정규모집단에서의 추론

신뢰구간과 양측검정의 관계

- 모수 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 (L, U)로 구해졌을 때, 가설 H_0: $\theta = \theta_0$ 대 H_1: $\theta \neq \theta_0$에 대하여 유의수준 α로 검정을 시행할 때의 결론은 다음과 같다.

$\theta_0 \in (L, U) \leftrightarrow$ H_0를 기각할 수 없다.

θ_0 $not \in (L, U) \leftrightarrow$ H_0를 기각한다.

- $(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$: μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

신뢰구간과 양측검정의 관계

- $|t| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$: H_0: $\mu = \mu_0$에 대한 유의수준 α 양측검정 기각역

- $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$: 채택영역

- $\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$

모표준편차에 대한 추론

- 모집단의 표준편차 σ에 대한 추론의 과정은 모분산 σ^2에 대한 추론으로 부터 시작하며, 모분산 추론에 표본분산

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

을 이용한다. 점추정의 경우 s^2를 모분산의 추정량으로 사용하며, 모표준편차의 추정량으로 s를 사용하게 된다.

- 구간추정이나 검정의 경우에는 의 분포가 필요한데, 그 분포는 분포(카이제곱분포)라고 하는 분포와 연관이 있다.

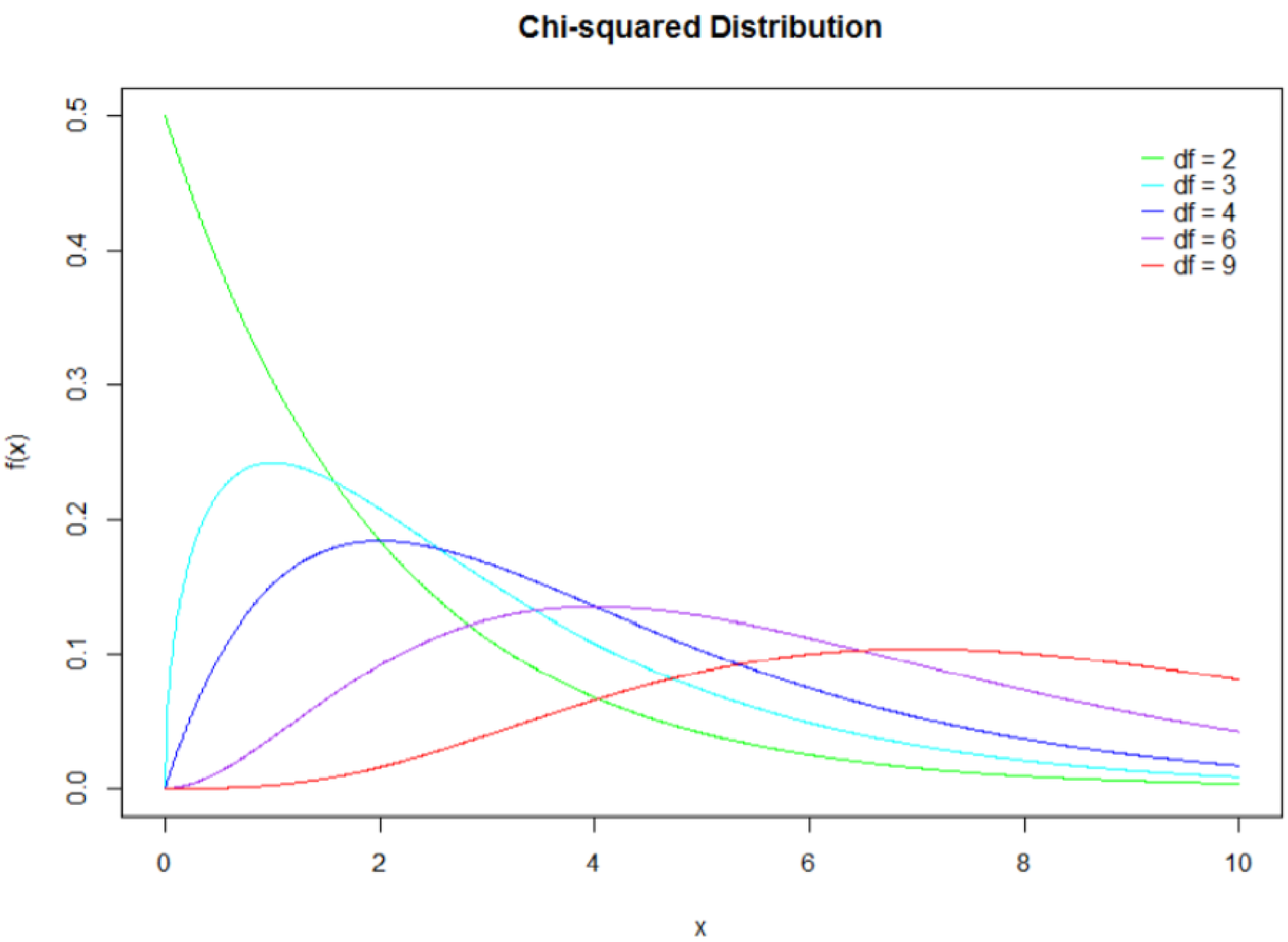
모표준편차에 대한 추론

- 정규모집단 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터 추출된 표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이라고 할 때,

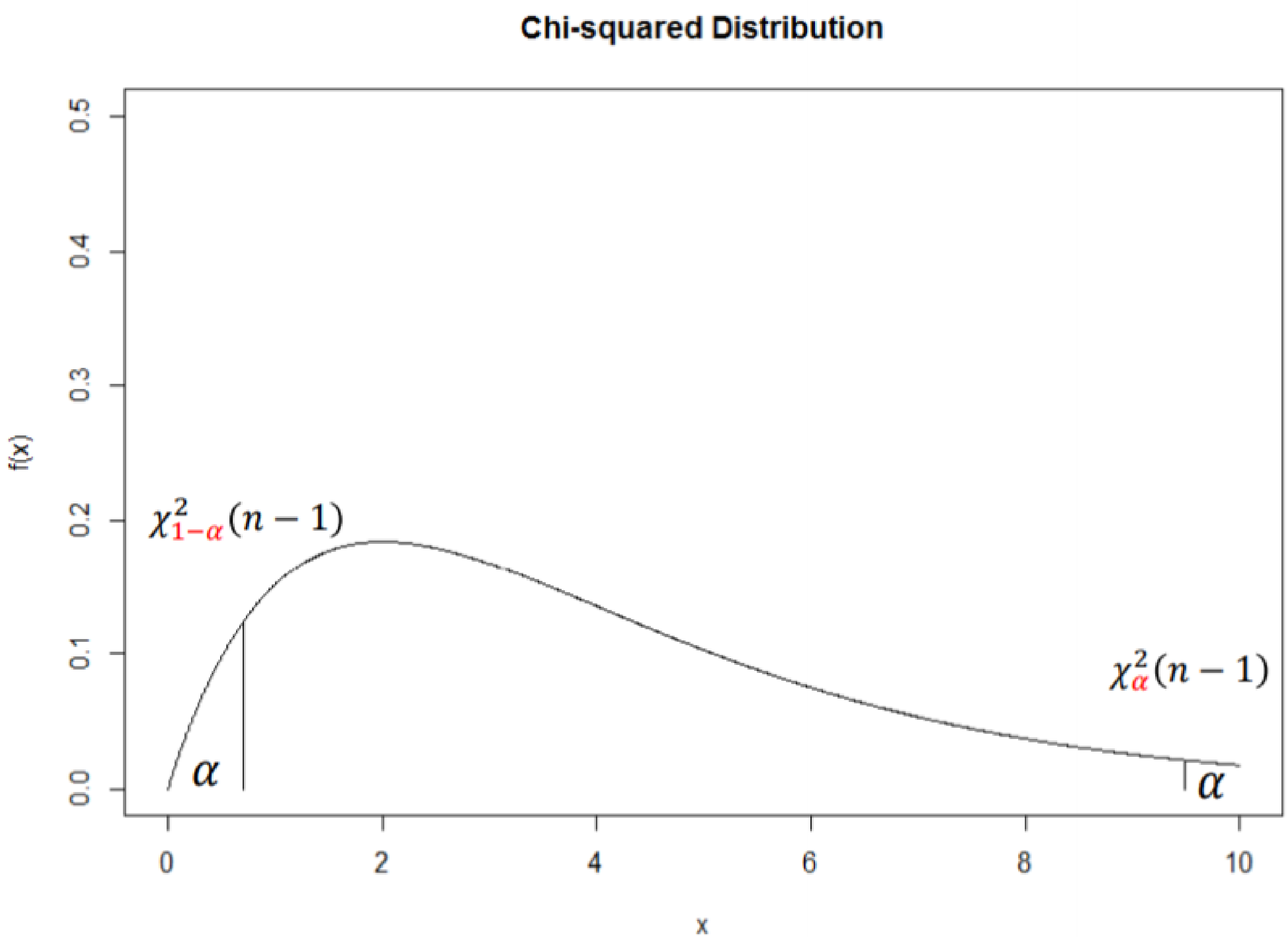
$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

은 자유도가 (n – 1)인 χ^2분포를 따른다고 하고, $\chi^2(n-1)$로 표현한다.

카이제곱 분포


Chi-squared Distribution
df = 2
df = 3
df = 4
df = 6
df = 9
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
x

카이제곱 분포


Chi-squared Distribution
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
x
$\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\chi^2_{\alpha}(n-1)$
α
α

모표준편차에 대한 추론

- 구간추정

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\left(\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

모표준편차에 대한 추론

- 신뢰구간

$$\left(s\sqrt{\frac{n-1}{{\chi^2}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, s\sqrt{\frac{n-1}{{\chi^2}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \right)$$

모표준편차에 대한 추론

- 가설 H_0: $\sigma = \sigma_0$를 검정통계량

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

H_0가 맞을 때, 검정통계량의 분포는 $\chi^2(n-1)$를 따르며, 각 대립가설에 대한 유의수준 α를 갖는 기각역은 다음과 같다.

$H_1: \sigma < \sigma_0$일 때 $R: \chi^2 \le {\chi^2}_{1-\alpha}(n-1)$ (단측검정)

$H_1: \sigma > \sigma_0$일 때 $R: \chi^2 \ge {\chi^2}_{\alpha}(n-1)$ (단측검정)

$H_1: \sigma \neq \sigma_0$일 때 $R: \chi^2 \ge {\chi^2}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ or $\chi^2 \le {\chi^2}_{1-\alpha/2}(n-1)$ (양측검정)

수고하셨습니다.

- 과제 X