



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Data la funzione reale di variabile reale f , così definita:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3}$$

1. studia tale funzione e tracciane il grafico G ;
2. utilizzando il grafico G determina il codominio della funzione assegnata. Dopo aver determinato l'equazione della retta tangente a G nel suo unico punto di massimo relativo, calcola l'area della regione piana delimitata da tale retta, dal grafico G , dal semiasse positivo delle y e dal semiasse positivo delle x ;
3. scrivi l'equazione della normale a G nel suo punto di ascissa 1 e determina la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo che tale retta (che si suppone orientata nel verso delle y crescenti) forma con l'asse delle x ;
4. utilizzando il grafico G , stabilisci come varia, al variare del parametro reale k , il numero di soluzioni x_i dell'equazione

$$(1 - k)x^3 + 3x - 4 = 0$$

che soddisfano le condizioni:

$$1 \leq x_i \leq \frac{8}{3}$$

PROBLEMA 2

La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) - x \cdot \cos(x)$$

- 1) Dimostra che f è una funzione dispari, che per $x \in]0, \pi]$ si ha $f(x) > 0$ e che esiste un solo valore $x_0 \in]0, 2\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x \in [0, 5\pi]$.
- 2) Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

e, sapendo che risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3 + 18\pi < 96$$

anche non conoscendo il valore di π .

- 3) Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{(2n+1)\pi} f(x) dx &= 4, \\ \int_0^{2n\pi} f(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

- 4) Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

QUESTIONARIO

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\ln(\cos^2(x))}$$

2. In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia?
3. Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.
4. Tre circonferenze di raggio 2 sono tangenti esternamente una all'altra. Qual è l'area della regione interna che esse delimitano?
5. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?
6. In un semicerchio di raggio $r = 10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?

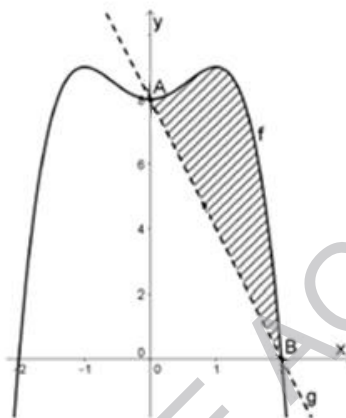


Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

7. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione esplicitando il procedimento seguito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n}$$

8. Data la funzione $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$, sia g la retta passante per i punti $A(0,8)$ e $B(2,0)$. Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.



9. Data l'equazione differenziale: $y'' + 2y' + 5y = 5x$. Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

a) $y = e^{-x}[\sin(5x) + \cos(5x)] + x$

b) $y = 5e^{-x} + x$

c) $y = e^{-x}[\sin(2x) + \cos(2x)] + x - \frac{2}{5}$

d) $y = e^{-x} + 5x$

10. Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R , contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.