TP1 - Fonction unimodale

Rémi CHASSAGNOL

Méthode de recherche dichotomique

Question 1

On sait que $x^* \in [a_k; b_k]$ et f unimodale donc pour monter que pour chaque cas, cette propriété est conservée, il faut montrer que le nouvel intervalle obtenu) la fin de chaque cas est inclus dans $[a_k; b_k]$ et que x^* se trouve bien dans la partie conservée.

1. $f(x_k^C) > f(x_k^G) \Rightarrow a_k = x_k^C, b_{k+1} = b_k$ et $x_{k+1}^C = x_k^D$ On recherche un minimum local de f. Comme f est **unimodale**, f n'admet qu'un seul minimum local sur $[a_k; b_k]$ et le sens de variation de f ne change qu'une fois sur cet intervalle, donc f est décroissante sur $[a_k; y_k]$ avec $y_k \in [x_k^C; b_k]$ (comme $f(x_k^C) > f(x_k^D)$) et $x_k^D \in [a_k; b_k]$. Donc si $a_{k+1} = x_k^C$ et $b_{k+1} = b_k$ alors, $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$ et f toujours unimodale sur $[a_{k+1}; b_{k+1}]$, car $[a_{k+1}; b_{k+1}] \subseteq [a_k; b_k]$.
2. $f(x_k^C) > f(x_k^G) \Rightarrow a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k^C$. Même raisonnement que pour le premier cas mais sur l'autre partie de l'intervalle.
3. $f(x_k^C) \leqslant f(x_k^D)$ et $f(x_k^C) \leqslant f(x_k^G) \Rightarrow a_{k+1} = x_k^G n b_{k+1} x_k^D$ f reste unimodale sur le nouvel intervalle nouvel intervalle est inclus dans l'ancien). De plus, comme f unimodale, dans ce cas, on a forcement $x^* \in [x_k^G; x_k^D]$ donc $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$

Question 2

Fonction de recherche dichotomique

```
def dichotomie_min(f, a, b):
    xc = a + (b - a)/2
    fxc = f(xc)
    while b - a > SIGMA:
        xg = a + (b - a)/4
        xd = a + 3*(b - a)/4
        fxg = f(xg)
        fxd = f(xd)
        if fxc > fxd:
            a = xc
            fxc = fxd # on ne recalcul jamais fxc
            xc = xd
        elif fxc > fxg:
            b = xc
            fxc = fxg
            xc = xg
        else:
            a = xg
            b = xd

    return a
```

Fonction de tests

```
def f1(x):
    return abs(x - 100)

def f2(x):
    if x >= 50:
        return np.sqrt(x - 5)
    else:
        return np.sqrt(-(x - 50))


def f3(x):
    return min(4*x, x + 5)


def f4(x):
    return -x**3
```

Retour des tests

```
print("f1: ", dichotomie_min(f1, -1000.0, 1000.0))
print("f2: ", dichotomie_min(f2, -1000.0, 1000.0))
print("f3: ", dichotomie_min(f3, -1000.0, 1000.0))
print("f4: ", dichotomie_min(f4, -1000.0, 1000.0))
```

retour:

```
f1:  99.99999999999964
f2:  49.999999999999375
f3:  -1000.0
f4:  999.9999999999991
```

Méthode du nombre d'or

Question 3

1. $f(x_k^G) > f(x_k^D) \Rightarrow a_{k+1} = x_k^G$

- $[a_{k+1}; b_{k+1}] \in [a_k; b_k]$ comme l'intervalle est réduit, donc f reste unimodale.
- f unimodale donc le sens de variation ne change qu'au plus une fois sur $[a_k; b_k]$ donc dans si $f(x_k^G) > f(x_k^D)$ alors $x^* \in [x_k^G; b_k]$ et donc $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$

2. Même raisonnement.
3. Ce cas se démontre de façon similaire à celui de la question 1.

Question 4

$\alpha = \frac{w}{v} = \frac{b_k - a_k}{b_k - x_k^G} = \frac{b_k - a_k}{x_k^D - a_k}$

Donc:

- $\alpha = \frac{b_k - a_k}{b_k - x_k^G} \Rightarrow b_k - x_k^G = \frac{b_k - a_k}{\alpha} \Rightarrow x_k^G = b_k - \frac{b_k - a_k}{\alpha}$
- $\alpha = \frac{b_k - a_k}{x_k^D - a_k} \Rightarrow x_k^D - a_k = \frac{b_k - a_k}{\alpha} \Rightarrow x_k^D = \frac{b_k - a_k}{\alpha} + a_k$

Question 5

$\alpha = \frac{w}{v}$

On peu poser $w = 1$ et $v = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$, pour les 2 premiers cas et on aura $v = 3$ dans le troisième cas, donc l'intervalle sera divisé par 3.

Question 6

Il faut calculer $f(x_k^G)$ et $f(x_k^D)$, donc la fonction f est appelée **2** fois.

Question 7

Pour réduire l'intervalle au maximum, x_k^G et x_k^D doivent être proche du centre ie, il faut réduire au maximum la distance $x_k^D - x_k^G$.

Question 8

$\alpha = \frac{w}{v} = \frac{v}{u}$ donc si on pose $a = v$ et $b = u$ alors on a:

$\alpha = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

Si on multiple cette équation par $\frac{a}{b}$ on obtient:

$\frac{a}{b} + 1 = (\frac{a}{b})^2$

On pose $X = \frac{a}{b}$ donc l'équation devient:

$\frac{a}{b}\alpha = X^2 = X + 1$

ce qui donne le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{a}{b}\alpha = (\frac{a}{b})^2 \\ \frac{a}{b}\alpha = \frac{a}{b} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X\alpha = X^2 \\ X\alpha = X + 1 \end{cases} \tag{1}$$

Donc la solution est la valeur de α. En résolvant $X^2 - X - 1 = 0$, on obtient:

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180\ldots$