:

Hallar:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Solución:

a) En este caso estamos ante la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, pues, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Resolvemos aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Existen otras formas indeterminadas, $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$, que pueden transformarse en las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, y aplicar la Regla de L'Hôpital.

Si queremos calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ y , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces,

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ y por tanto, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ y ahora es de la}$$

forma $\frac{0}{0}$.

$$\text{Además, } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ y es un límite de la forma } \frac{\infty}{\infty}.$$

En dependencia del límite que se esté calculando, se hará una u otra de las transformaciones anteriores, siguiendo el criterio que la aplicación de la Regla de L'Hôpital simplifique el proceso de determinación del límite.

Ejemplo resuelto 4:

Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x^2 \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

Solución:

Observemos que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, y $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^2 = -\infty$ Luego, estamos ante una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Transformando,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{\ln x^2}}$, pero esta transformación es menos

recomendable en este caso en particular, pues la derivada de $\frac{1}{\ln x^2}$ es mucho más compleja que, simplemente, la derivada de $\ln x^2$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

No existe una forma única de proceder para resolver indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$. En este caso, se debe efectuar la resta:

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right)$ Aquí podemos observar que: $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - x + 1) = 0$, y $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln x = 0$. Luego, la indeterminación $\infty - \infty$ se ha transformado en una del tipo $\frac{0}{0}$. Basta entonces resolver

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Problema resuelto

En un remolino la velocidad del viento es función de la distancia desde el centro del mismo. Esto se puede reproducir mediante la función

$$v(x) = \frac{10x}{x^2 + 4}$$

donde v es la velocidad del viento en m/s y x es la distancia desde el centro en m .

- Considerando que las velocidades negativas implican únicamente dirección, calcular la distancia del centro a la cual la velocidad del remolino es máxima.
- Graficar la función utilizando intersecciones, puntos críticos y puntos de inflexión.
- Discutir lo que sucede con la velocidad del viento conforme la distancia del centro aumenta.

Para encontrar los puntos en que la velocidad es máxima se busca la derivada de la función.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x^2 + 4)10 - 10x(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{10x^2 + 40 - 20x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{40 - 10x^2}{(x^2 + 4)^2} \\ &\frac{40 - 10x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \\ &40 - 10x^2 = 0 \\ &x = \pm 2 \end{aligned}$$

Hay dos puntos críticos, en $x=2 m$ y $x=-2 m$. Para saber si son máximos o mínimos, se utiliza el criterio de la segunda derivada.

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{40-10x^2}{(x^2+4)^2} \right) = \frac{(x^2+4)^2(-20x) - (40-10x^2)2(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4} = \\ &= \frac{-20x(x^2+4)[(x^2+4) - (8-2x^2)]}{(x^2+4)^4} = \frac{-20x[3x^2-4]}{(x^2+4)^3} \\ \left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=-2} &= \frac{-20(-2)[3(-2)^2-4]}{((-2)^2+4)^3} = \frac{40[12-4]}{(4+4)^3} = \frac{320}{4096} > 0 \therefore \text{minimo} \\ \left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=2} &= \frac{-20(2)[3(2)^2-4]}{((2)^2+4)^3} = \frac{-40[12-4]}{(4+4)^3} = \frac{-320}{4096} < 0 \therefore \text{maximo}\end{aligned}$$

El mínimo, en este caso, representa el punto en x para el cual la velocidad es máxima pero con signo negativo. Entonces, para los valores negativos de x, la velocidad es negativa y para valores positivos de x la velocidad es positiva.

Los puntos de inflexión se pueden encontrar igualando a cero la segunda derivada, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{-20x[3x^2-4]}{(x^2+4)^3} &= 0 \\ -20x[3x^2-4] &= 0 \\ -20x &= 0 \quad 3x^2-4=0 \\ x=0 \quad x &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

Hay tres puntos de inflexión, esto es, la función cambia tres veces de concavidad.

Las raíces de la función se encuentran igualando a cero la función

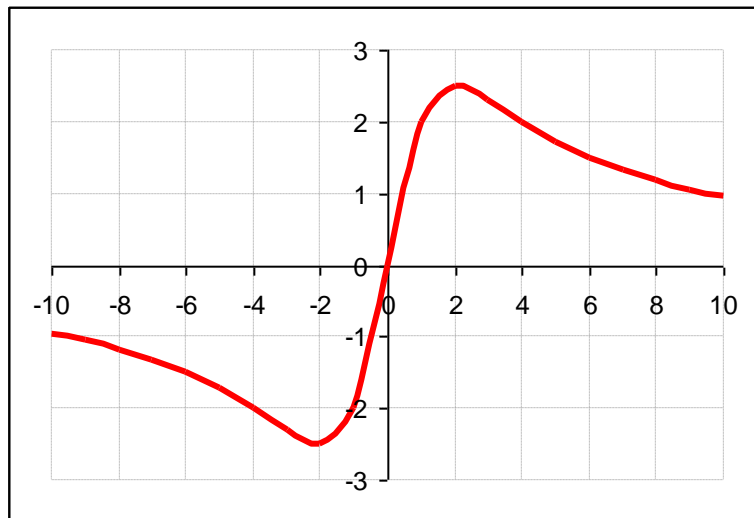
$$\frac{10x}{x^2 + 4} = 0$$

$$10x = 0$$

$$x = 0$$

La función pasa por el origen.

Esta es una función racional en la que no hay asíntotas puesto que el denominador es diferente de cero para toda x real. La gráfica de la función se muestra a continuación.



Por último, se busca saber que sucede lejos del centro del remolino. Para ello, se puede obtener el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x^2 + 4} = 0$$

por lo tanto, lejos del centro, la velocidad tiende a cero.

4.1 PROBLEMAS DE RAPIDEZ Y RAZÓN DE CAMBIO INSTANTANEO

Razón de cambio promedio

sea f una función tal que $y = f(x)$; sean x_1 y x_2 un par de argumentos de f .

definimos la razón de cambio de y con respecto a x (cambio promedio) como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Razón de cambio instantánea

Sea $y = f(x)$ una función definida en todos los puntos del intervalo $[x, x + \Delta x]$, si $\Delta x > 0$; en el intervalo $[x + \Delta x, x,]$ si $\Delta x < 0$. definimos la “razón de cambio instantáneo” de la función x en el argumento x , con el siguiente limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

O bien con otra notación: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

De acuerdo a sus definiciones la diferencia entre ambas es que la razón de cambio promedio es una razón de incrementos, mientras que la razón de cambio instantánea es el limite de una razón de incrementos

EJERCICIOS:

1. Determina la razón de cambio promedio de la función $f(x) = 3x+1$ en el intervalo de valores de $x \in [3, 7]$

La razón de cambio promedio se define como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, así que lo que tenemos que hallar son los valores de Δx (incremento en x) y Δy (incremento en y), sabiendo que $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$.

Los valores de x que nos servirán para hallar Δx , nos los dan en el intervalo de valores de x , así que $x_1 = 3$ y $x_2 = 7$, así que Δx será igual a:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 7 - 3 \Rightarrow \Delta x = 4$$

Ahora para hallar los valores que nos servirán para hallar Δy , hacemos uso de la igualdad $y = f(x)$, así que la función que nos dan la podemos escribir de la forma $y = 3x + 1$, así que para hallar los valores de y_1 y y_2 solo tenemos que sustituir los valores de x que nos dieron en el intervalo en la función:

$$y_1 = 3(3) + 1 \Rightarrow y_1 = 9 + 1 \Rightarrow y_1 = 10$$

Para hallar y_2 hacemos lo mismo pero tomamos el valor de x_2 :

$$y_2 = 3(7) + 1 \Rightarrow y_2 = 21 + 1 \Rightarrow y_2 = 22$$

Ahora con los valores de y_1 y y_2 hallamos el valor de Δy :

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow \Delta y = 22 - 10 \Rightarrow \Delta y = 12$$

Finalmente como la razón de cambio promedio es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, solo tenemos que dividir lo que nos dio Δy entre lo que nos dio Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

La razón de cambio promedio de la función en el intervalo dado es 3.

2. Determina la razón de cambio promedio de la función $f(x) = 5x^2 + 2x - 6$ en el intervalo de valores de $x \in [-1, 4]$

de los valores del intervalo: $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$, por lo tanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 4 - (-1) \Rightarrow \Delta x = 4 + 1 \Rightarrow \Delta x = 5$$

Usando los valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la función $f(x) = 5x^2 + 2x - 6$ para hallar y_1 y y_2 (para hallar y_1 usamos a x_1 y para hallar y_2 usamos a x_2):

$$\begin{aligned} \text{CALCULANDO } y_1 \\ y_1 &= 5(-1)^2 + 2(-1) - 6 \\ y_1 &= 5(1) - 2 - 6 \\ y_1 &= 5 - 8 \\ y_1 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CALCULANDO } y_2 \\ y_2 &= 5(4)^2 + 2(4) - 6 \\ y_2 &= 5(16) + 8 - 6 \\ y_2 &= 80 + 2 \\ y_2 &= 82 \end{aligned}$$

hallamos ahora Δy :

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow \Delta y = 82 - (-3) \Rightarrow \Delta y = 82 + 3 \Rightarrow \Delta y = 85$$

finalmente hallamos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{85}{5} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 17$$

3. Determina la razón de cambio promedio de la función $f(x) = \sqrt{2x} + 5$ en el intervalo de valores de $x \in [2, 8]$

de los valores del intervalo: $x_1 = 2$ y $x_2 = 8$, por lo tanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 8 - 2 \Rightarrow \Delta x = 6$$

usando los valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la función $f(x) = \sqrt{2x} + 5$ para hallar y_1 y y_2 :

CALCULANDO y_1

$$y_1 = \sqrt{2(2)} + 5$$

$$y_1 = \sqrt{4} + 5$$

$$y_1 = 2 + 5$$

$$y_1 = 7$$

CALCULANDO y_2

$$y_2 = \sqrt{2(8)} + 5$$

$$y_2 = \sqrt{16} + 5$$

$$y_2 = 4 + 5$$

$$y_2 = 9$$

hallamos ahora Δy :

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow \Delta y = 9 - 7 \Rightarrow \Delta y = 2$$

finalmente hallamos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$$

4. Determina la razón de cambio promedio de la función $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 3}$ en el intervalo de valores de $x \in [5, 10]$

de los valores del intervalo: $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$, por lo tanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 10 - 5 \Rightarrow \Delta x = 5$$

Usando los valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la función $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 3}$ para hallar y_1 y y_2 :

CALCULANDO y_1

$$y_1 = \frac{(5)^2 + 5}{(5) - 3}$$

$$y_1 = \frac{25 + 5}{5 - 3}$$

$$y_1 = \frac{30}{2}$$

$$y_1 = 15$$

CALCULANDO y_2

$$y_2 = \frac{(10)^2 + 5}{(10) - 3}$$

$$y_2 = \frac{100 + 5}{10 - 3}$$

$$y_2 = \frac{105}{7}$$

$$y_2 = 35$$

Hallamos ahora Δy :

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow \Delta y = 35 - 15 \Rightarrow \Delta y = 20$$

Finalmente hallamos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20}{5} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$$

Derivada como razón de cambio instantánea

Sea f una función continua y suave en un intervalo $[a, b]$. si x es un punto del intervalo, entonces la derivada de la función en tal punto se representa por $f'(x)$ y la definimos como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Recordaremos que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; entonces, podemos comprobar que la derivada puede representarse también como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Así, la derivada es en si una razón de cambio instantáneo de dos variables relacionadas.

4.3 OPTIMIZACIÓN

Se les llama ejercicios de optimización a aquellos en los que se busca obtener un mínimo de costo, utilizar un mínimo de material, tener un volumen máximo, esto es, cuando se busca optimizar los recursos. A continuación se presentan cuatro problemas de este tipo. Los problemas no utilizan datos reales,

sin embargo, presentan una posible aplicación del cálculo a problemas reales de la oceanología.

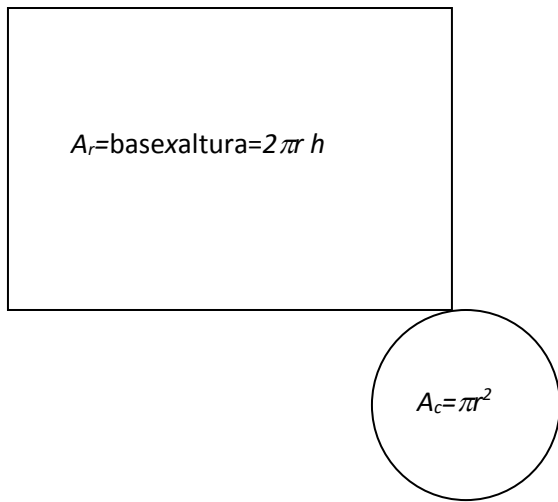
Ejemplo 1.

Se quiere hacer un encierro de atún de forma cilíndrica para permitir el movimiento de los organismos. Las paredes y el fondo estarán hechos con red. Se ha determinado que el volumen ideal para los encierros es de 100 m^3 . Calcular las dimensiones que debe tener el encierro para utilizar la menor cantidad de red posible.

Se conoce el volumen del cilindro que conformará el encierro y se busca que el área de la red sea mínima. Por lo tanto, se deberán plantear dos fórmulas: el volumen de un cilindro (dato conocido) y el área del mismo.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ \pi r^2 h &= 100 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

La ecuación (1) da la fórmula para calcular el volumen de un cilindro. En ella se observa que hay dos variables: el radio, r , y la altura, h . En la figura adyacente se muestra un cilindro extendido. También, se puede observar que el área total del encierro estará dada por la suma de las áreas de las “paredes” y el “fondo”. Por lo tanto,



$$A = A_c + A_r = \pi r^2 + 2\pi rh \quad \dots(2)$$

En la ecuación (2) existen las mismas dos variables. Se busca que el valor de A en (2) sea mínimo. Sin embargo, esta ecuación tiene dos variables. Para escribir (2) en términos de una sola variable para poder obtener el mínimo del área, se utilizará la ecuación (1). Entonces, despejando h en (1) se obtiene

$$h = \frac{100}{\pi r^2}$$

Este valor se sustituye en (2)

$$A = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{100}{\pi r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{200}{r}$$

$$A = \pi r^2 + \frac{200}{r} \quad \dots(3)$$

La ecuación (3) describe el área como función, únicamente, del radio. Esta expresión se deriva para encontrar el valor del radio que resulte en un punto crítico del área.

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\pi r^2 + \frac{200}{r} \right) = 2\pi r - \frac{200}{r^2}$$

Los puntos críticos se encuentran igualando la derivada a cero, por lo tanto

$$\begin{aligned}2\pi r - \frac{200}{r^2} &= 0 \\2\pi r &= \frac{200}{r^2} \\2\pi r^3 &= 200 \\r^3 &= \frac{200}{2\pi} \\r &= \sqrt[3]{\frac{200}{2\pi}} = 3.17\end{aligned}$$

Por lo tanto, si el radio es de $r = 3.17 \text{ m}$, el área será máxima o mínima. Por lo tanto, se comprobará que este valor del radio corresponde al área mínima utilizando el criterio de la segunda derivada.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 A}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(2\pi r - \frac{200}{r^2} \right) = 2\pi + \frac{400}{r^3} \\ \left. \frac{d^2 A}{dr^2} \right|_{r=3.17} &= 2\pi + \frac{400}{(3.17)^3}\end{aligned}$$

La segunda derivada es positiva, por lo tanto, el punto crítico encontrado es un mínimo.

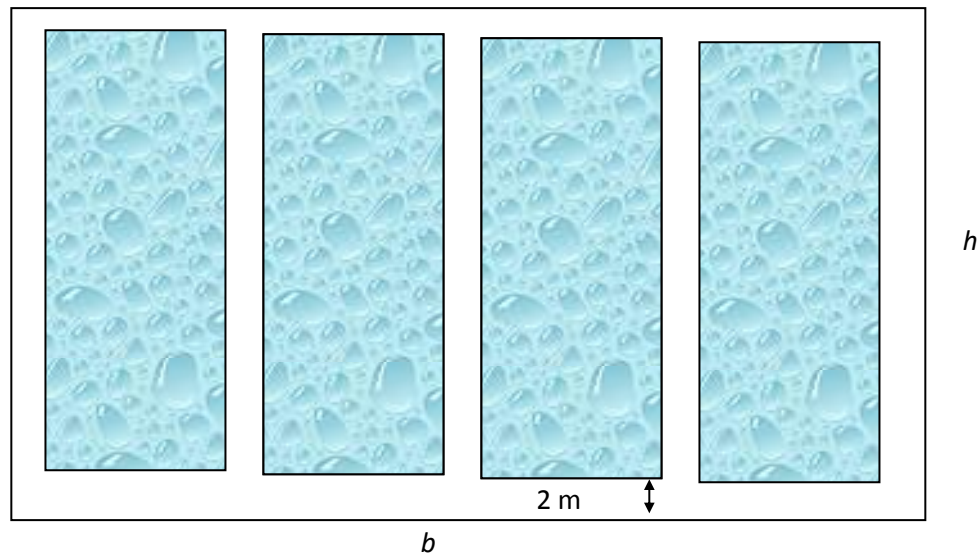
De (1) se despejó $h = \frac{100}{\pi r^2}$, por lo tanto, si $r = 3.17 \text{ m}$, entonces,
 $h = \frac{100}{\pi (3.17)^2} = 3.17 \text{ m}$. El encierro deberá tener un radio de 3.17 m y una

profundidad o altura de 3.17 m para ocupar la menor cantidad de material posible teniendo un volumen de 100 m^3 .

Ejemplo 2.

Se cuenta con el dinero para comprar 500 m^2 de terreno. Dentro de este terreno se quieren construir cuatro estanques rectangulares para el cultivo de un molusco dado. Encontrar las dimensiones del terreno que garanticen que el área de cada estanque será máxima. La separación entre estanques y con la reja que cercará el terreno debe de ser de 2 m .

EJERCICO 2



Se conoce el área total del terreno

$$A = bh = 500$$

$$bh = 500$$

$$h = \frac{500}{b}$$

y se busca que el área de los estanques sea máxima. El área de un estanque va a estar dada por el producto entre la base del estanque y la altura del mismo. La base de un estanque, b_i , es

$$b_i = \frac{b-10}{4}$$

ya que hay una separación de 2 m entre la reja y el estanque y, a su vez, 2 m entre cada estanque. En total, se deben dejar 10 m para estos espacios. Como serán cuatro estanques, el resultado de $b-10$ se debe dividir entre cuatro.

De igual forma, la altura de cada estanque h_i es

$$b_i = h - 4$$

dada la separación entre la reja y los estanques como se muestra en la figura. Entonces, el área de cada estanque es

$$A_i = b_i h_i = \left(\frac{b-10}{4} \right) (h-4)$$

y, se había determinado que la relación entre la base del terreno y la altura del mismo está dada por $h = \frac{500}{b}$. Este valor se sustituye en la ecuación de A_i :

$$\begin{aligned} A_i &= \left(\frac{b-10}{4} \right) \left(\frac{500}{b} - 4 \right) = \left(\frac{b-10}{4} \right) \left(\frac{500-4b}{b} \right) = \frac{500b-4b^2-5000+40b}{4b} = \\ &= \frac{-4b^2+540b-5000}{4b} = -b+135-\frac{1250}{b} \\ A_i &= -b+135-\frac{1250}{b} \end{aligned}$$

Se busca el área máxima, por lo tanto, la última expresión se derivará e igualará a cero.

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{db} &= \frac{d}{db} \left(-b+135-\frac{1250}{b} \right) = -1+\frac{1250}{b^2} \\ -1+\frac{1250}{b^2} &= 0 \\ 1 &= \frac{1250}{b^2} \\ b^2 &= 1250 \\ b &= \pm 35.355 \text{ m} \end{aligned}$$

Se descarta el valor negativo de b por no tener significado físico. Por lo tanto, se tiene que hay un punto crítico en $b=35.355 \text{ m}$. Se usa el criterio de la segunda derivada para determinar si dicho punto corresponde a un máximo o mínimo de área del estanque.

$$\frac{d^2 A_i}{db^2} = \frac{d}{db} \left(-1+\frac{1250}{b^2} \right) = -\frac{2500}{b^3}$$

Al sustituir el valor de b positivo, se obtiene que la segunda derivada tendrá un valor negativo, indicando que el punto crítico es un máximo. Por lo tanto, el valor de $b=35.355 \text{ m}$ garantiza que el área de los estanques va a ser máxima.

La altura está dada por $h = \frac{500}{b} = \frac{500}{35.355} = 14.14 \text{ m}$. Entonces, para garantizar que los estanques tendrán el área máxima, el terreno a comprar deberá de ser de $35.355 \text{ m} \times 14.14 \text{ m}$.

EJERCICO PROPUESTO 1.

En un estanque se tienen 25 peces. Cada pez engorda 45 g por mes. Por cada 2 peces que se aumente al estanque, la producción por pez disminuye en 2.5 g por mes. Hallar el número ideal de peces para garantizar la máxima producción.

Para 25 peces se tiene que la producción P es $P = 25 \times 45$.

Al aumentar 2 peces al estanque, la producción es $P = (25 + 2) \times (45 - 5)$.

Al aumentar 4 peces al estanque, la producción es $P = (25 + 4) \times (45 - 10)$, por lo tanto,

$$P = (25 + x)(45 - 2.5x)$$

$$P = 1125 - 62.5x + 45x - 2.5x^2$$

$$P = -2.5x^2 - 17.5x + 1125$$

La fórmula que describe la producción como función del número de peces que se aumenten al estanque es una parábola cuyo vértice es un máximo. Por lo tanto, si se busca el valor de x para el cual la producción es máxima, se busca el vértice de la parábola.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(-2.5x^2 - 17.5x + 1125) = -5x - 17.5$$

$$-5x - 17.5 = 0$$

$$x = \frac{17.5}{-5} = -3.5$$

Por lo tanto, al quitar 3.5 peces al estanque, la producción será máxima. Dado que no es un número entero, se puede decidir entre quitar 3 o 4 peces dado que ambos valores de x darán el mismo valor de producción.

EJERCICO PROPUESTO 2

Se quiere hacer una lata de atún que tenga 125 cm^3 de volumen. El costo del material para hacer las tapas de dicha lata es de \$0.25 por cm^2 mientras que el costo del material que conforma al cilindro es de \$0.35 por cm^2 . Hallar las dimensiones que deberá tener la lata de atún para que el costo de la lata sea el mínimo.

Se requieren dos funciones: el volumen de un cilindro (V) y el costo (C) del mismo.

$$V = \pi r^2 h = 125 \quad \therefore \quad h = \frac{125}{\pi r^2}$$

$$C = 2(\pi r^2)(0.25) + (2\pi rh)(0.35)$$

$$C = 0.5\pi r^2 + 0.7\pi rh$$

$$C = 0.5\pi r^2 + 0.7\pi r \left(\frac{125}{\pi r^2} \right)$$

$$C = 0.5\pi r^2 + \frac{87.5}{r}$$

$$\frac{dC}{dr} = \pi r - \frac{87.5}{r^2}$$

$$\frac{dC}{dr} = 0$$

$$\pi r - \frac{87.5}{r^2} = 0$$

$$\pi r = \frac{87.5}{r^2}$$

$$\pi r^3 = 87.5$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{87.5}{\pi}} = 3.03 \text{ cm}$$

Al igualar la derivada a cero y despejar r , se obtiene el punto crítico. En este caso, se sabe que si $r \approx 3.03$ cm, entonces, el costo será máximo o mínimo. Para saber cual de estas alternativas, se puede utilizar la segunda derivada o bien sustituir antes y después del punto crítico. Es el segundo método el que se usará.

$r = 3 \text{ cm}$	$\left. \frac{dC}{dr} \right _{r=3} = \left. \pi r - \frac{87.5}{r^2} \right _{r=3} =$ $= 3\pi - \frac{87.5}{9} = -0.297$	Antes del punto $r \approx 3.03$ cm, la función es decreciente.
--------------------	---	---

$r = 4 \text{ cm}$	$\left. \frac{dC}{dr} \right _{r=4} = \left. \pi r - \frac{87.5}{r^2} \right _{r=4} =$ $= 4\pi - \frac{87.5}{16} = 7.1$	Después del punto $r=3.03 \text{ cm}$, la función es creciente.
--------------------	---	--

Un punto crítico en el cual la función primero decrece y luego crece es un mínimo. Entonces, para un radio de 3.03 cm el costo de la lata será el mínimo.

Por último, el valor de h es $h = \frac{125}{\pi r^2} = 4.33 \text{ cm}$.