AHRS 倾角测量项目

操作要点：

- 零位时要求保持静止 1S。用于采集精确的零位俯仰和横滚。
- 将机翼转动到角度最小处，保持静止 1S。用于作为转轴计算参考 r 系，提高转轴计算精度。
- 加计和陀螺计算转轴的方法均要求转角越大，计算精度越高。因此求转轴阶段数据要求转动幅度范围大些。
- 每 30S 需要有一次

关键点备注

- 提高频率为 500HZ 进行静止状态判断，将各个阈值更精细调整，对数据进行野值剔除和平滑预处理。
- 在静止状态的判断中加入角速度微分判定。

功能要求描述：

机翼只有绕单轴转动一个自由度，以某个状态为参考零位，测量机翼在其他任何状态下相对参考零位的转动角度。

坐标系定义：

机翼固连坐标系（p）：

机翼转轴：$\boldsymbol{y}_p$

IMU 固连坐标系（b）：

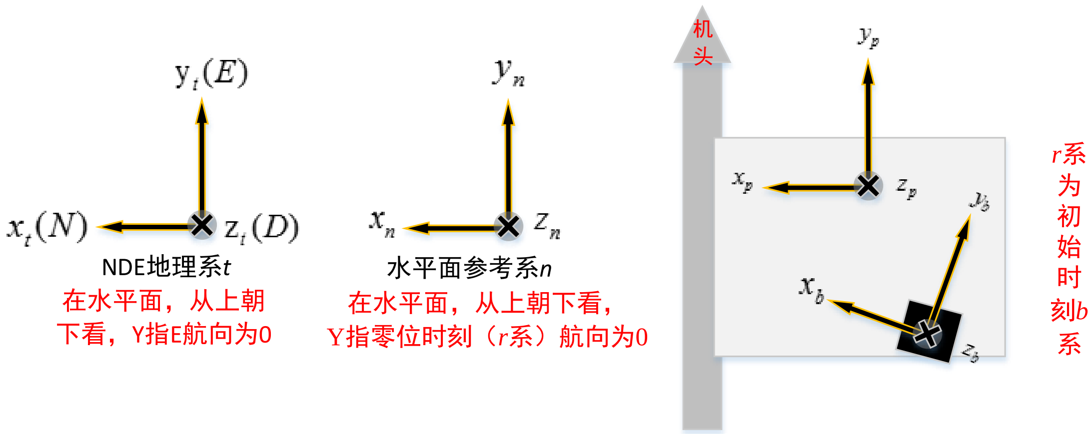
IMU 零位坐标系（r）：零位时刻的 b 系。

NED 地理系（t）：由于测试位置变化不大，可以认为t是不变的。

游动水平面坐标系（n）：n_z 轴与t_z 重合，b_y 在n_{xy} 的投影与n_y 重合（即b相对n的航向始终为 0）。

世界坐标系（w）：$w = n(0)$。

- 静止时，通过加计可计算得到b相对n的俯仰和横滚角，又航向为 0，因此即可得到$\boldsymbol{q}_n^b$。



由于磁场干扰严重，只能利用加计和陀螺，不用磁力计。

解算方案：

输入：三轴加计数据 f^b ，三轴陀螺数据 ω_{ib}^b 。

输出：机翼绕 $\boldsymbol{y}_p$ 的转角 α 。

 # 任意时刻单轴转角与俯仰横滚的关系

$\boldsymbol{q}_r^b$ 与机翼绕 $\boldsymbol{y}_p$ 转角 α 的关系：

$$\boldsymbol{q}_r^b = \cos\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{y}_p^r \sin\frac{\alpha}{2} \tag{0.1}$$

通过求 $\boldsymbol{q}_r^b$ 可同时求得转角 α 和转轴 $\boldsymbol{y}_p^r$，其中 $\boldsymbol{y}_p^r$ 应该是一个常数。

求 $\boldsymbol{q}_r^b$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_r^b &= (\boldsymbol{q}_n^r)^{-1} \circ \boldsymbol{q}_n^b \\ \boldsymbol{q}_n^r \circ \boldsymbol{q}_r^b &= \boldsymbol{q}_n^b \end{aligned} \tag{0.2}$$

$$\boldsymbol{q}_n^w \circ \boldsymbol{q}_w^r \circ \boldsymbol{q}_r^b = \boldsymbol{q}_n^b \tag{0.3}$$

$$\boldsymbol{q}_w^n = \boldsymbol{q}_w^r \boldsymbol{q}_r^b \boldsymbol{q}_{b(t)}^{n(t)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{sw}^n & \boldsymbol{q}_{xw}^n & \boldsymbol{q}_{yw}^n & \boldsymbol{q}_{zw}^n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{sw}^n & 0 & 0 & \boldsymbol{q}_{zw}^n \end{bmatrix}^T \tag{0.4}$$

上式中，$\boldsymbol{q}_w^r$ 和 $\boldsymbol{q}_{b(t)}^{n(t)}$ 已知（由初始和 t 时刻俯仰横滚得到），$\boldsymbol{v}^r$ 已知，只有 α 一个未知数。

NOTE：等式(0.4)中 2 个方程解一个未知数存在的问题：当 $\boldsymbol{q}_{n(t)}^{b(t)}$ 对应的俯仰和横滚与 $\boldsymbol{y}_p^r$ 均为理论值时，这 2 个方程应该是得到一个一致解的，但当 $\boldsymbol{v}^r$ 或者俯仰横滚有误差均会导

致这两个方程得到不同的解。从几何意义上，应该求一个使得 $\boldsymbol{q}_{n(t)}^{b(t)}$ 中的俯仰和横滚对应转轴与 $\boldsymbol{y}_p^r$ 最接近的 α 。对应的数学表达为：使 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{q}_{xn(0)}^{n(t)\,2}+\boldsymbol{q}_{yn(0)}^{n(t)\,2}$ 最小。

α 的精度主要取决于 $\boldsymbol{q}_{n(t)}^{b}$ 的精度。静态时 $\boldsymbol{q}_{n(t)}^{b}$ 仅由加计即可求得，要得到 0.1° 测角精度，加计常漂估计误差大约要求在 0.5mg 以内。 这样的话，需要考虑温度的影响。

动态过程中，采用积分方法。设积分时间为 30S，要求角度积分误差在 0.3° 以内，则要求陀螺漂移在 0.01° /s 内。ADIS16362 的陀螺常漂为 3° /s，常漂稳定性为 0.007° /s，温度影响为 0.01° /s/°C。在补偿温度影响的影响下勉强可以做到。但感觉和困难。。。

这种方法的**思想**是：只要俯仰和横滚，再利用单自由度约束就可直接得到转角 α ，且同时可将航向解出。由于通过加计求俯仰和横滚的精度较高，不需要航向的算法可得到更高的精度。

（A）零位获取

静止时通过加计得到 $\boldsymbol{q}_n^b$ ，零位时 $\boldsymbol{q}_w^r=\boldsymbol{q}_n^b(0)$ 。

（B）转轴获取

（B1）静态转轴获取（纯加计）

纯利用加速度计求 $\boldsymbol{y}_p^r$

$$\boldsymbol{q}_r^b=\cos\frac{\alpha}{2}+\boldsymbol{y}_p^r\sin\frac{\alpha}{2} \tag{0.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_w^n&=\boldsymbol{q}_w^r\boldsymbol{q}_r^b\boldsymbol{q}_{b(t)}^{n(t)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{sw}^{\ n} & \boldsymbol{q}_{xw}^{\ n} & \boldsymbol{q}_{yw}^{\ n} & \boldsymbol{q}_{zw}^{\ n}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{sw}^{\ n} & 0 & 0 & \boldsymbol{q}_{zw}^{\ n}\end{bmatrix}^T\\&=\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{q}_{b(t)}^{n(t)})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}_w^r)\boldsymbol{q}_r^b=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_r^b\end{aligned} \tag{0.6}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3\\\boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{q}_r^b=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

将规范的 $\boldsymbol{q}_r^b$ 转换为矢量显示形式（注意变为非规范化四元数）：

$$\hat{\boldsymbol{q}}_r^b=\frac{\boldsymbol{q}_r^b}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}+\boldsymbol{y}_p^r \tag{0.7}$$

当 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{q}}_r^b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} & \boldsymbol{A}_{2,3} & \boldsymbol{A}_{2,4} \\ \boldsymbol{A}_{3,1} & \boldsymbol{A}_{3,2} & \boldsymbol{A}_{3,3} & \boldsymbol{A}_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot\dfrac{\alpha}{2} \\ \boldsymbol{y}_p^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{0.8}$$

其中$\left|\boldsymbol{y}_p^r\right| = 1$

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{2,1} \\ \boldsymbol{A}_{3,1} \end{bmatrix}_{2\times1} \quad \boldsymbol{A}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{2,2} & \boldsymbol{A}_{2,3} & \boldsymbol{A}_{2,4} \\ \boldsymbol{A}_{3,2} & \boldsymbol{A}_{3,3} & \boldsymbol{A}_{4,4} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_s & \boldsymbol{A}_v \end{bmatrix}_{2\times4} \begin{bmatrix} \cot\dfrac{\alpha}{2} \\ \boldsymbol{y}_p^r \end{bmatrix}_{4\times1} = \boldsymbol{0}_{2\times1} \tag{0.9}$$

其中$\left|\boldsymbol{y}_p^r\right| = 1$

式(0.8)中，3 个未知数，2 个齐次方程。解不出来。每增加一组方程，增加 1 个未知数和 2 个方程。2 组以上的方程可解得。且求得转轴 $\boldsymbol{y}_p^r$ 的同时可得到转角 α 。

K 个点得到方程组：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_v^1 & \boldsymbol{A}_s^1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \boldsymbol{A}_v^2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_s^2 & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \boldsymbol{A}_v^3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_s^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{(2k)\times(3+k)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_p^r \\ \cot\dfrac{\alpha_1}{2} \\ \cot\dfrac{\alpha_2}{2} \\ \cot\dfrac{\alpha_3}{2} \\ \vdots \\ \cot\dfrac{\alpha_k}{2} \end{bmatrix}_{(3+k)\times1} = \boldsymbol{D}_{(2k)\times(3+k)} \boldsymbol{X}_{(3+k)\times1} = \boldsymbol{0}_{(2k)\times1} \tag{0.10}$$

其中$\left|\boldsymbol{y}_p^r\right| = 1$

采用最小二乘解法：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_{(2k)\times(3+k)} \boldsymbol{X}_{(3+k)\times1} = \boldsymbol{0}_{(2k)\times1} \\ &(\boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D})_{(3+k)\times(3+k)} \boldsymbol{X}_{(3+k)\times1} = \boldsymbol{0}_{(3+k)\times1} \\ &\text{其中}\boldsymbol{y}_p^r = \boldsymbol{X}(1:3), \left|\boldsymbol{y}_p^r\right| = 1 \end{aligned} \tag{0.11}$$

转轴解算数据选择

选择转动角度 $\alpha > 30^\circ$ 的点进行转轴解算。问题是转轴没有解算出来角度是未知的。想到 2 中粗略的方案：（1）用俯仰横滚作粗略的判断；（2）用陀螺仪计算转角，作为判断依据。方法（2）的问题是纯加计求转轴的数据中，角速度是很慢的，可能平均角速度能到 5° /s。

另外导致这种方法失去只用加计的便捷性。

先试试方法（1），限定 t 时刻俯仰和横滚为如下条件时满足解算转轴的要求：

1） 假定 t 时刻的航向和初始时刻的航向都为 0，得到一个转角，要求这个转角大于 30°。

即假设 $n = w$，则 $\boldsymbol{Q}_r^b = \boldsymbol{Q}_r^w \circ \boldsymbol{Q}_n^b$ 中的转角大于 30°。

2） t 时刻为 0 加速度状态。

NOTE（方程(0.10)待优化）：

- 方程(0.11)解个数问题：当 $r(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}) = 2 + k$ 时可得到唯一解。
- $\sin\frac{\alpha}{2}$ 很小时 $\hat{\boldsymbol{q}}_r^b$ 求解误差很大，$\sin\frac{30^\circ}{2}$=0.2588 已经很小，所以从 30° 以上才能开始计算转轴。$\sin\frac{20^\circ}{2}$=0.1736 $\sin\frac{40^\circ}{2}$=0.3420 $\sin\frac{50^\circ}{2}$=0.4226。
- 应该先剔除一些离群点，而不是直接最小二乘。
- **纯加计求转轴一个重要优化方法：**利用 $\boldsymbol{y}_p^r = \boldsymbol{y}_p^b$

纯加计求转轴的一个重要误差来源于 $\hat{\boldsymbol{q}}_r^b = \dfrac{\boldsymbol{q}_r^b}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{y}_p^r$ 计算中 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 较小时带来的误差。利用 $\boldsymbol{y}_p^r = \boldsymbol{y}_p^b$，可不直接计算 $\boldsymbol{y}_p^r$，而通过检测出转角最小的点 r'，而通过计算 $\boldsymbol{y}_p^{r'}$ 减小 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 带来的误差。

（ ） 纯加计实时解算转角

由方程(0.8)可得：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} & \boldsymbol{A}_{2,3} & \boldsymbol{A}_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot\frac{\alpha}{2} \\ \boldsymbol{y}_p^r \end{bmatrix} = 0 \tag{0.12}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{-\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{2,2} & \boldsymbol{A}_{2,3} & \boldsymbol{A}_{2,4} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}_p^r}{\boldsymbol{A}_{2,1}} \tag{0.13}$$

上式可解得 α。

（B2）动态转轴获取（纯陀螺）

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}_w^b &= \frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\boldsymbol{q}_w^b \\ \boldsymbol{q}_r^b &= \boldsymbol{q}_r^w\boldsymbol{q}_w^b \end{aligned} \tag{0.14}$$

0 时刻，$\boldsymbol{q}_r^b=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。采集陀螺数据$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$，利用捷联惯导积分公式(0.14)，计算得到$\boldsymbol{q}_r^b(t)$。$\boldsymbol{q}_r^b(t)=\cos\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{y}_p^r\sin\dfrac{\alpha}{2}$中的矢量部分$\boldsymbol{v}^r$即为所求转轴在初始本体系中的矢量。

转轴$\boldsymbol{y}_p^r$的优化方法：

（1）采用纯陀螺计算$\boldsymbol{y}_p^r$时，由于$\boldsymbol{q}_r^b(t)$会随时间而累积误差，$\boldsymbol{y}_p^r$也将随时间累积误差。$\alpha(t)$越大，在对$\boldsymbol{q}_r^b(t)$后三位进行归一化时得到矢量误差越小。因此，采取快速转动，取转动最大角度的方法可得到较高精度。取角度最大的 10°部分。

由于$\boldsymbol{y}_p^b$与$\boldsymbol{y}_p^r$相等，可从快速往复转动的最高点到最低点这段时间数据求取$\boldsymbol{y}_p^b$，并且可通过多次往复转动优化$\boldsymbol{y}_p^b$。

（B3）纯陀螺积分动态转轴获取优化

定义姿态误差角$\boldsymbol{\phi}$为：

$$\boldsymbol{I}-\left[\boldsymbol{\phi}\times\right]=\boldsymbol{C}_b^w\boldsymbol{C}_p^b=\boldsymbol{C}_p^w \tag{0.15}$$

状态量$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^T & \boldsymbol{\phi}^T & \boldsymbol{y}_p^{rT}\end{bmatrix}^T$，状态方程：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{0}\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{R}_b^w\boldsymbol{\varepsilon}\\ \dot{\boldsymbol{y}}_p^r=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{0.16}$$

量测方程根据角速度与转轴平行的关系得到。

准确的角速度与转轴平行的关系为：

$$\boldsymbol{y}_p^r\times(\boldsymbol{C}_w^r\boldsymbol{C}_b^w\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)=\boldsymbol{0} \tag{0.17}$$

做如下假设：

1）$\boldsymbol{C}_w^r$没有误差

2）

利用角速度与转轴平行的关系，在不考虑当前时刻$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$的误差时，可直接得到累积姿态误差$\boldsymbol{\phi}$：

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon} \tag{0.18}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_1 &= \boldsymbol{y}_p^r \times (\boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{C}_b^w \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \\
&= \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{C}_p^w \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&= \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r (\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{\phi}\times]) \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&= \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r [\boldsymbol{\phi}\times] \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&= \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \left[\boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times\right] \boldsymbol{\phi} \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{0.19}
$$

$$
\boldsymbol{\phi} = -\left(\left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \left[\boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times\right]\right)^{-1} \left[\boldsymbol{y}_p^r \times\right] \boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{C}_b^p \boldsymbol{\omega}_{ib}^b
\tag{0.20}
$$

采用 Kalman 滤波，以$\boldsymbol{q}_r^b$为状态量，(0.14)为状态方程（线性）。利用$\boldsymbol{q}_r^b$的矢量部分不变建立量测方程。

量测量：

$$
\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{0}
\tag{0.21}
$$

量测方程（线性）：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{q}_r^b(t) = \cos\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{y}_p^r \sin\frac{\alpha}{2} \\
&\boldsymbol{\omega}_{ib}^r = \boldsymbol{C}_b^r \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{\omega}_{ib}^r \times \boldsymbol{y}_p^r
\end{aligned}
\tag{0.22}
$$

（B4）利用加计优化陀螺积分的动态转轴获取

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{q}}_w^b = \dfrac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\boldsymbol{q}_w^b \\
\dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^w = (\boldsymbol{C}_w^b)^T \boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{g}^w
\end{cases}
\tag{0.23}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{R}_b^w \boldsymbol{\varepsilon} \\
\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -(\boldsymbol{R}_b^w \boldsymbol{f}^b) \times \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{R}_b^w \nabla
\end{cases}
\tag{0.24}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_2 = (\boldsymbol{C}_w^r \boldsymbol{v}_{wb}^w) \bullet \boldsymbol{y}_p^r
\tag{0.25}
$$

量测方程（线性）：

$$
\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{0}
\tag{0.26}
$$

（C）纯陀螺转角计算

有两种计算方法，一种是积分法，一种是角速度和转轴平行法。

（C.1）角速度和转轴平行法（直接解算转角失败-得到一种陀螺漂移估计的观测信息）

转轴已知，利用角速度和转轴平行，可求出转动角度。转轴平行的几何表达方法有叉乘和点乘两种数学表达方法。需要求得的未知数只有一个，叉乘得到 0 矢量有 2 个方程，点乘得到标量有 1 个未知数，均可求出转角。但叉乘的方程较为复杂，点乘的方程较为简单，因

此选择点乘法解转角。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{q}_r^b(t)=\cos\frac{\alpha}{2}+\boldsymbol{y}_p^r\sin\frac{\alpha}{2}\\
&\lambda_0=\cos\frac{\alpha}{2}\quad \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{y}_p^r\sin\frac{\alpha}{2}\quad |\lambda|=\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|
\end{aligned}
\tag{0.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^r\end{bmatrix}=\boldsymbol{q}_b^{r*}\circ\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}\circ\boldsymbol{q}_b^r=\boldsymbol{q}_r^b\circ\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}\circ\boldsymbol{q}_r^{b*}=\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{q}_r^{b*})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}_r^b)\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\lambda_0 & \vec{\lambda}^T\\ -\vec{\lambda} & \lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0 & -\vec{\lambda}^T\\ \vec{\lambda} & \lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\lambda_0 & \vec{\lambda}^T\\ -\vec{\lambda} & \lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\ (\lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right])\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{0.28}
$$

$$
\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda_0\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b+\vec{\lambda}^T(\lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right])\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\ \vec{\lambda}\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b+(\lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right])^2\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{bmatrix}
\tag{0.29}
$$

$$
\boldsymbol{\omega}_{ib}^r=\vec{\lambda}\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b+(\lambda_0 I+\left[\vec{\lambda}\times\right])^2\boldsymbol{\omega}_{ib}^b
\tag{0.30}
$$

由于$\boldsymbol{\omega}_{ib}^r$与$\boldsymbol{\lambda}$平行：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}_{ib}^r\bullet\vec{\lambda}=\vec{\lambda}^T(\vec{\lambda}\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b+(\lambda_0\boldsymbol{I}+\left[\vec{\lambda}\times\right])^2\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\\
&=(\left|\vec{\lambda}\right|^2\vec{\lambda}^T+\lambda_0{}^2\vec{\lambda}^T+2\lambda_0\vec{\lambda}^T\left[\vec{\lambda}\times\right]+\vec{\lambda}^T\left[\vec{\lambda}\times\right]^2)\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\
&=(\left|\vec{\lambda}\right|^2\vec{\lambda}^T+\lambda_0{}^2\vec{\lambda}^T)\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\
&=(\left|\vec{\lambda}\right|^2+\lambda_0{}^2)\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\
&=\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\
&=\left|\vec{\lambda}\right|\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|
\end{aligned}
\tag{0.31}
$$

$$
\lambda_0{}^2=\frac{\left|\vec{\lambda}\right|\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|}{\vec{\lambda}^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}-\left|\vec{\lambda}\right|^2=\frac{1}{(\frac{\vec{\lambda}}{\left|\vec{\lambda}\right|})^T\frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|}}-\left|\vec{\lambda}\right|^2
\tag{0.32}
$$

上式将α消除了，因此求不出α，等价于：

$$
\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|}=1
\tag{0.33}
$$

等价于：

$$
\boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b=\boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{\omega}_{ib}^b=\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|
\tag{0.34}
$$

结论(0.34)的简单证明和几何理解：

$$\boldsymbol{y}_p^b = \boldsymbol{C}_r^b \boldsymbol{y}_p^r \tag{0.35}$$

即转轴 $\boldsymbol{y}_p^b$ 在任何时刻本体系下的表达式一致的。根据这个结论，可以在零位之后遇到更好的数据时再次优化 $\boldsymbol{y}_p^b$。

$\boldsymbol{C}_r^b$ 的几何意义是绕 $\boldsymbol{y}_p^r$ 旋转一个角度，从集合上和好理解：

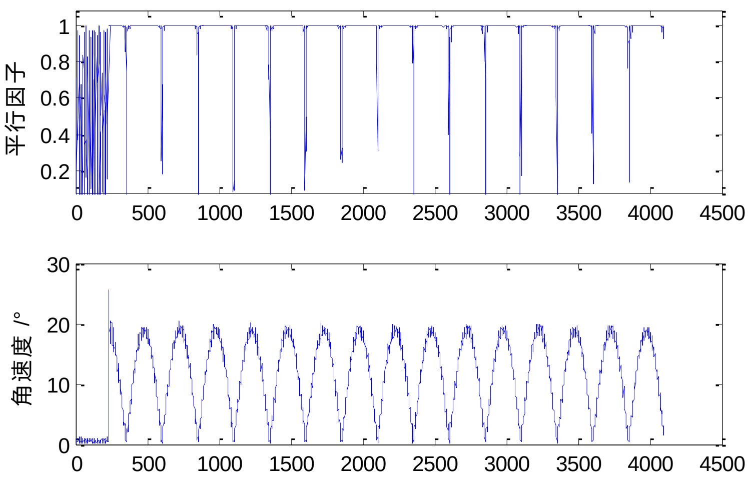
$$\boldsymbol{y}_p^b = \boldsymbol{C}_r^b \boldsymbol{y}_p^r = \boldsymbol{y}_p^r \tag{0.36}$$

因此：

$$\boldsymbol{y}_p^{rT} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{y}_p^{bT} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right| \tag{0.37}$$

这是一个神奇的结论，r 系和 b 系的矢量居然可以直接相乘。并且这个结论已经试验验证了。当角速度大于 2° /s 时，$\boldsymbol{y}_p^{rT} \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|} > 0.98$。当角速度大于 8° /s 时，$\boldsymbol{y}_p^{rT} \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|} > 0.999$。当角速度低于 2° /s（0.0349rad/s）后，误差迅速增大，这是由于 $\dfrac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|}$ 中由 ε 导致的误差被 $\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|$ 放大。

定义平行因子： $f\_parallel = \boldsymbol{y}_p^{rT} \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|}$



由于不需要将 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 转换为 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^r$，(0.33)关系非常有用：

1）可用于粗略判断 $\boldsymbol{y}_p^r$ 是否正确，如果在角速度大于 5° /s 时，$\boldsymbol{y}_p^{rT} \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b}{\left|\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right|} < 0.99$，可以

肯定 $\boldsymbol{y}_p^r$ 的误差太大。

2）估计陀螺漂移：

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon} \tag{0.38}$$

$$\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|}=1$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{\varepsilon}&=\boldsymbol{y}_p^{rT}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|=(\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}-\frac{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|})\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right| \\ &=(\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}-1+1-\frac{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|})\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|\end{aligned} \tag{0.39}$$

对上式进行简化：

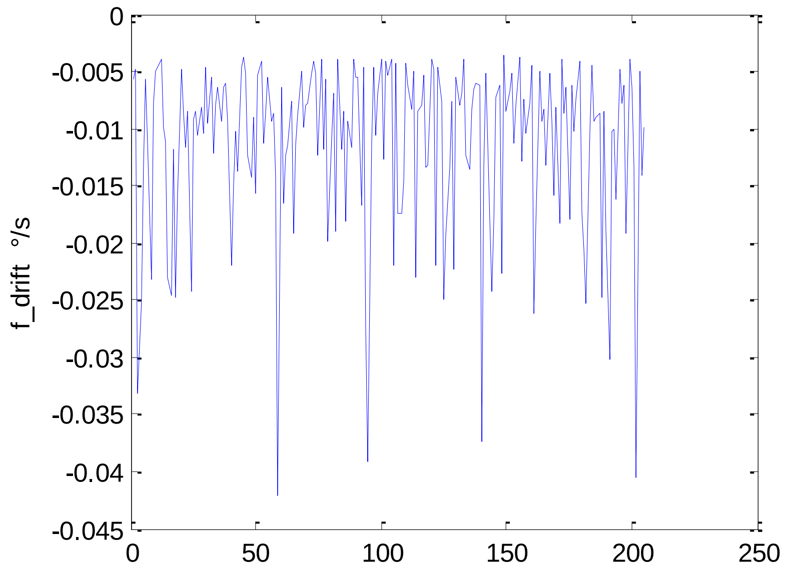
$$\frac{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}\le 1+\frac{\left|\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|} \tag{0.40}$$

$$\frac{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b-\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}-1\le\frac{\left|\boldsymbol{\varepsilon}\right|}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|} \tag{0.41}$$

当 $\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|$ 远大于 $\left|\boldsymbol{\varepsilon}\right|$ 时：

$$\boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{\varepsilon}\approx(\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}-1)\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right| \tag{0.42}$$

定义漂移因子 $f\_drift=\boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{\varepsilon}$ 。



数据源：_raw_data_4.20\Xu\ahrs1，取角速度为19°/s以上数据计算结果如上，f_drif 的均值为-0.0113°/s。

取角速度为 15°s 以上数据计算 f_drif 的均值为-0.0107°/s。

取角速度为 10°/s 以上数据计算 f_drif 的均值为-0.0114°/s。

取角速度为 5°/s 以上数据计算 f_drif 的均值为-0.0129°/s。

可见，简化后 f_drift 的常值特性保持的还是比较好的。

平行->估计陀螺漂移：

量测量：

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{y}_p^{rT}\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|}-1)\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right| \tag{0.43}$$

量测方程：

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{y}_p^{rT}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{0.44}$$

这是非常简单的线性量测方程，注意这个量测信息只在$\left|\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right|$远大于$\left|\boldsymbol{\varepsilon}\right|$时有效。

（C.2）积分法

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}_w^b &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\boldsymbol{q}_w^b \\ \boldsymbol{q}_r^b &= \boldsymbol{q}_r^w\boldsymbol{q}_w^b\end{aligned} \tag{0.45}$$

从$\boldsymbol{q}_r^b$中即可得转动角度。

（C）动态俯仰横滚计算方法

当物体不在静止状态时，可通过陀螺仪计算俯仰和横滚及$\boldsymbol{q}_{n(t)}^b$。有两种计算方法，一种是积分法，一种是角速度和转轴平行法。

获得零位$\boldsymbol{q}_w^r$和转轴$\boldsymbol{y}_p^r$后，通过陀螺仪积分的办法计算$\boldsymbol{q}_w^b$，并采用 Kalman 滤波，利用转轴$\boldsymbol{y}_p^r$与角速度和速度垂直约束建立量测模型。当检测到静止时，进行校准。

捷联解算：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_w^b = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\boldsymbol{q}_w^b \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^w = (\boldsymbol{C}_w^b)^T\boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{g}^w\end{cases} \tag{0.46}$$

状态量：$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi} & \delta\boldsymbol{v} & \boldsymbol{\varepsilon} & \nabla\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_w^b &= \boldsymbol{C}_{w,\mathrm{INS}}^b(\boldsymbol{I}+[\boldsymbol{\phi}\times]) \\ \boldsymbol{C}_b^w &= (\boldsymbol{I}-[\boldsymbol{\phi}\times])\boldsymbol{C}_b^{w,\mathrm{INS}}\end{aligned} \tag{0.47}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{INS} - \delta\boldsymbol{v} \tag{0.48}$$

状态方程：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{R}_b^w\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\dot{\boldsymbol{v}} = -(\boldsymbol{R}_b^w\boldsymbol{f}^b)\times\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{R}_b^w\nabla\end{cases} \tag{0.49}$$

量测量：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{q}_r^b(t) = \cos\frac{\alpha}{2}+\boldsymbol{y}_p^r\sin\frac{\alpha}{2} \\ \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{C}_w^r\boldsymbol{C}_b^w\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\times\boldsymbol{y}_p^r \\ (\boldsymbol{C}_w^r\boldsymbol{v}_{wb}^w)\bullet\boldsymbol{y}_p^r\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{0.50}$$

量测方程：

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{C}_w^r\boldsymbol{C}_b^w\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\times\boldsymbol{y}_p^r \\ (\boldsymbol{C}_w^r\boldsymbol{v}_{wb}^w)\bullet\boldsymbol{y}_p^r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{C}_w^r(\boldsymbol{I}-[\boldsymbol{\phi}\times])\boldsymbol{C}_b^{w,\mathrm{INS}}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\times\boldsymbol{y}_p^r \\ (\boldsymbol{C}_w^r(\boldsymbol{v}_{wb,INS}^w-\delta\boldsymbol{v}))\bullet\boldsymbol{y}_p^r\end{bmatrix} \tag{0.51}$$

（D）加计求俯仰和横滚（0 运动加速度时）

0 运动加速度时，通过加计可得到精度较高的俯仰和横滚，可用于校准俯仰和横滚。当检测到加计的模与重力加速度的模较为接近时，认为处于准静止状态。

以北东地地理坐标系为导航系。

$$C_t^b = R_{x''}(\gamma)R_{y'}(\theta)R_z(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\gamma\sin\theta\cos\psi-\sin\psi\cos\gamma & \sin\gamma\sin\theta\sin\psi+\cos\gamma\cos\psi & \sin\gamma\cos\theta \\ \cos\gamma\sin\theta\cos\psi+\sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\sin\theta\sin\psi-\sin\gamma\cos\psi & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$g^b = \boldsymbol{C}_t^b g^t = \boldsymbol{C}_t^b\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin\theta \\ \sin\gamma\cos\theta \\ \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_x^b \\ g_y^b \\ g_z^b\end{bmatrix} \tag{0.52}$$

$$\begin{gathered}\theta=\sin^{-1}(-g_x^b) \quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \gamma = \tan^{-1}(\frac{g_y^b}{g_z^b}) \quad [-\pi,\pi]\end{gathered} \tag{0.53}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\theta))^2}}$$
$$\dot{\gamma} = \frac{1}{1+(\tan\gamma)^2} \tag{0.54}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}(0) = 1rad = 57.296^\circ \quad \dot{\theta}(30^\circ) = 1.414rad = 81.016^\circ \\
&\dot{\theta}(60^\circ) = 2.732rad = 156.532^\circ \quad \dot{\theta}(80^\circ) = 8.113rad = 464.841^\circ \\
&\dot{\gamma}(0) = 1rad = 57.296^\circ \quad \dot{\gamma}(30^\circ) = 0.75rad = 42.972^\circ \\
&\dot{\gamma}(60^\circ) = 0.25rad = 14.324^\circ \quad \dot{\gamma}(80^\circ) = 0.03rad = 1.719^\circ
\end{aligned} \tag{0.55}$$

g_x^b 0.01mg 误差时 θ 的误差：

$$\Delta\theta(0) = 0.0057^\circ \quad \Delta\theta(30^\circ) = 0.0066^\circ \quad \Delta\theta(60^\circ) = 0.0115^\circ \quad \Delta\theta(80^\circ) = 0.0330^\circ$$

g_x^b 0.5mg 误差时 θ 的误差：

$$\Delta\theta(0) = 0.0286^\circ \quad \Delta\theta(30^\circ) = 0.0331^\circ \quad \Delta\theta(60^\circ) = 0.0573^\circ \quad \Delta\theta(80^\circ) = 0.1663^\circ$$

(0.56)

g_x^b 1mg 误差时 θ 的误差：

$$\Delta\theta(0) = 0.057^\circ \quad \Delta\theta(30^\circ) = 0.081^\circ \quad \Delta\theta(60^\circ) = 0.156^\circ \quad \Delta\theta(80^\circ) = 0.465^\circ \tag{0.57}$$

g_x^b 3mg 误差时 θ 的误差：

$$\Delta\theta(0) = 0.171^\circ \quad \Delta\theta(30^\circ) = 0.243^\circ \quad \Delta\theta(60^\circ) = 0.468^\circ \quad \Delta\theta(80^\circ) = 1.395^\circ \tag{0.58}$$

g_y^b 和 g_z^b 1mg 误差时，且 $\theta = 0$， γ 的误差：

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(0) \quad & = \tan^{-1}\left(\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}\right) - 0 = 0.0574^\circ \\
& = \tan^{-1}\left(\frac{-10^{-3}}{1+10^{-3}}\right) - 0 = 0.0572^\circ \\
\Delta\gamma(60^\circ) \quad & = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(60^\circ)+10^{-3}}{\cos(60^\circ)-10^{-3}}\right) - 60^\circ = 0.0143 \\
& = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(60^\circ)-10^{-3}}{\cos(60^\circ)+10^{-3}}\right) - 60^\circ = -0.0143
\end{aligned} \tag{0.59}$$

g_y^b 和 g_z^b 1mg 误差时，且 $\theta = 30^\circ$， γ 的误差：

$$\Delta\gamma(0)\begin{array}{l} = \tan^{-1}(\dfrac{10^{-3}}{\cos(30^{\circ})-10^{-3}})-0=0.0662^{\circ} \\ = \tan^{-1}(\dfrac{-10^{-3}}{\cos(30^{\circ})+10^{-3}})-0=\text{-}0.0661^{\circ} \end{array}$$

$$\Delta\gamma(60^{\circ})\begin{array}{l} = \tan^{-1}(\dfrac{\sin(60^{\circ})\cos(30^{\circ})+10^{-3}}{\cos(60^{\circ})\cos(30^{\circ})-10^{-3}})-60^{\circ}=0.0903^{\circ} \\ = \tan^{-1}(\dfrac{\sin(60^{\circ})\cos(30^{\circ})-10^{-3}}{\cos(60^{\circ})\cos(30^{\circ})+10^{-3}})-60^{\circ}=\text{-}0.0904^{\circ} \end{array} \tag{0.60}$$

g_y^b 和 g_z^b 1mg 误差时，且 $\theta=60^{\circ}$， γ 的误差：

$$\Delta\gamma(0)\begin{array}{l} = \tan^{-1}(\dfrac{10^{-3}}{\cos(30^{\circ})-10^{-3}})-0=0.1148^{\circ} \\ = \tan^{-1}(\dfrac{-10^{-3}}{\cos(30^{\circ})+10^{-3}})-0=\text{-}0.1144^{\circ} \end{array}$$

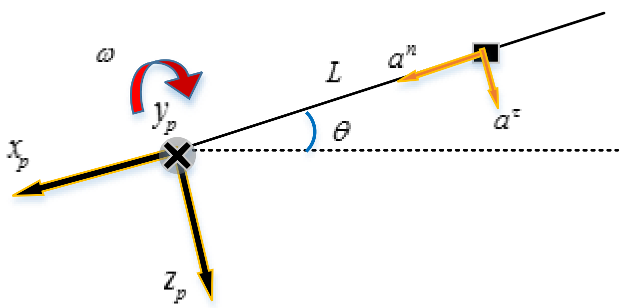
$$\Delta\gamma(60^{\circ})\begin{array}{l} = \tan^{-1}(\dfrac{\sin(60^{\circ})\cos(30^{\circ})+10^{-3}}{\cos(60^{\circ})\cos(30^{\circ})-10^{-3}})-60^{\circ}=0.1564^{\circ} \\ = \tan^{-1}(\dfrac{\sin(60^{\circ})\cos(30^{\circ})-10^{-3}}{\cos(60^{\circ})\cos(30^{\circ})+10^{-3}})-60^{\circ}=\text{-}0.1566^{\circ} \end{array} \tag{0.61}$$

结论：

- 越接近水平，测角精度越高。
- 相同条件下，俯仰误差比横滚误差大。
- 近似有结论：对于本体系 xy 平面与水平面的夹角，60° 时误差是 0° 的 3 倍，80° 时误差是 0° 的 9 倍。
- （1）以俯仰和横滚 30° 为限，1mg 加计常漂时，对应的测角误差约为 0.1° 。
  （2）以俯仰和横滚 60° 为限，1mg 加计常漂时，对应的测角误差约为 0.2° 。

（E） 加速度为 0 状态判断

当加速度为 0 时，可用加计测量俯仰横滚。



法向加速度： $a^n=\omega^2 L$ ， 切向加速度： $a^\tau=\dot{\omega}L$ 。

要求 $a^n = a^\tau = 0$ 则为零加速度状态，充要条件是：

（1） $L=0$，即把 IMU 模块按照在转轴线上

（2） $L=0$或$L \neq 0$， ω=0且$\dot{\omega}$=0 。

以上 2 种方法是通过陀螺判断是否零加速度。忽略加计零漂时，可通过加计模判定：

（3） $\left|f\right| = g$

0 加速度状态判断解决方案：

1） 首先，使 IMU 模块安装尽量靠近转轴

2） 对陀螺模和加计模数据做平滑滤波，设置平滑步长=？（比如 10ms，500HZ 时的 5 个点）

3） 判断加计模与 g 之间的差是否在某个阈值内，比如 1~3mg。

4） 满足 3）后，判断当前时刻是否满足 ω=0，设置阈值 $\omega\_\min = 0.3 \sim 0.5^\circ / s$

5） 满足 3）和 4）后，计算 $\dot{\omega}$，判断是否满足 $\dot{\omega} = 0$ 。

由于求微分噪声比较大，采取近似措施。针对满足 ω=0 的点，检查该点附近一段时间（比如 0.05 S）内是否连续满足 ω=0 。

6） 同时满足以上条件则判断为 0 加速度状态。

0 加速度判断难点：

1）0 加速度过程中偶尔会出现很短时间的数据跳动或野值，这些剧烈跳动的数据使得“角速度=0”的状态不连续，导致计算“角速度=长时间=0”区间时丢失一些长达 1S 的时间。

解决办法：

1> 对加计和陀螺做预处理，去除野值和异常的剧烈跳动数据。

直接对原始 IMU 数据进行平滑很麻烦，现直接对于采集的 IMU 数据进行步长为 0.1~0.2s 的卷积平滑，平滑对静止状态的判断非常有效。

为了增加精度，以后可改为仅对已经判断为静止的时间段 IMU 数据进行平滑。

2> 增大“角速度=0”的平滑处理程度

3> 增大“加速度模=g”的平滑处理程度

正弦运动的加速度大小：

$$\theta = \alpha \sin(2\pi ft)$$
$$\omega = 2\pi f \alpha \cos(2\pi ft)$$
$$\dot{\omega} = -(2\pi f)^2 \alpha \sin(2\pi ft)$$

$$a^n = \omega^2 L = \left(2\pi f \alpha \cos(2\pi ft)\right)^2 L$$
$$a^\tau = \dot{\omega} L = -(2\pi f)^2 \alpha \sin(2\pi ft) L$$

- $f = 0.1HZ \quad \alpha = 30^\circ \quad L = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} a^n = 1.1mg & a^\tau = 2.1mg \\ \omega\text{=}18.85^\circ / s & \dot{\omega}\text{=}11.8435^\circ / s^2 \end{array}$

- $f = 0.1HZ \quad \alpha = 60^\circ \quad L = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} a^n = 4.4mg & a^\tau = 4.2mg \\ \omega\text{=}37.699^\circ / s & \dot{\omega}\text{=}23.687^\circ / s^2 \end{array}$

- $f=0.1HZ \quad \alpha=30^{\circ} \quad L=0.05 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=0.55mg \quad a^{\tau}=1.05mg \quad \omega=18.85^{\circ}/s$

- $f=0.1HZ \quad \alpha=60^{\circ} \quad L=0.05 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=2.2mg \quad a^{\tau}=2.1mg$

为了使$a^{n}<2mg \quad a^{\tau}<2mg$，要求：$\omega<15^{\circ}/s \quad \dot{\omega}<10^{\circ}/s^{2} \quad L=0.05$。

- $\omega=15^{\circ}/s \quad \dot{\omega}=10^{\circ}/s^{2} \quad L=0.1 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=0.6994mg \quad a^{\tau}=1.7809mg$

- $f=0.05HZ \quad \alpha=60^{\circ} \quad L=0.1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a^{n}=1.1044mg & a^{\tau}=1.0546mg \\ \omega=18.8496^{\circ}/s & \dot{\omega}=5.9218^{\circ}/s^{2} \end{matrix}$

安装 1 米远时加速度大小

- $\omega=15^{\circ}/s \quad \dot{\omega}=10^{\circ}/s^{2} \quad L=1 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=6.994mg \quad a^{\tau}=17.809mg$
- $\omega=2^{\circ}/s \quad \dot{\omega}=0^{\circ}/s^{2} \quad L=1 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=0.1243mg \quad a^{\tau}=0mg$
- $\omega=5^{\circ}/s \quad \dot{\omega}=0^{\circ}/s^{2} \quad L=1 \quad \Rightarrow \quad a^{n}=0.7771mg \quad a^{\tau}=0mg$

（E） 静止状态判断

静止状态加速度、速度、角速度、角速度变化率都为 0 。

（1） 首先判读角速度是否为 0；

（2） 满足（1）后，判断加速度模是否为 g；

（3） 判断角速度变化率是否为 0。

（G） 运动加速度剔除

当发现持续某个时长（如 10S）没有检测到 0 加速度状态时，只能选择某个加速度较低的状态，对其进行运动加速度剔除后进行俯仰和横滚求解。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_{w}^{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b})\boldsymbol{q}_{w}^{b} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^{w}=(\boldsymbol{C}_{w}^{b})^{T}\boldsymbol{f}^{b}+\boldsymbol{g}^{w} \end{cases} \tag{0.62}$$

$$\boldsymbol{g}^{w}=\dot{\boldsymbol{v}}_{wb}^{w}-(\boldsymbol{C}_{w}^{b})^{T}\boldsymbol{f}^{b}$$

（）数据预处理

（1）去除野值

突变较大的数为野值。判断第 k 个点是否为野值：

对第 k-N1 到 k+N2 个点进行线性平滑，求

加计陀螺参数

陀螺零漂：3°/s，陀螺零漂稳定性：0.007°/s，角度随机游走 2°/h，陀螺零漂温度系数：0.01°/s/°C。

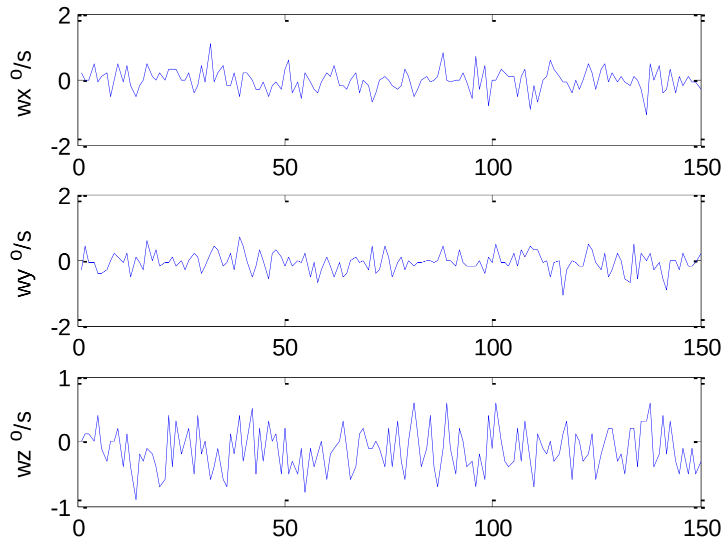
加计零漂：6mg，加计零漂稳定性：41μg，速率随机游走 0.09m/s/h，加计零漂温度系

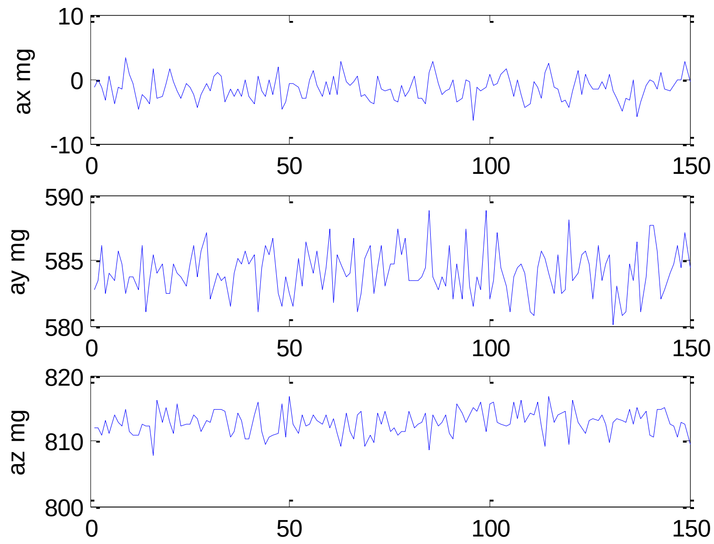
数：0.05mg/s/°C。

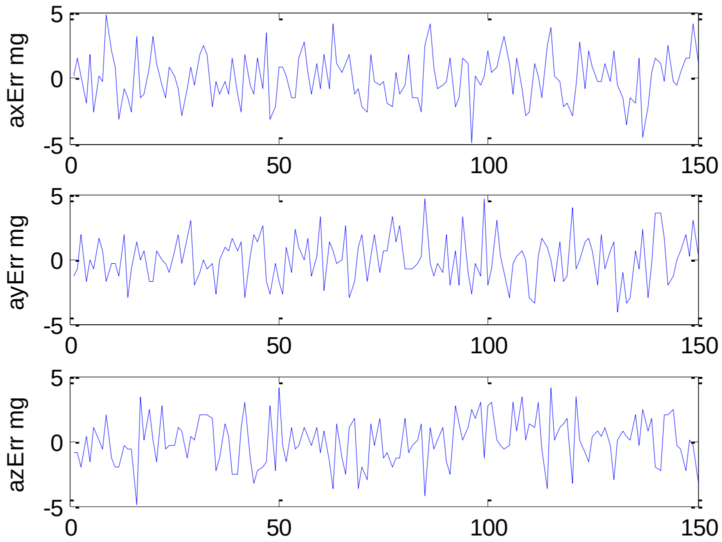
50HZ 静止状态参数-4.20 北航转台采集-ahrs2

meam_gyro = (-0.02, -0.07, -0.13) °/s
std_gyro = (0.33, 0.30, 0.33) °/s
meam_acc = (-1.45, 584.14, 812.82) mg
std_acc = (1.82, 1.78, 1.83) mg

max_gyro = (1.10, 0.70, 0.60) °/s
min_gyro = (-1.10, -1.10, -0.90) °/s
maxPlusMin_gyro = (2.20, 1.80, 1.50) °/s
max_acc = (3.33, 588.74, 816.85) mg
min_acc = (-6.33, 580.09, 807.86) mg
maxAccErr = (4.88, 4.61, 4.96) mg



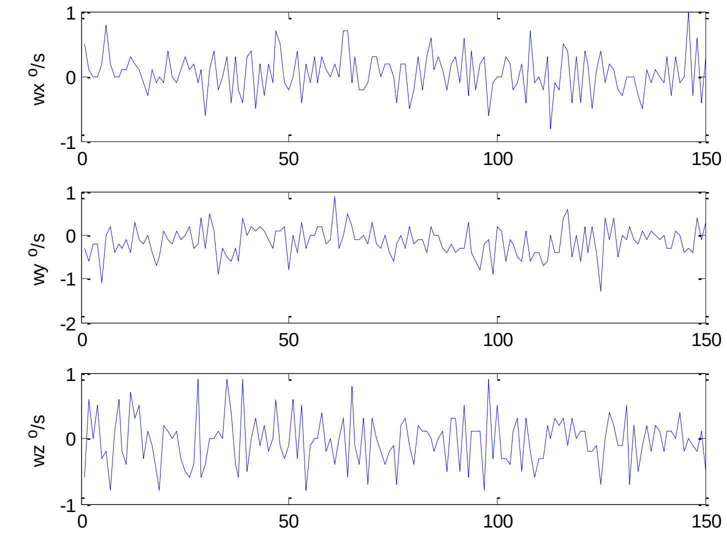


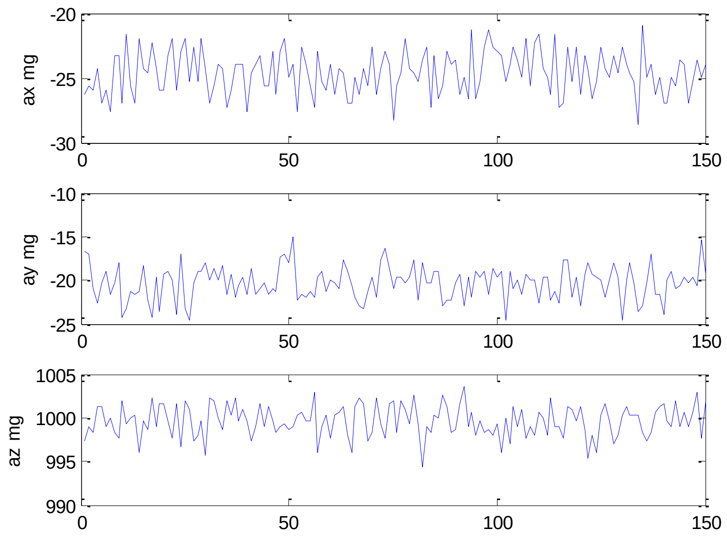


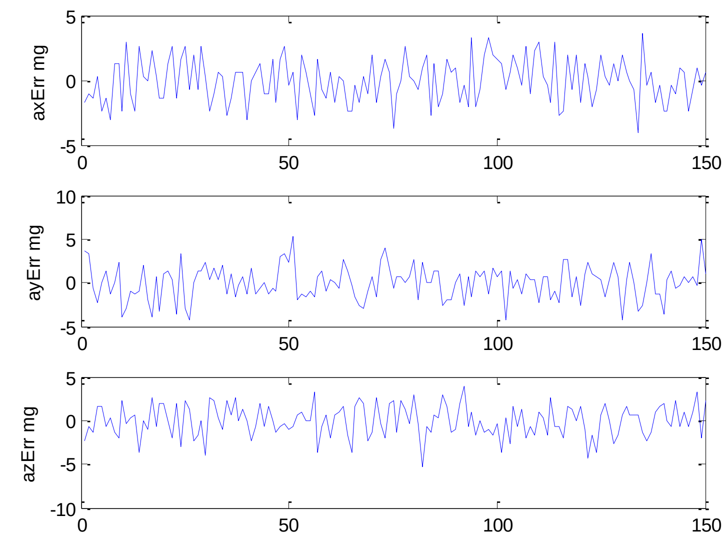
50HZ 静止状态参数-4.20 办公室地面测-static1

meam_gyro = (0.06, -0.15, -0.03) °/s
std_gyro = (0.31, 0.34, 0.38) °/s
meam_acc = (-24.63, -20.34, 999.66) mg
std_acc = (1.68, 1.93, 1.81) mg

max_gyro = (1.00, 0.90, 0.90) °/s
min_gyro = (-0.80, -1.30, -0.80) °/s
maxPlusMin_gyro = (1.80, 2.20, 1.70) °/s
max_acc = (-20.98, -14.99, 1003.66) mg
min_acc = (-28.64, -24.64, 994.34) mg
maxAccErr = (4.01, 5.35, 5.32) mg


wx °/s
wy °/s
wz °/s


ax mg
ay mg
az mg


axErr mg
ayErr mg
azErr mg