통계적 추론

-표본의 크기가 클 때-

통계적 추론

- 표본이 갖고 있는 정보를 분석하여 모수에 관한 결론을 유도하고, 모수에 대한 가설의 옳고 그름을 판단하는 것을 말한다.
- 추출된 표본으로부터 모집단의 일반적인 특성을 추론해내는 것을 뜻한다.
- 모집단의 일부인 표본으로부터 전체 모집단의 성질을 추론해내는 것이기 때문에, 100% 확실하다고는 할 수 없다.
- 따라서, 통계적인 추론을 할 때에는 그 결론의 부정확한 정도를 반드시 언급해야 한다.
- 수치로 표시할 수 있게 하는 도구로 기초통계1에서 배웠던 확률론과 표본분포 등이 이용된다.

통계적 추론

- 통계적 추론은 조사자의 관심에 따라 모수의 추정과 모수에 대한 가설 검정이라는 두 가지 문제로 나눌 수 있다.
- 모수의 추정: 미지수인 모수에 대한 추측 혹은 추측치를 그 수치화된 정확도와 함께 제시하는 것이다.
- 모수에 대한 가설검정: 모수에 대한 여러 가설들이 적합한지 혹은 적합치 않은 것인지를 추출된 표본으로부터 판단하는 것이다.

모수의 추정

- 점추정:
  모평균 μ를 하나의 값으로 추정한다.
  전체가 아닌 일부 표본으로부터 얻어진 수치이므로 실제 모평균 μ와는 차이가 있기 때문에 이러한 차이, 즉 오차의 한계 또는 적당한 구간을 제시하는 것이 필요하다.

- 구간추정: 모평균 μ를 포함할만한 적당한 구간을 정한다.

- 여기서는 모평균이라고 언급하였지만, 관심이 있는 어떤 모수에 대해서 생각하면 된다.

모수에 대한 가설검정

- 가설검정: 모평균 μ 값이 어떤 예측치(ex. 5년 전의 평균값인 155cm)와 다른지를 판단한다.

- 여기서는 모평균이라고 언급하였지만, 관심이 있는 어떤 모수에 대해서 생각하면 된다.

용어

- 통계량(Statistic): 표본의 관측값들에 의해 결정되는 양
  ex. $\bar{X}$, X_1,$\cdots$

- 추정량(Estimator): 모수를 추정하기 위해 만들어진 통계량
  ex. μ에 대한 추정량 $\bar{X}$

- 추정치(Estimate): 주어진 관측값으로부터 계산된 추정량의 값
  ex. μ에 대한 추정량 $\bar{X}$의 추정치 $\bar{x} = 160.2cm$

- 표준오차(Standard Error, S.E.): 추정량의 표준편차

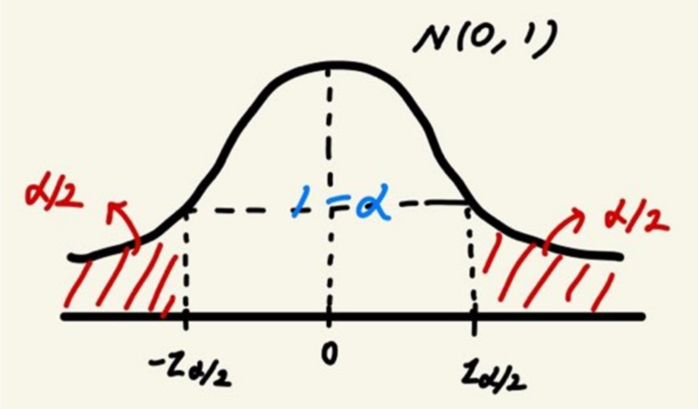
모평균의 추정(표본의 크기가 클 때) - 점추정

- 모수: 모집단의 평균 μ
- 자료: 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 표본 $X_1, \cdots, X_n$
- (모평균 μ의) 추정량: 표본평균 $\bar{X}$

$$E(\bar{X}) = \mu, \ Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

- 표준오차: $S.E.(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$
- 추정된 표준오차: $s/\sqrt{n}$ where $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

모평균의 추정(표본의 크기가 클 때) - 구간추정



- $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ *by Central Limit Theorem*
- $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ -> $P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$
- $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$: 근사치
- $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

  $\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ *if σ is known*

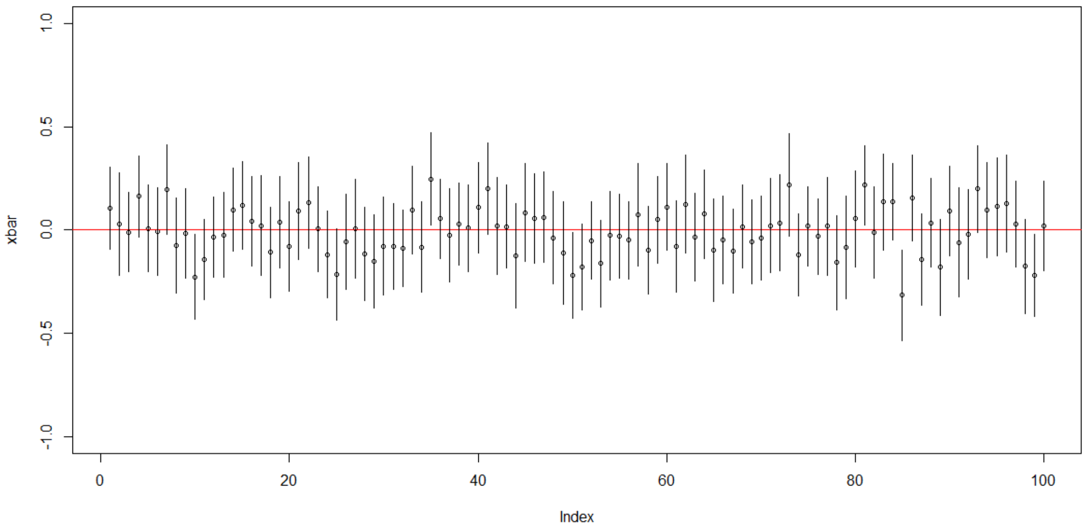
  $\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ *if σ is unknown*

  where $100(1-\alpha)\%$: 신뢰도(신뢰수준)
- 오차범위(error margin): $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰구간의 의미

- $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

- $P(158.0563 < \mu < 162.3437) = 0\ or\ 1$



- 94%의 신뢰구간이 모수를 포함하고 있다. 반복수를 무한히 증가시키면, 95%의 신뢰구간이 모수를 포함할 것이다.

점추정과 신뢰구간

가설검정

- 대립가설(H_1): 입증하여 주장하고자 하는 가설

- 귀무가설(H_0): 대립가설의 반대 가설로 대립가설을 입증할 수 없을 때 대립가설을 무효화 시키면서 받아들이는 가설

- 제 1종오류(Type 1 error;α): 귀무가설이 맞을 때, 귀무가설을 기각하는 오류

- 제 2종오류(Type 2 error;β): 귀무가설이 틀리는데, 귀무가설을 기각하지 않는 오류

	H_0가 사실(참)	H_0가 허위(거짓)
H_0 채택(결정)	옳은 결정	2종 오류
H_0 기각(결정)	1종류	옳은 결정

- 검정통계량(test statistic): 검정을 할 때 이용되는 표본의 함수, 즉 통계량 ex. Z-통계량, t-통계량 등

가설검정

- 기각역(critical region): 귀무가설을 기각하게 하는 구간
  ex. R: $\bar{X} \leq c$

- H_0(귀무가설)가 맞을 때, $\alpha = P(\bar{X} \leq c)$

- H_1(대립가설)가 맞을 때, $\beta = P(\bar{X} > c)$

- 두 확률을 최소화시키는 기각역을 선택

가설검정

- 하지만, 두 확률은 반비례 관계가 존재

- 대개의 경우에 제 1종오류가 제 2종오류보다 심각한 것이기 때문에, 제 1종 오류 값이 0.05, 0.1 또는 0.01등의 작은 값을 갖도록 상한선을 두고 제 2종 오류를 작게해 주는 기각역을 선택한다.

- 유의수준(significance level): 선택된 기각역의 H_0하에서의 확률(α)

모평균 μ에 대한 가설검정

- 표본의 크기가 클 때 모평균 μ에 대한 가설 $H_0: \mu = \mu_0$를 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같다.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

검정통계량의 분포는 H_0가 맞을 때 $N(0,1)$을 따른다. 각 대립가설에 대하여 유의수준 α를 갖는 기각역은 다음과 같다.

$H_1: \mu < \mu_0$ 일 때 $R: Z \le -z_\alpha$ (단측검정)
$H_1: \mu > \mu_0$ 일 때 $R: Z \ge z_\alpha$ (단측검정)
$H_1: \mu \ne \mu_0$ 일 때 $R: |Z| \ge z_{\alpha/2}$ (양측검정)

단, 모집단의 표준편차(σ)가 주어져 있을 때 s를 σ로 대체한다.

모평균 μ에 대한 가설검정

- P-값(혹은 유의확률): 주어진 검정통계량의 관측치로부터 H_0를 기각하게 하는 최소의 유의수준을 말한다.

- $H_1: \mu < \mu_0$ 일 때 $R: Z \leq -z_\alpha$ (단측검정) -> P-값$=P(Z \leq z)$
  $H_1: \mu > \mu_0$ 일 때 $R: Z \geq z_\alpha$ (단측검정) -> P-값$=P(Z \geq z)$
  $H_1: \mu \neq \mu_0$ 일 때 $R: |Z| \geq z_{\alpha/2}$ (양측검정) -> P-값$=P(|Z| \leq |z|)$

가설검정

가설검정